

# Mathematik für Physiker I

Friedemann Schuricht

übertragen von  
Lukas Körber und Friedrich Zahn

Wintersemester 2014/2015



# Inhaltsverzeichnis

<b>VIII Integration auf Mannigfaltigkeiten</b>	<b>7</b>
29 Mannigfaltigkeiten . . . . .	7
30 Integration auf Kartengebieten . . . . .	26
31 Integrale auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	42
32 Integralsätze von Gauß und Stokes . . . . .	48
33 Gradientenfelder . . . . .	63



# Überblick

Diese Vorlesung wird sich mit folgenden Themen befassen:

1. **Integration auf Mannigfaltigkeiten**
2. **Differenzialgleichungen**, sowohl gewöhnlich, als auch partiell
3. **Funktionalanalysis** in Banach- und Hilberträumen (insbesondere unendlich dimensionale Räume z.B. von Folgen und Funktionen)
4. **Funktionstheorie**, der Theorie von komplexwertigen Funktionen und z.B.  $\mathbb{C}$ -Differenzierbarkeit



# Kapitel VIII

## Integration auf Mannigfaltigkeiten

*Literaturtipp:* Königsberger Analysis 2, Springer

### 29 Mannigfaltigkeiten

Sei  $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$  mit  $q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ , also  $q$ -fach stetig differenzierbar, wobei  $V \subset \mathbb{R}^d$  offen ist, dann heißt  $\varphi$  **regulär**, falls

$$\varphi'(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ regulär (d.h. injektiv)} \quad (29.1)$$

Falls  $\varphi$  regulär für alle  $x \in V$  ist, heißt es auch **regulär auf  $V$**  beziehungsweise **reguläre  $C^q$ -Parametrisierung** (manchmal auch  $C^q$ -Immersion).

$V$  ist dann der **Parameterbereich** von  $\varphi$ .

*Bemerkung:*  $\varphi(V)$  wird selten auch **Spur** von  $\varphi$  genannt.

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass aus (29.1) sofort

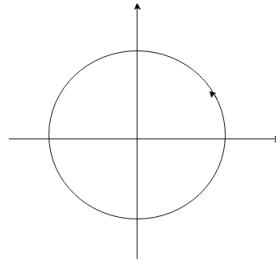
$$d \leq n \quad (29.2)$$

folgt. Dies sei in Kapitel VIII immer erfüllt! (29.2) ist außerdem äquivalent dazu, dass  $\text{rang } \varphi'(x) = d$ .



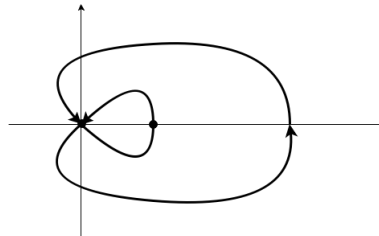
**Beispiel 29.1 (reguläre Kurven  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ )** Dabei ist  $I$  offen und der Tangentialvektor nirgendwo identisch mit dem Nullvektor, also  $\varphi'(x) \neq 0$

1.  $\varphi : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos kt \\ \sin kt \end{pmatrix}$  und  $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$



Der Einheitskreis wird hier  $k$ -mal durchlaufen. Da  $\varphi'(x) \neq 0$ , ist  $\varphi$  regulär.

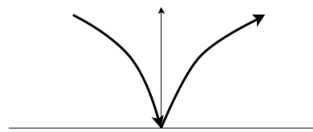
2.  $\varphi : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\varphi(t) = (1 + 2 \cos t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$



$$\varphi\left(\pm \frac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  gehört **nicht** zur Kurve ("=  $\varphi(\pm\pi)$ ") und  $\varphi$  ist regulär.

3.  $\varphi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\varphi(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$  ist wegen  $\varphi'(0) = 0$  **nicht** regulär



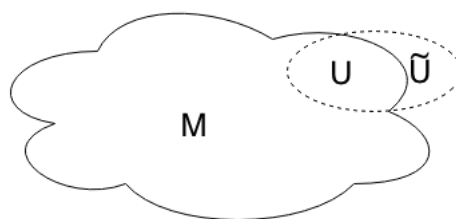


**Beispiel 29.2 (Parametrisierung von Graphen)** Sei  $f \in C^q(V, \mathbb{R}^{n-d})$ ,  $V \subset \mathbb{R}^d$ . Betrachtet wird  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi(x) = (x, f(x))$



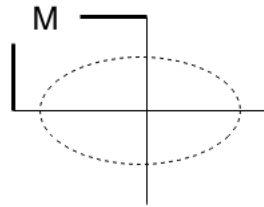
$\varphi$  ist regulär, da offenbar  $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$  und  $\varphi' = \begin{pmatrix} id^d \\ f'(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times d}$  ist.

Es folgt eine Wiederholung zur **Relativtopologie** (vgl. Kapitel 14). Wir wissen, dass  $U \subset M$  genau dann offen bezüglich  $M$  ist, wenn es ein  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$  gibt, dass offen ist, und das  $U = \tilde{U} \cap M$  erfüllt. Später wird  $M$  eine Mannigfaltigkeit sein und wir werden untersuchen, was in ihr offen ist.

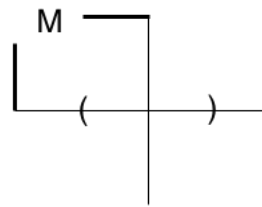


Auf dieser Grundlage lässt sich auch der Begriff der **Umgebung** definieren:  $U \subset M$  heißt nämlich genau dann Umgebung von  $u \in M$  bezüglich  $M$ , wenn es ein bezüglich  $M$  offenes  $U_0 \subset M$  gibt, in dem  $u$  liegt und das Teilmenge von  $U$  ist.

Beispiel für  $M \subset \mathbb{R}^n$ .



offen bzgl. M



nicht offen bzgl. M

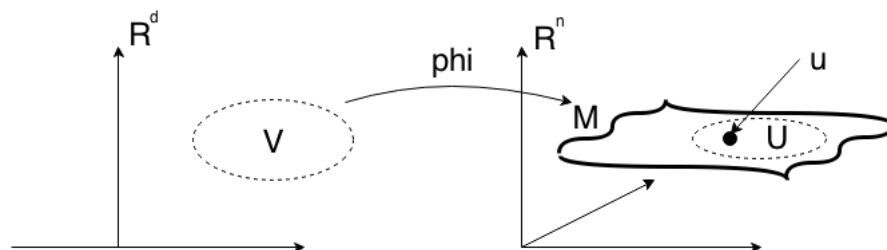
**Definition (Mannigfaltigkeiten)** Wir nennen  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine **d-dimensionale  $C^q$ -Mannigfaltigkeit** ( $q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ), falls

1. es für alle  $u \in M$  eine (offene) Umgebung  $U$  von  $u$  bezüglich  $M$  gibt und
2. eine reguläre  $C^q$ -Parametrisierung  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $V$  ist offen) existiert, die homöomorph ist und in die Mannigfaltigkeit abbildet (also  $\varphi(V) = U$ ).

*Wiederholung: Eine stetige Abbildung heißt homöomorph, falls eine Umkehrabbildung existiert, die auch stetig ist.*

In der Literatur wird  $M$  auch manchmal als  $C^q$ -Untermannigfaltigkeit bezeichnet. Wir werden jedoch später zeigen, dass die verschiedenen Definitionen von Mannigfaltigkeiten gleichwertig sind.

Da ab jetzt immer hauptsächlich  $C^1$ -Mannigfaltigkeiten auftauchen werden, werden wir diese in Zukunft einfach "Mannigfaltigkeiten" nennen.



Die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  beziehungsweise  $(\varphi^{-1}, U)$  nennt man die **Karte** von  $M$  um  $u \in M$ , wobei  $U$  das zugehörige **Kartengebiet**,  $\varphi$  selbst die Parametrisierung und  $V$  der Parameterbereich ist.

Karten können eine Mannigfaltigkeit jedoch nur lokal beschreiben. Aus diesem Grund führt man den Begriff des Atlas, der eine globale Beschreibung ermöglicht, ein:

Die Menge  $\{\varphi_\alpha^{-1} | \alpha \in A\}$  heißt **Atlas** der Mannigfaltigkeit  $M$ , falls die zugehörigen Kartengebiete  $U_\alpha$  jene vollständig überdecken.

Weiterhin wichtig ist der Begriff der sogenannten **Einbettung**, bei der es sich um eine reguläre Parametrisierung handelt, die homöomorph ist. Wir vereinbaren, dass es sich im folgenden bei allen Parametrisierungen von Mannigfaltigkeiten stets um Einbettungen handelt.

### Beispiel 29.3 (Beweise bitte Selbststudium)

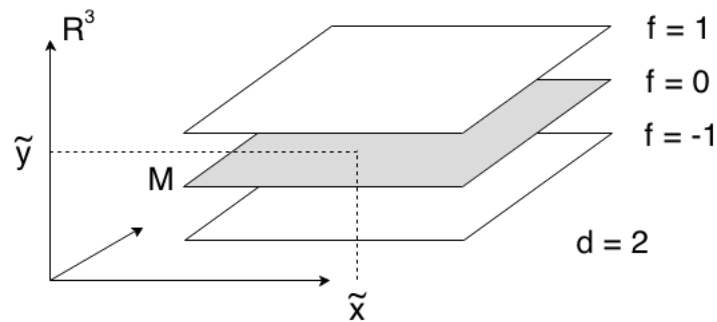
1. Der Kreis aus Beispiel 1.1 ist eine 1-dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, obwohl der Kreis  $k$ -fach durchlaufen wird. Der Atlas benötigt mindestens zwei Karten.
2. Die Kurven aus Beispiel 1.2 und 1.3 sind keine Mannigfaltigkeiten, da  $\varphi$  nicht überall homöomorph ist.
3. Jedes offene  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit mit  $\{id\}$  als Atlas.

