Mathematik für Physiker I+II

Friedemann Schuricht

übertragen von
Lukas Körber und Friedrich Zahn

Wintersemester 2014/2015

Inhaltsverzeichnis

Überblick

Diese Vorlesung wird sich mit folgenden Tehmen befassen:

1. **Integration auf Mannigfaltigkeiten**
2. **Differenzialgleichungen**, sowohl gewöhnlich, als auch partiel
3. **Funktionalanalysis** in Banach- und Hilberträumen (insbesondere unendlich dimensionale Räume z.B. von Folgen und Funktionen)
4. **Funktionstheorie**, der Theorie von komplexwertigen Funktionen und z.B. $\mathbb{C}$-Differenzierbarkeit

Kapitel VIII

Integration auf Mannigfaltigkeiten

Literaturtipp: Königsberger Analysis 2, Springer

29 Mannigfaltigkeiten

Sei $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$ mit $q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, also q-fach stetig differenzierbar, wobei $V \subset \mathbb{R}^d$ offen ist, dann heißt φ **regulär**, falls

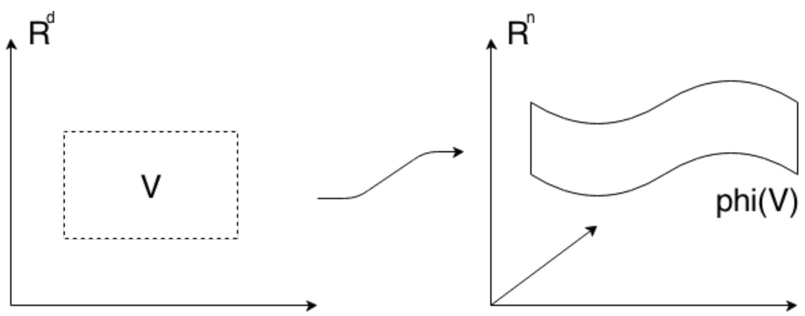
$$\varphi'(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \text{ regulär (d.h. injektiv)} \tag{29.1}$$

Falls φ regulär für alle $x \in V$ ist, heißt es auch **regulär auf V** beziehungsweise **reguläre** C^q**-Parametrisierung** (manchmal auch C^q-Immersion).
V ist dann der **Parameterbereich** von φ.
Bemerkung: $\varphi(V)$ wird selten auch **Spur** von φ genannt.

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass aus (29.1) sofort

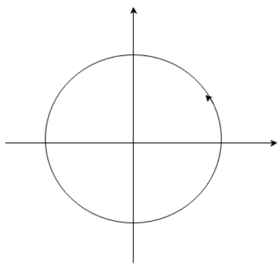
$$d \leq n \tag{29.2}$$

folgt. Dies sei in Kapitel VIII immer erfüllt! (29.2) ist außerdem äquivalent dazu, dass rang $\varphi'(x) = d$.



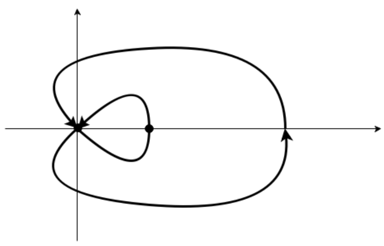
Beispiel 1 (reguläre Kurven $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$) Dabei ist I offen und der Tangentialvektor nirgendwo identisch mit dem Nullvektor, also $\varphi'(x) \neq 0$

1. $\varphi : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos kt \\ \sin kt \end{pmatrix}$ und $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

   Der Einheitskreis wird hier k-mal durchlaufen. Da $\varphi'(x) \neq 0$, ist φ regulär.

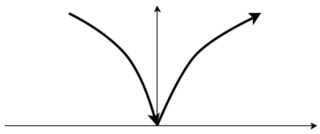
2. $\varphi(-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = (1 + 2\cos t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

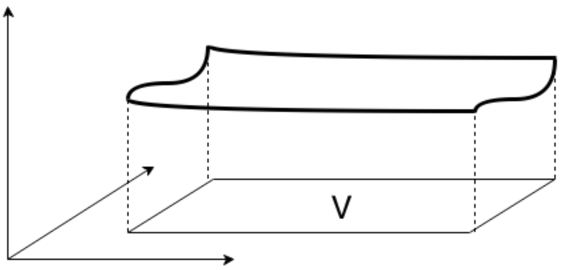
   $\varphi(\pm \frac{2\pi}{3}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gehört **nicht** zur Kurve ("$= \varphi(\pm\pi)$") und φ ist regulär.

3. $\varphi : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ ist wegen $\varphi'(0) = 0$ **nicht** regulär

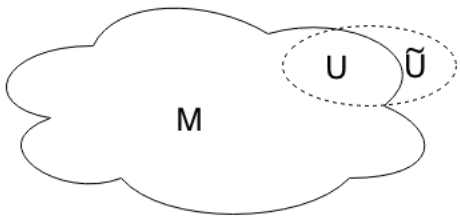
   

Beispiel 2 (Parametrisierung von Graphen) Sei $f \in C^q(V, \mathbb{R}^{n-d})$, $V \subset \mathbb{R}^d$. Betrachtet wird $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) = (x, f(x))$



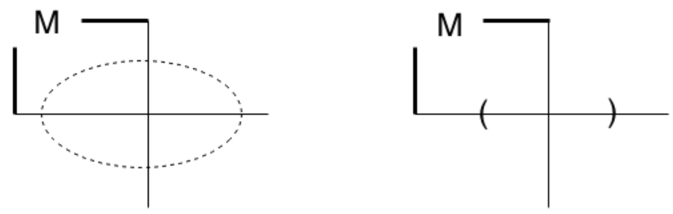
φ ist regulär, da offenbar $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$ und $\varphi' = \begin{pmatrix} id^d \\ f'(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ ist.

