

Theoretische Elektrodynamik

Matthias Vojta

übertragen von

Sebastian Schmidt, Lukas Körber und Friedrich Zahn

Wintersemester 2014/2015

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Mathematische Hilfsmittel	7
2.1	Skalar- und Vektorfelder	7
2.2	Integrale auf Feldern	7
2.3	Vektorielle Ableitungen und Integrale	9
2.4	Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten	11
2.5	FOURIER-Transformation	11
2.6	Delta-Distribution	12
2.7	GREEN'sche Funktion zur Lösung inhomogener linearer DGL . . .	13
3	Grundbegriffe und MAXWELL-Gleichungen	15
3.1	Kräfte und Punktladungen	15
3.2	Ladungs- und Stromdichte, Ladungserhaltung	15
3.3	Die MAXWELL-Gleichungen	17
3.4	Konstruktion der MAXWELL-Gleichungen	17
3.5	Integrale Formulierung der MAXWELL-Gleichungen	20
3.6	Induktionsgesetz für Leiterschleifen	21
4	Elektrostatik	23
4.1	Grundgleichungen und elektrostatisches Potential	23
4.2	Kugelsymmetrische Ladungsverteilung	23
4.3	Feld einer beliebigen räumlich begrenzten Ladungsverteilung . .	24
4.4	Feld eines elektrischen Dipols	25
4.5	Fernfeld einer räumlich eingegrenzten Ladungsverteilung	26
4.6	Randbedingungen	31
4.7	Leiter im elektrischen Feld	31
4.8	Beispiele	32

Kapitel 1

Einleitung

Gegenstand der Vorlesung ist die (klassische) Theorie der Elektrischen Felder ausgehend von den MAXWELL-Gleichungen (1864):

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho$$

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}$$

für die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} in Abhängigkeit von Ladungs- und Stromverteilung $\rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ sollen physikalische Erscheinungen geschildert werden.

Die Elektrodynamik ist ein Teil des Standardmodells der Teilchenphysik, das einheitlich Teilchen und ihre Wechselwirkungen beschreibt.

Klassische Elektrodynamik ist ein Grenzfall der Quantenelektrodynamik (gültig für kleine Impuls- und Energiebeträge, große Brechungszahlen für Photonen).

Sie ist im Einklang mit der speziellen Relativitätstheorie (c ist implizit in den MAXWELL-Gleichungen enthalten). Viele interessante Effekte von Materie können mit klassischer Theorie nicht beschrieben werden.

Zum Beispiel: Wann sind Atome stabil? Wann ist Eisen ferromagnetisch? Warum wird z.B. Blei bei tiefen Temperaturen supraleitend? Für diese Fragen werden Quanteneffekte wichtig.

Kapitel 2

Mathematische Hilfsmittel

Literaturtipp: Mathematischer Einführungskurs Physik

2.1 Skalar- und Vektorfelder

Felder entsprechen Größen, die an jedem Raumpunkt einen bestimmten Wert haben, der zeitabhängig sein kann.

1. skalare Felder: $\phi = \phi(x, y, z, t)$

Bsp.: Temperatur, Druck, Ladung, Energie

2. Vektorfelder: $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$

Bsp.: Geschwindigkeitsverteilung in einem strömenden Gas, Wärmestromdichte

2.2 Integrale auf Feldern

Integrale über skalare Felder werden wie bekannt gebildet; sie sind zu vermeiden.

Integriert man über ein Vektorfeld, spielt die Richtungsinformation eine entscheidende Rolle. Man unterscheidet je nach Dimension des Parameterbereichs von Linien-, Flächen- und Volumenintegralen.

a. Linienintegrale

$$\varphi = \int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

Wir parametrisieren die Kurve durch $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$ und erhalten somit

$$\varphi = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}(\tau)) \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} d\tau$$

Ein Spezialfall des Linienintegrals ist das sogenannte **geschlossene Linienintegral**, welches durch \oint gekennzeichnet wird.

b. Flächenintegrale

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{mit } d\mathbf{A} = dA \cdot \mathbf{n}$$

Ganz analog zu **a.** kann die Fläche $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ parametrisiert werden. Es ist jedoch beim Bilden der Funktionaldeterminante auf die Richtung des Flächenelements zu achten. Die beiden möglichen Lösungen unterscheiden sich natürlich nur um ein Vorzeichen. Wir erhalten also

$$\Phi = \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \mathbf{B}(u, v) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv$$

Physikalisch lässt sich ein Flächenintegral als sogenannter **Fluss** interpretieren.

c. Volumenintegrale

$$Q = \iiint_G dV \cdot \rho(\mathbf{r}) = \iiint_G d^3r \cdot \rho(\mathbf{r}) =$$

Beim Volumenintegral wird wiederum (nicht wie beim Flächenintegral) das Vorzeichen des Volumenelements vernachlässigt, da physikalisch die *Richtung* des Volumens nur sehr selten wirklich von Bedeutung ist. Mit entsprechender Parametrisierung $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w)$ ergibt sich

$$Q = \int_{w_1}^{w_2} \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \rho(u, v, w) \cdot \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right) \right| du dv dw$$

2.3 Vektorielle Ableitungen und Integrale

a. Gradient

Der Gradient $\text{grad } \varphi$ eines Skalarfeldes beschreibt dessen Änderung und steht senkrecht auf den Äquipotentialflächen (oder allgemeiner: Niveaumengen). Der Gradient lässt sich durch den Nabla-Operator ausdrücken und lautet in kartesischen Koordinaten:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Wichtig ist, dass ∇ ein vektorieller Differenzialoperator ist. Er folgt Ableitungsregeln, wie etwa der Kettenregel, und $\nabla \varphi$ verhält sich unter Koordinatentransformation wie ein Vektor.