**Beispiel 29.4** Sei  $M := \text{graph } f$  aus Beispiel 2. Offenbar ist  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  eine Einbettung. Das macht  $M$  zu einer  $d$ -dimensionalen  $C^q$ -Mannigfaltigkeit.

**Beispiel 29.5** Sei  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$  ( $D$  offen)  $q$ -fach stetig differenzierbar für  $q \geq 1$ . Offenbar ist

$$\text{rang } f'(u) = n - d \quad \forall u \in D \quad (*)$$

Wir nennen  $M = \{u \in D \mid f(u) = 0\}$  die Niveaumenge von  $f$



Fixieren wir  $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_{n-d}) \in M$ , so sehen wir mit (\*) und eventuellen Koordinatenvertauschungen, dass  $f(\tilde{x}, \tilde{y})$  regulär ist. Der *Satz über implizite Funktionen* sichert uns nun, dass es eine Umgebung  $V \subset \mathbb{R}^d$  von  $\tilde{x}$ , eine Umgebung  $W \subset \mathbb{R}^{n-d}$  von  $\tilde{y}$  und ein  $\psi : V \rightarrow W \in C^q(V, W)$  gibt, das  $(x, \psi(x)) \in M$  erfüllt und homöomorph ist.

Es folgt, dass  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi(x) = (x, \psi(x))$  eine homöomorphe, reguläre Einbettung und  $\varphi(V)$  Umgebung von  $\tilde{u} \in M$  bezüglich von  $M$  ist. Daraus können wir nun schließen, dass  $M$  eine  $d$ -dimensionale  $C^q$ -Mannigfaltigkeit ist.

*Bemerkung:*  $M = \text{graph } f$  und  $M = \{f = 0\}$  sind grundlegende Konstruktionen für Mannigfaltigkeiten. **Lokal** ist jede Mannigfaltigkeit von dieser Gestalt! Wir werden diese beiden wichtigen äquivalenten Eigenschaften im Folgenden genauer untersuchen.

**Satz 29.1 (lokale Darstellung einer Mannigfaltigkeit als Graph)**

$M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann eine  $d$ -dimensionale  $C^q$ -Mannigfaltigkeit, wenn für alle  $u \in M \subset \mathbb{R}^n$  eine Umgebung  $U$  von  $u$  bezüglich  $M$  und eine offene Menge  $W \subset \mathbb{R}^d$  existiert, sodass (gegebenenfalls unter einer Koordinatenpermutation  $\pi$  im  $\mathbb{R}^n$ ) für mindestens ein  $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$  ein  $\psi$  mit  $\psi[W] = U$  existiert, das

$$\psi(v) := \pi(v, f(v)) \quad \forall v \in W$$

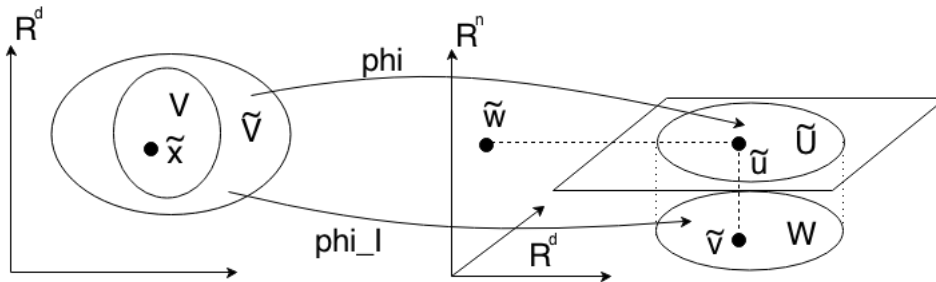
erfüllt. (d.h.  $U = \text{graph } f$ )

Wir können also sagen, dass sich jede  $C^q$ -Mannigfaltigkeit *lokal* als Graph einer  $C^q$ -Funktion darstellen lassen können muss. Die Umkehrung ist genauso richtig. So ist also jeder Graph einer  $C^q$ -Funktion gleichzeitig Mannigfaltigkeit.

*Beweis.* Die Rückrichtung folgt direkt aus den Beispielen 2 und 4. Für die Hinrichtung fixieren wir ein  $\tilde{u} \in M$  und wählen  $\varphi : \tilde{V} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$  als zugehörige Parametrisierung von  $\tilde{u} = \varphi(\tilde{x})$ . Wir schreiben nun  $\varphi$  als

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_I(x) \in \mathbb{R}^d \\ \varphi_{II}(x) \in \mathbb{R}^{n-d} \end{pmatrix}$$

Da  $\varphi'$  regulär sein muss, folgt (mit eventueller Vertauschung  $\pi$  der Zeilen), dass auch  $\varphi'_I(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$  regulär ist. Zerlegen wir nun  $\tilde{u} = \pi(\tilde{u}, \tilde{w})$  mit  $v \in \mathbb{R}^d$ ,



so folgt aus dem *Satz über inverse Funktionen*, dass es ein offenes  $V \subset \tilde{V}$  gibt, in dem ein  $\tilde{x} \in V$  liegt und wiederum ein  $W \subset \mathbb{R}^d$ , in dem ein  $\tilde{v} \in W$  liegt, so dass  $\tilde{v}$  durch  $\varphi^{-1}$  auf  $\tilde{x}$  abgebildet wird.  $\varphi^{-1}$  existiert auf jeden Fall, da  $\varphi$  homöomorph und  $C^q$ -differenzierbar ist. Es ist also

$$\varphi_I^{-1}(\tilde{v}) = \tilde{x}$$

Wählen wir nun

$$f(v) := \varphi_{II}(\varphi_I^{-1}(v))$$

welches für alle  $v \in W$   $q$ -mal stetig differenzierbar ist, also in  $C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$  liegt, und setzen

$$\psi(v) := \varphi(\varphi_I^{-1}(v)) = (\varphi_I(\varphi_I^{-1}(v)), (\varphi_{II}(\varphi_I^{-1}(v)))) = \pi(v, f(v))$$

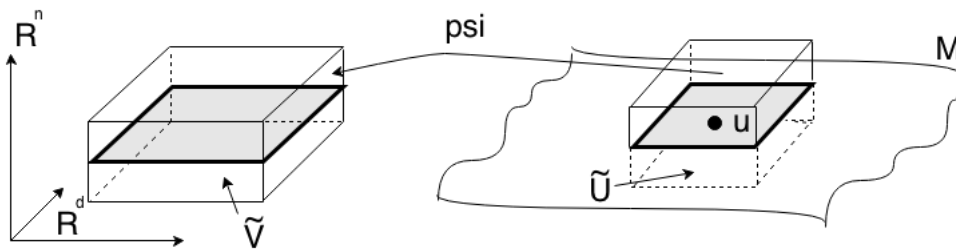
So folgt unmittelbar, dass  $\psi(\tilde{v}) = \pi(\tilde{v}, \tilde{w}) = \tilde{u}$  ist und  $\psi(w) = \varphi(v)$  in  $M$  liegt. Aufgrund der Homöomorphie von  $\varphi: \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$  ist  $\varphi[V]$  offen in  $M$  und somit auch  $U := \psi(W)$  offen bezüglich  $M$ . Da  $U$  nun eine Umgebung von  $\tilde{u}$  bezüglich  $M$  ist und  $\tilde{u}$  beliebig war, folgt direkt die Behauptung. **q.e.d.**

### Satz 29.2 (Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten mit umgebendem Raum)

$M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann eine  $d$ -dimensionale  $C^q$ -Mannigfaltigkeit, wenn für alle  $u \in M$  eine Umgebung  $\tilde{U}$  bezüglich des  $\mathbb{R}^n$  existiert, sodass  $\psi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  (mit  $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$  offen) ein  $C^q$ -Diffeomorphismus ist und

$$\psi(\tilde{U} \cap M) = \tilde{V} \cap (\mathbb{R}^d \times 0)$$

erfüllt.



Dies ist eine Charakterisierung, die den umgebenden Raum nutzt und oft auch als Definition von  $C^q$ -Mannigfaltigkeiten verwendet wird.

