

Mathematik für Physiker I+II

Friedemann Schuricht

übertragen von
Lukas Körber und Friedrich Zahn

Wintersemester 2014/2015

Inhaltsverzeichnis

VIII	Integration auf Mannigfaltigkeiten	7
29	Mannigfaltigkeiten	7

Überblick

Diese Vorlesung wird sich mit folgenden Themen befassen:

1. **Integration auf Mannigfaltigkeiten**
2. **Differenzialgleichungen**, sowohl gewöhnlich, als auch partiel
3. **Funktionalanalysis** in Banach- und Hilberträumen (insbesondere unendlich dimensionale Räume z.B. von Folgen und Funktionen)
4. **Funktionstheorie**, der Theorie von komplexwertigen Funktionen und z.B. \mathbb{C} -Differenzierbarkeit

Kapitel VIII

Integration auf Mannigfaltigkeiten

Literaturtipp: Königsberger Analysis 2, Springer

29 Mannigfaltigkeiten

Sei $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$ mit $q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, also q -fach stetig differenzierbar, wobei $V \subset \mathbb{R}^d$ offen ist, dann heißt φ **regulär**, falls

$$\varphi'(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ regulär (d.h. injektiv)} \quad (29.1)$$

Falls φ regulär für alle $x \in V$ ist, heißt es auch **regulär auf V** beziehungsweise **reguläre C^q -Parametrisierung** (manchmal auch C^q -Immersion).

V ist dann der **Parameterbereich** von φ .

Bemerkung: $\varphi(V)$ wird selten auch **Spur** von φ genannt.

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass aus (29.1) sofort

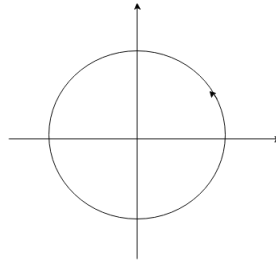
$$d \leq n \quad (29.2)$$

folgt. Dies sei in Kapitel VIII immer erfüllt! (29.2) ist außerdem äquivalent dazu, dass $\text{rang } \varphi'(x) = d$.



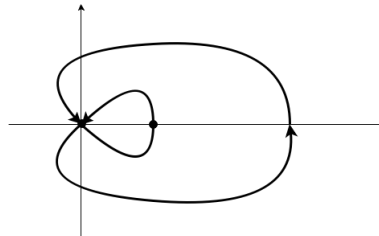
Beispiel 1 (reguläre Kurven $\varphi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$) Dabei ist I offen und der Tangentialvektor nirgendwo identisch mit dem Nullvektor, also $\varphi'(x) \neq 0$

1. $\varphi: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos kt \\ \sin kt \end{pmatrix}$ und $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$



Der Einheitskreis wird hier k -mal durchlaufen. Da $\varphi'(x) \neq 0$, ist φ regulär.

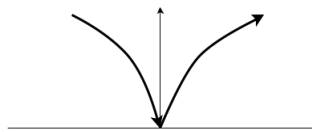
2. $\varphi: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = (1 + 2 \cos t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$



$$\varphi\left(\pm \frac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gehört **nicht** zur Kurve ("= $\varphi(\pm\pi)$ ") und φ ist regulär.

3. $\varphi: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ ist wegen $\varphi'(0) = 0$ **nicht** regulär

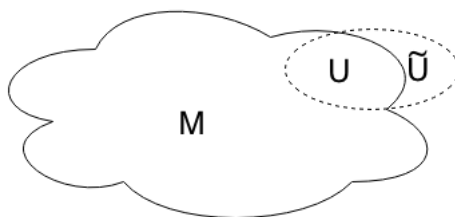


Beispiel 2 (Parametrisierung von Graphen) Sei $f \in C^q(V, \mathbb{R}^{n-d})$, $V \subset \mathbb{R}^d$. Betrachtet wird $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) = (x, f(x))$



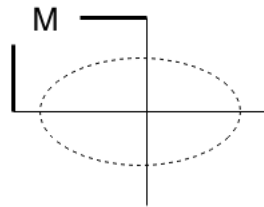
φ ist regulär, da offenbar $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$ und $\varphi' = \begin{pmatrix} id^d \\ f'(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ ist.

