

Mitschrift der Vorlesung "Experimentalphysik 4:  
Atom- und Molekularphysik" im SS14 an der  
FAU-Erlangen

Benjamin Lotter

# Contents

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
1.1	Bedeutung der Atom- und Molekülphysik . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Entwicklung der Atomvorstellung</b>	<b>5</b>
2.1	Historische Überblick . . . . .	5
2.2	Hinweise auf die Existenz der Atome . . . . .	6
2.2.1	Gay-Lussac's Gesetz . . . . .	7
2.2.2	kinetische Gastheorie . . . . .	8
2.2.3	Brownsche Molekularbewegung . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Masse, Größe und Struktur der Atome</b>	<b>10</b>
3.1	Bestimmung der Atomgröße . . . . .	10
3.1.1	Bestimmung aus dem Kovulemen der v.d. Waals Gleichung	10
3.1.2	Abschätzung aus dem Transportkoeffizienten in Gasen . .	10
3.1.3	Beugung von Röntgenstrahlen an Kristallen . . . . .	11
3.1.4	Lenard-Jones Potenzial . . . . .	11
3.2	Bestimmung der Atommasse . . . . .	12
3.2.1	einfache Verfahren . . . . .	12
3.2.2	Massenspektrometer . . . . .	12
3.2.3	Astonsche Massenspektrograph . . . . .	14
3.2.4	Flugzeit-Massenspektrometer . . . . .	14
3.2.5	Isotopie . . . . .	14
3.3	Innere Struktur der Atome . . . . .	15
3.3.1	Kathoden- und Kanalstrahlen . . . . .	15
3.3.2	Differentielle Wirkungsquerschnitt bzw. Streuungsquer- schnitt . . . . .	16
3.3.3	Das Thomsonsche Atommodell . . . . .	16
3.3.4	Das Rutherfordsche Atommodell . . . . .	18
3.4	Kann man Atome sehen? . . . . .	19
3.4.1	indirekte Beobachtungen . . . . .	19
3.4.2	direkte Beobachtungen . . . . .	19

<b>4</b>	<b>Das Elektron</b>	<b>21</b>
4.1	Erzeugung von freien Elektronen . . . . .	21
4.2	Ladung des Elektrons . . . . .	22
4.3	Die Masse des Elektrons . . . . .	23
4.4	Die Größe des Elektrons . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Das Photon</b>	<b>25</b>
5.1	Licht als klassische Welle . . . . .	25
5.2	Die Hohlraumstrahlung . . . . .	26
5.2.1	Herleitung der Strahlungsleistung eines schwarzen Kör- pers durch Planck . . . . .	26
5.2.2	Herleitung der Planckschen Strahlungsformel nach Einstein	30
5.3	Der photoelektrische Effekt . . . . .	30
5.3.1	Klassische Erklärung . . . . .	31
5.3.2	Photonenimpuls und Laserkühlung . . . . .	31
5.4	Compton Effekt . . . . .	32

# Chapter 1

## Einführung

### 1.1 Bedeutung der Atom- und Molekülphysik

**Atomphysik** mikroskopischer Aufbau der Materie, d.h der Struktur der Atome und ihrer gegenseitigen Wechselwirkung.

**Ziel** Eigenschaften der makroskopischen Materie aus ihrem mikroskopischen Aufbau zu verstehen

Atom- und Molekülphysik bildet die Grundlage der

- Thermodynamik (für statistische Beobachtungen)
- Atmosphärenphysik, Meteorologie (Wetter)
- Festkörperphysik
- Astrophysik (Absorption und Emission von Strahlung)
- Licht-Materie Wechselwirkung
- Laserlicht

Atom- und Molekülphysik bildet darüber hinaus die Grundlage der Chemie und zunehmend der Biologie und Medizin:

- Einordnung der Atome im Periodensystem
- Molekülbildung, -bindungen, -struktur
- chemische Reaktionen (Dynamit)
- biologische Prozesse (Photosynthese, Energieproduktion in Zellen, Ionen-transport durch Zellmembran, Nervenleitung)

→ Molekularbiologie + Molekularmedizin

Atomphysik spielt eine wichtige Rolle in der modernen Technik

- Entwicklung des Lasers (Messtechnik, Nachrichtentechnik, Produktionstechnik Medizin)
- Messtechnik (Oszillograph, Spektrographen, Tomographen)
- Halbleitertechnik (integrierte Schaltung)
- Medizintechnik (Spurenelemente ???)
- Umwelttechnik
- Energietechnik (Solarzelle, alternative Antriebstechniken wie z.B Brennstoffzelle)

**Atomphysik** Ausgangspunkt für die Entwicklung der Quantenmechanik und damit für unser heutiges physikalisches Weltbild (probabilistische Beschreibung der Physik, Heisenbergsche Unschärferelation, Welle-Teilchen-Dualismus, nicht-lokal verschränkte Zustände)

## Chapter 2

# Entwicklung der Atomvorstellung

### 2.1 Historische Überblick

- vor 500 v.Chr: Elementehypothese: Alle Dinge bestehen aus 4 Elementen (Feuer, Wasser, Luft, Erde)
- Demokrit (460 - 370 v.Chr): alle Naturkörper bestehen aus unendlich kleinen "unteilbaren" raumfüllenden Teilchen (atomos, Atom); makroskopische Körper entstehen durch verschiedene Anordnungen von unterschiedlichen Atomen
- Platon (427 - 347 v.Chr) Welt besteht aus vier geometrischen Bausteinen
- Aristoteles (384 - 322 v.Chr) Raum ist kontinuierlich mit Materie erfüllt (lehnte Atomismus ab)

Atomlehre gerät für viele Jahrhunderte in Vergangenheit. Durchbruch der modernen Atomlehre erst im 18. Jahrhundert durch Chemiker

- D. Bernoulli (1700-1782):
- J. Dalton (1766 - 1844)

Starke Untermauerung der Atomhypothese durch kinetische Gastheorie:

- Rudolf Clausius (1822 -1888)
- J.C Maxwell (1831 -1879)
- L. Boltzmann (1844 -1906)

Durchbruch der Atomhypothese durch Erklärung der Brownschen Bewegung (1905)

→ Entwicklung der Quantenmechanik ab 1925.

## 2.2 Hinweise auf die Existenz der Atome

### Daltons Gesetz der konstanten Proportionen

Durch genaues Wiegen der Massen von Reaktanden und Reaktionsprodukten vor und nach einer chemischen Reaktion erkannte Dalton:

"Die Massenverhältnisse der Stoffe, aus denen sich eine chemische Verbindung bildet ist für jede Verbindung konstant."

**Beispiel:** 100g Wasser bilden sich immer aus 11.1g Wasserstoff und 88.9g Sauerstoff  $\rightarrow$  Massenverhältnis 1: 8 ( $H_2O$  mit  ${}^1_1H$  und  ${}^{16}_8O$ ).  $\rightarrow$  Atomhypothese (Dalton 1805):

"Das Wesen chemischer Umwandlungen besteht in der Vereinigung oder Trennung von Atomen".

### 3 Postulate (1808):

- alle elementaren Stoffe bestehen aus kleinsten Teilchen (Atomen), die man chemisch nicht weiter zerlegen kann
- alle Atome desselben Elements sind in Qualität, Größe und Masse gleich. Die Eigenschaften einer chemischen Substanz werden durch diejenigen seiner Atome bestimmt.
- wenn chemische Substanzen eine Verbindung eingehen, so vereinigen sich die Atome der beteiligten Elementen immer in ganzzahligen Massenverhältnissen

**Beispiel:**  $H$  und  $O$  bilden  $H_2O$ , aus Masseverhältnis  $\frac{m(H)}{m(O)} = \frac{1}{16}$  erhält man das gemessene Massenverhältnis  $\frac{m(2H)}{m(O)} = \frac{1}{8} = \frac{11.1g}{88.9g}$  Dalton bezog alle Atommassen auf das  $H$ -Atom und nannte die relative Atommasse  $\frac{m_x}{m_H}$  eines Elementes  $x$  das Atomgewicht (ohne Einheiten).

Heute wird  $\frac{1}{12} {}^{12}C$  statt  $H$  als Bezugsmasse verwendet, genannt die "atomare Masseneinheit (AME)", bzw. englisch " $u$ " (atomic mass unit)

$$1u = 1AME = \frac{m({}^{12}C)}{12} = 1.66055 \cdot 10^{-17}kg$$

Daltons Atomgewicht wird "atomare bzw. molekulare Massenzahl  $A$ " genannt.

**Beispiel:** Sauerstoff hat atomare Massenzahl 16 und ein Gewicht von  $16u$ .

$$\begin{aligned} m_{\text{Luft}} &= 0.75m_{N_2} + 0.25m_{O_2} \\ &= 0.75 \cdot 28u + 0.25 \cdot 32u \\ &= 29u \\ m_{He} &= 4u \end{aligned}$$

$$\frac{m_{\text{Luft}}}{m_{He}} = \frac{29u}{4u} = 7.25$$

### 2.2.1 Gay-Lussac's Gesetz

1805 entdeckten J.L Gay-Lussac(1778-1850) und A.v.Humboldt (1769-1859) unabhängig voneinander: gasförmiger Sauerstoff u. Wasserstoff verbinden sich bei gleichem Druck u. Temperatur immer im Verhältnis von 1: 2 Raumteilchen.