Es folgt eine Wiederholung zur **Relativtopologie** (vgl. Kapitel 14). Wir wissen, dass $U \subset M$ genau dann offen bezüglich M ist, wenn es ein $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ gibt, dass offen ist, und das $U = \tilde{U} \cap M$ erfüllt. Später wird M eine Mannigfaltigkeit sein und wir werden untersuchen, was in ihr offen ist.



Auf dieser Grundlage lässt sich auch der Begriff der **Umgebung** definieren:
$U \subset M$ heißt nämlich genau dann Umgebung von $u \in M$ bezüglich M, wenn es ein bezüglich M offenes $U_0 \subset M$ gibt, in dem u liegt und das Teilmenge von U ist.

Beispiel für $M \subset \mathbb{R}^n$.



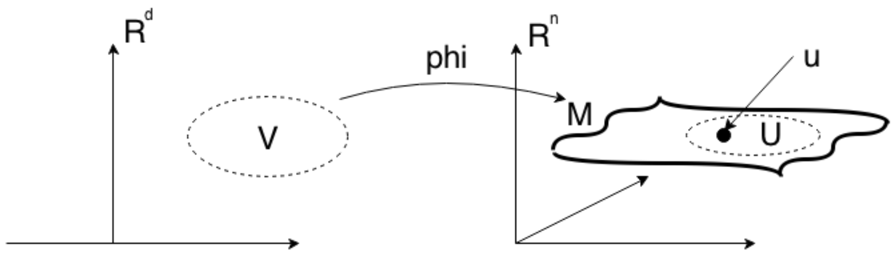
offen bzgl. M   nicht offen bzgl. M

Definition (Mannigfaltigkeiten) Wir nennen $M \subset \mathbb{R}^n$ eine **d-dimensionale** C^q**-Mannigfaltigkeit** ($q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$), falls

1. es für alle $u \in M$ eine (offene) Umgebung U von u bezüglich M gibt und
2. eine reguläre C^q-Parametrisierung $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ (V ist offen) existiert, die homöomorph ist und in die Mannigfaltigkeit abbildet (also $\varphi(V) = U$).

Wiederholung: Eine stetige Abbildung heißt homöomorph, falls eine Umkehrabbildung existiert, die auch stetig ist.

In der Literatur wird M auch manchmal als C^q-*Unter*mannigfaltigkeit bezeichnet. Wir werden jedoch später zeigen, dass die verschiedenen Definitionen von Mannigfaltigkeiten gleichwertig sind.
Da ab jetzt immer hauptsächlich C^1-Mannigfaltigkeiten auftauchen werden, werden wir diese in Zukunft einfach "Mannigfaltigkeiten"nennen.



Die Umkehrabbildung φ^{-1} beziehungsweise (φ^{-1}, U) nennt man die **Karte** von M um $u \in M$, wobei U das zugehörige **Kartengebiet**, φ selbst die Parametrisierung und V der Parameterbereich ist.
Karten können eine Mannigfaltigkeit jedoch nur lokal beschreiben. Aus diesem Grund führt man den Begriff des Atlas, der eine globale Beschreibung ermöglicht, ein:
Die Menge $\{\varphi_\alpha^{-1} | \alpha \in A\}$ heißt **Atlas** der Mannigfaltigkeit M, falls die zugehörigen Kartengebiete U_α jene vollständig überdecken.

Weiterhin wichtig ist der Begriff der sogenannten **Einbettung**, bei der es sich um eine reguläre Parametrisierung handelt, die homöomorph ist. Wir vereinbaren, dass es sich im folgenden bei allen Parametrisierungen von Mannigfaltigkeiten stets um Einbettungen handelt.

Beispiel 3 (Beweise bitte Selbstudium)

1. Der Kreis aus Beispiel 1.1 ist eine 1-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit, obwohl der Kreis k-fach durchlaufen wird. Der Atlas benötigt mindestens zwei Karten.

2. Die Kurven aus Biespiel 1.2 und 1.3 sind keine Mannigfaltigkeiten, da φ nicht überall homöomorph ist.

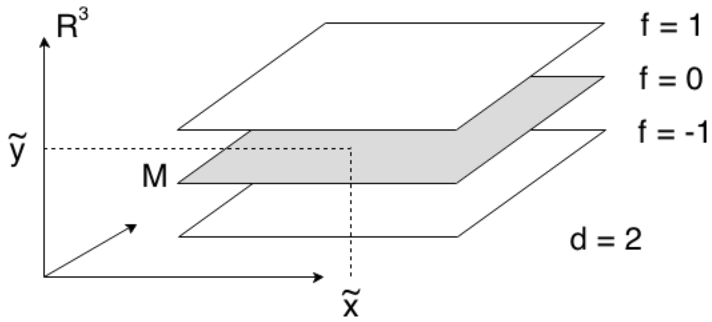
3. Jedes offene $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit mit $\{id\}$ als Atlas.

Beispiel 4 Sei M := graph f aus Beispiel 2. Offenbar ist $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \to M \subset \mathbb{R}^n$ eine Einbettung. Das macht M zu einer d-dimensionalen C^q-Mannigfaltigkeit.

Beispiel 5 Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ (D offen) q-fach stetig differenzierbar für $q \geq 1$. Offenbar ist

$$\operatorname{rang} f'(u) = n - d \qquad \forall u \in D \tag{$*$}$$

Wir nennen $M = \{u \in D \mid f(u) = 0\}$ die Niveaumenge von f



Fixieren wir $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x_1, ..., x_d, y_1, ..., y_{n-d}) \in \mathrm{M}$, so sehen wir mit $(*)$ und eventuellen Koordinatenvertauschungen, dass $f(\tilde{x}, \tilde{y})$ regulär ist. Der *Satz über implizite Funktionen* sichert uns nun, dass es eine Umgebung $\mathrm{V} \subset \mathbb{R}^d$ von $\tilde{x}$, eine Umgebung $\mathrm{W} \subset \mathbb{R}^{n-d}$ von $\tilde{y}$ und ein $\psi : \mathrm{V} \to \mathrm{W} \in \mathrm{C}^q(\mathrm{V}, \mathrm{W})$ gibt, das $(x, \psi(x)) \in$ M erfüllt und homöomorph ist.
Es folgt, dass $\varphi : \mathrm{V} \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) = (x, \psi(x))$ eine homöomorphe, reguläre Einbettung und $\varphi(\mathrm{V})$ Umgebung von $\tilde{u} \in \mathrm{M}$ bezüglich von M ist. Daraus können wir nun schließen, dass M eine d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit ist.

