Mathematik für Physiker I+II

Friedemann Schuricht

übertragen von
Lukas Körber und Friedrich Zahn

Wintersemester 2014/2015

Inhaltsverzeichnis

Überblick

Diese Vorlesung wird sich mit folgenden Tehmen befassen:

1. **Integration auf Mannigfaltigkeiten**
2. **Differenzialgleichungen**, sowohl gewöhnlich, als auch partiel
3. **Funktionalanalysis** in Banach- und Hilberträumen (insbesondere unendlich dimensionale Räume z.B. von Folgen und Funktionen)
4. **Funktionstheorie**, der Theorie von komplexwertigen Funktionen und z.B. $\mathbb{C}$-Differenzierbarkeit

Kapitel VIII

Integration auf Mannigfaltigkeiten

Literaturtipp: Königsberger Analysis 2, Springer

29 Mannigfaltigkeiten

Sei $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$ mit $q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, also q-fach stetig differenzierbar, wobei $V \subset \mathbb{R}^d$ offen ist, dann heißt φ **regulär**, falls

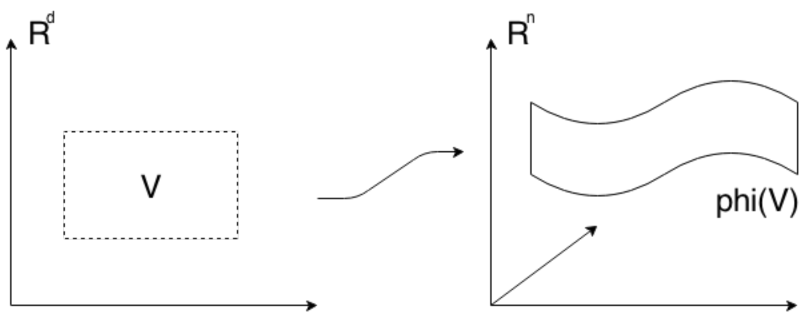
$$\varphi'(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \text{ regulär (d.h. injektiv)} \tag{29.1}$$

Falls φ regulär für alle $x \in V$ ist, heißt es auch **regulär auf V** beziehungsweise **reguläre** C^q**-Parametrisierung** (manchmal auch C^q-Immersion).
V ist dann der **Parameterbereich** von φ.
Bemerkung: $\varphi(V)$ wird selten auch **Spur** von φ genannt.

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass aus (29.1) sofort

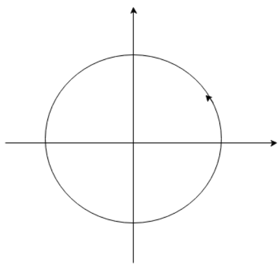
$$d \leq n \tag{29.2}$$

folgt. Dies sei in Kapitel VIII immer erfüllt! (29.2) ist außerdem äquivalent dazu, dass rang $\varphi'(x) = d$.



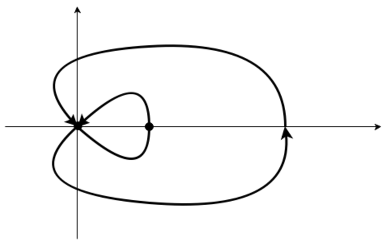
Beispiel 1 (reguläre Kurven $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$) Dabei ist I offen und der Tangentialvektor nirgendwo identisch mit dem Nullvektor, also $\varphi'(x) \neq 0$

1. $\varphi : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos kt \\ \sin kt \end{pmatrix}$ und $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

   Der Einheitskreis wird hier k-mal durchlaufen. Da $\varphi'(x) \neq 0$, ist φ regulär.

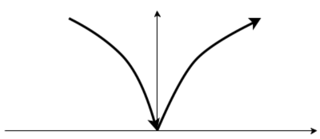
2. $\varphi(-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = (1 + 2\cos t)\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

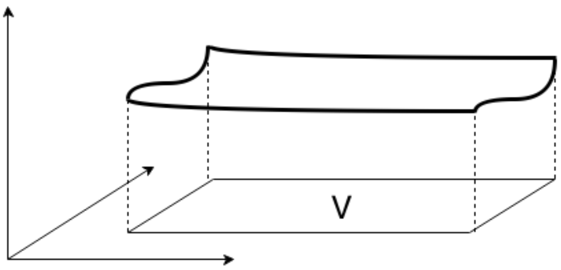
   $\varphi(\pm\frac{2\pi}{3}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gehört **nicht** zur Kurve ("$= \varphi(\pm\pi)$") und φ ist regulär.