*Beweis.* Für die Rückrichtung schränken wir  $\psi$  auf  $\tilde{U} \cap M$  ein und erhalten sofort Karten, was die Behauptung bestätigt. Für die Hinrichtung fixieren wir ein  $\tilde{u} \in M$  und wählen wieder  $\tilde{U} \subset M$ ,  $W \subset \mathbb{R}^d$  und ein  $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ . Gemäß Satz 29.1 setzen wir o.B.d.A  $\pi = id$  und zerlegen  $\tilde{u} = (\tilde{v}, f(\tilde{v})) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ . Nun sei  $\hat{U} := W \times \mathbb{R}^{n-d} =: \hat{V}$ , welches den Zylinder aus  $U$  und  $W$  in Beweis zu Satz 29.1 liefert. Setzen wir schließlich noch  $\tilde{\varphi} : \hat{V} \rightarrow \hat{U}$  mit

$$\tilde{\varphi}(v, w) := (v, f(v) + w)$$

welches offenbar  $\in C^q$  ist und erhalten, dass

$$\tilde{\varphi}'(\tilde{v}, 0) = \begin{pmatrix} id_d & 0 \\ f'(\tilde{v}) & id_{n-d} \end{pmatrix}$$

regulär ist. Nach dem Satz ü. *inverse Funktionen* existiert wiederum eine Umgebung  $\tilde{U} \subset \hat{U}$  von  $\tilde{u}$  und eine Umgebung  $\tilde{V} \subset \hat{V}$  von  $(\tilde{v}, 0)$ , sodass  $\tilde{\psi} := \tilde{\varphi}^{-1} \in C^q(\tilde{U}, \tilde{V})$  existiert. Wegen  $\tilde{\varphi}(\tilde{V} \cap (\mathbb{R}^d \times 0)) = \tilde{U} \cap M$  folgt die Behauptung. **q.e.d.**

**Folgerung 29.3** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $d$ -dimensionale  $C^q$ -Mannigfaltigkeit und  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow U \subset M$  die Parametrisierung um  $u \in M$ . Dann gibt es die offenen Mengen  $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$  mit  $U \subset \tilde{U}, V \times 0 \subset \tilde{V}$  für die  $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$  abbildet, ein  $C^q$ -Diffeomorphismus ist und  $\tilde{\varphi}(x, 0) = \varphi(x) \forall x \in V$

*Beweis.* Folgt aus Beweisen von Satz 29.1 und 29.2

**q.e.d.**



### Satz 29.4 (lokale Darstellung von Mannigfaltigkeiten als Niveaumengen)

$M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann eine  $d$ -dimensionale  $C^q$ -Mannigfaltigkeit, wenn für alle  $u \in M$  eine Umgebung  $\tilde{U}$  bezüglich des  $\mathbb{R}^n$ , so wie eine Funktion  $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$  mit  $\text{rang } f'(u) = n - d$  existiert, sodass

$$\tilde{U} \cap M = \{\tilde{u} \in \tilde{U} \mid f(\tilde{u}) = 0\}$$

Wir haben hiermit eine weitere wichtige Eigenschaft von Mannigfaltigkeiten gezeigt, nämlich, dass jede  $C^q$ -Mannigfaltigkeit immer gleichzeitig Niveaumenge einer  $C^q$ -Funktion ist und umgekehrt!

Eine durchaus berechtigte Frage ist, ob die Niveaumenge unbedingt der Gleichung  $f(u) = 0$  genügen muss, oder ob dies auch für andere  $c \neq 0$  funktioniert. Aus diesem Grund führen wir einen weiteren Begriff ein:

**Definition (Regulärer Wert)**  $c \in \mathbb{R}^{n-d}$  heißt **regulärer Wert** von  $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$  (mit  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$  offen), falls

$$\text{rang } f'(u) = n - d \quad \forall u \in \tilde{U} \text{ mit } f(u) = c$$

Vergleichen wir dies nun mit Satz 29.4, so ist jedes  $M := \{u \in \tilde{U} \mid f(u) = c\}$  eine  $d$ -dimensionale  $C^q$ -Mannigfaltigkeit, falls  $c$  ein regulärer Wert von  $f$  ist.

*Beweis.* Gemäß Beispiel 5 erhält man mit  $f$  eine lokale Parametrisierung. Damit ist die Rückrichtung gezeigt.  $\Rightarrow$  Behauptung.

"  $\Rightarrow$  " : fixiere  $\tilde{u} \in M$ , wähle  $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n, \tilde{\psi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  gemäß Satz 29.2

sei  $f := (\tilde{\psi}_{d+1}, \dots, \tilde{\psi}_n)$ , offenbar  $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$

mit  $\tilde{\psi}$  aus dem Beweis zu Satz 29.2:  $\tilde{\psi}'(\tilde{u}) = \tilde{\varphi}'(\tilde{v}, 0)^{-1}$  ist regulär

$\Rightarrow f'(\tilde{u})$  hat vollen Rang, d.h.  $\text{rang } f'(\tilde{u}) = n - d$

nach Konstruktion  $\{u \in \tilde{U} \mid f(u) = 0\} = U \cap M \Rightarrow$  Behauptung.

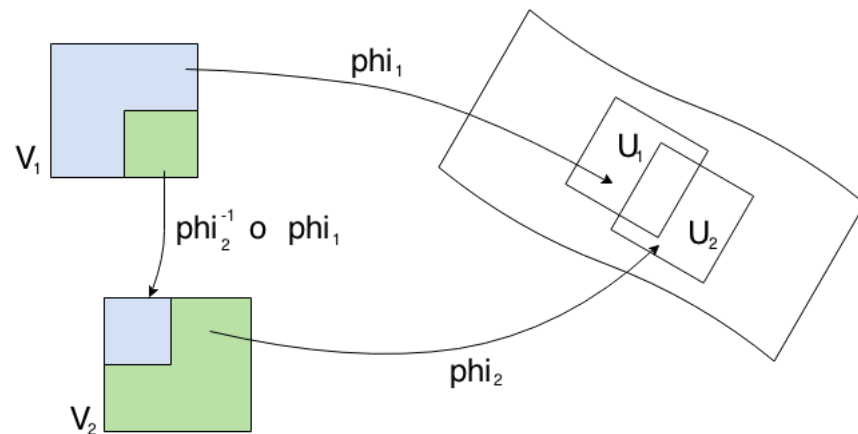
**q.e.d.**

**Lemma 29.5 (Kartenwechsel)**

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  d-dimensionale Mannigfaltigkeit

und  $\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}$  Karten mit zugehörigem Kartengebiet  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$

$\Rightarrow \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$  ist  $C^q$ -Diffeomorphismus.



*Beweis.* Ersetze  $\varphi_1, \varphi_2$  mit  $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$  gemäß Folgerung 29.3

$\Rightarrow$  Einschränkung von  $\tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1$  liefert Behauptung.

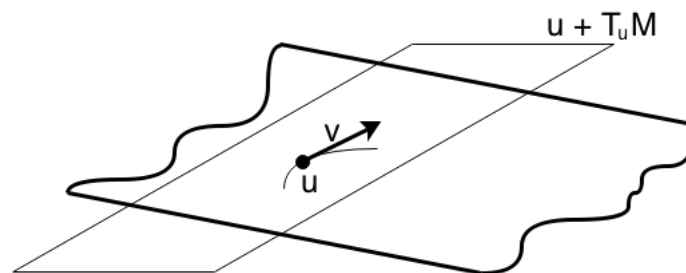
**q.e.d.**

**Definition** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  d-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  heißt **Tangentialvektor** in  $u \in M$  an  $M$ ,

falls eine stetig differenzierbare Kurve  $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M (\delta > 0)$  existiert mit  $\gamma(0) = u$  und  $\gamma'(0) = v$ .

Die Menge aller Tangentialvektoren  $T_u M$  heißt Tangentialraum.



**Satz 29.6** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit,  $u \in M$ ,  $\varphi: V \rightarrow U$  der zugehörige Parameter um  $u$   
 $\Rightarrow T_u M$  ist  $d$ -dimensionaler  $(\mathbb{R}-)$  Vektorraum und

$$T_u M = \underbrace{\varphi'(x)}_{L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)} (\mathbb{R}^d) \text{ für } x = \varphi^{-1}(u) \quad (29.3)$$

wobei  $T_u M$  unabhängig vom speziellen Parameter  $\varphi$  ist.

*Beweis.* Sei  $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow M$  eine  $C^1$ -Kurve mit  $\gamma(0) = u$   
 $\Rightarrow g := \varphi^{-1} \circ \gamma$  ist  $C^1$ -Kurve,  $g: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $g(0) = x$  und

$$\gamma'(0) = \varphi'(x)g'(0), \varphi'(x) \text{ ist regulär.} \quad (*)$$

Offenb. liefert auch jede  $C^1$ -Kurve  $g$  in  $\mathbb{R}^d$  durch  $x$  eine  $C^1$ -Kurve  $\gamma$  in  $M$  mit  $(*)$   
 Die Menge aller Tangentialvektoren  $g'(0)$  von  $C^1$ -Kurven  $g$  in  $\mathbb{R}^d$  ist offenbar  $\mathbb{R}^d$   
 $\Rightarrow 29.4 \xrightarrow{\varphi'(x) \text{ ist regulär}} \dim T_u M = d$

da  $(*)$  für jeden Parameter  $\varphi$  gilt, ist  $T_u M$  unabhängig von  $\varphi$ .

**q.e.d.**

**Bemerkung:** Man bezeichnet auch  $(u, T_u M) \subset M \times \mathbb{R}^n$  als Tangentialraum und  
 $TM = \bigcup_{u \in M} (u, T_u M) \subset M \times \mathbb{R}^n$  als Tangentialbündel.