Es folgt eine Wiederholung zur **Relativtopologie** (vgl. Kapitel 14). Wir wissen, dass $U \subset M$ genau dann offen bezüglich M ist, wenn es ein $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ gibt, dass offen ist, und das $U = \tilde{U} \cap M$ erfüllt. Später wird M eine Mannigfaltigkeit sein und wir werden untersuchen, was in ihr offen ist.

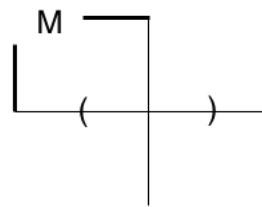


Auf dieser Grundlage lässt sich auch der Begriff der **Umgebung** definieren: $U \subset M$ heißt nämlich genau dann Umgebung von $u \in M$ bezüglich M , wenn es ein bezüglich M offenes $U_0 \subset M$ gibt, in dem u liegt und das Teilmenge von U ist.

Beispiel für $M \subset \mathbb{R}^n$.



offen bzgl. M



nicht offen bzgl. M

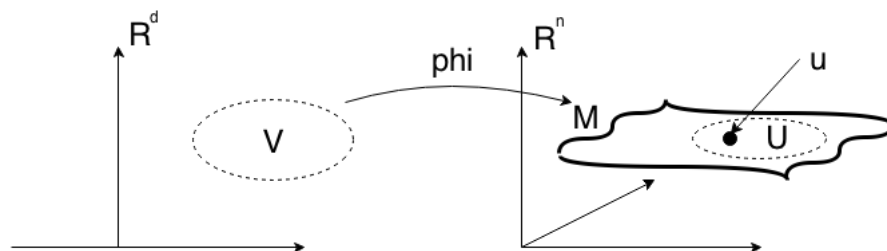
Definition (Mannigfaltigkeiten) Wir nennen $M \subset \mathbb{R}^n$ eine **d -dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit** ($q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$), falls

1. es für alle $u \in M$ eine (offene) Umgebung U von u bezüglich M gibt und
2. es eine reguläre C^q -Parametrisierung $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ (V ist offen) existiert, die homöomorph ist und in die Mannigfaltigkeit abbildet (also $\varphi(V) = U$).

Wiederholung: Eine stetige Abbildung heißt homöomorph, falls eine Umkehrabbildung existiert, die auch stetig ist.

In der Literatur wird M auch manchmal als C^q -Untermannigfaltigkeit bezeichnet. Wir werden jedoch später zeigen, dass die verschiedenen Definitionen von Mannigfaltigkeiten gleichwertig sind.

Da ab jetzt immer hauptsächlich C^1 -Mannigfaltigkeiten auftauchen werden, werden wir diese in Zukunft einfach "Mannigfaltigkeiten" nennen.



Die Umkehrabbildung φ^{-1} beziehungsweise (φ^{-1}, U) nennt man die **Karte** von M um $u \in M$, wobei U das zugehörige **Kartengebiet**, φ selbst die Parametrisierung und V der Parameterbereich ist.

Karten können eine Mannigfaltigkeit jedoch nur lokal beschreiben. Aus diesem Grund führt man den Begriff des Atlas, der eine globale Beschreibung ermöglicht, ein:

Die Menge $\{\varphi_\alpha^{-1} | \alpha \in A\}$ heißt **Atlas** der Mannigfaltigkeit M , falls die zugehörigen Kartengebiete U_α jene vollständig überdecken.

Weiterhin wichtig ist der Begriff der sogenannten **Einbettung**, bei der es sich um eine reguläre Parametrisierung handelt, die homöomorph ist. Wir vereinbaren, dass es sich im folgenden bei allen Parametrisierungen von Mannigfaltigkeiten stets um Einbettungen handelt.