Nach weiteren Experimenten formulierte Gay-Lussac:

"Vereinigen sich zwei oder mehr Gase restlos zu einer chemischen Verbindung, so stehen ihre Volumina bei gleichem Druck und Temperatur in Verhältnis ganzer Zahlen"

**Beispiel:**  $2l\ H_2$  und  $1l\ O_2$  ergeben  $2l\ H_2O$  (und nicht  $3l\ H_2O$ ). A.Avogadro(1776-1856) erklärte diese Resultate durch Einführung des Molekülbegriffs:

"Ein Molekül ist das kleinste Teilchen eines Gases, das noch die chemischen Eigenschaften dieses Gases besitzt. Ein Molekül besteht aus zwei oder mehr Atomen."

Mit Ergebnissen von Gay-Lussac stellte Avogadro die Hypothese auf:

"Bei gleichem Druck und gleicher Temperatur enthalten verschiedene Gase bei gleichem Volumina die gleiche Zahl von Molekülen."

→ Definition des *mol*:

$1\ mol$  eines Gases entspricht einer Anzahl von Molekülen deren Masse gleich der molekularen Massenzahl  $A$  der Gasmoleküle in Gramm ist."

In moderner Formulierung (bezogen auf  $^{12}C$ ), die auch für nicht-gasförmige Stoffe gilt: **Mol**  $1\ mol$  ist die Stoffmenge, die ebenso viele Teilchen (Atome oder Moleküle) enthält wie  $12g$  Kohlenstoff  $^{12}C$  **Beispiel:**  $1\ mol\ H_2$  wiegt  $2g$   $1\ mol\ O_2$  wiegt  $32g$   $1\ mol\ H_2O$  wiegt  $18g$  Die Zahl  $N_A$  der Moleküle in der Stoffmenge  $1\ mol$  heißt "Avogadro-Konstante". Ihr Wert ist

$$N_A = 6.022141510 \cdot 10^{23} mol^{-1}$$

Aus der Avogadro-Hypothese folgt:

$1\ mol$  eines beliebigen Gases nimmt unter Normalbedingung ( $p = 1\ bar$ ,  $T = 0^\circ C$ ) immer das gleiche Volumen ein. Der experimentell bestimmte Wert für das Molkvolumen ist:

$$V_M = 22,41399637 dm^3$$

Das Molgewicht  $M_x$  eines Stoffes  $x$  ergibt sich daraus zu:

$$M_x = N_A \cdot m_x = N_A \cdot A \cdot u = A(\text{Gram})$$



### 2.2.2 kinetische Gastheorie

Die von L. Boltzmann, R. Clausius und J.C. Maxwell im 19. Jahrhundert entwickelte kinetische Gastheorie erlaubt viele makroskopische Eigenschaften eines Gases auf die Bewegung von Gasmolekülen und deren Wechselwirkung bei Stößen zurückzuführen. Sie hat wesentlich zur Untermauerung der Atomhypothese beigetragen:

- Clausius leitete 1857 die Zustandsgleichung des idealen Gases  $pV = Nk_B T$  unter Annahme sich bewegender Moleküle der mittleren quadratischen Geschwindigkeit  $\bar{v}^2$  ab:

$$pV = \frac{1}{3} m \bar{v}^2 = N k_B T$$

- Die Temperatur eines Gases lässt sich damit auf die mittlere kinetische Energie eines Gasmoleküls zurückführen:

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

- mit der inneren Energie  $U$  eines Gases

$$U = N \frac{f}{2} k_B T$$

ergibt sich die Wärmekapazität bei konstantem Volumen  $C_V$  zu:

$$C_V = N \frac{f}{2} k_B$$

mit  $f$  der Anzahl der Freiheitsgraden eines einzelnen Gasmoleküls.

- Transportprozesse in Gasen wie Teilchenstrom (Diffusion), Wärmestrom und Impulsstrom können auf die mittlere freie Weglänge  $\Lambda = \frac{1}{n \cdot \sigma}$ , die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v}$  und  $f$  zurückgeführt werden.
- für die Entropie  $S$  erhält man

$$S = k_b \ln W$$

mit  $W$  der Anzahl der Realisierungsmöglichkeiten eines thermodynamischen Zustands.

Mit der Erklärung makroskopischer Phänomene von Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern durch die mikroskopische atomare Struktur der Materie wurden die Beweise für die Existenz von Atomen immer überzeugender. Aber noch um 1900 gab es bekannte Chemiker wie z.B. W. Ostwald (1853-1932) und Physiker wie E. Mach (1838-1916) die die reale Existenz von Atomen nicht anerkannten.

Das änderte sich erst durch die Erklärung der brownischen Bewegung durch Einstein 1905 (An. der Physik 17, 549 (1905)).

### 2.2.3 Brownsche Molekularbewegung

1827 beobachtete R. Brown (1773-1858) dass in Flüssigkeiten suspendierte Teilchen unregelmäßige Zitterbewegungen ausüben.

Die Zitterbewegung lässt sich molekularkinetisch dadurch erklären, dass die suspendierten Teilchen von den Molekülen der Flüssigkeit permanent (ca.  $10^{21}/s$ ) in statistisch verteilte Richtungen gestoßen werden.

Unter dieser Annahme konnte Einstein das Phänomen 1905 quantitativ erklären. Seine Erklärung stellte einen eindeutigen Beweis für die Existenz der Atome dar.

## Chapter 3

# Masse, Größe und Struktur der Atome

### 3.1 Bestimmung der Atomgröße

Verschiedene experimentelle Verfahren erlauben es, die Atomgröße abzuschätzen

#### 3.1.1 Bestimmung aus dem Kovolumen der v.d. Waals Gleichung

Ein reales Gas wird in guter Näherung durch die van-der-Waals'sche Zustandsgleichung beschrieben:

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2}\right)(V_M - b) = R \cdot T \quad \text{Für Molzahl } n = 1$$

- $a$ : Binnendruck-Konstante
- $b = 4N_A V_a$  gibt das Vierfache des Eigenvolumens aller  $N_A$  Atome im Molvolumen  $V_M$  an.

Durch Bestimmung von  $b$  aus der Messung  $p(T)$  bei konstantem Gasvolumen  $V_M$  ergibt sich:

$$V_a = \frac{b}{4 \cdot N_A}$$

#### 3.1.2 Abschätzung aus dem Transportkoeffizienten in Gasen

Wie oben gezeigt, hängen die Transportkoeffizienten in Gasen für den Teilchenstrom  $j_x$  (Diffusionskonstante  $D$ ), Wärmestrom  $Q$  (Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ ) und Impulsstrom  $j_p$  (Viskosität  $\eta$ ) von der mittleren freien Weglänge ab. Dabei ist

$$\Lambda = \frac{1}{n \cdot \sigma} = \frac{k_B T}{p \cdot \sigma}$$

mit  $\sigma$  dem Stoßquerschnitt der Atome. Im Modell starrer Kugeln ist

$$\sigma = \pi (2r)^2$$

(allg:  $\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2$ )

Man kann also durch Messung der Transportkoeffizienten und damit von  $\Lambda$  Information über  $\sigma$  und damit über  $r$  erhalten: **Beispiel:**

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \Lambda = \frac{1}{3p} \sqrt{\frac{(2k_B T)^3}{\pi m}} \frac{1}{\sigma}$$

mit  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} l$  und  $n = \frac{p}{k_B T}$

### 3.1.3 Beugung von Röntgenstrahlen an Kristallen

Interferenz von Röntgenstrahlen an den Netzebenen eines Kristalls kann zur Bestimmung von Atomvolumina verwendet werden. Aus dem Abstand  $d$  definierter Netzebenen in einem Kristall lässt sich das Volumen der Einheitszelle  $V_E$  des Kristalls bestimmen. Kennt man den Raumfüllungsfaktor  $f = \frac{\sum V_a}{V_E}$  der Atome, so ergibt sich bei  $N_E$  Atomen pro einheitszelle

$$V_a = f \frac{V_E}{N_E}$$

### 3.1.4 Lenard-Jones Potenzial

Die Methoden 1 - 3 geben zwar die gleiche Größenordnung, aber dennoch verschiedene Werte für die Atomradien.

Die Unterschiede resultieren aus der unklaren Definition des Atomradius. Bei einer starren Kugel ist Radius  $r_0$  wohldefiniert. Die realen Atome erzeugen einen Stoßquerschnitt jedoch aus einem Wechselwirkungspotenzial, dessen Verlauf recht gut durch das Lennard-Jones-Potenzial beschrieben wird:

$$V(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6}$$

wobei Konstanten  $a$  und  $b$  von der Atomsorte abhängig sind.