Bemerkung: M = *graph* f *und* M = $\{f = 0\}$ *sind grundlegende Konstruktionen für Mannigfaltigkeiten.* ***Lokal*** *ist jede Mannigfaltigkeit von dieser Gestalt! Wir werden diese beiden wichtigen äquivalenten Eigenschaften im Folgenden genauer untersuchen.*

Satz 29.1 (lokale Darstellung einer Mannigfaltigkeit als Graph)
$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit, wenn für alle $u \in M \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung U von u bezüglich M und eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^d$ existiert, sodass (gegebenefalls unter einer Koordinatenpermutation π im $\mathbb{R}^n$) für mindenstens ein $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ ein ψ mit $\psi[W] = U$ existiert, das

$$\psi(v) := \pi(v, f(v)) \quad \forall v \in W$$

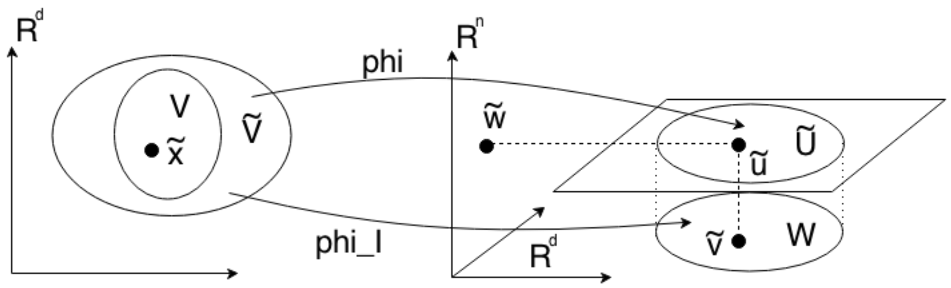
erfüllt. (d.h. $U = \operatorname{graph} f$)

Wir können also sagen, dass sich jede C^q-Mannigfaltigkeit *lokal* als Graph einer C^q-Funktion darstellen lassen können muss. Die Umkehrung ist genauso richtig. So ist also jeder Graph einer C^q-Funktion gleichzeitig Mannigfaltigkeit.

Beweis. Die Rückrichtung folgt direkt aus den Beispielen 2 und 4. Für die Hinrichtung fixieren wir ein $\tilde{u} \in M$ und wählen $\varphi : \tilde{V} \in \mathbb{R}^d \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ als zugehörige Parametrisierung von $\tilde{u} = \varphi(\tilde{x})$. Wir schreiben nun φ als

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{\mathrm{I}}(x) \in \mathbb{R}^d \\ \varphi_{\mathrm{II}}(x) \in \mathbb{R}^{n-d} \end{pmatrix}$$

Da φ' regulär sein muss, folgt (mit eventueller Vertauschung π der Zeilen), dass auch $\varphi'_{\mathrm{I}}(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ regulär ist. Zerlegen wir nun $\tilde{u} = \pi(\tilde{u}, \tilde{w})$ mit $v \in \mathbb{R}^d$,



so folgt aus dem *Satz über inverse Funktionen*, dass es ein offenes $V \subset \tilde{V}$ gibt, in dem ein $\tilde{x} \in V$ liegt und wiederum ein $W \subset \mathbb{R}^d$, in dem ein $\tilde{v} \in W$ liegt, so dass $\tilde{v}$ durch φ^{-1} auf $\tilde{x}$ abgebildet wird. φ^{-1} exisitert auf jeden Fall, da φ homöomorph und C^q-differenzierbar ist. Es ist also

$$\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(\tilde{v}) = \tilde{x}$$

Wählen wir nun

$$f(v) := \varphi_{\mathrm{II}}\left(\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(v)\right)$$

welches für alle $v \in W$ q-mal stetig differenzierbar ist, also in $C^q\left(W, \mathbb{R}^{n-d}\right)$ liegt, und setzen

$$\psi(v) := \varphi\left(\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(v)\right) = \left(\varphi_{\mathrm{I}}\left(\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(v), \left(\varphi_{\mathrm{II}}\left(\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(v)\right)\right) = \pi\left(v, f(v)\right)\right.$$

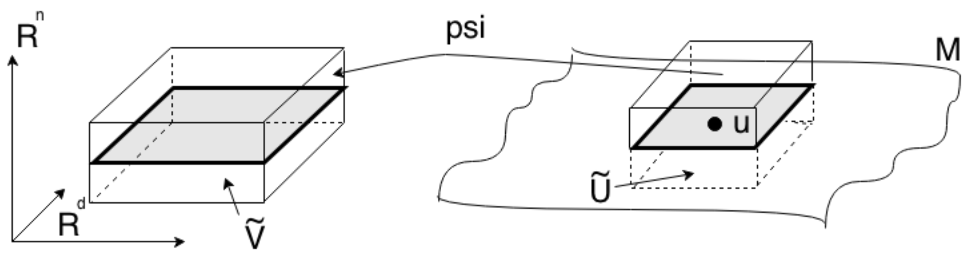
So folgt unmittelbar, dass $\psi(\tilde{v}) = \pi(\tilde{v}, \tilde{w}) = \tilde{u}$ ist und $\psi(w) = \varphi(v)$ in M liegt. Aufgrund der Homöomorphie von $\varphi : \tilde{V} \to \tilde{U}$ ist $\varphi[V]$ offen in M und somit auch $U := \psi(W)$ offen bezüglich M. Da U nun eine Umgebung von $\tilde{u}$ bezüglich M ist und $\tilde{u}$ beliebig war, folgt direkt die Behauptung. **q.e.d.**

