Chapter 1

Chapter 2

Chapter 3

Chapter 4

随机变量

4.1 随机变量

随机变量、分布列、分布函数的定义

4.2 离散型随机变量

4.3 期望

$$E[X] = \sum_{x:p(x)>0} xp(x)$$

4.4 随机变量函数的期望

命题 4.1 如果X是一个离散型随机变量，其取值可能为x_i,i≥1,相应的取值概率为$p(x_i)$，那么，对任一实值函数，都有

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i)p(x_i)$$

推论 4.1

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

4.5 方差

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

标准差是方差的平方根

4.6 伯努利随机变量和二项随机变量

参数为(n，p)的二项随机变量的分布列:

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

由二项式定理,

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = 1$$

二项随机变量的期望:

$$E[X] = np$$

方差:

$$Var(X) = np(1-p)$$

二项函数的分布函数的递推公式:

$$P\{X = k+1\} = \frac{p}{1-p}\frac{n-k}{k+1}P\{X = k\}$$

定理 4.1 如果X是一个参数为(n, p)的n二项随机变量，$0 < p < 1$。那么当k从0到n时,$PX = k$一开始单调递增，然后一直单调递减，当$k = \lfloor (n+1)p \rfloor$时取最大值。

4.7 泊松随机变量

定义：对于$\lambda > 0, i = 0, 1, 2, 3 \dots$

$$p(i) = P\{X = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$$

求和：

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

期望与方差：

$$Var(x) = E[X] = \lambda$$

递推公式：

$$\frac{P\{X = i+1\}}{P\{X = i\}} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i+1}/(i+1)!}{e^{-\lambda}/i!} = \frac{\lambda}{i+1}$$

泊松分布成立的假设条件

当二项分布的n很大p很小时，二项分布与$\lambda = np$的泊松分布近似。

4.8 其他离散型概率分布

4.8.1 几何随机变量

独立重复试验中，每次成功的概率为p(0<p<1)，重复试验直到首次成功。令X表示需要试验的次数.

$$P\{X = n\} = (1-p)^{n-1}p$$

期望：

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

方差：

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

4.8.2 负二项随机变量

独立重复试验中，每次成功的概率为p，0<p<1，试验持续进行直到试验累计成功r次。令X表示试验的总次数。

$$P\{X = n\} = \binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^(n-r) \quad n = r, r+1 \dots$$

期望：

$$E[x] = \frac{r}{p}$$

方差：

$$Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

X的参数为(r,p)
几何随机变量是参数为(1,p)的负二项随机变量

4.8.3 超几何随机变量

一个坛子里有N个球，m个白球，N-m个黑球，从中随机（无放回）取出n个球，令X表示取出来的白球数。

$$P\{X = i\} = \frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

期望：

$$E[x] = \frac{mn}{N}$$

方差：

$$Var(X) = \frac{mn}{N}[\frac{(n-1)(m-1)}{N-1} + 1 - \frac{mn}{N}]$$

当m和N很大时，负二项随机分布近似为参数为$(n, \frac{m}{N})$的二项分布。

4.8.4 ζ 分布

4.9 极大似然估计

4.10 随机变量和的期望

一组随机变量和的期望等于他们各自期望的和

$$E[\sum_{i=1}^{m} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

4.11 分布函数的性质

$$F(a) \leq F(b), a < b \tag{4.1}$$

$$\lim_{b \to \infty} F(b) = 1 \tag{4.2}$$

$$\lim_{b \to -\infty} F(b) = 0 \tag{4.3}$$

$$P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a) \tag{4.4}$$

$$P\{X < b\} = P(\lim_{n \to \infty} \{X \leq b - \frac{1}{n}\}) = \lim_{n \to \infty} P(X \leq b - \frac{1}{n}) = \lim_{n \to \infty} F(b - \frac{1}{n}) \tag{4.5}$$