3. $\varphi : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ ist wegen $\varphi'(0) = 0$ **nicht** regulär

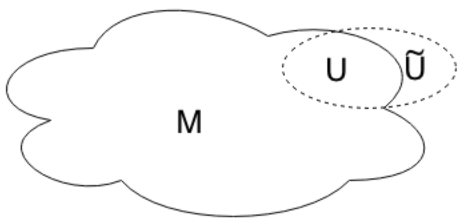
   

Beispiel 2 (Parametrisierung von Graphen) Sei $f \in C^q(V, \mathbb{R}^{n-d})$, $V \subset \mathbb{R}^d$. Betrachtet wird $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) = (x, f(x))$



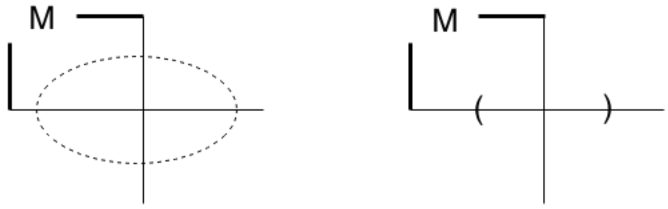
φ ist regulär, da offenbar $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$ und $\varphi' = \begin{pmatrix} id^d \\ f'(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ ist.

Es folgt eine Wiederholung zur **Relativtopologie** (vgl. Kapitel 14). Wir wissen, dass $U \subset M$ genau dann offen bezüglich M ist, wenn es ein $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ gibt, dass offen ist, und das $U = \tilde{U} \cap M$ erfüllt. Später wird M eine Mannigfaltigkeit sein und wir werden untersuchen, was in ihr offen ist.



Auf dieser Grundlage lässt sich auch der Begriff der **Umgebung** definieren:
$U \subset M$ heißt nämlich genau dann Umgebung von $u \in M$ bezüglich M, wenn es ein bezüglich M offenes $U_0 \subset M$ gibt, in dem u liegt und das Teilmenge von U ist.

Beispiel für $M \subset \mathbb{R}^n$.



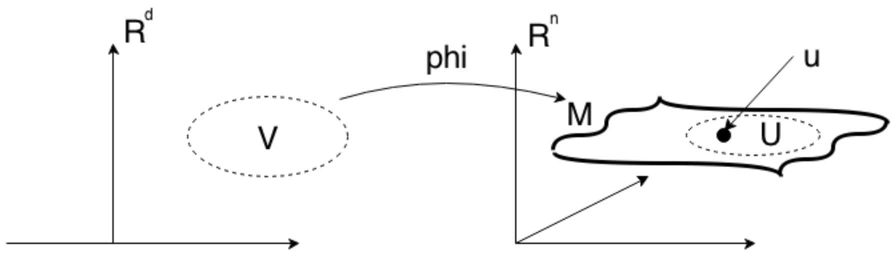
offen bzgl. M nicht offen bzgl. M

Definition (Mannigfaltigkeiten) Wir nennen $M \subset \mathbb{R}^n$ eine **d-dimensionale** C^q**-Mannigfaltigkeit** ($q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$), falls

1. es für alle $u \in M$ eine (offene) Umgebung U von u bezüglich M gibt und
2. es eine reguläre C^q-Parametrisierung $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ (V ist offen) existiert, die homöomorph ist und in die Mannigfaltigkeit abbildet (also $\varphi(V) = U$).

Wiederholung: Eine stetige Abbildung heißt homöomorph, falls eine Umkehrabbildung existiert, die auch stetig ist.

In der Literatur wird M auch manchmal als C^q-*Unter*mannigfaltigkeit bezeichnet. Wir werden jedoch später zeigen, dass die verschiedenen Definitionen von Mannigfaltigkeiten gleichwertig sind.
Da ab jetzt immer hauptsächlich C^1-Mannigfaltigkeiten auftauchen werden, werden wir diese in Zukunft einfach "Mannigfaltigkeiten"nennen.