Der Atomradius kann nun durch das Minimum bei

$$r_m = \left( \frac{2a}{b} \right)^{\frac{1}{6}}$$

oder dem Nulldurchgang bei

$$r_0 = \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{6}}$$

definiert werden. Generell haben die Radien von Atomen die Größenordnung  $r \sim 10^{-10} \text{ am} = 1 \text{ \AA}$ .

Zur genauen Beschreibung der Atomgröße gibt man den Verlauf  $V(r)$  an, Diesen erhält man aus Messung der Ablenkung von Atomen bei Stoßprozessen oder aus Spektroskopie von Molekülen.

## 3.2 Bestimmung der Atommasse

### 3.2.1 einfache Verfahren

Die einfachsten Verfahren zur Bestimmung der Atommasse verwenden die Avogadro Konstanta  $N_A$  und die atomare Massenzahl  $A$  oder wiederum Beugung von Röntgenstrahlen an Kristallen.

- Misst man die Masse  $M_M$  eines Molvolumens eines atomaren Gases unter Normalbedingungen ( $p = 1\text{bar}$ ,  $T = 0^\circ$ ,  $\rightarrow V_M = 22,4\text{l}$ ), so ist die Masse eines Atoms

$$m_x = \frac{M_M}{N_A}$$

- In einem Kristall kann man die Atomabstände mit Hilfe von Röntgenbeugung messen. Aus den Abmessungen des Gesamtkristalls erhält man die Gesamtzahl  $N$  der in dem Kristall befindlichen Atome. Bei einer Gesamtmasse  $M_k$  des Kristalls ergibt sich

$$m_x = \frac{M_k}{N}$$

### 3.2.2 Massenspektrometer

Die genaueste Methode der Massenbestimmung von Atomen benutzt die Ablenkung von Ionen in elektrischen oder magnetischen Feldern. Aus der gemessenen Masse  $m(A^+)$  eines einfach geladenen Ions  $A^+$  erhält man die Atommasse durch:

$$m(A) = m(A^+) + m(e^-) - \frac{1}{c^2} E_B$$

mit  $E_B$  der Bindungsenergie des Elektrons im Atom  $A$ .

#### Massenspektrograph nach Thomson

Die durch die Gasentladung erzeugten Ionen (Masse  $M$ , Ladung  $q$ ) werden zur Kathode hin beschleunigt, auf Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \quad \left( E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = qU \right)$$

Im homogenen Magnetfeld  $\vec{B} =$  und homogenen elektr. Feld  $\vec{E} =$  erfahren die Ionen über die Länge  $L$  eine Ablenkung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} E \quad (*)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{q}{m} v B \quad (**)$$

Mit  $v_x, v_y \ll v_z \simeq v$  hat man:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{dt} \frac{dz}{dt} \simeq \frac{dx}{dz} \\ \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} &\simeq v^2 \frac{d^2x}{dz^2}\end{aligned}$$

und ebenso:

$$\frac{d^2y}{dt^2} \simeq v^2 \frac{d^2y}{dz^2}$$

Einsetzen in (\*) ergibt:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{q}{m} \frac{1}{v^2} E$$

und

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{q}{m} \frac{1}{v} B$$

Für  $z \in \left[-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}\right]$  liefert die Integration

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dz} &= \int_{-\frac{L}{2}}^z \frac{qE}{mv^2} dz' = \frac{qE}{mv^2} \left(\frac{L}{2} + z\right) \\ \rightarrow x(z) &= \frac{qE}{2mv^2} \left(\frac{L}{2} + z\right)^2\end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich mit (\*\*)

$$y(z) = \frac{qB}{2mv} \left(\frac{L}{2} + z\right)^2$$

Am Ende des Kondensators befindet sich das Ion bei  $\vec{r} = (x(\frac{L}{2}), y(\frac{L}{2}), \frac{L}{2})$ . Die Steigung in  $x$ -Richtung ist dort:

$$\frac{dx}{dz} \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{qE}{mv^2} \cdot L$$

Bei der Fotoplatte bei  $z = z_0$  ist die  $x$ -Koordinate also:

$$\begin{aligned}x(z_0) &= \frac{qE}{2mv^2} \cdot L^2 + \frac{qEL}{mv^2} \left(z_0 - \frac{L}{2}\right) \\ &= \frac{qEL}{mv^2} \cdot z_0\end{aligned}$$

analog erhält man für die  $y$ -Koordinate:

$$y(z_0) = \frac{qB}{2mv} L^2 + \frac{qBL}{mv} \left(z_0 - \frac{L}{2}\right) = \frac{qBL}{mv} \cdot z_0$$

Elimination von  $v$  liefert bei  $z_0$ :

$$x(y) = \frac{m}{q} \underbrace{\frac{E}{B^2 L z_0}}_{=f(\frac{q}{m})} \cdot y^2$$

Für jeden Wert  $\frac{q}{m}$  entspricht dies einer Parabel, aus deren Vorfaktor  $f(\frac{q}{m})$  bei bekannten  $E$  und  $B$  das Verhältnis  $\frac{q}{m}$  bestimmt werden kann.

Beim Thomson-Massenspektrograph werden gleiche  $\frac{q}{m}$  mit verschiedenen Geschwindigkeiten auf verschiedene Stellen der Fotoplatte entlang der Parabel abgebildet. Ein besseres Signal erhält man, wenn die Ionen mit gleichen  $\frac{q}{m}$ -auch bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten - auf einen einzelnen Punkt fokussiert sind.

### 3.2.3 Astonsche Massenspektrograph

→ ÜA

### 3.2.4 Flugzeit-Massenspektrometer

Ein einfaches, billiges und auch heute noch weit verbreitetes Massenspektrometer ist das Flugzeit-Massenspektrometer. Dabei werden Ionen in einem kleinen Volumen erzeugt (z.B. durch Photoionisation mit einem gepulsten Laser), durch eine Spannung  $U$  auf  $v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$  beschleunigt und durchlaufen eine feldfreie Strecke  $L$ , bevor sie vom Detektor registriert werden (Chameltron, Ionenmultiplier, Kanalplattenverstärker) registriert werden. Die Zeit zwischen Erzeugung und Detektion

$$T_m = \frac{L}{v} = \frac{L}{\sqrt{\frac{2qU}{m}}}$$

$$\rightarrow \boxed{m = \frac{2qU}{L^2} T_m^2}$$

Die Genauigkeit des Massenspektrometers hängt davon ab, wie genau  $U$ ,  $L$  und  $T$  bestimmt werden können, d.h. u.a. in welcher Zeit  $\Delta t$  und in einem wie kleinen Volumen  $\Delta V$  sie erzeugt werden können. Die genaueste Auflösung wird heutzutage mit sogenannten Ionen-Zyklotron-Resonanz-spektrometern (sog. Penning-Fallen) erzielt. Die erreichte Auflösung ist  $\frac{\Delta m}{m} \leq 10^{-8}$ .

### 3.2.5 Isotopie

Durch genaue Massenmessungen wurde es möglich nachzuweisen, dass viele chemische Elemente in der Natur in verschiedenen Isotopen vorkommen. Die Isotope eines Elements haben alle die gleichen chemischen Eigenschaften, unterscheiden sich aber in ihrer Masse um kleine ganzzahlige Vielfache einer  $AME$ .

Die Erklärung der Isotopie kam erst mit der Entdeckung des Neutrons: Isotope unterscheiden sich in der Anzahl der Neutronen im Atomkern. Ein Element (wie z.B.  $He$ ) wird vollständig erst durch die Anzahl der Elektronen (= Protonen = Ladungszahl  $Z$ ) und Anzahl der Neutronen und Protonen im Kern (= atomare Massenzahl  $A$ ) angegeben. **Beispiel:** Helium mit 2 Protonen und 1 Neutron  $= {}^3_2He$ .

Helium mit 2 Protonen und 2 Neutronen  $= {}^4_2He$ .

### 3.3 Innere Struktur der Atome

Bis zum Ende des 19. Jahrhunderts galt als gesichert, dass Materie aus elektrisch geladenen Teilchen aufgebaut ist. Hinweise darauf:

1. Elektrolyse: Moleküle dissoziieren im elektrischen Feld in positive und negative Ladungsträger (Ionen)
2. Magnetfeldeffekte bei elektrischer Leitung in Metallen (Hall-Effekt)
3. Ablenkung von  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strahlung im Magnetfeld bei radioaktivem Zerfall
4. Experimente mit Gasentladung: erzeugte "Kanal- und Kathodenstrahlen" werden durch elektrische und magnetische Felder beeinflusst.