Satz 29.2 (Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten mit umgebendem Raum)

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit, wenn für alle $u \in M$ eine Umgebung $\tilde{U}$ bezüglich des $\mathbb{R}^n$ exisitert, sodass $\psi : \tilde{U} \to \tilde{V}$ (mit $V \subset \mathbb{R}^n$ offen) ein C^q-Diffeomorphismus ist und

$$\psi\left(\tilde{U} \cap M\right) = \tilde{V} \cap \left(\mathbb{R}^d \times 0\right)$$

erfüllt.



Dies ist eine Charakterisierung, die den umgebenden Raum nutzt und oft auch als Definition von C^q-Mannigfaltigkeiten verwendet wird.

Beweis. Für die Rückrichtung schränken wir ψ auf $\tilde{U} \cap M$ ein und erhalten sofort Karten, was die Behauptung bestätigt. Für die Hinrichtung fixieren wir ein $\tilde{u} \in M$ und wählen wieder $\tilde{U} \subset M$, $W \subset \mathbb{R}^d$ und ein $f \in C^q\left(W, \mathbb{R}^{n-d}\right)$. Gemäß Satz

29.1 setzen wir o.B.d.A $\pi = id$ und zerlegen $\tilde{u} = \left(\tilde{v}, f(\tilde{v})\right) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$. Nun sei $\hat{U} := W \times \mathbb{R}^{n-d} =: \hat{V}$, welches den *Zylinder* aus U und W in Beweis zu Satz 29.1 liefert. Setzen wir schließlich noch $\tilde{\varphi} : \hat{V} \to \hat{U}$ mit

$$\tilde{\varphi}(v, w) := (v, f(v) + w)$$

welches offenbar $\in C^q$ ist und erhalten, dass

$$\tilde{\varphi}'(\tilde{v}, 0) = \begin{pmatrix} id_d & 0 \\ f'(v) & id_{n-d} \end{pmatrix}$$

regulär ist. Nach dem *Satz ü. inverse Funktionen* exisitert wiederum eine Umgebung $\tilde{U} \subset \hat{U}$ von $\tilde{u}$ und eine Umgebung $\tilde{V} \subset \hat{V}$ von $(\tilde{v}, 0)$, sodass $\tilde{\psi} := \tilde{\varphi}^{-1} \in C^q\left(\tilde{U}, \tilde{V}\right)$ exisitiert. Wegen $\tilde{\varphi}\left(\tilde{V} \cap \left(\mathbb{R}^d \times 0\right)\right) = \tilde{U} \cap M$ folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Folgerung 29.3 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit und $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \to U \subset M$ die Parametrisierung um $u \in M$. Dann gibt es die offenen Mengen $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ mit $U \subset \tilde{U}, V \times 0 \subset \tilde{V}$ für die $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \to \tilde{U}$ abbildet, ein C^q-Diffeomorphismus ist und $\tilde{\varphi}(x, 0) = \varphi(x) \forall x \in V$

Beweis. Folgt aus Beweisen von Satz 29.1 und 29.2 **q.e.d.**

Satz 29.4 (lokale Darstellung von Mannigfaltigkeiten als Niveaumenge)
$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit, wenn für alle $u \in M$ eine Umgebung $\tilde{U}$ bezüglich des $\mathbb{R}^n$, so wie eine Funktion $f \in C^q\left(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d}\right)$ mit rang $f'(u) = n-d$ existiert, sodass

$$\tilde{U} \cap M = \left\{\tilde{u} \in \tilde{U} \,|\, f(\tilde{u}) = 0\right\}$$

Wir haben hiermit eine weitere wichtige Eigenschaft von Mannigfaltigkeiten gezeigt, nämlich, dass jede C^q-Mannigfaltigkeit immer gleichzeitig Niveaumenge einer C^q-Funktion ist und umgekehrt!

Eine durchaus berechtigte Frage ist, ob die Niveaumenge unbedingt der Gleichung $f(u) = 0$ genügen muss, oder ob dies auch für andere $c \neq 0$ funktioniert. Aus diesem Grund führen wir einen weiteren Begriff ein:

Definition (Regulärer Wert) $c \in \mathbb{R}^{n-d}$ heißt **regulärer Wert** von $f \in C^q\left(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d}\right)$ (mit $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen), falls

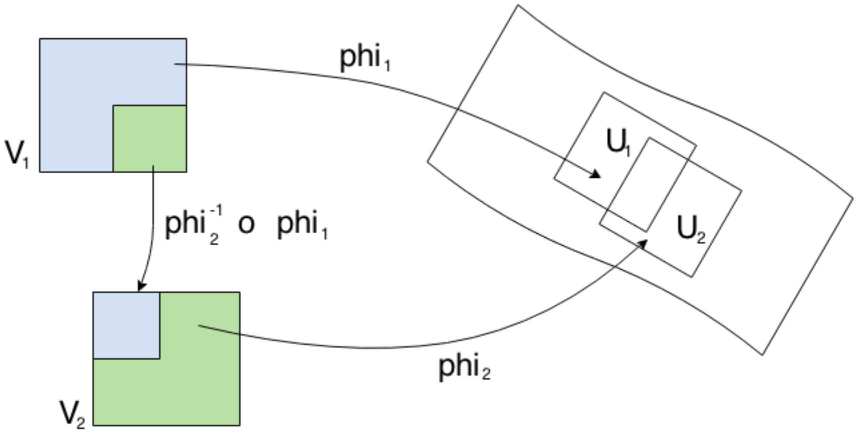
$$\text{rang } f'(u) = n-d \quad \forall u \in \tilde{U} \quad \text{mit} \quad f(u) = c$$

Vergleichen wir dies nun mit Satz 29.4, so ist jedes $M := \left\{u \in \tilde{U} \,|\, f(u) = c\right\}$ eine d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit, falls c ein regulärer Wert von f ist.