Andere Schreibweisen: $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \partial_{\mathbf{r}}, \nabla_{\mathbf{r}}$

Beispiele:

$$\nabla |\mathbf{r}| = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \mathbf{e}_r$$

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}|} = -\frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$$

b. Divergenz (Quellenstärke eines Vektorfeldes)

Die Divergenz $\text{div } \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}$ ist ein Skalar unter Koordinatentransformation und kann als **lokale Quellenstärke** interpretiert werden. Häufig benötigt man auch den LAPLACE-Operator, der die *zweite Ableitung* repräsentiert.

$$\text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi$$

Beispiele:

$\text{div } \mathbf{r} = 3$ (Anzahl der Dimensionen)

$$\text{div}(\varphi \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\varphi \mathbf{A}) = \mathbf{A}(\nabla \varphi) + \varphi(\nabla \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \text{grad } \varphi + \varphi \cdot \text{div } \mathbf{A}$$

c. Rotation (Wirbelstärke eines Vektorfeldes)

Die Rotation $\text{rot } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B}$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

kann als **lokale Wirbelstärke** verstanden werden. Ihre Komponenten lassen sich auch als

$$(\nabla \times \mathbf{B})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot B_k$$

darstellen wobei ϵ_{ijk} der total antisymmetrische Tensor 3. Stufe ist.

Beispiele:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0$$

d. GAUSS'scher Satz

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{E} \cdot dV = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

Der Satz von GAUSS verknüpft Eigenschaften im Inneren eines Volumens mit dem Verhalten auf dem Rand.

e. GREEN'scher Satz

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \oint_{\partial V} (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) d\mathbf{A}$$

f. STOKES'scher Satz

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$$

Analog zu GAUSS'schen Satz verknüpft der Satz von STOKES das Verhalten eines Feldes auf einer Fläche mit dem auf dem Rand der Fläche. Für geschlossene Flächen gilt

$$\oint_{S=\partial V} \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

2.4 Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Kartesische /Kugel-/Zylinderkoordinaten sind hier wichtig.

$$\text{z.B.: } \nabla_x \psi = \partial_x \psi \mathbf{e}_x + \partial_y \psi \mathbf{e}_y + \partial_z \psi \mathbf{e}_z$$

$$\nabla_\theta \psi = \frac{\partial}{\partial r} \psi \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \psi \mathbf{e}_\phi$$

$$\text{Generell: } (\nabla \psi)_u \equiv (\nabla \psi) \mathbf{e}_u = \frac{1}{g_u} \frac{\partial \psi}{\partial u} \quad \text{mit } g_u = \left| \frac{\partial \psi}{\partial u} \right|$$

2.5 FOURIER-Transformation

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Verallgemeinert auf n Dimensionen ergibt sich:

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^n r$$

a. Differentiation

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

b. Faltung

$$(f * g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) G(s) ds$$

$$\widetilde{(f * g)}(\omega) = \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega)$$

c. Rechenregeln

$$\begin{aligned}
f'(t) &\leftrightarrow i\omega \tilde{f}(\omega) \\
-i t f(t) &\leftrightarrow \tilde{f}'(\omega) \\
f(t+a) &\leftrightarrow e^{i\omega a} \tilde{f}(\omega) \\
e^{i\omega t} f(t) &\leftrightarrow \tilde{f}(\omega-a) \\
f(at) &\leftrightarrow \frac{1}{|a|} \tilde{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \\
f^*(t) &\leftrightarrow \tilde{f}^*(\omega) \\
\tilde{\tilde{f}}(t) &\leftrightarrow f(-t)
\end{aligned}$$

2.6 Delta-Distribution

Die Delta-Distribution ist über folgende Eigenschaften definiert:

1.

$$\delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \\ \infty & \text{für } \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \end{cases}$$

2.

$$\int_{\mathbf{r}_0 \in V} dV \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 1$$

Alle Aussagen gelten analog für die Delta-Distribution $\delta(x)$ in einer Dimension. Bei höherdimensionalen Deltadistributionen gilt allerdings nur in kartesischen Koordinaten:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot \delta(z - z_0)$$

Faltet man die Delta-Distribution mit einer Funktion $f(\mathbf{r})$, so ergibt sich aus ihren Eigenschaften:

$$\int_{\mathbf{r}_0 \in V} dV \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0)$$

2.7 GREEN'sche Funktion zur Lösung inhomogener linearer DGL

Wir betrachten die lineare, inhomogene Differentialgleichung

$$L \phi(x_1, \dots, x_n) = \rho(x_1, \dots, x_n) \text{ oder kurz } L\phi = \rho$$

wobei L ein linearer Operator und ρ die Inhomogenität sein soll.

Die GREEN'sche Funktion $G(x, x')$ zum Operator L ist die Lösung der Differentialgleichung mit δ -förmiger Inhomogenität.

$$L G(x, x') = \delta(x - x') [= \delta(x_1 - x'_1) \cdot \dots \cdot \delta(x_n - x'_n)]$$

Wenn g bekannt ist, dann kann die Lösung für beliebige Inhomogenität durch Superposition gewonnen werden.

$$\phi(x) = \int dx' G(x, x') \rho(x')$$

Den Beweis hierfür erhält man leicht durch Einsetzen:

$$L \phi(x) = \int dx' L G(x, x') \rho(x') = \rho(x)$$

Kapitel 3

Grundbegriffe und MAXWELL-Gleichungen

3.1 Kräfte und Punktladungen

Aus der Erfahrung ergibt sich für eine ruhende Ladung

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = Q \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

Dabei ist die Ladung Q eine Körpereigenschaft und \mathbf{E} eine Eigenschaft, die die Umwelt charakterisiert. Über den Vergleich der Kraft auf zwei Körper $\mathbf{F}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{Q_1}{Q_2} \mathbf{F}_2(\mathbf{r}, t)$ lässt sich so eine Einheit für die Ladung definieren.