#### 3.3.1 Kathoden- und Kanalstrahlen

Durch Ablenkung von Kathodenstrahlen im  $E$ - bzw.  $B$ -Feld konnte J.J. Thomson 1897 das Verhältnis  $\frac{q}{m} = \frac{e}{m}$  bestimmen. Er stellte fest, dass dieses Verhältnis unabhängig vom Kathodenmaterial ist, und ca  $10^4$  mal größer als bei den von 1886 von E. Goldstein (1850-1930) entdeckten Kanalstrahlen. Bereits 1895 werden diese Elementarladungen von G. Stoney "Elektronen" genannt. W. Wien (1864-1928) konnte 1897 den Wert  $\frac{q}{m}$  der Kanalstrahlen messen und zeigen, dass sie aus den positiven Ionen des Füllgases der Entladungsröhre bestehen. In Kombination mit der Atomvorstellung ergab sich daraus:

Atome sind aus elektrisch geladenen Teilchen aufgebaut.  $\rightarrow$  es gibt eine Substruktur!

Da Atome neutral sind, müssen gleich viele negative wie positive Ladungen vorhanden sein, d.h.: Atome bestehen aus negativ geladenen Elektronen und einer entgegengesetzt gleichen positiven Ladung! Die elektrisch geladenen Bausteine haben Ladung und Masse, wobei  $\frac{m_e}{m_p} < 10^{-3}$ .

Daraus ergeben sich folgende Fragen:

1. Welche Eigenschaften haben die Substrukturteilchen?
2. Wie werden die Teilchen im Atom zusammengehalten?
3. Wie sind sie im Atom angeordnet, d.h. welche Substruktur hat das Atom?



### 3.3.2 Differentielle Wirkungsquerschnitt bzw. Streuungsquerschnitt

Um die Verteilung der Ladung innerhalb der Atome zu bestimmen, kann man elektrisch geladene Teilchen mit Ladung  $q_s$  als Sonde verwenden. Deren Ablenkung im Coulombpotenzial des Atoms

$$V_c(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_s \cdot q_A}{r} \quad \text{mit} \quad q_A = \int \rho_A(\vec{r}) dV$$

erlaubt Rückschlüsse über die Ladungsverteilung  $\rho_A(\vec{r})$  zu ziehen. Dazu werden die "Sonden-Teilchen" in einem Winkelbereich  $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$  um die Probe nachgewiesen. Diese gehören - abhängig vom Streupotenzial  $V(r)$  - zu einem "Stoßparameter"  $b$  im Bereich  $[b, b + db]$ . Der "differentielle Wirkungsquerschnitt"  $d\sigma$  gibt hierbei den Bruchteil des gesamten (integralen) Streuquerschnitts  $\sigma$  an, durch den die Teilchen hindurchfliegen, die vom Potenzial  $V(r)$  in dem vom Detektor aufgespannten Raumwinkel  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\phi$  gestreut werden. D.h.:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(\vartheta, \Omega)}{\sigma} &= \frac{\Delta \dot{N}(\vartheta, \Omega)}{\dot{N}} = \frac{2\pi b db}{\sigma} \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{2\pi}{\sigma} \frac{db}{d\vartheta} d\vartheta \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{b}{\sigma} \frac{db}{d\vartheta} d\vartheta d\varphi \\ &\rightarrow d\sigma(\vartheta, \Omega) = b \frac{db}{d\vartheta} \frac{1}{\sin \vartheta} d\Omega \\ &\rightarrow \boxed{\frac{d\sigma(\vartheta, \Omega)}{d\Omega} = b \frac{db}{d\vartheta} \frac{1}{\sin \vartheta}} \end{aligned}$$

### 3.3.3 Das Thomsonsche Atommodell

J.J. Thomson (1856-1940) schlug 1903 für die räumliche Verteilung der  $Z$  Elektronen und  $Z$  positiven Ladungen das sog "Rosinenkuchen-Modell", bei dem die positiven Ladungen gleichmäßig über die gesamte Fläche verteilt sind und die  $e^-$  sich frei darin bewegen.

$$n_1 = n_+ = \frac{Z}{\frac{4\pi}{3} R^3} \quad R: \text{ Atomradius}$$

Würden nur die positiven Ladungen berücksichtigt, würde ein Elektron im Abstand  $r < R$  bei einer homogenen Ladungsverteilung (mit Ladungsdichte  $= \rho_+ = \frac{Ze}{\frac{4\pi}{3} R^3}$ ) das Feld

$$E(\vec{r}) = \frac{Zer}{4\pi\epsilon R^3} \hat{r}$$

und somit die Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -e\vec{E} = -k_T \vec{r} \quad \text{mit} \quad k_T = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon R^3} \hat{r}$$

wirken. Das führt zu einer harmonischen Schwingung mit Frequenz  $\omega_e = \sqrt{\frac{k_T}{m_e}}$ . Für eine homogene Verteilung aller  $Z$  Elektronen (Teilchendichte  $n_e =$

$\frac{Z}{\frac{4\pi}{3}R^3}$ ) ergibt sich eine kollektive Schwungung gegen die viel schwereren positiven Ladungen mit der sog. Plasmafrequenz.

$$\begin{aligned} w_p &= \sqrt{\frac{n_e \cdot e^2}{\epsilon \cdot m_e}} = \sqrt{\frac{3Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3}} \\ &= \sqrt{3}\omega_e \end{aligned}$$

**Problem:** Die aus diesem Modell abgeschätzten Absorptions und Emissionsfrequenzen stimmen nicht mit den beobachteten atomaren Frequenzen überein. Vorallem: Ergebnisse von Streuzperimenten stimmen nicht mit der vom Modell erwarteten Winkelverteilung überein: Für  $\alpha$ -Teilchen (Masse  $m_{He}$ , Ladung  $2e$ ) spielen die Elektronen wegen ihrer kleinen Masse bei der Ablenkung praktisch keine Rolle. Die Kraft auf ein  $\alpha$ -Teilchen in Richtung senkrecht zu seiner Einfallsrichtung ergibt sich daher für  $r < R$  zu:

$$F_y = F(r) \sin \varphi \simeq \frac{2Ze^2 r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{b}{r} = 2k_T b$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \Delta p_y &= \int F_y dt = 2k_T b T \\ &\simeq \frac{4k_T b}{\vartheta_0} \sqrt{R^2 - b^2} \quad \text{mit } T \simeq \frac{d}{\vartheta_0} = \frac{2\sqrt{R^2 - b^2}}{\vartheta_0} \end{aligned}$$

Da  $\Delta p_y \ll p_z \simeq p(dh\vartheta \ll 1)$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\Delta p_y}{p_z} &\simeq \frac{\Delta p_y}{p} = \tan \varphi \\ &= \frac{4k_T b}{m\vartheta_0^2} \sqrt{R^2 - b^2} \simeq \vartheta \end{aligned}$$

$$\rightarrow \vartheta = \frac{4k_T b}{m\vartheta_0^2} \sqrt{R^2 - b^2} = \vartheta(b)$$

Für ein mit beliebigem Stoßparameter  $b$  einlaufendes  $\alpha$ -Teilchen ergibt sich der durchschnittliche Streuwinkel  $\bar{\vartheta}$  zu: **Beispiel:**  $R = 0.1mm$ ,  $\alpha$ -Teilchen mit  $E = 5MeV$ , and Goldfolie ( $Z = 79$ ) gestreut werden

$$\rightarrow \bar{\vartheta} = 1.8 \cdot 10^{-4} rad \simeq 0.62' \rightarrow \text{sehr kleiner Winkel}$$

Bisher Ablenkung durch ein Atom im Mittel berechnet ( $\bar{\varphi}$ ). Im Experiment wurden die  $\alpha$ -Teilchen durch eine Goldfolie geschossen und somit an vielen Atomen gestreut (für Foliendicke von  $10\mu m$  und Golddurchmesser von  $\simeq 0.2nm$ , ca  $6 \cdot 10^4$  Atome). Da die Stoßrichtung bei jeder Streuung statistisch verteilt ist (entweder nach links oder rechts) ist auch  $\bar{\vartheta}$  statistisch verteilt.  $\rightarrow$  "Random walk"-Problem  $\rightarrow$  Gauß-Verteilung.

Die Zahl der in dem Winkel  $\vartheta$  abgelenkten  $\alpha$ -Teilchen ergibt sich daher zu

$$N(\vartheta) = N_0 e^{-\frac{\vartheta^2}{\langle \Delta\vartheta \rangle^2}} = N_0 e^{-\frac{\vartheta^2}{m\vartheta}}$$

Nach  $m$  Stoßprozessen ergibt sich eine mittlere Breite der Verteilung

$$\Delta\vartheta = \sqrt{m} \cdot \bar{\vartheta} \quad (\text{Standardabweichung})$$

**Beispiel:** Goldfolie mit Dicke  $10\mu m$ ,  $m \simeq 5 \cdot 10^4$ .

$$\rightarrow \langle \Delta\vartheta \rangle = 4 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \simeq 2.3''$$

Um das Thomsonsche Atommodell zu testen, führte Rutherford 1909 Streuexperimente von  $\alpha$ -Teilchen an einer Goldfolie durch. Die Ergebnisse zeigten, dass auch noch sehr große Streuwinkel (bis zu  $160^\circ$ ) beobachtet wurden. Dies widersprach eindeutig dem Thomson-Modell.