Beispiel 3 (Beweise bitte Selbststudium)

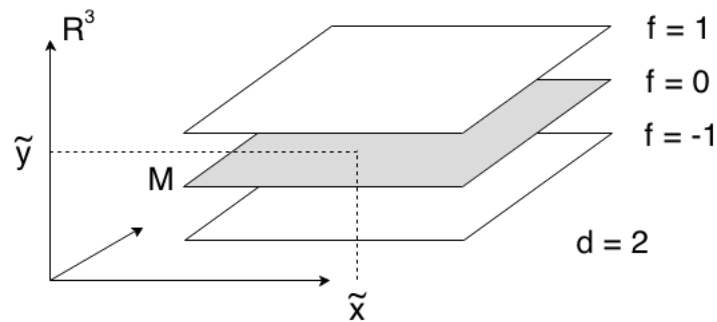
1. Der Kreis aus Beispiel 1.1 ist eine 1-dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit, obwohl der Kreis k -fach durchlaufen wird. Der Atlas benötigt mindestens zwei Karten.
2. Die Kurven aus Beispiel 1.2 und 1.3 sind keine Mannigfaltigkeiten, da φ nicht überall homöomorph ist.
3. Jedes offene $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit mit $\{id\}$ als Atlas.

Beispiel 4 Sei $M := \text{graph } f$ aus Beispiel 2. Offenbar ist $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ eine Einbettung. Das macht M zu einer d -dimensionalen C^q -Mannigfaltigkeit.

Beispiel 5 Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ (D offen) q -fach stetig differenzierbar für $q \geq 1$. Offenbar ist

$$\text{rang } f'(u) = n - d \quad \forall u \in D \quad (29.3)$$

Wir nennen $M = \{u \in D \mid f(u) = 0\}$ die Niveaumenge von f



Fixieren wir $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_{n-d}) \in M$, so sehen wir mit (29.3) und eventuellen Koordinatenvertauschungen, dass $f(\tilde{x}, \tilde{y})$ regulär ist. Der *Satz über implizite Funktionen* sichert uns nun, dass es eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^d$ von \tilde{x} , eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n-d}$ von \tilde{y} und ein $\psi : V \rightarrow W \in C^q(V, W)$ gibt, das $(x, \psi(x)) \in M$ erfüllt und homöomorph ist.

Es folgt, dass $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) = (x, \psi(x))$ eine homöomorphe, reguläre Einbettung und $\varphi(V)$ Umgebung von $\tilde{u} \in M$ bezüglich von M ist. Daraus können wir nun schließen, dass M eine d -dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit ist.

Bemerkung: $M = \text{graph } f$ und $M = \{f = 0\}$ sind grundlegende Konstruktionen für Mannigfaltigkeiten. **Lokal** ist jede Mannigfaltigkeit von dieser Gestalt! Wir werden diese beiden wichtigen äquivalenten Eigenschaften im Folgenden genauer untersuchen.

Satz 29.1 (lokale Darstellung einer Mannigfaltigkeit als Graph)

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine d -dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit, wenn für alle $u \in M \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung U von u bezüglich M und eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^d$ existiert, sodass (gegebenenfalls unter einer Koordinatenpermutation π im \mathbb{R}^n) für mindestens ein $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ ein ψ mit $\psi[W] = U$ existiert, das

$$\psi(v) := \pi(v, f(v)) \quad \forall v \in W$$

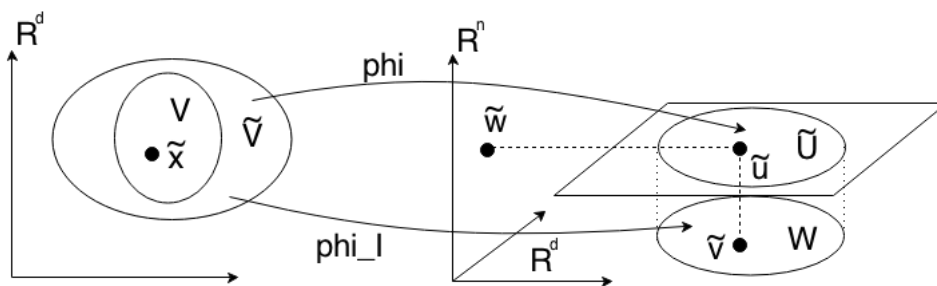
erfüllt. (d.h. $U = \text{graph } f$)

Wir können also sagen, dass sich jede C^q -Mannigfaltigkeit *lokal* als Graph einer C^q -Funktion darstellen lassen können muss. Die Umkehrung ist genauso richtig. So ist also jeder Graph einer C^q -Funktion gleichzeitig Mannigfaltigkeit.

Beweis. Die Rückrichtung folgt direkt aus den Beispielen 2 und 4. Für die Hinrichtung fixieren wir ein $\tilde{u} \in M$ und wählen $\varphi: \tilde{V} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ als zugehörige Parametrisierung von $\tilde{u} = \varphi(\tilde{x})$. Wir schreiben nun φ als

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_I(x) \in \mathbb{R}^d \\ \varphi_{II}(x) \in \mathbb{R}^{n-d} \end{pmatrix}$$

Da φ' regulär sein muss, folgt (mit eventueller Vertauschung π der Zeilen), dass auch $\varphi'_I(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ regulär ist. Zerlegen wir nun $\tilde{u} = \pi(\tilde{u}, \tilde{w})$ mit $v \in \mathbb{R}^d$,



so folgt aus dem *Satz über inverse Funktionen*, dass es ein offenes $V \subset \tilde{V}$ gibt, in dem ein $\tilde{x} \in V$ liegt und wiederum ein $W \subset \mathbb{R}^d$, in dem ein $\tilde{v} \in W$ liegt, so dass \tilde{v} durch φ^{-1} auf \tilde{x} abgebildet wird. φ^{-1} existiert auf jeden Fall, da φ homöomorph und C^q -differenzierbar ist. Es ist also

$$\varphi_I^{-1}(\tilde{v}) = \tilde{x}$$

Wählen wir nun

$$f(v) := \varphi_{\Pi}(\varphi_{\Gamma}^{-1}(v))$$

welches für alle $v \in W$ q -mal stetig differenzierbar ist, also in $C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ liegt, und setzen

$$\psi(v) := \varphi(\varphi_{\Gamma}^{-1}(v)) = (\varphi_{\Gamma}(\varphi_{\Gamma}^{-1}(v)), (\varphi_{\Pi}(\varphi_{\Gamma}^{-1}(v))) = \pi(v, f(v))$$

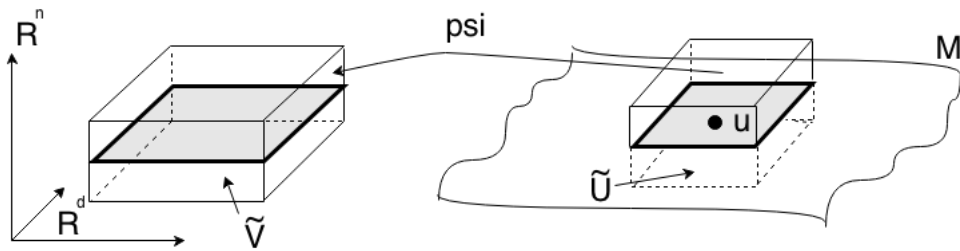
So folgt unmittelbar, dass $\psi(\tilde{v}) = \pi(\tilde{v}, \tilde{w}) = \tilde{u}$ ist und $\psi(w) = \varphi(v)$ in M liegt. Aufgrund der Homöomorphie von $\varphi: \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$ ist $\varphi[V]$ offen in M und somit auch $U := \psi(W)$ offen bezüglich M . Da U nun eine Umgebung von \tilde{u} bezüglich M ist und \tilde{u} beliebig war, folgt direkt die Behauptung. **q.e.d.**

Satz 29.2 (Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten mit umgebendem Raum)

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine d -dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit, wenn für alle $u \in M$ eine Umgebung \tilde{U} bezüglich des \mathbb{R}^n existiert, sodass $\psi: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ (mit $V \subset \mathbb{R}^n$ offen) ein C^q -Diffeomorphismus ist und

$$\psi(\tilde{U} \cap M) = \tilde{V} \cap (\mathbb{R}^d \times 0)$$

erfüllt.



Dies ist eine Charakterisierung, die den umgebenden Raum nutzt und oft auch als Definition von C^q -Mannigfaltigkeiten verwendet wird.