Bei bewegten Ladungen beobachten wir etwas anderes. Die Kraft hat hier die Form

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

3.2 Ladungs- und Stromdichte, Ladungserhaltung

Über eine Ladung in einem Volumenelement lässt sich der Begriff der Ladungsdichte definieren.

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{dQ}{dV}$$

Eine Ladungsänderung nennen wir schließlich den elektrischen Strom.

$$-I := \dot{Q} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Betrachten wir nun den Stromfluss durch ein Flächenelement $d\mathbf{A}$. Die Ladungsträger, welche durch diese Fläche wandern haben die Geschwindigkeit \mathbf{v} , sodass anschaulich ein kleines Volumenelement $dV = \mathbf{v} dt \cdot d\mathbf{A}$ aufgespannt wird:

$$dQ = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) dt d\mathbf{A}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -I = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} =: \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A}$$

Wir nennen $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ der Anschaulichkeit nach die **Stromdichte**, denn man sieht leicht:

$$\iint_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = I$$

Setzen wir nun dies in die Gleichung für die Ladungserhaltung ein:

$$0 = \dot{Q} + I = \iiint_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t} + \oiint_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = \iiint_V dV \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \mathbf{r}} \right)$$

Da dies für für alle möglichen Volumina gelten soll, folgt daraus die **Kontinuitätsgleichung**:

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

Für den Grenzfall eines unendlich großen Volumens gilt zunächst $\mathbf{j} \rightarrow 0$ auf der Oberfläche, woraus man auf die für diesen Grenzfall logische Konsequenz schließen kann, dass

$$\dot{Q} = - \oiint \mathbf{j} d\mathbf{A} = 0$$

die Ladung im gesamten Raum erhalten ist.

Mit der eingeführten Stromdichte \mathbf{j} kann man nun auch den Ausdruck der LORENTZkraft-Dichte $\mathbf{f} := \frac{\mathbf{F}}{V}$ definieren:

$$d\mathbf{F} = dQ(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\Rightarrow \mathbf{f} = \rho(\mathbf{r}, t) \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

3.3 Die MAXWELL-Gleichungen

Die MAXWELL-Gleichungen wurden 1864 vom schottischen Physiker James Clerk MAXWELL aufgestellt und bilden ein Differentialgleichungssystem für die Felder $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung beschreiben sie die gesamte (klassische) Elektrodynamik, da ρ und \mathbf{j} die Quellen und Wirbel des \mathbf{B} - und \mathbf{E} -Feldes eindeutig bestimmen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} &= 0 & \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} &= \mathbf{j} \end{aligned}$$

Nun könnte man fragen, ob die Beschreibung der Elektrodynamik über lokale Felder denn zweckmäßig ist oder ob man sie nicht eliminieren könnte. Das COULOMB-Gesetz wäre ein Beispiel für diese Fernwirkungstheorie. Zwei Gründe sprechen für die lokale Feldtheorie: sie ist zum einen schlichtweg einfacher mathematisch zu beschreiben und zum anderen unabhängig vom Vorhandensein von Materie und demzufolge Ladungsträgern.

3.4 Konstruktion der MAXWELL-Gleichungen

Versucht man die Elektrodynamik zu beschreiben, so kann man sich zu Beginn von phänomenologischen Seite diesem Problem nähern und fordern, dass Symmetrien in Zeit und Raum die Gültigkeit der Gleichungen erhalten sollen. Dies ist eine gängige physikalische Vorgehensweise; man verlangt, dass die beschriebene (reale) Physik unabhängig von der Wahl der Koordinaten sein soll. Wir fordern also zunächst, dass die Form der Gleichungen unter den Symmetrietransformationen der Rauminversion ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$) und der zeitlichen Reversibilität ($t \rightarrow -t$) invariant ist. Zudem wollen wir uns als Ziel setzen, die Gesetze möglichst einfach zu formulieren, das heißt, es sollen maximal Differentialgleichungen 1. Ordnung auftauchen. Betrachten wir nun also zunächst das Transformationsverhalten verschiedener Objekte:

Objekt	$t \rightarrow -t$	$\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$	Bemerkung
$t, \frac{\partial}{\partial t}$	-	+	Definition
$\mathbf{r}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$	+	-	Definition
$\dot{\mathbf{r}}$	-	-	durch Multiplikation der Vorzeichen erhalten
$\ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{F}, \mathbf{f}$	+	-	Erfahrung aus Mechanik: $\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}}{m}$
Q, ρ	+	+	Annahme
$\mathbf{j} (= \rho \cdot \dot{\mathbf{r}})$	-	-	
\mathbf{E}	+	-	Vektor, erhalten aus: $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$
\mathbf{B}	-	+	Pseudovektor
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}$	+	+	Skalar
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}$	-	-	Pseudoskalar
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}$	+	+	Pseudovektor
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}$	-	-	Vektor
$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$	-	-	Vektor
$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$	+	+	Pseudovektor

Da wir gefordert hatten, dass unsere gewünschten Gleichungen invariant unter den Transformationen sein sollten, dürfen wir nun nur die Größen mit dem gleichen Transformationsverhalten verknüpfen:

1. ++ Skalar $\rho, \operatorname{div} \mathbf{E}$

$$\Rightarrow \rho = \epsilon_0 \cdot \operatorname{div} \mathbf{E} \quad (\epsilon_0 \text{ ist beliebige Konstante})$$

2. -- Vektor $\mathbf{j}, \operatorname{rot} \mathbf{B}, \dot{\mathbf{B}}$

$$\Rightarrow \mathbf{j} = \alpha \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{\mu_0} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad (\alpha, \frac{1}{\mu_0} \text{ sind beliebige Konstanten})$$

3. -- Skalar $\operatorname{div} \mathbf{B}$

$$\Rightarrow 0 = \operatorname{div} \mathbf{B}$$

4. ++ Vektor $\operatorname{rot} \mathbf{E}, \dot{\mathbf{B}}$

$$\Rightarrow 0 = \operatorname{rot} \mathbf{E} + \beta \cdot \dot{\mathbf{B}} \quad (\beta \text{ ist beliebige Konstante})$$

5. +− Vektor $\mathbf{E}, (\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}})$

$$\Rightarrow 0 = \mathbf{E}$$

6. −+ Vektor \mathbf{B}

$$\Rightarrow 0 = \mathbf{B}$$

Das System 1-4 ist ein widerspruchsfreies und vollständiges System von Differentialgleichungen für das \mathbf{E} - und das \mathbf{B} -Feld, da diese durch ihre Quellen und Wirbel jeweils eindeutig bis auf Konstanten bestimmt sind. Diese werden problemabhängig aus den gegebenen Randbedingungen bestimmt. Die Gleichungen 5 und 6 werden aus naheliegenden Gründen weggelassen; sie stehen zwar nicht im Widerspruch zu den ersten 4 Gleichungen, doch würde das Differentialgleichungssystem mit ihnen nur noch die Trivallösung ohne physikalisch interessante Bedeutung liefern.

Konstantendiskussion:

1. Die Konstante ϵ_0 ist zunächst frei wählbar, da die Ladung Q nur bis auf einen Faktor genau bestimmt ist. Für die Wahl von ϵ_0 gibt es verschiedene Ansätze:
 - (a) ϵ_0 wird als 1 definiert. Diese Definition wird im cgs-System umgesetzt.
 - (b) $4\pi \cdot \epsilon_0$ wird 1 gesetzt. Das sich aus dieser Definition ergebende Einheitensystem nennt man das GAUSS-System.

Im SI-System wird dagegen ϵ_0 über μ_0 festgelegt, wobei für μ_0 gilt:

$$[\mu_0] = \frac{[\mathbf{E}]}{[\mathbf{I}]} \frac{[I]^2}{[I]} = \frac{[\mathbf{f}]}{[\mathbf{j}]} \frac{[I]}{[\mathbf{I}]} = \frac{[\mathbf{F}]}{[\mathbf{I}]^2} = \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

ϵ_0 erhält man nun daraus über die Fundamentalbeziehung im SI-System:

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

2. Die Konstante α erhalten wir, in dem wir von Gleichung (2) die Divergenz bilden und dann $\text{div } \mathbf{j}$ aus der Kontinuitätsgleichung einsetzen:

$$(\epsilon_0 + \alpha) \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{E} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \alpha = -\epsilon_0$$

3. Dass die Konstante β im SI-System gleich 1 sein muss, erhält man aus Überlegungen, dass die MAXWELL-Gleichungen von Inertialsystem zu Inertialsystem invariant sein müssen.

Bemerkung: Im GAUSS-System erhält man aufgrund der Wahl der Konstanten für die LORENTZ-Kraft:

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B})$$

woraus folgt:

$$\epsilon_0 \mu_0 \cdot \beta = \frac{1}{c^2} \text{ und } \beta = \frac{1}{c}, \mu_0 = \frac{4\pi}{c}$$

3.5 Integrale Formulierung der MAXWELL-Gleichungen

Die integrale Formulierung der MAXWELL-Gleichungen ist äquivalent zu der differentiellen und ergibt sich entweder aus Volumen- oder Flächenintegration auf beiden Seiten der entsprechenden Gleichung und dann der Anwendung der Integralsätze von GAUSS oder STOKES:

i) $\epsilon_0 \text{div } \mathbf{E} = \rho$	\Leftrightarrow	$\epsilon_0 \oint \mathbf{dA} \cdot \mathbf{E} = Q_{\text{in}}$
ii) $\text{div } \mathbf{B} = 0$	\Leftrightarrow	$\oint \mathbf{dA} \cdot \mathbf{B} = 0$
iii) $\text{rot } \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0$	\Leftrightarrow	$\oint_{\partial A} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E} + \iint_A \mathbf{dA} \cdot \dot{\mathbf{B}} = 0$
iv) $\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} - \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{j}$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{\mu_0} \oint_{\partial A} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{B} - \epsilon_0 \iint_A \mathbf{dA} \cdot \dot{\mathbf{E}} = I_{\text{in}}$

Bemerkung:

\mathbf{r} und t sind unabhängige Variablen, das heißt, dass die Felder \mathbf{B} und \mathbf{E} jeweils von \mathbf{r} und t abhängen, nicht aber von $\dot{\mathbf{r}}$. Zudem ist es aufgrund unserer Forderungen bei der Konstruktion der MAXWELL-Gleichungen verboten, dass eine explizite Abhängigkeit der Grundgleichungen von \mathbf{r} und t vorliegt, da es sonst außergewöhnliche Zeiten und Orte gäbe, was aber die geforderte Homogenität verletzen würde.

3.6 Induktionsgesetz für Leiterschleifen

Zunächst definieren wir den magnetischen Fluss Φ durch eine Fläche \mathbf{A} im Raum:

$$\Phi := \iint_{\mathbf{A}} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

Man sieht leicht, dass sich der Fluss Φ bei Flächenänderung und Änderung der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} ändert:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Delta \left(\iint_{\mathbf{A}} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \right) = \iint_{\mathbf{A}} d\mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{B} + \iint_{\Delta\mathbf{A}} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \\ &= \Delta t \iint_{\mathbf{A}} d\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \oint_{\partial\mathbf{A}} (\mathbf{v} \Delta t \times d\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B} \\ &= \Delta t \left(\iint_{\mathbf{A}} d\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{B}} - \oint_{\partial\mathbf{A}} d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) \\ \Rightarrow \dot{\Phi} &= \iint_{\mathbf{A}} d\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{B}} - \oint_{\partial\mathbf{A}} d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

Nach Anwenden der dritten MAXWELL-Gleichung erhält man das **Induktionsgesetz**:

$$\dot{\Phi} = - \oint \partial A d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -U_{\text{induziert}}$$

Das letzte Minuszeichen nennt man auch die **LENZ'sche Regel**, welche besagt, dass ein induzierter Strom immer ein Magnetfeld erzeugt, welches seiner eigenen Ursache ($U_{\text{induziert}}$) entgegengerichtet ist.

Auffällig bei dem Induktionsgesetz ist seine Ähnlichkeit mit der auf eine freie Ladung wirkende Kraft $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Darin liegt auch die Begründung für ebenjenes Gesetz:

Wir stellen uns eine Leiterschleife vor, welche an einer Stelle durchbrochen ist, damit kein Strom durch die Schleife fließen könnte. Auf einen sich in dieser Schleife bewegendem Ladungsträger wirkt die Kraft:

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) =: Q\mathbf{E}'$$

Man sieht, dass das \mathbf{E} -Feld abhängig vom Bezugssystem ist, daher haben wir für \mathbf{E}' ein Bezugssystem konstruiert, welches sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} gegenüber dem Laborsystem bewegt. Damit haben wir im mitbewegeten Bezugssystem erreicht, dass $\mathbf{v}' = 0$ ist. Bilden wir nun das Wegintegral für ein Teilchen entlang der Leiterschleife im \mathbf{E} -Feld erhalten wir:

$$\oint_{\text{Schleife}} d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \oint_{\text{Schleife}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}' = \int_{\text{Beginn}}^{\text{Ende}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}' = U_{\text{induziert}}$$

Kapitel 4

Elektrostatik

4.1 Grundgleichungen und elektrostatisches Potential

In der Elektrostatik betrachten wir, wie der Name schon andeutet, zeitunabhängige Felder. Dementsprechend kann man als erste Konsequenz daraus folgern, dass $\dot{\mathbf{E}} = 0$ und $\dot{\mathbf{B}} = 0$ ist. Fallen nun in den MAXWELL-Gleichungen alle Beiträge mit $\dot{\mathbf{E}}$ und $\dot{\mathbf{B}}$ weg, kann man die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} getrennt voneinander betrachten. Laienhaft gesprochen entkoppeln wir die Phänomene "Elektrizität" und "Magnetismus". Des Weiteren betrachten wir in der Elektrostatik nur ruhende Ladungen, woraus folgt, dass außerdem $\mathbf{j} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = 0$ ist. Damit erhalten wir aus der dritten MAXWELL-Gleichung, dass $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ gilt, wodurch das Einführen eines Potentials für \mathbf{E} möglich wird:

$$\mathbf{E} =: -\text{grad } \varphi$$

Mit $\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ erhält man daraus die **POISSON-Gleichung** der Elektrostatik:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Für $\Delta \varphi = 0$ nennt man die POISSON-Gleichung auch **LAPLACE-Gleichung**.

4.2 Kugelsymmetrische Ladungsverteilung

Für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung gilt:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(|\mathbf{r}|) = \rho(r) \Rightarrow \varphi(\mathbf{r}) = \varphi(r)$$

Dem kann man entnehmen, dass die Äquipotentialflächen Kugelflächen sein müssen und somit der Gradient von φ auch parallel zum Ortsvektor stehen muss. ($\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{e}_r$) Für das E-Feld gilt weiterhin:

$$\epsilon_0 \oint_{\partial Kugel} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} \stackrel{A \parallel E}{=} \epsilon_0 \oint_{\partial Kugel} dA \cdot E = 4\pi\epsilon_0 \cdot r^2 \cdot E(r) = Q_{in}(r)$$

Damit ergibt sich für das E-Feld und das Potential:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q_{in}(r)}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \mathbf{e}_r$$

$$\varphi(r) = \frac{Q_{in}(r)}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} + \varphi_0 \quad \text{mit } \varphi_0 = \varphi(r \rightarrow 0)$$

4.3 Feld einer beliebigen räumlich begrenzten Ladungsverteilung

1. Punktladung bei \mathbf{r}_0 :

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

2. Mehrere Punktladungen (Superpositionsprinzip anwendbar wegen Linearität der MAXWELL-Gleichungen):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

3. Kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int dV' \frac{Q(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Die allgemeine Gleichung für die kontinuierliche Ladungsverteilung ergibt sich aus der Lösung der POISSON-Gleichung mithilfe der bekannten GREEN'schen Funktion für eine Punktladung der Größe 1: $G(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot |\mathbf{r}|}$

$$\begin{aligned} -\epsilon_0 \cdot \Delta\varphi &= \rho \\ \Rightarrow -\epsilon_0 \cdot \Delta G(\mathbf{r}) &= \delta(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Dabei gilt: $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ aufgrund der Translationsinvarianz der GREEN-Funktion.

$$\Rightarrow \varphi(\mathbf{r}) = \int dV' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \rho(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Aus dieser allgemeinen Form lässt sich natürlich auch im umgekehrten Falle das E-Feld einer Punktladung in \mathbf{r}_0 herleiten. Dafür muss nur $\rho(\mathbf{r}) = Q \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ gesetzt werden:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int dV' \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_{= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}}$$

4.4 Feld eines elektrischen Dipols

Ein Dipol besteht aus zwei gleich großen, entgegengesetzt geladenen Ladungen $\pm Q$, welche einen festen Abstand \mathbf{a} voneinander entfernt sind. Daher ergibt es Sinn, als charakteristische Eigenschaft des Dipols das **Dipolmoment** \mathbf{p} wie folgt zu definieren:

$$\mathbf{p} := Q \cdot \mathbf{a}$$

Für das Potentialfeld eines solchen Dipols gilt offensichtlich:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|} \right)$$

Für große Abstände von diesem Dipol, d.h. $\mathbf{r} \gg \mathbf{a}$ wollen wir das Potentialfeld TAYLOR-entwickeln, um besser mit ihm arbeiten zu können. Dazu betrachten wir den Term $\frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|}$ ein wenig genauer:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|} \cong \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{1}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} - \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

Damit gilt für das Potential:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r} - \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{1}{r} \right) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3}$$

und das E-Feld:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla(\mathbf{p} \cdot \nabla) \frac{1}{r} = \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{(\nabla \circ \nabla) \frac{1}{r}}_{(*)} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2}{r^5}\end{aligned}$$

$$\text{mit } (*) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \circ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{1}{|\mathbf{r}|} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \circ \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{3\mathbf{r} \circ \mathbf{r} - \mathbb{1} \cdot r^2}{|\mathbf{r}|^5}$$

4.5 Fernfeld einer räumlich eingegrenzten Ladungsverteilung

Wenn man das Fernfeld einer räumlich begrenzten Ladungsverteilung ermitteln möchte, spricht man in diesem Zusammenhang auch immer von der sogenannten **Multipolentwicklung**.

Wir betrachten nun eine räumlich eingegrenzte Ladungsverteilung der Dichte ρ , für die zunächst einmal allgemein gilt:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int dV \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Unter der Annahme, dass $|\mathbf{r}| \gg a$ gilt (wobei a die größte räumliche Ausdehnungsrichtung der Ladungsverteilung ist), werden wir nun den Term $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ entwickeln:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\mathbf{r}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right)^n \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})^2 - r'^2 r^2}{r^5} + \dots$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int dV' \rho(\mathbf{r}') + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \int dV' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') + \sum_{i,j} \frac{x_i x_j}{r^5} \int dV' \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) + \dots \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{\frac{Q}{r}}_{\sim \frac{1}{r}} + \underbrace{\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3}}_{\sim \frac{1}{r^2}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{r}}{r^5}}_{\sim \frac{1}{r^3}} + \dots \right]\end{aligned}$$

Die einzelnen Summanden bezeichnet man auch als **Multipolmomente** einer Ladungsverteilung:

$$\begin{aligned}
 \text{Monopol:} \quad Q &= \int dV \rho(\mathbf{r}) \\
 \text{Dipol:} \quad \mathbf{p} &= \int dV \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \\
 \text{Quadrupol:} \quad \hat{\mathbf{D}} &= \int dV \rho(\mathbf{r}) (3\mathbf{r}\mathbf{r} - \mathbb{1}r^2) \\
 \text{Oktupol:} \quad &\dots \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Im Allgemeinen hängen die Multipolmomente vom Bezugspunkt ab, nur das erste nicht verschwindende Moment ist unabhängig vom selbigen.

Der Quadrupol-Tensor $\hat{\mathbf{D}}$ hat dabei folgende Eigenschaften:

- $\mathbf{D}_{ij} = \mathbf{D}_{ji}$, insbesondere $\text{Spur } \hat{\mathbf{D}} = \sum_j \mathbf{D}_{jj} = \int dV (3r^2 - 3r^2) = 0$
- $\hat{\mathbf{D}}$ hat 5 unabhängige Komponenten
- $\hat{\mathbf{D}}$ kann hauptachsentransformiert werden
- $\text{Spur } \hat{\mathbf{D}} = 0$ ist $\hat{\mathbf{D}} = 0$ für Kugel und Kegel

Aufgrund der charakteristischen Richtungsabhängigkeit ist es sinnvoll, das Potential der Ladungsverteilung mit Kugelflächenfunktionen zu entwickeln. Ausgangspunkt ist hierbei wieder das allgemeine Potential für eine beliebige Ladungsverteilung:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int dV' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}')$$

Wobei G die GREEN'sche Funktion ist, welche die POISSON-Gleichung mit δ -förmiger Inhomogenität löst:

$$-\epsilon_0 \Delta G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$$

Als nächstes separieren wir die Winkel- und Richtungsabhängigkeit des Differentialoperators Δ , welches sich am besten explizit in Kugelkoordinaten vornehmen lässt.

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}}_{=:\frac{1}{r^2} \Lambda(\theta, \phi)}$$

Nun wenden wir auf die Differentialgleichung

$$\Delta Y(\theta, \phi) = -l(l+1) Y(\theta, \phi) \quad l \in \mathbb{N}$$

den Separationsansatz $Y(\theta, \phi) = P(\theta) \cdot Q(\phi)$ an und erhalten zunächst für $Q(\phi)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\phi^2} Q(\phi) &= -m^2 Q(\phi) \\ \Rightarrow Q &= e^{im\phi} \quad \text{mit} \quad m \in [-l, l] \subset \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Substituieren wir nun oben $\cos \theta = x$, so führt dies auf eine verallgemeinerte **LEGENDRE-Differentialgleichung** für $P(x)$

$$\left(\frac{d}{dx} (1+x^2) \frac{d}{dx} \left(-\frac{m^2}{1-x^2} + l(l+1) \right) \right) P_l^m(x) = 0$$

Es genügt diese für $m = 1$ zu lösen, denn:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{d}{dx} \right)^{|m|} P_l(x)$$

Somit bleibt nur noch folgende **LEGENDRE-Differentialgleichung** übrig:

$$(1-x^2)P_l'' - 2xP_l' + l(l+1)P_l = 0$$

Deren Lösungen P_l sind sogenannte **LEGENDRE-Polynome**:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 + 1)^l \quad l \in \mathbb{N}$$

(Die ersten P_l lauten explizit: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, ...) Nun erhalten wir aus P und Q unsere ursprüngliche, separierte Funktion $Y(\theta, \phi)$:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l(\cos \theta) e^{im\phi}$$

(Die ersten Y_{lm} lauten explizit: $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$, $Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$)

Bemerkung zu den Y_{lm} :

Die Y_{lm} sind sogenannte **Kugelflächenfunktionen** und Lösungen der Differentialgleichung

$$\left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + l(l+1) \right) Y_{lm}(\theta, \phi) = 0$$

$$l \in \mathbb{N}, m \in [-l, l]$$

Sie stellen zudem eine Orthonormalbasis für alle Funktionen auf Kugeloberflächen dar. Dazu überprüfen wir zunächst die Orthogonalität der Basiselemente zueinander:

$$\langle Y_{lm}, Y_{l'm'} \rangle =: \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} \pi d\phi Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Nach bekannter Vorgehensweise lässt sich nun jede beliebige Funktion f auf einer Kugeloberfläche aus den Y_{lm} darstellen:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

$$\text{mit } f_{lm} = \langle Y_{lm}, f \rangle = \int d(\cos \theta) \int d\phi Y_{lm}^*(\theta, \phi) f(\theta, \phi)$$

Somit lässt sich auch mit ihnen die allgemeine Lösung der LAPLACE-Gleichung $\Delta \varphi = 0$ darstellen:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(A_l \cdot r^l + B_l \cdot r^{-l-1} \right) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Wir können nun zur Entwicklung von $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ zurückkehren:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l \cdot r^l + B_l \cdot r^{-l-1} \right) P_l(\cos \gamma) \quad \text{mit } \gamma = \angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

(γ ohne ϕ -Abhängigkeit wegen axialer Symmetrie)

Wähle nun für die A_l, B_l , dass $\mathbf{r} \parallel \mathbf{r}'$ ist und führe so die Entwicklung fort

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(r_{<} \frac{d}{dr_{<}} \right)^l \frac{1}{r_{>}} \quad \text{mit } r_{<} := \min\{r, r'\}, r_{>} \text{ analog} \\
&= \frac{1}{r_{<}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_{>}}{r_{<}} \right)^l \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{>}^l}{r_{<}^{l+1}} P_l(\cos \gamma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_l(\cos \gamma) &= \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \\
&\quad (\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi'))
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{>}^l}{r_{<}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Wir haben nun $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ vollständig faktorisiert und können nun das Potential einer Ladungsverteilung aufstellen:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \underbrace{\int dV' \rho(\mathbf{r}') Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l}_{q_{lm} \hat{=} \text{Multipolmomente}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}$$

Aus dem allgemeinen Ausdruck q_{lm} für die Multipolmomente können wir nun auch die uns bereits bekannten Momente ableiten:

$$\begin{aligned}
q_{00} &= \sqrt{4\pi} \int dV' \rho(\mathbf{r}') Y_{00} = Q \\
q_{10} &= \int dV' \rho(\mathbf{r}') \underbrace{r' \cos \theta'}_{z'} = p_z \\
q_{1,\pm 1} &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int dV' \rho(\mathbf{r}') r' \sin \theta' e^{i\phi'} = (p_x \mp i p_y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$q_{2m} \rightarrow 5 \text{ skalare Komponenten} \rightarrow \text{Quadrupol}$$

4.6 Randbedingungen

Die allgemeine Lösung der POISSON-Gleichung $\epsilon_0 \Delta \varphi = \rho$ hängt von ihren Randbedingungen ab. Die vollständige Lösung erhält man durch Addition der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung: $\varphi = \varphi_p + \varphi_h$. Es bietet sich an die Randbedingungen in den homogenen Teil einzubauen (bisher haben wir immer angenommen, dass $\varphi(\infty) = 0$). Mathematisch liefert uns eine einzige Randbedingung auf einem geschlossenen Rand R eine physikalisch eindeutige Lösung für eine Differentialgleichung 2. Ordnung, da es sich durch den geschlossenen Rand effektiv um zwei Randbedingungen handelt. Wir unterscheiden dabei verschiedene gängige Varianten sich dem Problem zu nähern:

1. $\varphi(R)$ ist gegeben

Diese Variante nennt man auch die DIRICHLET-Randbedingung

2. $\frac{\partial \varphi}{\partial n}(R)$ ist gegeben

Diese Variante nennt man auch die VON-NEUMANN-Randbedingung

($\frac{\partial \varphi}{\partial n} := \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_n = -\mathbf{E}_n$ ist dabei die Normalenableitung)

3. $\alpha \varphi + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ ist gegeben

4.7 Leiter im elektrischen Feld

Bis jetzt hatten wir in der Elektrostatik nur ruhende Ladungen betrachtet. In Leitern gibt es allerdings bewegliche Ladungen im Inneren. Diese befinden sich im Gleichgewicht bei $\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = 0$. Daraus kann man folgern, dass $\varphi = \text{const.}$ im Inneren des Leiters und auf der Leiteroberfläche gilt. Dafür muss gelten, dass $\rho = 0$ im Leiterinneren ist. Außerdem folgt direkt, dass $\mathbf{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}}$ senkrecht zur Oberfläche stehen muss und dass es ausschließlich von **Oberflächenladungen** erzeugt wird. Um diese zu definieren betrachten wir ein Volumen ΔV auf dem Leiteroberflächenstück $\Delta \mathbf{A}$, welches die Ladung ΔQ in sich trägt.

$$\epsilon_0 \oint_{\partial \Delta V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \Delta Q \quad \Rightarrow \quad \epsilon_0 \Delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_n = \Delta Q$$

Darüber können wir uns die **Flächenladungsdichte** σ definieren, um die Oberflächenladungen beschreiben zu können:

$$\sigma := \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \epsilon_0 E_n$$

$$Q = \iint dA \cdot \sigma$$

Die Oberflächenladungen werden durch äußere elektrische Felder bestimmt und schirmen das Leiterinnere von diesen Feldern ab.

Betrachten wir nun den Innenraum eines Hohlleiters. Hier gilt genau wie bei einem normalen Leiter, dass auf der Leiteroberfläche das Potential konstant ist. Zudem ist der Innenraum ladungsfrei, woraus folgt, dass auch dort $\varphi = \text{const.}$ gilt uns somit auch $\mathbf{E} = 0$. Dieses Prinzip ist auch als **FARADAY'scher Käfig** bekannt.

Die Begründung für dieses Prinzip kann man auch direkt aus den MAXWELL-Gleichungen herleiten, denn es gilt $\text{div } \mathbf{E} = 0$ und $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ im Inneren des Hohlleiters. Jede Feldlinie im Inneren müsste demzufolge auf dem Rand anfangen und enden. Für eine Integration entlang einer Feldlinie $\int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = \Delta\varphi$ würde dies jedoch ein endliches $\Delta\varphi$ zwischen Anfangs- und Endpunkt liefern, welches im Widerspruch zu $\varphi = \text{const.}$ auf dem Rand stehen würde. Also muss $\mathbf{E} = 0$ im Inneren des Hohlleiters gelten.

4.8 Beispiele

A) Punktladung und ebene Leiterfläche

Wir betrachten eine Punktladung Q , welche sich im Abstand a von einer ebenen Leiteroberfläche befindet. Letztere sei entlang der y -Achse unseres Koordinatensystems ausgerichtet, während sich Q auf der x -Achse befindet. Demzufolge erhalten wir die POISSON-Gleichung:

$$-\epsilon_0 \Delta\varphi = Q \delta(\mathbf{r} - a\mathbf{e}_x)$$

mit der Randbedingung $\varphi(x=0) = 0$ auf der Leiteroberfläche. Wir wissen, dass die Feldlinien der Punktladung senkrecht auf die Leiteroberfläche aufkommen müssen. Daher können wir uns fragen, wie man eben jenes Feldlinienbild beschreiben könnte. Man erhält es durch das Einbringen einer zweiten, gedachten Ladung $-Q$ bei $-a\mathbf{e}_x$, sodass die gesamte Anordnung für $x > 0$ das gesuchte Feldlinienbild ergibt. Die imaginäre Punktladung bei $-a\mathbf{e}_x$ nennt man **Spiegelladung**. Die Begründung für dieses Phänomen ist, dass das Einbringen einer Leiteroberfläche in ein gegebenes Potential $\varphi(\mathbf{r})$ entlang einer Äquipotentialfläche

das Feld außerhalb des Leiters nicht ändert. Dort gilt weiterhin $-\epsilon_0 \Delta \varphi = \rho$ unverändert und die Randbedingungen sind effektiv identisch zu der Gleichung, welche das Feldlinienbild mithilfe der Spiegelladung beschreibt. Diese lautet hier:

$$-\epsilon_0 \Delta \varphi = Q (\delta(\mathbf{r} - a\mathbf{e}_x) - \delta(\mathbf{r} + a\mathbf{e}_x))$$

welche für das Potential liefert:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - a\mathbf{e}_x|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + a\mathbf{e}_x|} \right)$$

B) Kugeloberfläche in einem asymptotisch homogenen Feld

Wir betrachten eine leitende Kugel mit dem Radius R , welche sich im Ursprung des Koordinatensystems in einem homogenen elektrischen Feld \mathbf{E}_0 befindet. Für $|\mathbf{r}| > R$ gilt dementsprechend: $\Delta \varphi = 0$ mit den Randbedingungen $\varphi(|\mathbf{r}| = R) = \varphi_0 := 0$ und $\varphi(|\mathbf{r}| \rightarrow \infty) = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$ (Homogenität des Feldes). Aus Symmetrieüberlegungen erhalten wir außerdem, dass $\varphi(\mathbf{r}, R, \mathbf{E}_0)$ linear in \mathbf{E}_0 sein muss. Dementsprechend wählen wir den Ansatz $\varphi = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} G(r, R)$ mit den resultierenden Randbedingungen $G(r = R) = 0$ und $G(r \rightarrow \infty) = 1$, welcher nach Einsetzen in die LAPLACE-Gleichung folgende homogene DGL für G liefert:

$$\Delta \varphi = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} \left(\frac{4}{r} \frac{dG}{dr} + \frac{d^2 G}{dr^2} \right) = 0$$

Diese lösen wir mit dem Ansatz $G \sim r^n$:

$$4n + n(n+1) = 0$$

$$\Rightarrow n_1 = 0, n_2 = -3$$

$$\Rightarrow G = C_1 + \frac{C_2}{r^3}$$

$$\text{Rb. : } G(r \rightarrow \infty) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1$$

$$G(r = R) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -R^3$$

Also ergibt sich für φ :

$$\varphi = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{mit} \quad \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} = \mathbf{E}_0 \cdot R^3$$

Das äußere elektrische Feld induziert also offensichtlich ein Dipolmoment in der Kugel, welches für den zusätzlichen Term in φ verantwortlich ist.