→ Alternativ schlug Rutherford ein anderes Modell für Atomaufbau vor.

### 3.3.4 Das Rutherfordsche Atommodell

Rutherford schlug vor, dass die positive Ladung des Atoms in einem kleinem Volumen im Zentrum des Atoms, dem Atomkern, komprimiert ist. Dort ist auch die nahezu gesamte Atommasse vereinigt. In dem Fall: Streuung der  $\alpha$ -Teilchen im Coulombfeld einer Punktladung  $Q = Ze$

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \\ \rightarrow \vec{F}(\vec{r}) &= \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r} = 2 \underbrace{k_R(r)}_{\neq \text{const}} \cdot \vec{r} \end{aligned}$$

Auch hier ist wieder:

$$F_y = F(r) \cdot \sin \phi$$

Wegen der Drehimpulserhaltung: Die gemessene Streuverteilung stimmt sehr gut mit diesen Annahmen überein. **Bemerkungen:**

- Bei  $\alpha$ -Teilchen mit  $E_{kin} = 5 \text{ MeV}$  treten erst bei  $\vartheta = 150^\circ$  Abweichungen von der Rutherfordschen Streuformel auf. Dies entspricht einem Stoßparameters von  $b = 6 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ , d.h. erst bei diesen Abständen beginnen andere Kräfte als die Coulombkraft wirksam zu werden → Kernkräfte! → Kernradius  $r_K \sim 10^{-15} \text{ m}$
- Aus Experimenten mit verschiedenen Folienmaterialien konnte Chadwick 1920 ableiten, dass  $Z$  gleich der Ordnungszahl im periodischen System ist und dass

$$r_K \simeq (1.3 \cdot 10^{-15} \text{ m}) A^{\frac{1}{3}}$$

→ Rutherfordsches Atommodell:

Neg. Elektronen umkreisen den positiven Kern mit Kernladungszahl  $Z$  (ohne Bewegung wäre keine Stabilität möglich.) Der Kern vereinigt nahezu die gesamte Masse des Atoms, macht aber nur den Bruchteil  $\left(\frac{r_K}{r_A}\right)^3 \simeq 10^{-15}$  des Atomvolumens aus

## 3.4 Kann man Atome sehen?

Auch wenn Atome ( $r = 0.1 - 0.3nm$ ) mit sichtbarem Licht ( $\lambda = 500nm$ ) nicht aufgelöst werden können, so sind eine Reihe von Techniken und Instrumenten entwickelt worden, die eine indirekte oder direkte Beobachtung von Atomen erlauben.

### 3.4.1 indirekte Beobachtungen

1. Brownsche Bewegung
2. Auch die von C. Wilson 1911 entwickelte Nebelkammer erlaubt es, indirekt die Bahn einzelner mikroskopischer Teilchen wie Atome, Ionen, Elektronen, Positronen etc. sichtbar zu machen: Ein Teilchen mit genügend hoher kinetischer Energie kann hierbei durch Stöße mit Atomen des Füllgases die Atome ionisieren. Diese Ionen wirken in einem übersättigten Wasserdampf entlang der Teilchenspur als Kondensationskeime für die Bildung von Wassertröpfchen, die durch Lichtstreuung sichtbar gemacht werden. Bis in die 70'ger Jahre war die W.-Nebelkammer eine der wichtigsten Nachweisgeräte in Kern- und Teilchenphysik.

### 3.4.2 direkte Beobachtungen

Mit einigen Instrumenten ist auch eine direkte Beobachtung von einzelnen Atomen möglich:

#### Feldionenmikroskop

Das ältere dieser Unstrumente ist das von E. Müller 1937 entwickelte Feldionenmikroskop. Dabei dient eine kleine Wolframspitze als Kathode, der eine Anode in Form einer Halbkugel im Abstand  $R \simeq 10 - 20cm$  gegenübersteht. Bei einer Spannung  $U$  von  $U \simeq 1kV$  ist das elektrische Feld  $E = \frac{U}{r} \hat{r}$  bei der Wolframspitze ( $r \leq 10nm$ ) groß genug ( $> 10^{11} \frac{V}{m}$ ), um Elektronen aus Materie zu reißen.

Die Elektronen folgen den Feldlinien und treffen auf einen Leuchtschirm vor der Anode auf. Die Vergrößerung ist hierbei  $\sim \frac{R}{r} \simeq 10^7$ . Die Elektronen kommen dabei von Orten an denen die Austrittsarbeit minimal ist. Bringt man Atome mit kleinerer Austrittsarbeit auf die Wolframspitze (z.B. Barium), so kommen die  $e^-$  überwiegend von diesen Atomen, die auf diese Weise mit Vergrößerung  $\sim 10^7$  sichtbar gemacht werden.

## **Transmission-Elektronenmikroskop**

Das von E. Ruska (1906-1988, Nobelpreis 1986) entwickelte Transmission-Elektronenmikroskop benutzt zur Ablenkung Elektronen, die auf hohe Spannungen ( $\sim 500kV$ ) beschleunigt und durch geeignete  $E$  und  $B$  Felder auf die zu untersuchende (dünne) Probe fokussiert werden. Durch Stöße an der Probe werden  $e^-$  abgelenkt, die transmittierten  $e^-$  werden durch ein Ablensystem auf einen Leuchtschirm abgebildet.

## **Elektronenmikroskop**

### **Rastertunnelmikroskop**

Die größte Auflösung von Strukturen auf leitenden Oberflächen erhält man mit dem 1984 von G. Binnig (1947-) und H. Rohrer (1933-) entwickelten Rastertunnelmikroskop (Nobelpreis 1986). Dabei wird zwischen einer Wolframspitze (=Kathode) und einer metallischen Oberfläche (=Anode) eine kleine Spannung angelegt (einige V). Bei sehr kleinen Abständen zur Spitze u. Oberfläche können die  $e^-$  aufgrund des sog. "Tunneleffektes" den kleinen Zwischenraum "durchtunneln". Der Tunnelstrom hängt dabei exponentiell vom Abstand ab. Hält man den Tunnelstrom konstant und fährt die Spitze über die Oberfläche, so bildet die Vertikalsbewegung der Spitze (die von einem Computer ausgelesen wird) die Topologie der Oberfläche ab.

### **Atomares Kraftmikroskop (AF)**

Eine Weiterentwicklung des Tunnelmikroskops ist das sog. Atomare Kraftmikroskop (AF). Hier ist nicht der Tunnelstrom die Messgröße, sondern die atomaren Kräfte zwischen dem Oberflächenatomen und einer Spitze. In dem Fall kann das Mikroskop auch für nichtleitende Oberflächen verwendet werden. außerdem können Atome mit dem Mikroskop manipuliert werden.

### **Speichern und Beobachtung von einzelnen Atomen**

Mit Hilfe von elektrischen und magnetischen DC-Feldern (Paulfalle, s III 2.b) bzw elektrischen AC-Feldern (Paul-Falle, nach W.Paul (1913 – 96, Nobelpreis 1989) gelang es ab den 60er Jahren zunächst Wolken von Ionen, und ab 1978 auch einzelne Ionen zu speichern. Mit Hilfe von Laserkühlung können die Ionen bis nahe an den absoluten Nullpunkt der Tempertaur ( $T < 1mK$ ) gekühlt werden. Durch Resonanzfluoreszenz (Streuung des die Atome anregenden Laserlichts) können einzelne Atome sichtbar gemacht werden. Seit einigen Jahren gelingt es auch einzelne neutrale Atome mit Laserlicht zu speichern und sichtbar zu machen.

## Chapter 4

# Das Elektron

Die Bezeichnung Elektron für die negativen Elementarladungen wurde 1895 von G.Stoney eingeführt (Philosophisches Magazin 40,372 (1895)).

### 4.1 Erzeugung von freien Elektronen

Freie  $e^-$  können auf verschiedene Weisen erzeugt werden. Die Wichtigsten sind

#### 1. Glühemission

Heizt man ein Metall (Kathode) auf eine hohe Temperatur  $T$  auf, so können diejenigen von den frei beweglichen  $e^-$  das Metall verlassen, deren  $E_{kin}$  größer ist als die Austrittsarbeit  $W_A$ . Für hohe Stromdichten verwendet man Materialien mit niedriger  $W_A$ , die hohe Temperaturen aushalten (z.B Wolfram-*Cr*-Legierung). Die Glühemission stellt die wichtigste Methode zur Erzeugung freier  $e^-$  dar (Oszilloskop, Fernseher, Braunsche Röhre).

#### 2. Feldemission

Beim Anlegen einer Spannung zwischen einer Kathode und Anode, z.B einer kleinen Spitze und einer flachen Anode, können an der Spitze sehr hohe Feldstärken erzeugt werden:

$$\vec{E} = \frac{U}{r} \hat{r}$$

mit  $r = 10nm$  und  $U = 1kV$ , ergeben sich Feldstärken  $E > 10^{11} \frac{V}{m}$ , so dass die  $e^-$  aus dem Metall herausgerissen werden (s FEM).