**Beispiel 29.6** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  offen

$\Rightarrow M$  ist  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $T_u M = \mathbb{R}^n \forall u \in M$

**Definition** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$   $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Ein Vektor  $w \in \mathbb{R}^n$  heißt **Normalenvektor** in  $u \in M$  an  $M$ , falls

$\langle w, v \rangle = 0 \forall v \in T_u M$  (d.h.  $w \perp v \forall v \in T_u M$ )

Die Menge aller Normalenvektoren  $N_u M = T_u M^\perp$  heißt

**Normalenraum** von  $M$  in  $u$ .

**Satz 29.7** Sei  $f \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-d})$  mit  $V$  offen und  $c \in \mathbb{R}^{n-d}$  ein regulärer Wert von  $f$ . Dann ist die Niveaumenge  $M := \{v \in V \mid f(v) = c\}$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, für die gilt:

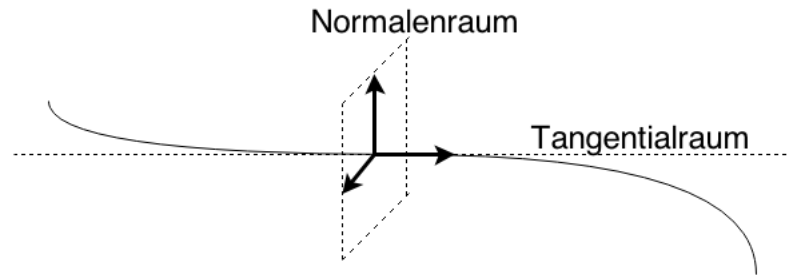
$$\begin{aligned} T_u M &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid f'(u)v = 0\} \quad (= \ker f'(u)) \quad \forall u \in M \\ N_u M &= \{w \in \mathbb{R}^n \mid w = f'(u)^T v, v \in \mathbb{R}^{n-d}\} \quad \forall u \in M \end{aligned}$$

Das heißt also, die Spalten von  $f'(u)^T$  bilden eine Basis des Normalenraums von  $M$ .

**Beispiel 29.7** Sei  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  und  $0 \in \mathbb{R}^2$  ein regulärer Wert von  $f$ . Dann ist

$$M := \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{f_1(u) = 0, f_2(u) = 0}_{\text{Schnitt zweier Flächen}}\}$$

eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann steht der Gradient  $f'_i(u)^T$  senkrecht auf  $\{f_i = 0\}$ .  $f'_1(u)^T$  und  $f'_2(u)^T$  sind also Normalen zu  $M$  in  $u$ .



$v$  ist hier die Tangente, da  $\langle f'_i(u)^T \mid v \rangle = 0$  ist (für  $i = 1, 2$ ).

*Beweis.* Wir wissen bereits, dass  $M$  eine Mannigfaltigkeit ist. Wählen wir nun die  $C^1$ -Kurve  $\gamma$  auf  $M$  mit  $\gamma(0) = u$  und  $\gamma'(0) = v$ , so sehen wir, dass  $f(\gamma(t)) = c \quad \forall t$  ist.  $f'(u)$  steht senkrecht auf  $v$  (also  $\langle f'(u) \mid v \rangle = 0$ ) und da  $\text{rang } f'(u) =$

$d$  ist, muss  $\dim \ker f'(u) = d$  sein. Damit ist die Behauptung für  $T_u M$  (wegen  $\dim T_u M = d$ ) gezeigt.

Nun wählen wir  $w = f'(u)^T \tilde{v}$  und  $w \in T_u M$ . Offenbar ist  $\langle w | v \rangle = \langle \tilde{v} | f'(u)v \rangle = 0$ . Damit ist  $w$  im Normalenraum  $N_u M$ . Da  $\text{rang } f'(u)^T = n - d$  und  $\dim N_u M = n - d$ , folgt die Behauptung. **q.e.d.**

**Beispiel 29.8** Wir betrachten  $M := \mathcal{O}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = id\}$ . Es handelt sich dabei um eine  $\frac{n(n-1)}{2}$ -dimensionale Mannigfaltigkeit von Matrizen. Man nennt  $\mathcal{O}$  auch *Orthogonale Gruppe* oder *Lie-Gruppe*. Sie bildet die Menge aller orthogonale Matrizen des  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Offenbar ist  $id$  das neutrale Element der Gruppe. Der Tangentialraum an diesem Element wird auch *Lie-Algebra* genannt:

$$T_{id} M = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid B + B^T = 0\}$$

Dies ist die Menge der schiefsymmetrischen Matrizen. Warum ist das so?

Sei  $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$  mit  $f(A) = A^T A$  eine stetig differenzierbare Funktion mit  $f'(A)B = A^T B + B^T A$  ( $\forall B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ). Letzterer Ausdruck ist ebenfalls eine symmetrische Matrix.  $id$  ist ein regulärer Wert, denn sei  $f(A) = id$  und  $S \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ .  $f'(A)B = S$  hat die Lösung  $B = \frac{1}{2}AS$ , denn  $\frac{1}{2}A^T AS + \frac{1}{2}SA^T A = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}S = S$ . Letzteres hätte man auch in der Grundschule herausbekommen!

Aus vorheriger Überlegung folgt, dass  $f'(A)$  vollen Rang hat. Aus Satz 4 wissen wir nun, dass die Dimension der Mannigfaltigkeit beträgt:

$$d = \dim \mathbb{R}^{n \times n} - \dim \mathbb{R}_{sym}^{n \times n} = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Satz 7 gewährleistet nun, dass

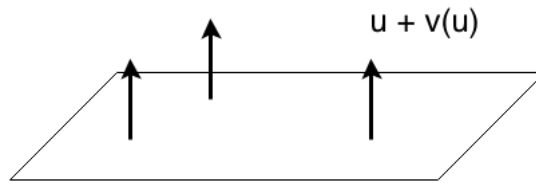
$$T_{id} M = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid id^T B + B^T id = 0\}$$

**Definition (Hyperflächen und Einheitsnormalenfelder)** Eine  $(n-d)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt auch **Hyperfläche**. Die stetige Abbildung

$$v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

heißt dann **Einheitsnormalenfeld**, falls

$$v(u) \in N_u M \text{ und } \|v(u)\| = 1 \quad \forall u \in M$$



---

**Lemma 29.8** Ist  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine zusammenhängende Hyperfläche, so existiert entweder *kein* oder *genau zwei* Einheitsnormalenfelder.

---

*Beweis.* Als Vorbetrachtung lässt sich sagen, dass wenn  $v$  ein Einheitsnormalenfeld ist, auch  $-v$  eins sein muss.

Nehmen wir nun an, es gäbe zwei verschiedene Einheitsnormalenfelder  $v$  und  $\tilde{v}$ . Wir können ausnutzen, dass die beiden Felder normiert sind und stellen sofort fest, da  $\dim N_u M = 1$  ist, dass das Skalarprodukt der beiden nur

$$s(u) := \langle v(u) \mid \tilde{v}(u) \rangle = \pm 1$$

sein kann. Wir können nun eine weitere wichtige Eigenschaft von  $s$  und  $M$  ausnutzen. Da  $M$  zusammenhängend und  $s$  stetig auf  $M$  ist, lässt sich der Zwischenwertsatz zu Hilfe nehmen, der uns liefert, dass  $s$  für alle  $u$  konstant sein muss, nämlich entweder  $s(u) = 1$  oder  $s(u) = -1$ . Damit kann  $\tilde{v}$  nur entweder gleich  $v$  oder gleich  $-v$  sein. **q.e.d.**

**Beispiel 29.9 (Möbiusband)** Das wohlbekannte Möbiusband besitzt *kein* Einheitsnormalenfeld.  
**grafk fehlt.**

**Beispiel 29.10** Wir betrachten die Konstruktion von Einheitsnormalenfeldern für Hyperflächen  $M := \{f = 0\}$ . Sei  $f \in C^1(V, \mathbb{R})$  mit  $V$  offen und  $0$  ein regulärer Wert von  $f$ . Wir können leicht ein Einheitsnormalenfeld definieren und wählen

$$v(u) := \frac{f'(u)}{\|f'(u)\|}$$

Wir wollen nun im folgenden weitere Operationen auf Mannigfaltigkeiten untersuchen. Im  $\mathbb{R}^n$  ist uns das Kreuzprodukt  $\dots \times \dots$  wohlbekannt. Es ist zweckmäßig diesen Begriff auf beliebige Dimensionen zu verallgemeinern.

**Definition (Äußeres Produkt)** Nehmen wir uns die Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$  und schreiben sie einfach als Spaltenvektoren hintereinander in eine Matrix:

$$A := (a_1 | a_2 | \dots | a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$$

Wir entfernen nun aus dieser die  $k$ -te Zeile und nennen sie dann  $A_k \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ . Den Ausdruck

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-1} := \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

nennen wir **äußeres Produkt** von  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , wobei

$$\alpha_k = (-1)^{k-1} \cdot \det A_k$$

Wir können sofort einige interessante Eigenschaften ablesen, die uns an das bekannte Kreuzprodukt erinnern:

1.  $\alpha$  steht senkrecht auf allen  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ .
2. Das *Volumen* des von  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  aufgespannten Parallelotops entspricht gerade der Norm  $\|\alpha\|$  des äußeren Produkts.

**Beispiel 29.11** Die eben untersuchten Eigenschaften bringen uns dazu, im  $\mathbb{R}^3$  das äußerde Produkt mit dem Kreuzprodukt zu identifizieren.

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \equiv \alpha_1 \times \alpha_2 \quad \text{für } n = 3$$



---

**Lemma 29.9** Sind  $b, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ , so ist

$$\langle b \mid a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \rangle = \det(b \mid a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_{n-1}) \quad (29.4)$$

wobei

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \perp a_i$$

und

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \quad \left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ falls } a_i \text{ linear abhängig} \\ \neq 0 \text{ falls } a_i \text{ linear unabhängig} \end{array} \right.$$

---

*Beweis.* Wir können die Determinante in (29.4) nach der 1. Spalte  $b$  entwickeln. Aus  $b = a_i$  folgen die Bedingungen. **q.e.d.**

**Beispiel 29.12** Konstruieren wir ein Einheitsnormalenfeld mittels der Parametrisierung  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $V$  offen.  $M = \{\varphi(v)\}$  sei die entsprechende Hyperfläche. Nach Satz 6 wissen wir, dass  $\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x)$  für alle  $x$  und für alle  $j = 1, 2, \dots, n-1$  im Tangentialraum  $T_{\varphi(x)}M$  liegt. Wir erkennen außerdem, dass

$$N(x) := \varphi_{x_1}(x) \wedge \varphi_{x_2}(x) \wedge \dots \wedge \varphi_{x_{n-1}}(x)$$

in  $N_{\varphi(x)}M$  liegt und können damit

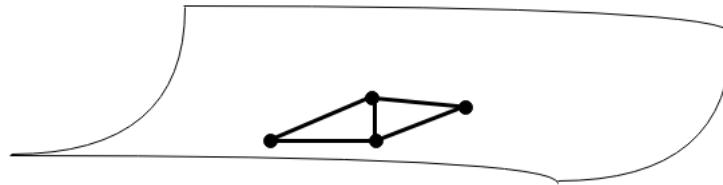
$$v(x) := \frac{N(x)}{\|N(x)\|}$$

als Einheitsnormalenfeld von  $M$  wählen. Man beachte, dass  $\varphi'(x)$  für alle  $x$  regulär ist!

Wir kommen zum Abschluss dieses Kapitels. Wir haben uns mit Mannigfaltigkeiten und ihren Eigenschaften beschäftigt. Als nächstes möchten wir die Integration auf ihnen untersuchen, beschränken uns dabei jedoch noch auf Kartengebiete.

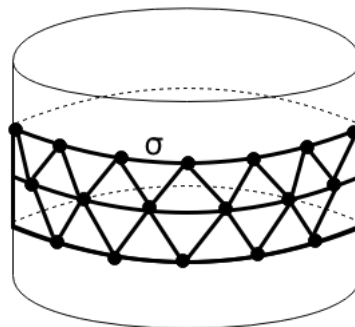
### 30 Integration auf Kartengebieten

Wir stellen uns zunächst die interessante Frage, wie man den Oberflächeninhalt beziehungsweise das  $d$ -dimensionale Äquivalent dazu von einer Mannigfaltigkeit bestimmen kann. Die Idee wäre natürlich, wie etwa bei der Integration über  $\mathbb{R}$ , sie durch *ebene* Mannigfaltigkeiten (etwa mit Dreiecken) stückweise zu approximieren.

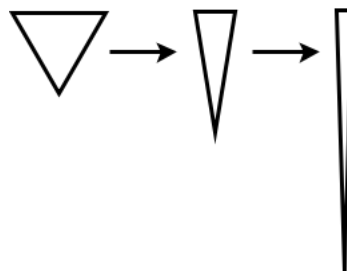


$$\text{Fläche}(M) = \sup_{\Delta} \sum \text{Dreiecksflächen}$$

Wir stellen jedoch mit großem Entsetzen schnell fest, dass diese Methode nur für Kurven ( $d = 1$ ) funktioniert.



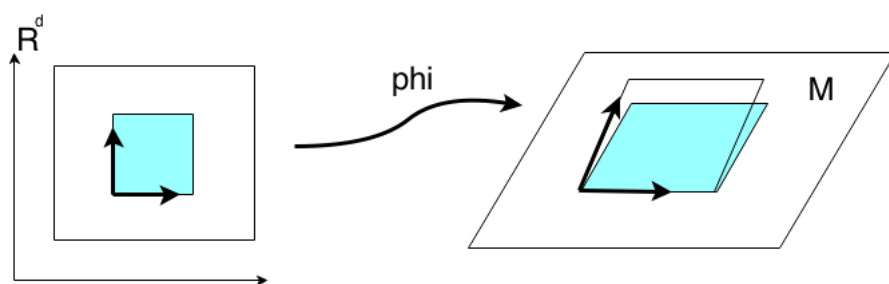
Schauen wir uns zum Beispiel eine Zylinderfläche  $M \subset \mathbb{R}^3$  an. Lassen wir die Feinheit  $\sigma$  beliebig klein werden - heute ist ja schließlich alles nano! - so wachsen die Dreiecksflächen immer weiter, bis die Fläche von  $M$  über alle Grenzen hinaus wächst. Wir müssen uns also wohl sofort wieder von dieser Methode verabschieden.



Über dieses Dilemma nachlesen kann man übrigens in Hildebrand, Analysis 2 unter "Schwartz'scher Stiefel".

Versuchen wir also etwas neues (für  $d = 2$ ) zu finden. Wir nehmen hierzu tangentielle Parallelogramme (äußere Approximation).  $\varphi'(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist linear. Die Methode gestaltet sich also zu

$$\text{Fläche}(M) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left( \sum \text{Fläche } \varphi'(x_j)(Q) \right)$$



**Definition (Parallelotop)** Seien  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}^n$  ( $d \leq n$ ) Dann nennen wir

$$P(a_1, \dots, a_d) := \left\{ \sum_{j=1}^d t_j a_j \mid t_j \in [0, 1], j = 1, \dots, d \right\}$$

das von  $a_1, \dots, a_d$  aufgespannte **Parallelotop** (manchmal auch d-Spat).

An dieser Stelle ein kleiner Einschub: Eine allgemeinere Theorie für d-dimensionale Inhalte liefert das sogenannte Hausdorff-Maß  $\mathcal{H}^d$ . Dieses ist jedoch sehr viel abstrakter und schwierig 'auszurechnen'. Mithilfe von Mannigfaltigkeiten kommt man schneller zu Ergebnissen.

Aus der theoretischen Physik ist uns bereits das Maß über die Delta-Distribution bekannt, mit dem wir zum Beispiel die Ladungsdichte einer Punktmasse

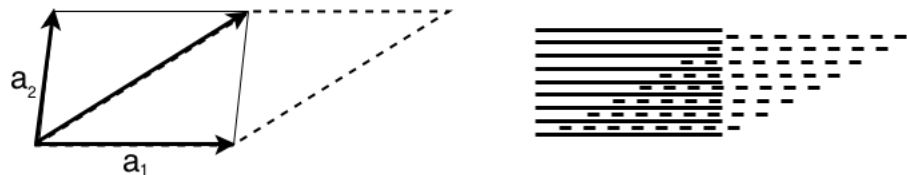
$$\rho(r) = \int_{\mathbb{R}^3} q \delta(r - r_o) dV$$

exakt definieren können.

**Satz 30.1** Seien  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  und  $v(a_1, \dots, a_n) := \mathcal{L}^n(P(a_1, \dots, a_n))$  das von ihnen aufgespannte Volumen. Dann gilt:

- i)  $v(a_1, \dots, \lambda a_k, \dots, a_n) = |\lambda| v(a_1, \dots, a_n) \forall \lambda \in \mathbb{R}^n$
- ii)  $v(a_1, \dots, a_k + a_j, \dots, a_n) = v(a_1, \dots, a_n)$  falls  $k \neq j$

Dies ist bekannt als *Prinzip des Cavalieri*. Als Veranschaulichung kann ein Stapel Spielkarten dienen: Egal wie man eine Seitenfläche von einem Rechteck in ein Parallelogramm (oder umgekehrt) verschiebt, das Volumen des Stapels bleibt gleich.



- iii)  $v(a_1, \dots, a_n) = 1$  falls  $a_1, \dots, a_n$  ein Orthonormalsystem in  $\mathbb{R}^n$  bilden. (Der Parallelotop ist dann der Einheitswürfel.)
- iv)  $v(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$  für  $A := (a_1 | \dots | a_n)$

Das heißt die Determinante der Matrix mit den Spaltenvektoren  $a_1, \dots, a_n$  liefert das Volumen des aufgespannten Parallelotops. (Vgl. lin. Algebra)

Es ist zu beachten, dass die Eigenschaften i) - iii) bereits iv) implizieren. Die Argumentation dazu verläuft wie zu den aus der Linearen Algebra bekannten Eigenschaften der Determinante, vgl. auch die axiomatische Definition der Determinante.

*Beweis.*

- a) Nehmen wir an,  $a_1, \dots, a_n$  sind linear abhängig.  
Dann ist das aufgespannte Parallelotop 'flach', da es in mindestens einer

Dimension an Ausdehnung fehlt und somit  $v(a_1, \dots, a_n) = 0$ . Weil die Determinante jeder singulären Matrix verschwindet, ist iv) korrekt. Es folgt sofort, dass auch i) und ii) richtig sein müssen.

b) Nun seien  $a_1, \dots, a_n$  linear unabhängig.

Sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  die Standard-Orthonormalbasis in  $\mathbb{R}^n$ . Für diese gilt iii) nach der Definition des Lebesgue-Maß. Sie bildet nämlich einen Quader der Kantenlänge Eins.

Weiter seien nun  $U := P(e_1, \dots, e_n)$ ,  $V := P(a_1, \dots, a_n)$

Dann ist  $A : \text{int } U \rightarrow \text{int } V$  ein Diffeomorphismus ( $A$  ist regulär, ist damit differenzierbar und besitzt ein differenzierbares Inverses).

Offenbar ist  $A'(y) = A \quad \forall y$

Wenn wir nun den Transformationssatz (Kap. 24) an, so ergibt sich

$$\mathcal{L}^n(V) = \int_V dx \stackrel{y=Ax}{=} \int_U |\det A| dy = |\det A| \underbrace{\mathcal{L}^n(U)}_1 = |\det A|$$

Daraus folgt iv) und i), ii), iii) als Eigenschaften der Determinanten

**q.e.d.**

Machen wir uns noch einmal die Zielstellung klar. Wir wollen den d-dimensionalen Inhalts  $v_d(P(a_1, \dots, a_d))$  im  $\mathbb{R}^n$  bestimmen.

Dabei ist folgende Idee zweckmäßig: Man betrachtet  $P(a_1, \dots, a_n)$  als Teilmenge eines d-dimensionalen Vektorraums  $X$  und nimmt das d-dimensional Lebesgue-Maß in  $X$ .

Somit sollte

$$v_d : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{d\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

folgende Eigenschaften haben:

$$(v1) \quad v_d(a_1, \dots, \lambda a_k, \dots, a_d) = |\lambda| v_d(a_1, \dots, a_d) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(v2) \quad v_d(a_1, \dots, a_k + a_j, \dots, a_d) = v_d(a_1, \dots, a_d) \quad \text{falls } k \neq j \quad (\text{Prinzip des Cavalieri})$$

$$(v3) \quad v_d(a_1, \dots, a_d) = 1 \quad \text{falls } \{a_1, \dots, a_d\} \text{ orthonormal zueinander sind.}$$

**Satz 30.2**  $v_d$  ist durch (v1), (v2), (v3) eindeutig bestimmt, und es gilt:

$$v_d(a_1, \dots, a_d) = \sqrt{\det \underbrace{A^T A}_{\in \mathbb{R}^{d \times d}}} \text{ mit } A := \underbrace{(a_1 | \dots | a_d)}_{\in \mathbb{R}^{n \times d}} \quad (30.1)$$

An dieser Stelle können wir sofort einige Aussagen treffen:

1. für  $d = n$  liefert (30.1) Gleichung iv) in Satz 1
2.  $A^T A$  ist stets symmetrisch und positiv definit ( $\langle x | A^T A x \rangle = \langle A x | A x \rangle = \|A x\|^2 \geq 0$ ) und somit ist auch stets  $\det A^T A \geq 0$
3.  $v_d(a_1, \dots, a_d)$  verschwindet genau dann, wenn  $a_1, \dots, a_d$  linear abhängig sind.

*Beweis.* Dies ist für das Selbststudium überlassen. Es lohnt sich jedoch

$$A^T A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha_{ij} = \langle a_i | a_j \rangle$$

zu verwenden und wie bei den Eigenschaften der Determinante zu argumentieren. **q.e.d.**

**Beispiel 30.1**  $d = n - 1$ : Sei  $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ ,  $a := a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1}$

$$v_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) = |a|_2 \quad (30.2)$$

Die euklidische Länge des äußeren Produkts liefert also das Volumen. Das prüfen wir leicht nach:

$$\begin{pmatrix} a^T \\ - \\ A^T \end{pmatrix} \bullet (a | A) = \begin{pmatrix} \langle a | a \rangle & 0 \\ 0 & A^T A \end{pmatrix}$$

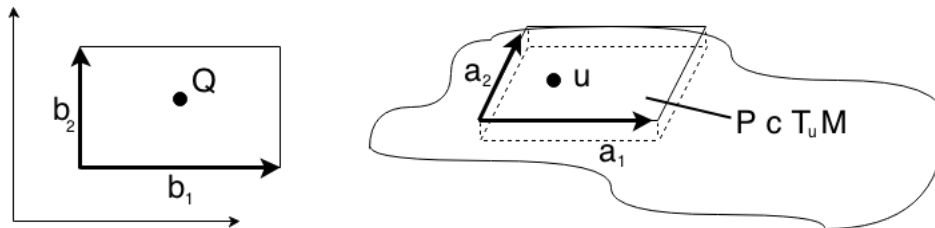
denn  $\langle a_i | a_j \rangle = 0 \quad \forall j$  mit  $A$  wie in (1). Es folgt sofort

$$\|a\|_2^2 \cdot \det A^T A = (\det(a|A))^2 \stackrel{(29.4)}{=} \|a\|_2^4$$

und dann mit (1) sofort (2).

Es stellt sich folgende Frage: Existiert für eine Mannigfaltigkeit  $M$  eine Transformation, so dass das Volumen eines Quaders  $Q \in \mathbb{R}^d$  auf das eines Parallelotops  $P \subset T_u M \in \mathbb{R}^n$  abgebildet wird? Dass also

$$\nu_d(\text{Quader } Q) \xrightarrow{\varphi'(x)} \nu_d(\text{Parallelotop } P)$$



Für einen Quader  $Q = P(b_1, \dots, b_d) \subset \mathbb{R}^d$  ist  $P(a_1, \dots, a_d) \subset T_u M \in \mathbb{R}^n$  das zugehörige Parallelotop, falls  $a_j = \varphi'(x)b_j$ , für  $j = 1, \dots, d$

**Satz 30.3** Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit,  $\varphi$  eine Parametrisierung um  $\varphi(x) = u \in M$  und  $Q := P(b_1, \dots, b_d) \subset \mathbb{R}^d$  ein Quader mit  $b_j \in \mathbb{R}^d$ , weiterhin sei  $a_j := \varphi'(x)b_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ . Dann gilt:

$$\nu_d(a_1, \dots, a_d) = \sqrt{\det \varphi'(x)^T \varphi'(x)} \nu_d(b_1, \dots, b_d) \quad (30.3)$$

**Definition (Maßtensor)** Das Produkt der transponierten Ableitung mit sich selbst

$$\varphi'(x)^T \varphi'(x) \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

heißt **Maßtensor** von  $\varphi$  in  $x$ , dessen Determinante

$$g^\varphi(x) := \det \varphi'(x)^T \varphi'(x)$$

man die **Gramsche Determinante** von  $\varphi$  in  $x$  nennt.

*Beweis.* Sei  $B = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^{d \times d}$  und  $A = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{n \times d}$ . Mit Gleichung (30.1) folgt

$$\nu_d(a_1, \dots, a_d) = \sqrt{\det A^T A} = \sqrt{\det((\varphi'(x)B)^T \varphi'(x)B)} = \sqrt{\det \varphi'(x)^T \varphi'(x)} \underbrace{\sqrt{\det B^T B}}_{=\nu_d(b_1, \dots, b_d)}$$

**q.e.d.**

Sei nun  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit,  $\varphi : V \rightarrow U$  eine lokale Parametrisierung,  $f : \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf dem Kartengebiet  $U$ .

Motiviert durch die Riemann-Summen (Kap. 22)

$\sum f(u_i) \nu_d(P_i) = \sum f(\varphi(x_i)) \sqrt{g^\varphi(x_i)} \nu_d(Q_i)$  mit  $P_i = \varphi'(x_i)Q_i$  definieren wir:

**Definition (Integral über Kartengebiet)**

$$\int_U f da := \int_V f(\varphi(x)) \sqrt{g^\varphi(x)} dx \quad (30.4)$$

als **Integral von  $f$**  über das Kartengebiet  $U$  falls die rechte Seite existiert.  $f$  heißt dann **integrierbar** auf  $U$ .



**Bemerkung:**

- die rechte Seite in (30.4) ist ein Lebesgue-Integral in  $\mathbb{R}$
- damit die Definition von (30.4) sinnvoll ist, sollte die rechte Seite unabhängig von  $\varphi$  sein
- mittels des Hausdorff-Maß  $\mathcal{H}^d$  kann  $\int_U f da$  völlig analog zum Lebesgue-Maß definiert werden  $\left( \int_U f(u) d\mathcal{H}(u) \right)$
- für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten  $M \subset \mathbb{R}^n$  :  
 $\int_U f da = \text{Lebesgue-Integral } \int_U f dx$  falls dieses existiert

**Satz 30.4** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit,  $U \subset M$  ein Kartengebiet,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\varphi_i : V_i \rightarrow U$ ,  $i = 1, 2$  seien zugehörige Parametrisierungen. Dann gilt

$$\int_{V_1} f(\varphi_1(x)) \sqrt{g^{\varphi_1}(x)} dx = \int_{V_2} f(\varphi_2(x)) \sqrt{g^{\varphi_2}(x)} dx$$

falls eines der Integrale existiert.

(30.4) ist also unabhängig von der Parametrisierung. Denn

$$f(\cdot) \text{ int'bar auf } U \iff f(\varphi(\cdot)) \sqrt{g^\varphi(x)} \text{ int'bar auf } V \text{ für eine Param. } \varphi : V \rightarrow U \quad (30.5)$$

*Beweis.*  $\psi := \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : V_2 \rightarrow V_1$  ist ein Diffeomorphismus nach Lemma 5. Wir wenden wieder den Transformationssatz an und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{V_1} f(\varphi_1(x)) \sqrt{g^{\varphi_1}(x)} dx &\stackrel{x=\psi(y)}{=} \int_{V_2} f(\varphi_1(\psi(y))) \sqrt{\det \varphi_1'(\psi(y))^T \varphi_1'(\psi(y))} \underbrace{|\det \psi'(y)|}_{=\sqrt{\det \psi'(y)^T \psi'(y)}} dy \\ &= \sqrt{\det \psi'^T \varphi_1'^T \psi' \varphi_1'} = \sqrt{\det (\psi' \varphi_1')^T \psi' \varphi_1'} \end{aligned}$$

denn da

$$\varphi_2(y) = \varphi_1(\psi(y))$$

folgt mit Kettenregel

$$\varphi_2'(y) = \varphi_1'(\psi(y)) \psi'(y)$$

und somit die Behauptung. **q.e.d.**

Nehmen wir uns die Funktion  $f \equiv 1$  her, die offensichtlich integrierbar auf jedem Kartengebiet  $U \subset M$  ist, dann ist

$$\nu_d(U) := \int_U 1 da \left( = \int_V 1 \sqrt{g^\varphi(x)} dx \right) \quad (30.6)$$

der  $d$ -dimensionale Inhalt (Maß, Länge, Fläche, Volumen,...) von  $U$  wobei  $\sqrt{g^\varphi(x)}$  das Flächenelement von  $U$  bezüglich  $\varphi$  ist.

Mit dieser Definition entspricht  $\nu_d(U) \equiv \mathcal{H}^d(U)$  direkt mit dem d-dimensionalen Hausdorffmaß überein (siehe Literatur).

Wir stellen außerdem nach (30.4) fest, dass  $\nu_d(U)$  genau dann verschwindet, wenn U eine Nullmenge ist:

$$\nu_d(U) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}^d(\varphi^{-1}(U)) = 0$$

**Beispiel 30.2** Wir wollen  $\int_M f da$  auf einer Halbsphäre mit Radius  $r$ , gegeben durch

$$M := \{u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \|u\| = r, u_1 > 0\}$$

berechnen und parametrisieren M dafür in Kugelkoordinaten durch

$$\varphi(x_1, x_2) = r \begin{pmatrix} \cos x_1 \cos x_2 \\ \cos x_2 \sin x_1 \\ \sin x_2 \end{pmatrix} \text{ für } (x_1, x_2) \in V := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^2$$

Offenbar ist  $\varphi : V \rightarrow M$  stetig differenzierbar, regulär und homöomorph. Es handelt sich also tatsächlich um eine echte Parametrisierung von M. Das macht natürlich M zu einer Mannigfaltigkeit und sogar zu einem Kartengebiet. Um das Volumen zu berechnen benötigen wir zunächst

$$\varphi'(x) = r \begin{pmatrix} -\cos x_2 \sin x_1 & -\sin x_2 \cos x_1 \\ \cos x_2 \cos x_1 & -\sin x_2 \sin x_1 \\ 0 & \cos x_2 \end{pmatrix}$$

um über

$$\varphi'(x)^T \varphi'(x) = r^2 \begin{pmatrix} \cos^2 x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

das Flächenelement

$$\sqrt{g^\varphi(x)} = r^2 \cos x_2$$

zu berechnen.

Damit können wir das zu berechnende Integral folgendermaßen ausdrücken:

$$\int_M f da = r^2 \int_V f(\varphi(x)) \cos x_2 dx = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x_2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(x)) dx_1 dx_2$$

Wählen wir nun zum Beispiel  $f(u) = u_1^2 + u_2^2$ , dann ist  $f(\varphi(x)) = r^2 \cos^2 x_2$  und das Integral wird zu

$$\int_M (u_1^2 + u_2^2) da = r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x_2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx_1 dx_2 =$$

$$= \pi r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x_2 dx_2 = \pi r^4 \left[ \sin x_2 - \frac{1}{3} \sin^3 x_2 \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r^4 \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^4$$

Ist nun  $f(u) = 1$ , dann ist

$$v_d(M) = \pi r^2 \int_M da = \pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x_2 dx_2 = \pi r^2 [\sin x_2]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r^2$$

was genau genau der halben Sphärenfläche entspricht. Es ist zu bemerken, dass wir in unserer Rechnung den Rand von  $M$  komplett vernachlässigt haben. Wir werden jedoch später zeigen, dass derartige Nullmengen keinen Beitrag leisten.

### Satz 30.5 (Integral über $(n-1)$ -dimensionale Graphen)

Sei  $g: V \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $V$  offen eine stetig differenzierbare Funktion und

$$\Gamma := \{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^n \mid x \in V\}$$

der Graph von  $g$ . Dann gilt für  $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\Gamma} f da = \int_V f(x, g(x)) \sqrt{1 + |g'(x)|^2} dx \quad (30.7)$$

falls die rechte Seite existiert.

*Beweis.*  $\Gamma$  ist eine  $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit (vgl. Bsp. 29.2) und auch Kartengebiet bezüglich der Parametrisierung  $\varphi: V \rightarrow \Gamma$  mit  $\varphi(x) = (x, g(x))$ . Wir setzen

$$\gamma := \sqrt{\det \varphi'(x)^T \varphi'(x)}$$

und sehen mit (30.1), dass

$$\gamma = v_{n-1}(\varphi_{x_1}(x) | \dots | \varphi_{x_{n-1}}(x))$$

und dann wiederum mit (30.2)

$$\gamma = \|\varphi_{x_1}(x) \wedge \dots \wedge \varphi_{x_{n-1}}(x)\|$$

Da aber auch

$$\varphi_{x_1}(x) \wedge \dots \wedge \varphi_{x_{n-1}}(x) = (-1)^n \begin{pmatrix} g'(x) \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

gilt, können wir  $\gamma$  auch als

$$\gamma = \sqrt{1 + \|g'(x)\|^2}$$

schreiben. Damit erhalten wir

$$\int_{\Gamma} f \, da = \int f(\varphi(x)) \sqrt{1 + \|g'(x)\|^2} \, dx$$

falls die rechte Seite existiert. Damit gilt für den Inhalt von  $\Gamma$  (falls er existiert):

$$v_{n-1}(\Gamma) = \int_V \sqrt{1 + \|g'(x)\|^2} \, dx \quad (30.8)$$

**q.e.d.**

**Beispiel 30.3** Betrachten wir die Halbsphäre

$$S_+^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1, x_n > 0\}$$

die offenbar für alle  $x \in B_1(x) \subset \mathbb{R}^{n-1}$  der Graph von  $g(x) = \sqrt{1 - |x|^2}$  ist. Mit (30.8) sehen wir sofort

$$v_{n-1}(S_+^{n-1}) = \int_{B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n-1}} \sqrt{1 + \frac{|x|^2}{1 - |x|^2}} \, dx = \int_{B_1(0)} \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}} \, dx$$

Wir können an dieser Stelle ohne Beweis annehmen, dass  $f$  rotationssymmetrisch auf  $B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n-1}$  ist (d.h.  $f(x) = f(|x|)$ ). Dann verwenden wir (aus Königsberger Analysis 2, Kap 8.2)

$$\int_{B_r(0)} f(x) \, dx = n \kappa_n \int_0^r \tilde{f}(\rho) \rho^{n-1} \, d\rho \quad \text{für } B_r(0) \subset \mathbb{R}^n \text{ und } \kappa_n := \mathcal{L}^n(B_r(0)) \quad (30.9)$$

und münzen dies auf  $(n-1)$  um:

$$v_{n-1}(S_+^{n-1}) = (n-1) \kappa_{n-1} \int_0^1 \frac{r^{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \, dr = (n-1) \kappa_{n-1} \int_0^1 r^n \frac{1}{r^2 \sqrt{1-r^2}} \, dr =$$

Dies integrieren wir partiell und erhalten

$$= n(n-1)\kappa_{n-1} \int_0^1 r^{n-1} \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} dr = n \int_{B_1(0)} \sqrt{1-|x|^2} dx = \frac{n}{2} \kappa_n$$

Was haben wir damit herausbekommen? Wir setzen

$$\omega := (S^{n-1}) = 2\nu_{n-1}(S_+^{n-1})$$

als die Oberfläche der Sphäre  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  und sehen, dass für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$$\omega_n = n\kappa_n \quad (30.10)$$

Das ist ein erstaunliches Resultat, welches wir uns an zwei Beispielen verdeutlichen wollen.

$$\begin{aligned} n=2: \quad \nu_{n-1} &= 2\pi = 2 \cdot \nu_n = 2 \cdot \pi \\ n=3: \quad \nu_{n-1} &= 4\pi = 3 \cdot \nu_n = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