Beweis. Gemäß Beispiel 5 erhält man mit f eine lokale Parametrisierung. Damit ist die Rückrichtung gezeigt. $\Rightarrow$ Behauptung.
" $\Rightarrow$ " : fixiere $\tilde{u} \in M$, wähle $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n, \tilde{\psi} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ gemäß Satz 29.2
sei $f := \left(\tilde{\psi}_{d+1}, \ldots, \tilde{\psi}_n\right)$, offenbar $f \in C^q\left(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d}\right)$
mit $\tilde{\psi}$ aus dem Beweis zu Satz 29.2: $\tilde{\psi}'(\tilde{u}) = \tilde{\varphi}'(\tilde{v}, 0)^{-1}$ ist regulär
$\Rightarrow f'(\tilde{u})$ hat vollen Rang, d.h. *rang* $f'(\tilde{u}) = n-d$
nach Konstruktion $\left\{u \in \tilde{U} \,|\, f(u) = 0\right\} = U \cap M \Rightarrow$ Behauptung. **q.e.d.**

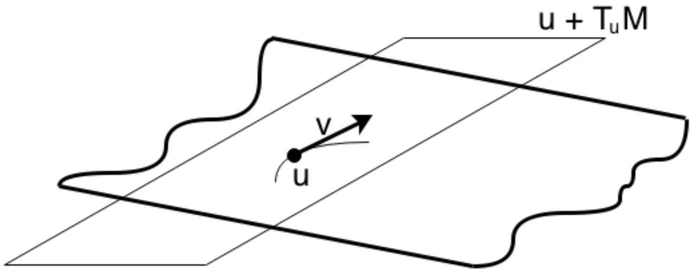
Lemma 29.5 (Kartenwechsel)

Sei $M \in \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit
und $\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}$ Karten mit zugehörigem Kartengebiet $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$
$\implies \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ ist C^q-Diffeomorphismus.



Beweis. Ersetze φ_1, φ_2 mit $\tilde\varphi_1, \tilde\varphi_2$ gemäß Folgerung 29.3
$\Rightarrow$ Einschränkung von $\tilde\varphi_2^{-1} \circ \tilde\varphi_1$ liefert Behauptung. **q.e.d.**

Definition Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit.
Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt **Tangentialvektor** in $u \in M$ an M,
falls eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : (-\delta, \delta) \to M (\delta > 0)$ exisitiert mit
$\gamma(0) = u$ und $\gamma'(0) = v$.
Die Menge aller Tangentialvektoren $T_u M$ heißt Tangentialraum.



Satz 29.6 Sei $M \in \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit,
$u \in M$, $\varphi : V \to U$ der zugehörige Parameter um u
$\Longrightarrow T_u M$ ist d-dimensionaler ($\mathbb{R}-$) Vektorraum und

$$T_u M = \underbrace{\varphi'(x)}_{L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)} \left(\mathbb{R}^d\right) \text{ für } x = \varphi^{-1}(u) \tag{29.3}$$

wobei $T_u M$ unabhängig vom speziellen Parameter φ ist.

Beweis. Sei $\gamma : (-\delta, \delta) \to M eine C^1$-Kurve mit $\gamma(0) = u$
$\Rightarrow g := \varphi^{-1} \circ \gamma$ ist C^1-Kurve, $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^d$ mit $g(0) = x$ und

$$\gamma'(0) = \varphi'(x) g'(0),\ \varphi'(x) \text{ist regulär.} \tag{$*$}$$

Offenb. liefert auch jede C^1-Kurve g in $\mathbb{R}^d$ durch x eine C^1-Kurve γ in M mit $(*)$
Die Menge aller Tangentialvektoren $g'(0)$ von C^1-Kurven g in $\mathbb{R}^d$ ist offenbar $\mathbb{R}^d$
$\Rightarrow 29.4 \xRightarrow{\varphi'(x) \text{ ist regulär}} dim\, T_u M = d$
da $(*)$ für jeden Parameter φ gilt, ist $T_u M$ unabhängig von φ. **q.e.d.**

Bemerkung: Man bezeichnet auch $(u, T_u M) \subset M \times \mathbb{R}^n$ als Tangentialraum und
$TM = \bigcup_{U \in M} (u, T_u M) \subset M \times \mathbb{R}^n$ als Tangentialbündel.

Beispiel 6 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen
$\Rightarrow$ M ist ist n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $T_u M = \mathbb{R}^n \forall u \in M$

Definition Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensinale Mannigfaltigkeit.
Ein Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ heißt **Normalenvektor** in $u \in M$ an M, falls
$\langle w, v \rangle = 0 \forall v \in T_u M$ (d.h. $w \perp v \forall v \in T_u M$)
Die Menge aller Normalenvektoren $N_u M = T_u M^{\perp}$ heißt
Normalenraum von M in u.

Satz 29.7 Sei $f \in C^1\left(V, \mathbb{R}^{n-d}\right)$ mit V offen und $c \in \mathbb{R}^{n-d}$ ein regulärer Wert von f. Dann ist die Niveaumenge $M := \{v \in V \mid f(u) = c\}$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit, für die gilt:

$$\begin{aligned} T_u M &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid f'(u)v = 0\} \;\left(= \ker f'(u)\right) \;\; \forall u \in M \\ N_u M &= \{w \in \mathbb{R}^n \mid w = f'(u)^T v, v \in \mathbb{R}^{n-d}\} \;\; \forall u \in M \end{aligned}$$

Das heißt also, die Spalten von $f'(u)^T$ bilden eines Basis des Normalenraums von M.

Beispiel 7 Sei $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in C^1\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$ und $0 \in \mathbb{R}^2$ ein regulärer Wert von f. Dann ist

$$M := \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{f_1(u) = 0, \; f_2(u) = 0}_{\text{Schnitt zweier Flächen}}\}$$

eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann steht der Gradient $f_i'(u)^T$ senkrecht auf $\{f_i = 0\}$. $f_1'(u)^T$ und $f_2'(u)^T$ sind also Normalen zu M in u.
Grafik fehlt
v ist hier die Tangente, da $\left\langle f_i'(u)^T \,\middle|\, v \right\rangle = 0$ ist (für $i = 1, 2$).

Beweis. Wir wissen bereits, dass M eine Mannigfaltigkeit ist. Wählen wir nun die C^1-Kurve γ auf M mit $\gamma(0) = u$ und $\gamma'(0) = v$, so sehen wir, dass $f(\gamma(t)) = c \;\forall t$ ist. $f'(u)$ steht senkrecht auf v (also $\left\langle f'(u) \,\middle|\, v \right\rangle = 0$) und da rang $f'(u) = d$ ist, muss $\dim \ker f'(u) = d$ sein. Damit ist die Behauptung für $T_u M$ (wegen $\dim T_u M) = d$) gezeigt.
Nun wählen wir $w = f'(u)^T \tilde{v}$ und $w \in T_u M$. Offenbar ist $\langle w \mid v \rangle = \left\langle \tilde{v} \,\middle|\, f'(u) v \right\rangle = 0$. Damit ist w im Normalenraum $N_u M$. Da rang $f'(u)^T = n - d$ und $\dim N_u M = n - d$, folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Beispiel 8 Wir betrachten $M := \mathcal{O}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = id\}$. Es handelt sich dabei um eine $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale Mannigfaltigkeit von Matritzen. Man nennt $\mathcal{O}$ auch *Orthogonale Gruppe* oder *Lie-Gruppe*. Sie bildet die Menge aller orthogonale Matrizen des $\mathbb{R}^{n \times n}$. Offenbar ist id das neutrale Element der Gruppe. Der Tangentialraum an diesem Element wird auch *Lie-Algebra* genannt:

$$T_{id} M = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid B + B^T = 0\}$$

Dies ist die Menge der schiefsymetrischen Matrizen. Warum ist das so?

Sei $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ mit $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{A}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f'(\mathrm{A})\mathrm{B} = \mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{B} + \mathrm{B}^\mathrm{T}\mathrm{A}$ $(\forall \mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times n})$. Letzterer Ausdruck ist ebenfalls eine symetrische Matrix. id ist ein regulärer Wert, denn sei $f(\mathrm{A}) = id$ und $\mathrm{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$. $f'(\mathrm{A})\mathrm{B} = \mathrm{S}$ hat die Lösung $\mathrm{B} = \frac{1}{2}\mathrm{AS}$, denn $\frac{1}{2}\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{AS} + \frac{1}{2}\mathrm{SA}^\mathrm{T}\mathrm{A} = \frac{1}{2}\mathrm{S} + \frac{1}{2}\mathrm{S} = \mathrm{S}$. Letzteres hätte man auch in der Grundschule herausbekommen!
Aus vorheriger Überlegung folgt, dass $f'(\mathrm{A})$ vollen Rang hat. Aus Satz 4 wissen wir nun, dass die Dimension der Mannigfaltigkeit beträgt:

$$d = \dim \mathbb{R}^{n\times n} - \dim \mathbb{R}^{n\times n}_{sym} = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Satz 7 gewährleistet nun, dass

$$\mathrm{T}_{id}\mathrm{M} = \{\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid id^\mathrm{T}\mathrm{B} + \mathrm{B}^\mathrm{T} id = 0\}$$

Definition (Hyperflächen und Einheitsnormalenfelder) Eine $(n-d)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^n$ heißt auch **Hyperfläche**. Die stetige Abbildung

$$\nu : \mathrm{M} \to \mathbb{R}^n$$

heißt dann **Einheitsnormalenfeld**, falls

$$\nu(u) \in \mathrm{N}_u\mathrm{M} \text{ und } ||\nu(u)|| = 1 \quad \forall u \in \mathrm{M}$$

Grafik fehlt.

Lemma 29.8 Ist $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende Hyperflääche, so existiert entweder *kein* oder *genau zwei* Einheitsnormalenfelder.

Beweis. Als Vorbetrachtung lässt sich sagen, dass wenn ν ein Einheitsnormalenfeld ist, auch $-\nu$ eins sein muss.
Nehmen wir nun an, es gäbe zwei verschiedene Einheitsnormalenfelder ν und $\tilde{\nu}$. Wir können ausnutzen, dass die beiden Felder normiert sind und stellen sofort fest, da $\dim \mathrm{N}_u\mathrm{M} = 1$ ist, dass das Skalarprodukt der beiden nur

$$s(u) := \langle \nu(u) \mid \tilde{\nu}(u) \rangle = \pm 1$$

sein kann. Wir können nun eine weitere wichtige Eigenschaft von s und M ausnutzen. Da M zusammenhängend und s stetig auf M ist, lässt sich der Zwischenwertsatz zu Hilfe nehmen, der uns liefert, dass s für alle u konstant sein *muss*, nämlich entweder $s(u) = 1$ oder $s(u) = -1$. Damit kann $\tilde{\nu}$ nur entweder gleich ν oder gleich $-\nu$ sein. **q.e.d.**

Beispiel 9 (Möbiusband) Das wohlbekannte Möbiusband besitzt *kein* Einheitsnormalenfeld.
grafk fehlt.

Beispiel 10 Wir betrachten die Konstruktion von Einheitsnormalenfeldern für Hyperflächen $M := \{f = 0\}$. Sei $f \in C^1(V, \mathbb{R})$ mit V offen und 0 ein regulärer Wert von f. Wir können leicht ein Einheitsnormalenfeld definieren und wählen

$$\nu(u) := \frac{f'(u)}{||f'(u)||}$$

Wir wollen nun im folgenden weitere Operationen auf Mannigfaltigkeiten untersuchen. Im $\mathbb{R}^n$ ist uns das Kreuzprodukt $\ldots \times \ldots$ wohlbekannt. Es ist zweckmäßig diesen Begriff auf beliege Dimensionen zu verallgemeinern.

Definition (Äußeres Produkt) Nehmen wir uns die Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ und schreiben sie einfach als Spaltenvektoren hintereinander in eine Matrix:

$$A := (a_1|a_2|\ldots|a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$$

Wir entfernen nun aus dieser die k-te Zeile und nennen sie dann $A_k \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Den Ausdruck

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_{n-1} := \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

nennen wir **äußeres Produkt** von $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, wobei

$$\alpha_k = (-1)^{k-1} \cdot \det A_k$$

Wir können sofort einige interessante Eigenschaften ablesen, die uns an das bekannte Kreuzprodukt erinnern:

1. α steht senkrecht auf allen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

2. Das *Volumen* des von $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ aufgespannten Parallelotops entspricht gerade der Norm $||\alpha||$ des äußeres Produkts.

Beispiel 11 Die eben untersuchten Eigenschaften bringen uns dazu, im $\mathbb{R}^3$ das äußerde Produkt mit dem Kreuzprodukt zu identifizieren.

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \equiv \alpha_1 \times \alpha_2 \quad \text{für } n = 3$$

Lemma 29.9 Sind $b, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, so ist

$$\langle b \mid a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_{n-1} \rangle = \det(b|a_1|a_2|\ldots|a_{n-1}) \tag{29.4}$$

wobei

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_{n-1} \perp a_i$$

und

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_{n-1} \quad \begin{cases} = 0 & \text{falls } a_i \text{ linear abhängig} \\ \neq 0 & \text{falls } a_i \text{ linear unabhängig} \end{cases}$$

Beweis. Wir können die Determinante in (29.4) nach der 1. Spalte b entwickeln. Aus $b = a_i$ folgen die Bedingungen. **q.e.d.**

Beispiel 12 Konstruieren wir ein Einheitsnormalenfeld mittels der Parametrisierung $\varphi : V \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ mit V offen. $M = \{\varphi(v)\}$ sei die entsprechende Hyperfläche. Nach Satz 6 wissen wir, dass $\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x)$ für alle x und für alle $j = 1, 2, \ldots, n-1$ im Tangentialraum $T_{\varphi(x)}M$ liegt. Wir erkennen außerdem, dass

$$N(x) := \varphi_{x_1}(x) \wedge \varphi_{x_2}(x) \wedge \ldots \wedge \varphi_{x_{n-1}}$$

in $N_{\varphi(x)}M$ liegt und können damit

$$\nu(x) := \frac{N(x)}{||N(x)||}$$

als Einheitsnormalenfeld von M wählen. Man beachte, dass $\varphi'(x)$ für alle x regulär ist!

Wir kommen zum Abschluss dieses Kapitels. Wir haben uns mit Mannigfaltigkeiten und ihren Eigenschaften beschäftigt. Als nächstes möchten wir die Integration auf ihnen untersuchen, beschränken uns dabei jedoch noch auf Kartengebiete.

30 Integration auf Kartengebieten

Wir stellen uns zunächst die interessante Frage, wie man den Oberflächeninhalt beziehungsweise das d-dimensionale Äquivalent dazu von einer Mannigfaltigkeit bestimmen kann. Die Idee wäre natürlich, wie etwa bei der Integration über $\mathbb{R}$, sie durch *ebene* Mannigfaltigkeiten (etwa mit Dreiecken) stückweise zu approximieren.

$$\textbf{Fläche}(\mathrm{M}) = \sup \sum_{\Delta} \textbf{Dreiecksflächen}$$

Wir stellen jedoch mit großem Entsetzen schnell fest, dass diese Methode nur für Kurven ($d = 1$) funktioniert.

Schauen wir uns zum Beispiel eine Zylinderfläche $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^3$ an. Lassen wir die Feinheit σ beliebig klein werden - heute ist ja schließlich alles nano! - so wachsen die Dreiecksflächen immer weiter, bis die Fläche von M über alle Grenzen hinaus wächst. Wir müssen uns also wohl sofort wieder von dieser Methode verabschieden.
Über dieses Dilemma nachlesen kann man übrigens in Hildebrand, Analysis 2 unter "Schwartz'scher Stiefel".

Versuchen wir also etwas neues (für $d = 2$) zu finden. Wir nehmen hierzu tangentionale Parallelogramme (äußere Approximation). $\varphi'(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ ist linear. Die Methode gestaltet sich also zu

$$\textbf{Fläche}(\mathrm{M}) = \lim_{\sigma \to 0} \left(\sum \textbf{Fläche}\, \varphi'(x_j)(\mathrm{Q}) \right)$$

Definition Seien $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}^n (d \leq n)$
Dann heißt die Menge $\mathrm{P}(a_1, \ldots, a_d) := \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j a_j | t_j \in [0,1], j = 1, \ldots, d \right\}$
das von $a_1, \ldots, a_d$ augespannte **Parallelotop** (auch d-Spat genannt).

Einschub: Eine allgemeine Theorie für d-dimensionale Inhalte liefert das Hausdorff-Maß $\mathscr{H}^d$, dieses ist jedoch sehr viel abstrakter und schwierig 'auszurechnen'.
Mithilfe von Mannigfaltgkeiten kommt man schneller zu Ergebnissen.
Weiterhin ist uns bereits das Maß über die delta-Funktion/Distribution bekannt, welches zur Beschreibung von Punktmassen und -ladungen wichtig ist.