#### 3. Photoeffekt an Metalloberflächen

Beim Bestrahlen eines Metalls mit UV-Lichta können  $e^-$  aus dem Metall austreten (s. V.3).

#### 4. Sekundäremission aus Festkörperoberflächen

Beim Beschuss von Festkörperoberflächen mit  $e^-$  können Sekundärelektronen aus dem Festkörper ausgelöst werden. Der Sekundäremissionskoeffizient  $\eta$  gibt an, wie viele Sekundärelektronen im Mittel pro einfallendem Primärelektron erzeugt werden ( $\eta$  hängt von Material, Einfallswinkel und Energie des einfallenden  $e^-$  ab). Die Sekundärelektron-Emission spielt eine wichtige Rolle in der Optoelektronik (Teilchendetektoren zum Nachweis von einzelnen  $e^-$ , Photonen, Ionen, sog.  $e^-$ -, Ionen- oder Photomultiplier, CCD, Bildverstärker. Für  $m$  Dynoden erhält man pro Elektron  $\eta^m$  Elektronen, die an Kapazität  $C_a$  die Spannung  $U_a = \frac{\eta^m e^-}{C_a}$  erzeugen, die leicht nachgewiesen werden kann.

## 4.2 Ladung des Elektrons

Eine genaue Abschätzung von  $e$  erzielte 1913 R. Millikan (1868-1953) mit einem Experiment, bei dem er die Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit von geladenen Öltröpfchen im elektrischen Feld eines Kondensators untersuchte. Dies ist auch heute noch die genaueste Messung von  $e$ . Durch Zerstäuben von Öl werden geladene Öltröpfchen erzeugt die zwischen die Platten eines Kondensators sinken, Durch Zerstäuben von Öl werden geladene Öltröpfchen erzeugt die zwischen die Platten eines Kondensators sinken, mit Ladung  $Q = ne, (n = 1, 2, 3 \dots)$ . Im feldfreien Raum wird die Schwerkraft  $F_g = \rho \cdot V \cdot g$  durch die Auftriebskraft  $F_A = \rho_{Luft} \cdot V \cdot g$  und Stokesche Reibungskraft  $F_R = 6\pi\eta Rv$  kompensiert. Aus messung der Sinkgeschwindigkeit

$$R = \left( \frac{9\eta v}{2g(\rho_l - \rho_{Luft})} \right)^{\frac{1}{2}}$$

und daraus das Volumen  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ . Legt man eine Spannung  $U$  an den Kondensatorplatten an, so können die Öltröpfchen im elektrischen Feld  $E = \frac{U}{d}$  zwischen den Platten in Schwebe gehalten werden, falls  $Q \cdot E = n \cdot e \cdot E = (\rho_l - \rho_{Luft}) \cdot g \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$ .

$$\rightarrow n \cdot e = (\rho_l - \rho_{Luft}) g \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{E}$$

Zur Bestimmung der ganzen Zahl  $n$  wird das Tröpfchen im Kondensator durch ionisierende Röntgenstrahlung umgeladen, so dass Ladungsänderung  $\Delta n \cdot e$  auftreten, und die Spannung  $U$  geändert werden muss um  $\Delta U = U_1 - U_2$ , um das Tröpfchen in Schwebe zu halten.

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{n_2}{n_1} &= \frac{n_1 + \Delta n}{n_1} = \frac{U_1}{U_2} \\ \rightarrow n_1 &= \Delta n \frac{U_2}{U_1 - U_2} \end{aligned}$$

Für die kleinste Ladungsänderung ist  $\Delta n = 1$ . Aus den entsprechenden Werten  $U_1$  und  $U_2$  kann damit  $n_1$  und daraus  $e$  berechnet werden. Der heute genaueste Wert ist:

$$e = 1.60217653(13) \cdot 10^{-19} C$$

### 4.3 Die Masse des Elektrons

Alle Verfahren zur Bestimmung der Elektronenmasse beruhen auf die Ablenkung von  $e^-$  in einem elektrischen oder magnetischen Feld. Hierbei wirkt die Lorentzkraft:

$$\vec{F} = e \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{m_e} \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

Man sieht, dass man aus dem Verlauf von  $\vec{v}(t)$  immer nur  $\frac{q}{m_e}$  erhalten kann, nie  $e$  oder  $m_e$  alleine. Zur Bestimmung von  $m_e$  muss also  $e$  anderweitig ermittelt werden (z.B. durch Millikan Versuch). zur Bestimmung von  $\frac{e}{m_e}$  kann dann z.B. das Fadenstrahlrohr ( $\sim \vec{B}$ ) verwendet werden. Die Genauigkeit der Messung von  $\frac{e}{m_e}$  hat sich im Laufe der Jahre ständig erhöht. Der Fehler in der Angabe von  $m_e$  rührt heutzutage hauptsächlich in  $e$  her. Der heute aktuelle Wert lautet:

$$m = 9.1093826(15) \cdot 10^{-31}$$

### 4.4 Die Größe des Elektrons

Frage:

Welche konkrete Massen- und Ladungsverteilung besitzt das  $e^-$ ?

Nimmt man vereinfachen an, dass das  $e^-$  eine Kugel mit homogener Massen- und Ladungsverteilung ist, kann man den "klassischen Elektronenradius  $r_e$ " bestimmen. Ist Kapazität einer Vollkugel mit Radius  $R$  ist

$$C = 2\pi\epsilon_0 R$$

Die Arbeit zum Aufladen des Kondensators:

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

D.h für das Elektron erhält man:

$$W = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C} = \frac{e^3}{4\pi\epsilon_0 r_e}$$

Setzt man  $W = m_e c^2$ , ergibt sich der "klassische Elektronenradius" zu:

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2.8 \cdot 10^{-15} m$$



Wie sich später im Zusammenhang mit dem Elektronenspin zeigen wird, führt dieser Ansatz zu einer Reihe von Widersprüchen. Demnach ist dieses klassisch-mechanische Modell des Elektrons falsch.

Bisher gibt es noch kein in sich geschlossenes anschauliches Modell des Elektrons. Die bisherigen Ergebnisse deuten darauf hin, dass das Elektron als strukturloses, punktförmiges Teilchen behandelt werden kann, dessen Masse der Energie seines elektrischen Feldes entspricht. Aus Elektron-Elektron-Streuexperimenten bestätigt sich das Coulmbgesetz bis hinunter zu Abständen  $< 10^{-16}m$ .

## Chapter 5

# Das Photon

### 5.1 Licht als klassische Welle

Die Maxwell-Gleichungen führen auf die Wellengleichung und sagen die Existenz von elektromagnetischen Wellen voraus. Diese propagieren in Vakuum mit der Geschwindigkeit  $c$  in Richtung des Wellenvektors  $\vec{k}$  und schwingen transversal zu  $\vec{k}$  mit Amplitude  $E$  (bzw.  $B = \frac{E}{c}$ ) entlang des Polarisationsvektors  $\vec{\epsilon}$ .

$$\vec{E} = E \cdot \vec{\epsilon} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

Mit der Erzeugung von elektromagnetischen Wellen durch H.Hertz (1857-1894) im Jahr 1887 wurde die Maxwell-Theorie glänzend bestätigt. Darüber hinaus wurde klar, dass Licht nur ein auf den Wellenlängenbereich  $\lambda = 0.4 - 0.7 \mu m$  beschränkter Spezialfall von elektromagnetischen Wellen ist.

Die Energiedichte einer elektromagnetischen Welle ist

$$\mu = \frac{1}{2} (E^2 + c^2 B^2) = \epsilon_0 E^2$$

und mit Hilfe des Pointing-Vektors

$$\begin{aligned}\vec{S} &= c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \\ |\vec{S}| &= c \epsilon_0 E^2 = c \mu\end{aligned}$$

ist die Intensität definiert zu:

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = c \epsilon_0 \langle E^2 \rangle = c \langle \mu \rangle$$

Die drei Größen  $u, \vec{S}, I$ , sind hierbei kontinuierliche Funktionen von  $E$ . Auch die Interferenzphänomene von Licht wie Beugung oder Eigenschwingungen in einem Resonator werden durch die Wellentheorie vollständig beschrieben.