Beweis. Für die Rückrichtung schränken wir ψ auf $\tilde{U} \cap M$ und erhalten sofort Karten, was die Behauptung bestätigt. Für die Hinrichtung fixieren wir ein $\tilde{u} \in M$ und wählen wieder $\tilde{U} \subset M$, $W \subset \mathbb{R}^d$ und ein $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$. Gemäß Satz

29.1 setzen wir o.B.d.A $\pi = id$ und zerlegen $\tilde{u} = (\tilde{v}, f(\tilde{v})) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$. Nun sei $\hat{U} := W \times \mathbb{R}^{n-d} =: \hat{V}$, welches den Zylinder aus U und W in Beweis zu Satz 29.1 liefert. Setzen wir schließlich noch $\tilde{\varphi} : \hat{V} \rightarrow \hat{U}$ mit

$$\tilde{\varphi}(v, w) := (v, f(v) + w)$$

welches offenbar $\in C^q$ ist und erhalten, dass

$$\tilde{\varphi}'(\tilde{v}, 0) = \begin{pmatrix} id_d & 0 \\ f'(\tilde{v}) & id_{n-d} \end{pmatrix}$$

regulär ist. Nach dem Satz ü. inverse Funktionen existiert wiederum eine Umgebung $\tilde{U} \subset \hat{U}$ von \tilde{u} und eine Umgebung $\tilde{V} \subset \hat{V}$ von $(\tilde{v}, 0)$, sodass $\tilde{\psi} := \tilde{\varphi}^{-1} \in C^q(\tilde{U}, \tilde{V})$ existiert. Wegen $\tilde{\varphi}(\tilde{V} \cap (\mathbb{R}^d \times 0)) = \tilde{U} \cap M$ folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Folgerung 29.3 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit und $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow U \subset M$ die Parametrisierung um $u \in M$. Dann gibt es die offenen Mengen $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ mit $U \subset \tilde{U}, V \times 0 \subset \tilde{V}$ für die $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$ abbildet, ein C^q -Diffeomorphismus ist und $\tilde{\varphi}(x, 0) = \varphi(x) \forall x \in V$

Beweis. Folgt aus Beweisen von Satz 29.1 und 29.2

q.e.d.

Satz 29.4 (lokale Darstellung von Mf als Niveaumenge)

$M \subset \mathbb{R}^n$ sei d-dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit.

$\iff \forall u \in M$ existiert eine Umgebung \tilde{U} von u bezüglich \mathbb{R}^n und $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$ mit $\text{rang } f'(u) = n - d$ und $\tilde{U} \cap M = \{\tilde{u} \in \tilde{U} \mid f(\tilde{u}) = 0\}$

somit: M ist eine C^q -Mannigfaltigkeit genau dann, wenn M die lokale Niveaumenge einer C^q -Funktion f ist.

Bemerkung: $c \in \mathbb{R}^{n-d}$ heißt regulärer Wert von $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$,

$\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, falls $\text{rang } f'(u) = n - d \forall u \in \tilde{U}$ mit $f(u) = c$

Folglich ist $M := \{u \in \tilde{U} \mid f(u) = c\}$ eine d-dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit, falls c ein regulärer Wert von f ist.

Beweis. " \Leftarrow ": gemäß Bsp. 5 erhält man lokale Parametrisierung \Rightarrow Behauptung.

" \Rightarrow ": fixiere $\tilde{u} \in M$, wähle $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n, \tilde{\psi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ gemäß Satz 29.2

sei $f := (\tilde{\psi}_{d+1}, \dots, \tilde{\psi}_n)$, offenbar $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$

mit $\tilde{\psi}$ aus dem Beweis zu Satz 29.2: $\tilde{\psi}'(\tilde{u}) = \tilde{\varphi}'(\tilde{v}, 0)^{-1}$ ist regulär

$\Rightarrow f'(\tilde{u})$ hat vollen Rang, d.h. $\text{rang } f'(\tilde{u}) = n - d$

nach Konstruktion $\{u \in \tilde{U} \mid f(u) = 0\} = U \cap M \Rightarrow$ Behauptung.