Satz 30.1 Seien $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}^n$,
das aufgespannte Volumen $v(a_1,\dots,a_n) := \mathscr{L}^n(\mathrm{P}(a_1,\dots,a_n))$
so gilt:

i) $v(a_1,\dots,\lambda a_k,\dots,a_n) = |\lambda| v(a_1,\dots,a_n) \forall \lambda \in \mathbb{R}^n$

ii) $v(a_1,\dots,a_k + a_j,\dots,a_n) = v(a_1,\dots,a_n)$ falls $k \neq j$
Dies ist bekannt als *Prinzip des Cavaleri*, als Veranschaulichung kann ein Stapel Spielkarten dienen: Egal wie man eine Seitenfläche von einem Rechteck in ein Parallelogramm (oder umgekehrt) verschiebt, das Volumen des Stapels bleibt gleich.
Skizze fehlt

iii) $v(a_1,\dots,a_n) = 1$ falls $a_1,\dots,a_n$ ein Orthonormalsystem in $\mathbb{R}^n$ bilden.
(Der Parallelotop ist dann der Einheitswürfel.)

iv) $v(a_1,\dots,a_n) = |\det \mathrm{A}|$ für $\mathrm{A} := (a_1|\dots|a_n)$
Das heißt die Determinante der Matrix mit den Spaltenvektoren $a_1,\dots,a_n$ liefert das Volumen des aufgespannten Parallelotops. (Vgl. lin. Algbebra)

Beachte: Die Eigenschaften i) - iii) implizieren bereits iv), die Argumentation dazu verläuft wie zu den aus LAG bekannten Eigenschaften der Determinante, vgl. auch die axiomatische Definition der Determinante.

Beweis.

a) Angenommen, $a_1,\dots,a_n$ sind linear abhängig.
Dann ist das aufgespannte Parallelotop 'flach', da es in mindestens einer Dimension an Ausdehnung fehlt. $\Rightarrow v(a_1,\dots,a_n) = 0$
$\Rightarrow$ iv) ist korrekt (da die Determinante einer singulären Matrix Null ist)
$\Rightarrow$ i) und ii) sind korrekt

b) Angenommen, $a_1,\dots,a_n$ sind linear unabhängig.
Sei $\{e_1,\dots,e_n\}$ die Standard-Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^n$, dafür gilt iii) nach der Definition des Lebesgue-Maß (Es ist ein Quader mit allen Seitenlängen gleich Eins).
Weiter seien nun $\mathrm{U} := \mathrm{P}(e_1,\dots,e_n), \mathrm{V} := \mathrm{P}(a_1,\dots,a_n)$
$\Rightarrow \mathrm{A} : \operatorname{int} \mathrm{U} \to \operatorname{int} \mathrm{V}$ ist ein Diffeomorphismus (A ist regulär, ist damit differenzierbar und besitzt ein differenzierbares Inverses).
Offenbar ist $\mathrm{A}'(y) = \mathrm{A} \forall y$

$$\xRightarrow{\text{Trafosatz, Kap. 24}} \mathscr{L}^n(\mathrm{V}) = \int_{\mathrm{V}} \mathrm{d}x \overset{y=\mathrm{A}x}{=} \int_{\mathrm{U}} |\det \mathrm{A}| \mathrm{d}y = |\det \mathrm{A}| \underbrace{\mathscr{L}^n(\mathrm{U})}_{1} = |\det \mathrm{A}| \Rightarrow$$

iv) $\Rightarrow$ i), ii), iii) folgen als Eigenschaften der Determinanten

q.e.d.

Ziel: Bestimmung des d-dimensionalen Inhalts $v_d(\mathrm{P}(a_1,\dots,a_d))$ in $\mathbb{R}^n$ **Idee:** Betrachte $\mathrm{P}(a_1,\dots,a_n)$ als Teilmenge eines d-dimensionalen Vektorraums X und nimm das d-dimensional Lebesgue-Maß in X.
Somit sollte $v_d : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{\text{d-mal}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ folgende Eigenschaften haben:

(v1) $v_d(a_1,\dots,\lambda a_k,\dots,a_d) = |\lambda| v_d(a_1,\dots,a_d) \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(v2) $v_d(a_1,\dots,a_k + a_j,\dots,a_d) = v_d(a_1,\dots,a_d)$ falls $k \neq j$ (Prinzip des Cavaleri)

(v3) $v_d(a_1,\dots,a_d) = 1$ falls $\{a_1,\dots,a_d\}$ orthonormal zueinander sind.

Satz 30.2 v_d ist durch (v1), (v2), (v3) eindeutig bestimmt, und es gilt:

$$v_d(a_1,\dots,a_d) = \sqrt{\det \underbrace{\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}}_{\in \mathbb{R}^{d\times d}}} \text{ mit } \mathrm{A} := \underbrace{(a_1|\dots|a_d)}_{\in \mathbb{R}^{n\times d}} \tag{30.1}$$

Bemerkung:

1. für $d = n$ liefert (30.1) Gleichung iv) in Satz 1
2. $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ ist stets symmetrisch und positiv definit $\left(\langle x, \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x\rangle = \langle \mathrm{A}x, \mathrm{A}x\rangle = \|\mathrm{A}x\|^2 \geq 0\right)$ und somit ist auch stets $\det \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} \geq 0$
3. $v_d(a_1,\dots,a_d) = 0 \Leftrightarrow a_1,\dots,a_d$ linear abhängig

Beweis. Selbststudium, verwende:
$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \text{mit } \langle a_i, a_j\rangle$$
und argumentiere wie bei den Eigenschaften der Determinante.

q.e.d.