Die Umkehrabbildung φ^{-1} beziehungsweise (φ^{-1}, U) nennt man die **Karte** von M um $u \in M$, wobei U das zugehörige **Kartengebiet**, φ selbst die Parametrisierung und V der Parameterbereich ist.
Karten können eine Mannigfaltigkeit jedoch nur lokal beschreiben. Aus diesem Grund führt man den Begriff des Atlas, der eine globale Beschreibung ermöglicht, ein:
Die Menge $\{\varphi_\alpha^{-1} | \alpha \in A\}$ heißt **Atlas** der Mannigfaltigkeit M, falls die zugehörigen Kartengebiete U_α jene vollständig überdecken.

Weiterhin wichtig ist der Begriff der sogenannten **Einbettung**, bei der es sich um eine reguläre Parametrisierung handelt, die homöomorph ist. Wir vereinbaren, dass es sich im folgenden bei allen Parametrisierungen von Mannigfaltigkeiten stets um Einbettungen handelt.

Beispiel 3 (Beweise bitte Selbstudium)

1. Der Kreis aus Beispiel 1.1 ist eine 1-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit, obwohl der Kreis k-fach durchlaufen wird. Der Atlas benötigt mindestens zwei Karten.

2. Die Kurven aus Biespiel 1.2 und 1.3 sind keine Mannigfaltigkeiten, da φ nicht überall homöomorph ist.

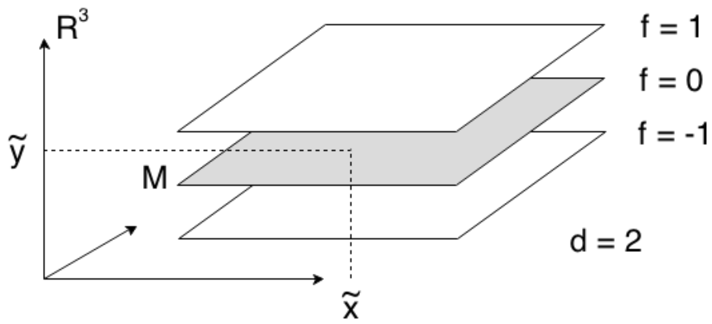
3. Jedes offene $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit mit $\{id\}$ als Atlas.

Beispiel 4 Sei $M := \text{graph } f$ aus Beispiel 2. Offenbar ist $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \to M \subset \mathbb{R}^n$ eine Einbettung. Das macht M zu einer d-dimensionalen C^q-Mannigfaltigkeit.

Beispiel 5 Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ (D offen) q-fach stetig differenzierbar für $q \geq 1$. Offenbar ist

$$\text{rang } f'(u) = n - d \qquad \forall u \in D \tag{29.3}$$

Wir nennen $M = \{u \in D \mid f(n) = 0\}$ die Niveaumenge von f



Fixieren wir $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x_1, ..., x_d, y_1, ..., y_{n-d}) \in$ M , so sehen wir mit (29.3) und eventuellen Koordinatenvertauschungen, dass $f(\tilde{x}, \tilde{y})$ regulär ist. Der *Satz über implizite Funktionen* sichert uns nun, dass es eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^d$ von $\tilde{x}$, eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n-d}$ von $\tilde{y}$ und ein $\psi : V \to W \in C^q(V, W)$ gibt, das $(x, \psi(x)) \in M$ erfüllt und homöomorph ist.
Es folgt, dass $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) = (x, \psi(x))$ eine homöomorphe, reguläre Einbettung und $\varphi(V)$ Umgebung von $\tilde{u} \in M$ bezüglich von M ist. Daraus können wir nun schließen, dass M eine d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit ist.