## 5.2 Die Hohlraumstrahlung

### 5.2.1 Herleitung der Strahlungsleistung eines schwarzen Körpers durch Planck

Heiße Körper senden aufgrund ihrer Temperatur elektromagnetische Strahlung aus. Die Gesetze für die spektrale Intensitätsverteilung der Wärmestrahlung erhält man aus der Analyse eines "schwarzen Strahlers", d.h. eines schwarzen Körpers, dessen Absorptionsvermögen  $A = 1$  ist. Dieser wird annähernd durch einen Hohlraum mit absorbierenden Wänden realisiert, der eine kleine Öffnung hat: Strahlung, die durch die Öffnung eintritt, wird i.d.R. vollständig absorbiert, bevor sie wieder austreten kann ( $A \simeq 1$ ). Wenn man die Wände des Hohlraums auf eine Temperatur  $T$  heizt, wirkt die Öffnung als Strahlungsquelle. Im thermischen Gleichgewicht ist die aus dem Raumwinkel  $d\Omega$  im Frequenzintervall  $d\nu$  von der Öffnung absorbierte Strahlungsleistung gleich der nach  $d\Omega$  innerhalb  $d\nu$  von der Öffnung emittierten Strahlungsleistung:

$$\frac{dW_A}{dt} = A_\nu S_\nu d\Omega d\nu = E_\nu d\Omega d\nu = \frac{dW_e}{dt}$$

mit  $S_\nu = S_\nu(\nu\Omega) = c \cdot \mu_\nu(\nu\Omega)$  der spektralen Strahlungsdichte des Hohlraums. Mit  $A_\nu = 1$  folgt  $E_\nu = S_\nu$ . D.h. durch Messung der aus dem Licht austretenden Strahlungsleistung  $E_\nu$  lässt sich die Energiedichte  $\mu_\nu = \frac{S_\nu}{c}$  im Inneren des schwarzen Körpers bestimmen.

In einem Hohlraum können dauerhaft nur Wellen oszillieren, bei denen ein Vielfaches der halben Wellenlänge gleich der Länge des Hohlraums ist (Eigenmoden/Eigenschwingungen):

$$n_i = \frac{\lambda}{L_i} \quad (i = x, y, z)$$

bzw.

$$k_i = \frac{2\pi}{\lambda} = n_i \frac{\pi}{L}$$

**Beispiel:**  $n_x = 4$  Wie viele solcher Eigenmoden können in einem kubischen Resonator mit Kantenlängen  $L = L_x = L_y = L_z$  existieren? Im  $\vec{k}$ -Raum entsprechen die erlaubten Eigenmoden diskreten Punkten, die ein Gitter mit Gitterkonstanten  $\frac{\pi}{L}$  (im positiven Oktanten) bestehen. Pro Einheitsvolumen im  $\vec{k}$ -Raum befinden sich  $\left(\frac{\pi}{L}\right)^{-3}$  erlaubter  $k$ -Werte, in einer Kugel mit Radius  $k_6$  also

$$\frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi k_6^3 \left(\frac{L^3}{\pi^3}\right) = \frac{1}{6} k_6^3 \frac{V}{\pi^2}$$

erlaubter  $k$ -Werte. Da jede Mode zwei unabhängige Polarisationsrichtungen hat, befinden sich in dieser Kugel also insgesamt  $2 \cdot \frac{1}{6} k_6^3 \frac{V}{\pi^2} = \frac{k_6^3}{3} \frac{V}{\pi^2}$  solcher Moden. die Zahl der moden pro Volumeneinheit  $k < k_6$  ist also

$$n = \frac{N}{V} = \frac{k_6^3}{3\pi^2} = \frac{8\pi\nu^3}{3c^3}$$

d.h. im Frequenzintervall  $d\nu$  befinden sich folgende Anzahl von Moden:

$$n_\nu d\nu = \frac{dn}{d\nu} d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu$$

Die spektrale Energiedichte  $\mu_\nu$  ergibt sich daraus zu:

$$\mu_\nu d\nu = n_\nu \bar{W}_\nu(T) d\nu$$

mit  $\bar{W}_\nu(T)$  der von der Temperatur abhängigen mittleren Energie pro Mode im Frequenzintervall  $[\nu, \nu + d\nu]$ . Rayleigh und James ordneten 1894 jeder Eigenschwingung wie beim klassischen harmonischen Oszillator) die mittlere Energie  $k_B T$  zu.

$$\mu_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^2} k_B T d\nu \quad (\text{Rayleigh-Jeansches Strahlungsgesetz})$$

Aus dem Loch des Hohlraums würde also die Strahlungsleistung:

$$S_\nu d\nu d\Omega = c \mu_\nu d\nu \frac{d\Omega}{4\pi} = c \frac{1}{4\pi} \frac{8\pi\nu^3}{c^3} k_B T d\nu d\Omega$$

also

$$S_\nu d\nu d\Omega = \frac{2\nu^2}{c^2} k_B T d\nu d\Omega$$

emittiert werden. Für niedrige Frequenzen ergibt sich gute Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen, für hohe Frequenzen treten große Diskrepanzen auf, für  $\nu \rightarrow \infty$  divergiert  $S_\nu$  sogar (Ultraviolett-Katastrophe).

Max Planck (1858-1947) löste dieses Problem indem er 1900 annahm, dass jede Eigenmode Energie nicht in beliebig kleinen Beträgen besitzt, sondern nur in diskreten Werten ("Energiequanten"). Diese hängen von der Frequenz der Eigenmode ab und sind immer ganzzahlige Vielfache von  $h \cdot \nu$ , dem kleinstmöglichen Energiequant (=Photon). Die Energie einer eigenschwingung mit  $n$  Photonen der Frequenz  $\nu$  ist demnach:

$$E_n = n \cdot h\nu \quad \text{mit} \quad h = 6.625 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (\text{Planck'sches Wirkungsquantum})$$

Im thermischen Gleichgewicht ist die Wahrscheinlichkeit  $P(E)$ , dass eine Eigenmode die Energie  $E_n$  besitzt, durch den Boltzmanfaktor  $e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$  gegeben, die normierte Wahrscheinlichkeit also durch

$$P(E_n) = \frac{e^{-\frac{n h \nu}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n h \nu}{k_B T}}}$$

(mit  $\sum p(E_n) = 1$ ) Die mittlere Energie pro Eigenmode ergibt sich damit zu

$$\bar{E}_n = \sum_{n=0}^{\infty} E_n p(E_n) = \frac{\sum n k \nu e^{-\frac{n h \nu}{k_B T}}}{\sum e^{-\frac{n h \nu}{k_B T}}}$$

$$E_n = \frac{1}{e^{-\frac{nh\nu}{k_B T}} - 1}$$

**Beweis** (mit  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ )

1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu\beta} = \frac{1}{1 - e^{-h\nu\beta}} \quad \left( \text{mit } \sum_{n=0}^N x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} \right)$$

2.

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu\beta} &= -\frac{\partial}{\partial\beta} \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu\beta} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial\beta} \left( \frac{1}{1 - e^{-h\nu\beta}} \right) \\ &= \frac{h\mu e^{-h\nu\beta}}{(1 - e^{-h\nu\beta})^2} \end{aligned}$$

also

$$\bar{E}_n = \frac{(2)}{(1)} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Daraus folgt die spektrale Energiedichte der Hohlraumstrahlung:

$$\boxed{\mu_\nu(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu} \quad (\text{Plansch'sches Strahlungsgesetz})$$

**Bemerkungen:**

1. Für  $h\nu \ll k_B T$  kann man den Nenner entwickeln zu

$$\begin{aligned} e^{\frac{h\nu}{k_B T}} &\simeq 1 + \frac{h\nu}{k_B T} + \dots \\ e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 &\simeq \frac{h\nu}{k_B T} \end{aligned}$$

also

$$\mu_\nu(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \rightarrow \text{RJ!}$$

d.h. das R.J. Gesetz entpuppt sich als Grenzfall des Planck'schen Strahlungsgesetzes für kleine  $\nu$ .

2. das beste, je gemessene Spektrum eines schwarzen Strahlers ist die von Reuzies und Wilson 1965 entdeckte und 1995 vom Satelliten COBE gemessene "kosmische Hintergrundstrahlung", d.h. das "Nachglühen" der vor ca. 13.7 Mrd Jahren in einem sog. "Big Bang" erfolgte Entstehung des Universums.

3. mit  $\nu = \frac{c}{\lambda}$  und  $d\nu = -\frac{\nu^2}{c}d\lambda$  kann man das plank'sche Strahlungsgesetz auch schreiben

$$u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

Das Maximum dieser Verstärkung ergibt sich zu

$$\lambda_{max} = \frac{2.88 \cdot 10^{-3}}{T} K \cdot m$$

also

$$\lambda_{max} \cdot T = \quad \quad \quad (\text{Wiensches Verschiebungsgesetz})$$

"Das Maximum der Energiedichte bez. der emittierten Strahlungsleistung eines schwarzen Körpers liegt bei einer Wellenlänge, deren Wert  $\sim \frac{1}{T}$  ist."