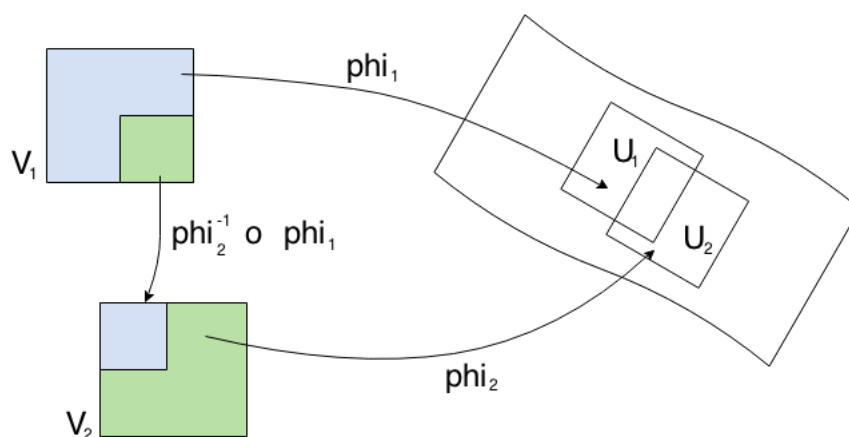
q.e.d.

Lemma 29.5 (Kartenwechsel)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit

und $\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}$ Karten mit zugehörigem Kartengebiet $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$

$\Rightarrow \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ ist C^q -Diffeomorphismus.



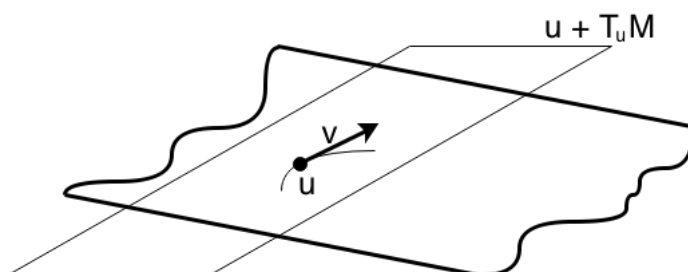
Beweis. Ersetze φ_1, φ_2 mit $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ gemäß Folgerung 29.3
 \Rightarrow Einschränkung von $\tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1$ liefert Behauptung.

q.e.d.

Definition Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt **Tangentialvektor** in $u \in M$ an M , falls eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ ($\delta > 0$) existiert mit $\gamma(0) = u$ und $\gamma'(0) = v$.

Die Menge aller Tangentialvektoren $T_u M$ heißt Tangentialraum.



Satz 29.6 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit,
 $u \in M$, $\varphi: V \rightarrow U$ der zugehörige Parameter um u
 $\Rightarrow T_u M$ ist d -dimensionaler (\mathbb{R} -) Vektorraum und

$$T_u M = \underbrace{\varphi'(x)}_{L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)} (\mathbb{R}^d) \text{ für } x = \varphi^{-1}(u) \quad (29.4)$$

wobei $T_u M$ unabhängig vom speziellen Parameter φ ist.

Beweis. Sei $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow M$ eine C^1 -Kurve mit $\gamma(0) = u$
 $\Rightarrow g := \varphi^{-1} \circ \gamma$ ist C^1 -Kurve, $g: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $g(0) = x$ und

$$\gamma'(0) = \varphi'(x)g'(0), \varphi'(x) \text{ ist regulär.} \quad (*)$$

Offenb. liefert auch jede C^1 -Kurve g in \mathbb{R}^d durch x eine C^1 -Kurve γ in M mit $(*)$
 Die Menge aller Tangentialvektoren $g'(0)$ von C^1 -Kurven g in \mathbb{R}^d ist offenbar \mathbb{R}^d

$$\Rightarrow 29.4 \xrightarrow{\varphi'(x) \text{ ist regulär}} \dim T_u M = d$$

da $(*)$ für jeden Parameter φ gilt, ist $T_u M$ unabhängig von φ .

q.e.d.

Bemerkung: Man bezeichnet auch $(u, T_u M) \subset M \times \mathbb{R}^n$ als Tangentialraum und
 $TM = \bigcup_{u \in M} (u, T_u M) \subset M \times \mathbb{R}^n$ als Tangentialbündel.

Beispiel 6 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen

$\Rightarrow M$ ist n -dimensionale Mannigfaltigkeit und $T_u M = \mathbb{R}^n \forall u \in M$

Definition Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Ein Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ heißt **Normalenvektor** in $u \in M$ an M , falls

$$\langle w, v \rangle = 0 \forall v \in T_u M \text{ (d.h. } w \perp v \forall v \in T_u M)$$

Die Menge aller Normalenvektoren $N_u M = T_u M^\perp$ heißt

Normalenraum von M in u .