Bemerkung: M = *graph* f *und* M = $\{f = 0\}$ *sind grundlegende Konstruktionen für Mannigfaltigkeiten.* ***Lokal*** *ist jede Mannigfaltigkeit von dieser Gestalt! Wir werden diese beiden wichtigen äquivalenten Eigenschaften im Folgenden genauer untersuchen.*

Satz 29.1 (lokale Darstellung einer Mannigfaltigkeit als Graph)
$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit, wenn für alle $u \in M \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung U von u bezüglich M und eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^d$ existiert, sodass (gegebenefalls unter einer Koordinatenpermutation π im $\mathbb{R}^n$) für mindenstens ein $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ ein ψ mit $\psi[W] = U$ existiert, das

$$\psi(v) := \pi(v, f(v)) \quad \forall v \in W$$

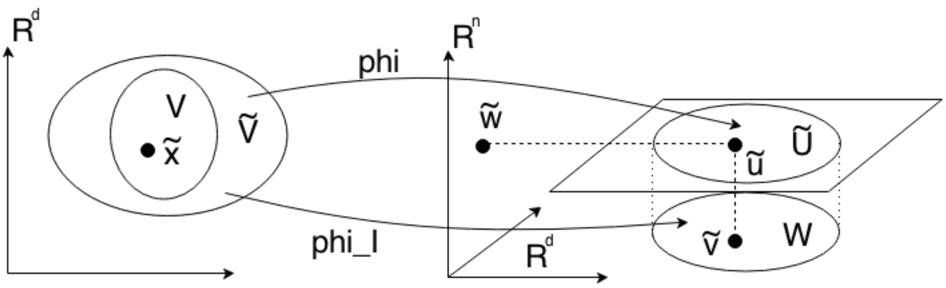
erfüllt. (d.h. $U = \text{graph } f$)

Wir können also sagen, dass sich jede C^q-Mannigfaltigkeit *lokal* als Graph einer C^q-Funktion darstellen lassen können muss. Die Umkehrung ist genauso richtig. So ist also jeder Graph einer C^q-Funktion gleichzeitig Mannigfaltigkeit.

Beweis. Die Rückrichtung folgt direkt aus den Beispielen 2 und 4. Für die Hinrichtung fixieren wir ein $\tilde{u} \in M$ und wählen $\varphi : \tilde{V} \in \mathbb{R}^d \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ als zugehörige Parametrisierung von $\tilde{u} = \varphi(\tilde{x})$. Wir schreiben nun φ als

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{\mathrm{I}}(x) \in \mathbb{R}^d \\ \varphi_{\mathrm{II}}(x) \in \mathbb{R}^{n-d} \end{pmatrix}$$

Da φ' regulär sein muss, folgt (mit eventueller Vertauschung π der Zeilen), dass auch $\varphi_{\mathrm{I}}'(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ regulär ist. Zerlegen wir nun $\tilde{u} = \pi(\tilde{u}, \tilde{w})$ mit $v \in \mathbb{R}^d$,



so folgt aus dem *Satz über inverse Funktionen*, dass es ein offenes $V \subset \tilde{V}$ gibt, in dem ein $\tilde{x} \in V$ liegt und wiederum ein $W \subset \mathbb{R}^d$, in dem ein $\tilde{v} \in W$ liegt, so dass $\tilde{v}$ durch φ^{-1} auf $\tilde{x}$ abgebildet wird. φ^{-1} exisitert auf jeden Fall, da φ homöomorph und C^q-differenzierbar ist. Es ist also

$$\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(\tilde{v}) = \tilde{x}$$

Wählen wir nun

$$f(v) := \varphi_{\mathrm{II}}\left(\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(v)\right)$$

welches für alle $v \in W$ q-mal stetig differenzierbar ist, also in $C^q\left(W, \mathbb{R}^{n-d}\right)$ liegt, und setzen

$$\psi(v) := \varphi\left(\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(v)\right) = \left(\varphi_{\mathrm{I}}\left(\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(v), \left(\varphi_{\mathrm{II}}\left(\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(v)\right)\right) = \pi\left(v, f(v)\right)\right.$$

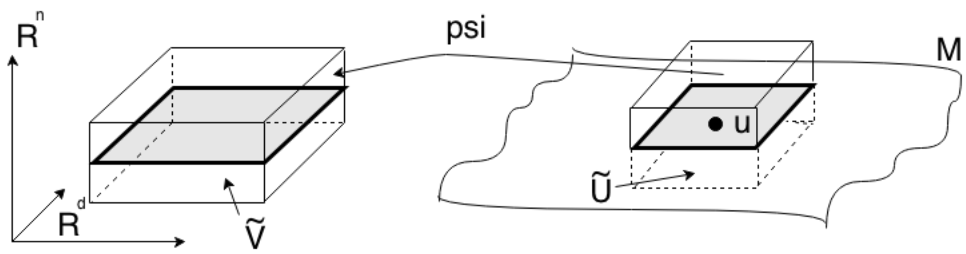
So folgt unmittelbar, dass $\psi(\tilde{v}) = \pi(\tilde{v}, \tilde{w}) = \tilde{u}$ ist und $\psi(w) = \varphi(v)$ in M liegt. Aufgrund der Homöomorphie von $\varphi : \tilde{V} \to \tilde{U}$ ist $\varphi[V]$ offen in M und somit auch $U := \psi(W)$ offen bezüglich M. Da U nun eine Umgebung von $\tilde{u}$ bezüglich M ist und $\tilde{u}$ beliebig war, folgt direkt die Behauptung. **q.e.d.**

Satz 29.2 (Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten mit umgebendem Raum)

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit, wenn für alle $u \in M$ eine Umgebung $\tilde{U}$ bezüglich des $\mathbb{R}^n$ exisitert, sodass $\psi : \tilde{U} \to \tilde{V}$ (mit $V \subset \mathbb{R}^n$ offen) ein C^q-Diffeomorphismus ist und

$$\psi\left(\tilde{U} \cap M\right) = \tilde{V} \cap \left(\mathbb{R}^d \times 0\right)$$

erfüllt.



Dies ist eine Charakterisierung, die den umgebenden Raum nutzt und oft auch als Definition von C^q-Mannigfaltigkeiten verwendet wird.

Beweis. Für die Rückrichtung schränken wir ψ auf $\tilde{U} \cap M$ ein und erhalten sofort Karten, was die Behauptung bestätigt. Für die Hinrichtung fixieren wir ein $\tilde{u} \in M$ und wählen wieder $\tilde{U} \subset M$, $W \subset \mathbb{R}^d$ und ein $f \in C^q\left(W, \mathbb{R}^{n-d}\right)$. Gemäß Satz

29.1 setzen wir o.B.d.A $\pi = id$ und zerlegen $\tilde{u} = \left(\tilde{v}, f(\tilde{v})\right) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$. Nun sei $\hat{U} := W \times \mathbb{R}^{n-d} =: \hat{V}$, welches den *Zylinder* aus U und W in Beweis zu Satz 29.1 liefert. Setzen wir schließlich noch $\tilde{\varphi} : \hat{V} \to \hat{U}$ mit

$$\tilde{\varphi}(v, w) := (v, f(v) + w)$$

welches offenbar $\in C^q$ ist und erhalten, dass

$$\tilde{\varphi}'(\tilde{v}, 0) = \begin{pmatrix} id_d & 0 \\ f'(v) & id_{n-d} \end{pmatrix}$$

regulär ist. Nach dem *Satz ü. inverse Funktionen* exisitert wiederum eine Umgebung $\tilde{U} \subset \hat{U}$ von $\tilde{u}$ und eine Umgebung $\tilde{V} \subset \hat{V}$ von $(\tilde{v}, 0)$, sodass $\tilde{\psi} := \tilde{\varphi}^{-1} \in C^q\left(\tilde{U}, \tilde{V}\right)$ exisitiert. Wegen $\tilde{\varphi}\left(\tilde{V} \cap \left(\mathbb{R}^d \times 0\right)\right) = \tilde{U} \cap M$ folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Folgerung 29.3 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit und $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \to U \subset M$ die Parametrisierung um $u \in M$. Dann gibt es die offenen Mengen $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ mit $U \subset \tilde{U}, V \times 0 \subset \tilde{V}$ für die $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \to \tilde{U}$ abbildet, ein C^q-Diffeomorphismus ist und $\tilde{\varphi}(x, 0) = \varphi(x) \forall x \in V$

Beweis. Folgt aus Beweisen von Satz 29.1 und 29.2 **q.e.d.**

Satz 29.4 (lokale Darstellung von Mannigfaltigkeiten als Niveaumenge)

$\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit, wenn für alle $u \in \mathrm{M}$ eine Umgebung $\tilde{\mathrm{U}}$ bezüglich des $\mathbb{R}^n$, so wie eine Funktion $f \in \mathrm{C}^q\left(\tilde{\mathrm{U}}, \mathbb{R}^{n-d}\right)$ mit rang $f'(u) = n - d$ existiert, sodass

$$\tilde{\mathrm{U}} \cap \mathrm{M} = \left\{\tilde{u} \in \tilde{\mathrm{U}} \,|\, f(\tilde{u}) = 0\right\}$$

Wir haben hiermit eine weitere wichtige Eigenschaft von Mannigfaltigkeiten gezeigt, nämlich, dass jede C^q-Mannigfaltigkeit immer gleichzeitig Niveaumenge einer C^q-Funktion ist und umgekehrt!

Eine durchaus berechtigte Frage ist, ob die Niveaumenge unbedingt der Gleichung $f(u) = 0$ genügen muss, oder ob dies auch für andere $c \neq 0$ funktioniert. Aus diesem Grund führen wir einen weiteren Begriff ein:

Definition (Regulärer Wert) $c \in \mathbb{R}^{n-d}$ heißt **regulärer Wert** von $f \in \mathrm{C}^q\left(\tilde{\mathrm{U}}, \mathbb{R}^{n-d}\right)$ (mit $\tilde{\mathrm{U}} \subset \mathbb{R}^n$ offen), falls

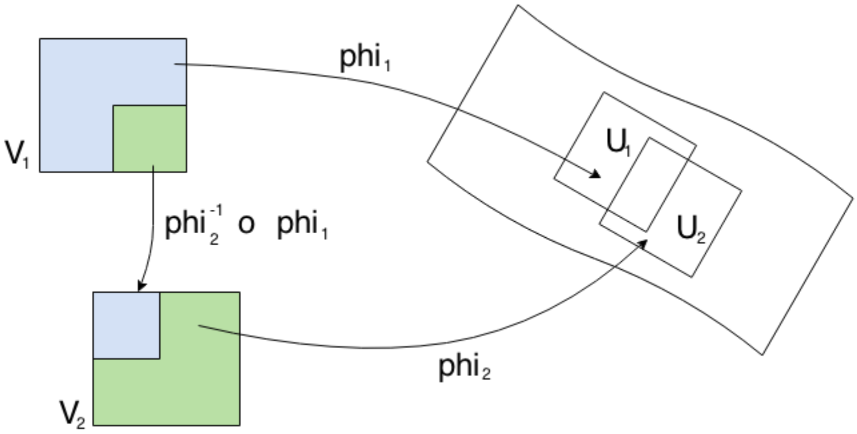
$$\text{rang } f'(u) = n - d \quad \forall u \in \tilde{\mathrm{U}} \quad \text{mit} \quad f(u) = c$$

Vergleichen wir dies nun mit Satz 29.4, so ist jedes $\mathrm{M} := \left\{u \in \tilde{\mathrm{U}} \,|\, f(u) = c\right\}$ eine d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit, falls c ein regulärer Wert von f ist.

Beweis. Gemäß Beispiel 5 erhält man mit f eine lokale Parametrisierung. Damit ist die Rückrichtung gezeigt. $\Rightarrow$ Behauptung.
" $\Rightarrow$ " : fixiere $\tilde{u} \in \mathrm{M}$, wähle $\tilde{\mathrm{U}}, \tilde{\mathrm{V}} \subset \mathbb{R}^n, \tilde{\psi} : \tilde{\mathrm{U}} \to \tilde{\mathrm{V}}$ gemäß Satz 29.2
sei $f := \left(\tilde{\psi}_{d+1}, \ldots, \tilde{\psi}_n\right)$, offenbar $f \in \mathrm{C}^q\left(\tilde{\mathrm{U}}, \mathbb{R}^{n-d}\right)$
mit $\tilde{\psi}$ aus dem Beweis zu Satz 29.2: $\tilde{\psi}'(\tilde{u}) = \tilde{\varphi}'(\tilde{v}, 0)^{-1}$ ist regulär
$\Rightarrow f'(\tilde{u})$ hat vollen Rang, d.h. *rang* $f'(\tilde{u}) = n - d$
nach Konstruktion $\left\{u \in \tilde{\mathrm{U}} \,|\, f(u) = 0\right\} = \mathrm{U} \cap \mathrm{M} \Rightarrow$ Behauptung. **q.e.d.**

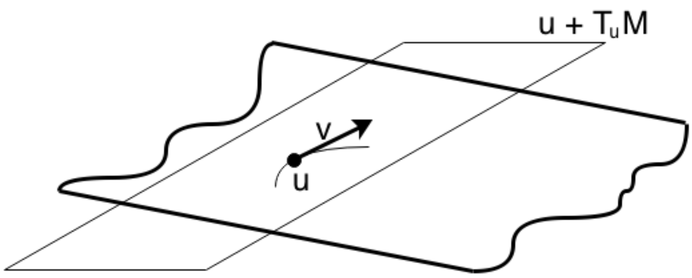
Lemma 29.5 (Kartenwechsel)

Sei $M \in \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit
und $\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}$ Karten mit zugehörigem Kartengebiet $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$
$\Longrightarrow \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ ist C^q-Diffeomorphismus.



Beweis. Ersetze φ_1, φ_2 mit $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ gemäß Folgerung 29.3
$\Rightarrow$ Einschränkung von $\tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1$ liefert Behauptung. **q.e.d.**

Definition Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit.
Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt **Tangentialvektor** in $u \in M$ an M,
falls eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : (-\delta, \delta) \to M (\delta > 0)$ exisitiert mit
$\gamma(0) = u$ und $\gamma'(0) = v$.
Die Menge aller Tangentialvektoren $T_u M$ heißt Tangentialraum.



Satz 29.6 Sei $M \in \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit,
$u \in M$, $\varphi : V \to U$ der zugehörige Parameter um u
$\Longrightarrow T_u M$ ist d-dimensionaler ($\mathbb{R}-$) Vektorraum und

$$T_u M = \underbrace{\varphi'(x)}_{L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^n)} \left(\mathbb{R}^d\right) \text{ für } x = \varphi^{-1}(u) \tag{29.4}$$

wobei $T_u M$ unabhängig vom speziellen Parameter φ ist.

Beweis. Sei $\gamma : (-\delta, \delta) \to M eine C^1$-Kurve mit $\gamma(0) = u$
$\Rightarrow g := \varphi^{-1} \circ \gamma$ ist C^1-Kurve, $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^d$ mit $g(0) = x$ und

$$\gamma'(0) = \varphi'(x) g'(0), \ \varphi'(x) \text{ist regulär.} \tag{$*$}$$

Offenb. liefert auch jede C^1-Kurve g in $\mathbb{R}^d$ durch x eine C^1-Kurve γ in M mit $(*)$
Die Menge aller Tangentialvektoren $g'(0)$ von C^1-Kurven g in $\mathbb{R}^d$ ist offenbar $\mathbb{R}^d$
$\Rightarrow 29.4 \xRightarrow{\varphi'(x) \text{ ist regulär}} dim\, T_u M = d$
da $(*)$ für jeden Parameter φ gilt, ist $T_u M$ unabhängig von φ. **q.e.d.**

Bemerkung: Man bezeichnet auch $(u, T_u M) \subset M \times \mathbb{R}^n$ als Tangentialraum und
$TM = \bigcup_{U \in M} (u, T_u M) \subset M \times \mathbb{R}^n$ als Tangentialbündel.

Beispiel 6 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen
$\Rightarrow$ M ist ist n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $T_u M = \mathbb{R}^n \forall u \in M$

Definition Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensinale Mannigfaltigkeit.
Ein Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ heißt **Normalenvektor** in $u \in M$ an M, falls
$\langle w, v \rangle = 0 \forall v \in T_u M$ (d.h. $w \perp v \forall v \in T_u M$)
Die Menge aller Normalenvektoren $N_u M = T_u M^{\perp}$ heißt
Normalenraum von M in u.