4. Die gesamte Energiedichte der Hohlraumstrahlung ist:

$$u(T) = \int_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(\nu, T) d\nu = 8\pi$$

$$\frac{1}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu$$

$$= \frac{8\pi^5 k_B}{15k^3 c^3} T^4 = T^4 u(T)$$

Die aus dem Loch des Hohlraums emittierte Strahlungsleistung ergibt sich daraus zu:

$$S_\nu d\nu d\Omega = c \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

$$\rightarrow S_\nu d\nu d\Omega = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{d\nu d\Omega}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment **Bemerkung** Die gesamte Energiedichtestahlung ist

$$\mu(T) = \int_{\nu=0}^{\infty} \mu_\nu(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu$$

$$= \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^3} \cdot T^4 = a \cdot T^4$$

Die von dem Oberflächenelement in  $d\Omega$  emittierte Strahlung ist also

$$S(T) = c \cdot a \cdot T^4 \frac{d\Omega}{4\pi} \cos \vartheta$$

d.h die Strahlungsleistung pro Flächenelement in dem gesamten Hohlraum ist

$$I = \int S(T) d\Omega = \sigma \cdot T^4 \quad \text{mit } \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{1}{K^4} \frac{W}{m^2}$$

### 5.2.2 Herleitung der Planckschen Strahlungsformel nach Einstein

Max Planck ordnete 1900 den Schwingungen des elektromagnetischen Feldes diskrete Energiewerte zu. dies war ein mathematisches Konstrukt, mit dem er die ERgebnisse quantitativ verifizieren konnte. Einstein ging darüber hinaus und ordnete den Energiequanten eine reelle Existenz zu, als sog. Photonen.

Er postulierte damit, dass Licht aus Teilchen besteht ( $\rightarrow$  Photoeffekt), d.h. dass jede Welle der Frequenz  $\nu$  eine Anzahl von Photonen der Energie  $h\nu$  und den Impuls

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} = \frac{h}{2\pi} \vec{k}$$

besitzt. 1917 leitete er das Plancksche Strahlungsgesetz aus der Annahme her, dass sich Licht eines schwarzen Körpers im thermischen Gleichgewicht mit den Wänden des schwarzen Körpers befindet, in dem die Atome Photonen absorbieren und emittieren ( $\rightarrow$  erste quantale Beschreibung der Licht-Materie-Wechselwirkung). Die Atome besitzen hierbei diskrete Energieniveaus  $E_1$  und  $E_2$  mit  $E_2 - E_1 = \Delta E = h\nu$ .

Drei Prozesse beschreiben die Wechselwirkung der Materie mit der elektromagnetischen Strahlung

- Absorption eines Photons
- spontane Emission (nach natürlicher Lebensdauer in  $E_2$ )
- induzierte/stimulierte Emission (von Einstein eingeführt)

Gegeben sei für ein System von  $N_1$  Atomen in  $E_1$  und  $N_2$  Atomen in  $E_2$  (mit  $N_1 + N_2 = N$ ) im thermischen Gleichgewicht mit der Strahlung:

Anzahl der Übergänge von  $1 \rightarrow 2$ :

$$\dot{N}_{12} = B_{12} \cdot u(\nu) \cdot N_1$$

Anzahl der Übergänge von  $2 \rightarrow 1$ :

$$\dot{N}_{21} = B_{21} u(\nu) \cdot N_2 + A_{21} \cdot N_2$$

mit  $B_{12}, B_{21}$  und  $A_{21}$  den entsprechenden Übergangsraten der oben genannten Prozesse (=Einstein-Koeffizienten). Im thermischen Gleichgewicht ist  $\dot{N}_{12} = \dot{N}_{21}$  und

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} = e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}$$

$$u\nu = \frac{A_{21}}{B_{12} e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - B_{21}} = \dots = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}}$$

### 5.3 Der photoelektrische Effekt

Bestrahlt man eine negativ aufgeladene Platte aus Metall mit UV-Licht, nimmt die Ladung auf der Platte ab. Es müssen also  $e^-$  die Platte verlassen.

### 5.3.1 Klassische Erklärung

Im klassischen Wellenmodell sollte die auf die Fläche  $F$  auftreffende Strahlungsleistung  $P = I \cdot F$  gleichmäßig auf alle  $e^-$  verteilt werden. Bei einer Eindringtiefe von  $\sim \lambda$  im Metall und einer Leitungs- $e^-$ -Dichte von  $n = \frac{10^{19}}{m^3}$  würde jedes  $e^-$  im Mittel in der Zeit  $\Delta t$  die Energie  $\Delta \bar{W}$  aufnehmen:

$$\Delta \bar{W} = \frac{p}{nF\lambda} \cdot \Delta t = \frac{I}{n\lambda} \cdot \Delta t$$

und erst für den Fall  $\Delta \bar{W} > W_A$  (=Austrittsarbeit) emittiert werden. **Beispiel:** Zink:  $W_a \sim 4eV$  und eine Quelle bei  $\lambda \simeq 250nm$  mit  $P = 1W$  im Abstand von  $1m$  von der Zinkplatte ergibt sich  $\Delta \sim 10^5 s$ . Mit einer Gegenfeld-Methode kann man die maximale kinetische Energie der emittierten  $e^-$   $E_{kin}^{max}$  messen. Die negative Spannung an der Anode ( $-U_0$ ) bei der  $I_{ph}$  einsetzt gibt an, gegen welche Spannung die  $e^-$  gerade noch anlaufen können. Dabei stellt sich heraus:

- $E_{kin}^{max} = eU_{max}$  hängt nur von der Frequenz des UV-Lichts, nicht von seiner Intensität ab
- nur die Zahl der Photoelektronen, also  $I_{ph}^{max}$ , hängt von  $I$  ab
- trägt man  $E_{kin}^{max} = eU_{max}$  gegen die Frequenz  $\nu$  auf, ergibt sich eine Gerade

Einstein erklärte 1905 die experimentellen Ergebnisse mit seiner **Lichtquanten-Hypothese**. Jedes absorbierte Photon gibt Energie  $h\nu$  vollständig an ein Photoelektron ab ("jeder Elementarprozess der Absorption und Emission von Strahlung durch ein Atom erfolgt als 'gerichteter Vorgang'"). Aus dem Energiesatz folgt:

$$E_{kin}^{max} = h\nu - W_A$$

mit  $W_A$  der Austrittsarbeit des Kathodenmaterials. Die Steigung der Geraden ist also  $h$ . Aus dem Achsenabschnitt bei  $\nu = 0$  erhält man  $W_A$ .

Die Unzulänglichkeit des Wellenmodells besteht also darin, dass in ihm die Strahlungsenergie nicht auf ein einzelnes Atom oder Elektron übertragen wird. Der Widerspruch, der sog. Welle-Teilchen-Dualismus, wird in Abschnitt V5 noch genauer behandelt.

### 5.3.2 Photonenimpuls und Laserkühlung

In dem Artikel von 1917 forderte Einstein, dass bei dem Elementarprozess der Absorption und Emission von Strahlung durch die Atome nicht nur als gerichtete Größe die Energie  $h\nu$ , sondern auch ein Impuls auf die Atome übertragen wird. Dieser Impuls, der relativistisch dem Betrag  $p = \frac{E}{c}$  entspricht, wird auch auf die äußeren Freiheitsgrade der Atome auswirken. **Bemerkung:** relativistisch gilt:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$



mit  $m_0 = 0 \rightarrow p = \frac{E}{c}$

$$\begin{aligned}\rightarrow p &= \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \\ \rightarrow \vec{p} &= \hbar \vec{k}\end{aligned}$$

$\rightarrow$  Lichtdruckkraft zur Laserkühlung!

## 5.4 Compton Effekt

Der korpuskulare charakter der Lichtquanten tritt auch beim Compton-Effekt (1922) in Erscheinung (A.Compton 1892-1962). bestrahlt man ein beliebiges material mit Röntgenlicht der Wellenlänge  $\lambda_0$ , so findet man in der Streustrahlung außer  $\lambda_0$  auch Anteile mit  $\lambda_s > \lambda_0$ . Im Photonenmodell entspricht dies einem elastischen Stoß zwischen dem Photon der energie  $h\nu$  und Impuls  $\hbar\vec{k}$  und einem schwach gebundenen (quasi-freien) Elektron des Streumaterials (das sich anfänglich in Ruhe befindet):

$$h\nu_0 + e^- \longrightarrow h\nu_s + e^-$$

beim elastischen Stoß müssen Energie und Impuls erhalten bleiben, d.h:

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu_s + \gamma m_0c^2 \quad (1)$$

$$\hbar\vec{k}_0 = \hbar\vec{k}_s + \vec{p}_e \quad (2)$$

mit  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ,  $p_e = \gamma m_0 \vec{v}$

Aus (1) ergibt sich durch Quadrieren und Umformen:

$$\begin{aligned}\frac{m_0v^2}{1-\beta^2} &= \frac{h^2}{c^2} (\nu_0 - \nu_s) + 2m_0h (\nu_0 - \nu_s) \\ \frac{m_0v^2}{1-\beta^2} &= \frac{h^2}{c^2} (\nu_s^2 + \nu_0^2 - 2\nu_s\nu_0 \cos \phi)\end{aligned}$$

mit  $\phi$  dem Winkel zur einfalls- und Streurichtung des Photons. Gleichsetzen von (3) und (4) und umformen ergibt:

$$\nu_0 - \nu_s = \frac{h}{c^2} \nu_0 \nu_s (1 - \cos \phi)$$

Mit  $(1 - \cos \phi) = 2 \sin^2(\frac{\phi}{2})$  und  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ :