

Mitschrift der Vorlesung "Theoretische Physik
3: Quantenmechanik" im SS14 an der
FAU-Erlangen

Benjamin Lotter

Contents

1	Einführung	2
1.1	Wiederholung klassische Mechanik	2
1.2	Grenzen der klassischen Physik - Quantenphänomene	3
2	Grundprinzipien der Quantenmechanik und erste Anwendungen	4
2.1	Wellenfunktion, Schrödingergleichung und die Postulate der Quantenmechanik	4

Chapter 1

Einführung

1.1 Wiederholung klassische Mechanik

Massepunkt in 1D: $x(t)$

$m \cdot x(t) = F = -\frac{dU}{dx}$ Impuls $p(t) = m\dot{x}(t)$

$x(0), p(0)$ bekannt $\rightarrow x(t), p(t)$ bestimmt für alle $t > 0$.

Klassische Mechanik: kausal, deterministisch

Quantenmechanik: kausal, nicht deterministisch **Lagrange-Formalismus**

$$L = T - v = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$$

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d}{dt} m\dot{x} - \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}\end{aligned}$$

Hamilton-Formalismus

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned}H(x, p) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = p \frac{p}{m} - \left[\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}_{\frac{p^2}{2m}} - V(x) \right] \\ &= \frac{1}{2m}p^2 + V(x) = T + V = E_{tot}\end{aligned}$$

Bewegungsgleichung:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

1.2 Grenzen der klassischen Physik - Quantenphänomene

Eigenschaften elektromagnetischer Strahlung

1. Hohlraumstrahlung Frequenzverteilung nicht klassisch erklärbar
2. Photoeffekt

Erklärung: Planck(1900), Einstein (1905)

Lichtquanten (Photonen) mit Energie $E = h\nu$ ($h = 6.626 \cdot 10^{-34} Js$ Plancksches Wirkungsquantum).

Eigenschaften von Materie

1. direkte Linien in der Spektroskopie Atommodelle: Rutherford, Bohr
2. Bewegung von Teilchen zeigt Welleneigenschaften Postulat de Broglie (1923) Materieteilchen lassen sich wie Wellen beschreiben $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$

Beispiele:

1. Ball ($m = 1kg$) mit Geschwindigkeit $v = 10 \frac{m}{s}$

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} Js}{10kg \frac{m}{s}} = 6.6 \cdot 10^{-35} m$$

2. Elektron mit Energie $100eV (\simeq 1.6 \cdot 10^{-17} J)$

$$\lambda = 1.2 \cdot 10^{-10} m = 1.2 \text{\AA}$$

Experimente: Davison / Germer (1927): Beugung von Elektronen an Kristallen.

Chapter 2

Grundprinzipien der Quantenmechanik und erste Anwendungen

2.1 Wellenfunktion, Schrödingergleichung und die Postulate der Quantenmechanik

1. Postulat (Wellenfunktion, Zustand)

Der Zustand eines quantenmechanischen Systems wird durch eine Wellenfunktion (Zustandsfunktion/Zustand) Ψ beschrieben, die i.A. von den Koordinaten aller Teilchen und der Zeit abhängt.

Z.B. ein Teilchen $\vec{r} = (x, y, z)$ $\Psi(x, y, z, t) = \Psi(\vec{r}, t)$

Die Wahrscheinlichkeit das Teilchen (zur Zeit t) im Bereich $V \in \mathbb{R}^3$ zu finden ist gegeben durch

$$\int_V d^3r |\Psi(\vec{r}, t)|^2$$

Für infinitesimale Volumen dV ist $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV$ die Wahrscheinlichkeit das Teilchen in dV um \vec{r} zu finden.

$\varphi(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte.

Es gilt die Normierungsbedingung

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = 1$$

fall Ψ quadratintegrierbar. **Bemerkung:**

1. Systeme mit n Teilchen $\vec{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$ $j = 1 \dots n \rightarrow \Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)$
 H_2 Molekül (2 Elektronen, 2 Protonen): $\Psi(r_1, r_2, r_3, r_4, t)$
2. i.A. $\Psi(\vec{r}, t) \in \mathbb{C}$

3. Ψ ist bis auf globalen Phasenfaktor eindeutig

$$\tilde{\Psi}(\vec{r}, t) = e^{ia} \Psi(\vec{r}, t)$$

$$\tilde{\varphi} = |\tilde{\Psi}|^2 = |\Psi|^2 = \varphi$$

4. Mathe: $\Psi \in W$, W Vektorraum (Hilbertraum)

Es gilt Superpositionsprinzip: $\Psi_1, \Psi_2 \in W$ mögliche Systemzustände, dann auch $c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2 \in W$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Betrachte Teilchen mit Masse m , Geschwindigkeit v :

Mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\lambda = \frac{h}{mv}$, $k = \frac{mv}{\frac{h}{2\pi}}$ folgt

$$e^{ikz} = e^{\frac{i}{\hbar} mvz}$$

Rechts:

$$\Psi(x) = \Psi_1(x) + \Psi_2(x)$$

$$\Psi_{1/2}(x) = n e^{\frac{imv}{2\hbar L} (x \pm \frac{d}{2})^2}$$

$$= n e^{\frac{imv}{2\hbar L} (x^2 + \frac{d^2}{4})} e^{\pm \frac{imvxd}{2\hbar L}}$$

Intensität am Schirm $\sim \varphi(x)$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= |\Psi(x)|^2 = |\Psi_1(x) + \Psi_2(x)|^2 \\ &= |\Psi_1(x)|^2 + |\Psi_2(x)|^2 + 2 \operatorname{Re}(\Psi_1(x) \Psi_2^*(x)) \\ &= |n|^2 \left(1 + 1 + 2 \operatorname{Re} \left(e^{-2i \frac{mvxd}{2\hbar L}} \right) \right) \\ &= 2|n|^2 \left(1 + \cos \left(\frac{mvd}{\hbar L} x \right) \right) \end{aligned}$$

5. quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsbeschreibung

$$\varphi(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$$

Aussage über eine Vielzahl von Messungen an identischen Systemen.

—> Indeterminismus

2. Postulat

Jeder messbaren Größe (Observable) A ist ein (linear, hermitescher) Operator \hat{A} zugeordnet. Man erhält \hat{A} indem man im klassischen Ausdruck $A(x, p)$ die Ersetzung durchführt.

$$p_x \rightarrow \hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \qquad x \rightarrow \hat{x} := x$$

Impulsoperator *Ortsoperator*

Analog $3D$

$$p_z \rightarrow \hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} x \rightarrow \hat{x} \quad := x$$