Wir können dieses Resultat sogar auf beliebige Kugeln skalieren:

$$\nu_n(B_r(0)) = \mathcal{L}^n(B_r(0)) = r^n \kappa_n$$

Mithilfe des Transformationssatzes können wir das ganze sogar noch umschreiben und erhalten eine Beziehung die sich später in der Differentialgleichungstheorie als maßgeblich herausstellen wird:

$$\nu_{n-1}(\partial B_r(0)) = r^{n-1} \omega_n = r^{n-1} n \kappa_n$$

**Beispiel 30.4 (Kurvenintegral)** Wir betrachten die Kurve  $\varphi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $I$  ein offenes Intervall ist, so dass

$$C := \varphi(I)$$

eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Wir erinnern uns, dass  $\varphi$  genau dann regulär ist, wenn  $\varphi'(t) \neq 0$  ist. Offenbar ist

$$\det \varphi'(t)^T \varphi'(t) = |\varphi'(t)|^2$$

und so können wir, falls es existiert, für ein  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $I = (a, b)$  formulieren

$$\int_C f da = \int_a^b f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt \quad (30.11)$$

Dieses Integral nennen wir das Kurvenintegral von  $f$  entlang des Weges  $C$ . Auf diesem Wege können wir natürlich auch den 1-dimensionalen Inhalt,  $C$ , den wir **Bogenlänge** nennen, bestimmen, in dem wir einfach  $f \equiv 1$  setzen.

$$\nu_1(C) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt \quad (30.12)$$

Falls wir nun noch ein  $\varphi$  finden, sodass  $|\varphi'(t)| = 1$  ist, dann nennen wir dieses  $\varphi$  **Bogenlängenparametrisierung** von  $C$ , da uns in diesem Fall  $t$  direkt die Bogenlänge liefert:

$$t_2 - t_1 = \nu_1(\varphi(t_2 - t_1))$$

Wir können natürlich auch durch einen Kartenwechsel umparametrisieren und erhalten so für

$$\sigma(s) = \int_a^s |\varphi'(t)| dt \quad (*)$$

immer ein  $\psi : (0, \nu_s(C)) \rightarrow \mathbb{R}^n$  finden, das mit  $\psi(I) = \varphi(\sigma^{-1}(I))$  stets eine Bogenlängenparametrisierung ist. Das können wir ganz leicht zeigen:

Offenbar ist  $\sigma$  stetig differenzierbar und sogar monoton wachsend, weil  $\varphi'$  regulär ist. Das bedeutet, dass ein  $\sigma^{-1}$  existiert, das ebenfalls stetig differenzierbar ist. So können wir folgern

$$|\psi'(\tau)| = \left| \varphi'(\sigma^{-1}(\tau)) \cdot \sigma^{-1}'(\tau) \right| = \left| \varphi'(\sigma^{-1}) \right| \frac{1}{|\sigma'(\sigma^{-1}(\tau))|} \stackrel{(*)}{=} 1$$

Für jede Kurve existiert also *genau eine* ausgezeichnete Parametrisierung, nämlich die Bogenlängenparametrisierung.

Wir wollen uns dem Thema der Kurvenlänge nun auf eine etwas andere Weise annähern.

**Definition (Rektifizierbarkeit)** Für eine beliebige stetige Funktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt die zugehörige Kurve  $C = \varphi([a, b])$  **rektifizierbar**, falls

$$l(C) := \sup_Z \left\{ \sum_{j=1}^k |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})| \mid \{t_0, \dots, t_k\} \in Z \right\} < \infty$$

wobei  $Z$  die Menge aller geordneten Zerlegungen von  $C$  ist. Man kann  $C$  also eine Länge zuordnen.

---

**Satz 30.6 (Rektifizierbare Kurven)** Sei  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Funktion, dann ist

1.  $\varphi$  rektifizierbar und
2.  $C := \varphi([a, b])$  eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit der zugehörigen Parametrisierung  $\varphi$ .

Insbesondere gilt dann:

$$l(C) = \nu_1(C) = \mathcal{H}^1(C)$$

---

Das ist beruhigend. Wir möchten uns den gesamten Beweis ersparen, dann er mit sehr viel Schreiarbeit verbunden ist. Deshalb hier nur eine *Beweisskizze*:  $\varphi$  ist Lipschitz-stetig auf  $[a, b]$ , also

$$l(\varphi[a, b]) < L[a, b]$$

Damit ist  $\varphi$  rektifizierbar und 1. gezeigt. Für 2. zeigen wir, dass

$$l(t) := l(\varphi[a, t]) < L[a, b]$$

stetig differenzierbar auf  $(a, b)$  mit  $l'(t) = |\varphi'(t)|$  ist. Daraus folgt dann

$$l(b) = \int_a^b l'(t) dt = \int_a^b |\varphi'(t)| dt = \nu_1(C)$$

**Beispiel 30.5 (Umfang des Einheitskreises)**

$$\varphi : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit } \varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$C := \varphi([-\pi, \pi])$  ist der Einheitskreis ohne den Punkt  $(-1, 0)^T$ . Dann ist

$$\nu_1(C) = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(t)| dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left\| \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \right\| dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 2\pi$$

Wichtig hierbei ist, dass  $\varphi$  die Bogenparametrisierung ist.



Nachdem wir nun auf Kartengebieten integrieren können, lassen sich natürlich eine Vielzahl von Eigenschaften untersuchen.

**Satz 30.7** Seien  $f, g, f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen, die vom Kartengebiet  $U$  der Mannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  abbilden, dann gelten die folgenden Beziehungen:

1.  $f$  ist einerseits genau dann auf  $U$  integrierbar, wenn  $|f|$  integrierbar auf  $U$  ist und auch genau dann, wenn es  $f^+$  und  $f^-$  sind.
2. Sind  $f$  und  $g$  integrierbar auf  $U$  und  $c \in \mathbb{R}$ , so ist

$$\int_U cf \pm g da = c \int_U f da \pm \int_U g da$$

3. Sind  $f$  und  $g$  integrierbar und  $g$  beschränkt auf  $U$ , dann ist auch  $f \circ g$  integrierbar auf  $U$ .
4. Sind  $f$  und  $g$  integrierbar und  $f \leq g$  auf  $U$ , dann dies auch für die Integrale:

$$\int_U f da \leq \int_U g da$$

5. **Monotone Konvergenz:** Seien alle  $f_k$  integrierbar und  $f_1 \leq f_2 \leq \dots$  auf  $U$ , außerdem sei die Folge der Integrale  $(\int_U f_k da)$  beschränkt sowie  $f(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(u) \quad \forall u \in U$ , dann ist  $f$  integrierbar auf  $U$  mit

$$\int_U f da = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U f_k da$$

6. **Majorisierte Konvergenz:** Seien  $g$  und alle  $f_k$  integrierbar und weiterhin  $f_k \leq g \quad \forall k$  auf  $U$ . Außerdem möge  $f(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(u) \quad \forall u \in U$  sein. Dann ist  $f$  integrierbar auf  $U$  mit

$$\int_U f da = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U f_k da$$

*Beweis.* Wir werden diesen Beweis sehr kurz halten, indem wir einige Äquivalenzen finden, aus denen unter Verwendung der Eigenschaften des Lebesgue-Maßes die Behauptung folgen wird.

Wir setzen zunächst  $\varphi : V \rightarrow U$  als die Parametrisierung des Kartengebietes  $U$ .

1.  $f$  ist genau dann integrierbar, wenn es  $f(\varphi(\cdot)) \sqrt{g^\varphi(\cdot)}$  ist. Dies folgt aus der Definition der Gramschen Determinante.
2.  $f \leq g$  ist äquivalent dazu, dass  $f(\varphi(\cdot)) \sqrt{g^\varphi(\cdot)} \leq g(\varphi(\cdot)) \sqrt{g^\varphi(\cdot)}$  ist.

Daraus folgen unter Verwendung der Eigenschaften des Lebesgue-Maßes schließlich die Behauptungen. **q.e.d.**

### 31 Integrale auf Mannigfaltigkeiten

Im letzten Kapitel haben wir uns dem Integrieren auf Kartengebieten gewidmet. Das möchten wir natürlich nun auch auf ganzen Mannigfaltigkeiten tun können. Da stellt sich jedoch die Frage, wie dieses Integral dann genau aussehen soll.

Wir könnten uns natürlich überlegen, die Mannigfaltigkeit einfach mit Kartengebieten  $U_\beta$ , wobei  $\beta$  hier eine vollkommen beliebige Indexmenge sein kann, zu überdecken und die Integration dann auf jedem Gebiet einzeln durchzuführen. An dieser Stelle stoßen wir jedoch auf ein Problem. Kartengebiete sind immer offen! Sie werden sich also, um die Mannigfaltigkeit Überdecken zu können, überlappen müssen. Damit wird das berechnete Integral immer zu groß sein. Deshalb müssen wir uns etwas anderes ausdenken.

Den Ausweg liefert eine sehr hilfreiche Methoden; die sogenannte *Zerlegung der Eins*, für die wir  $\alpha \equiv 1$  auf der Mannigfaltigkeit so setzen, dass  $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(u) = 1$  ist.

**Definition (Zerlegung der Eins)** Eine Menge stetiger Funktionen  $\alpha_j : M \rightarrow [0, 1]$  mit  $j \in \mathbb{N}$  heißt **Zerlegung der Eins** auf einer Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$ , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1.  $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(u) = 1 \quad \forall u \in M$
2. Die Zerlegung ist lokal endlich, das heißt für alle  $u \in M$  existiert eine Umgebung  $U \subset M$  bezüglich  $M$ , so dass auf dieser Umgebung *fast überall*  $\alpha_j = 0$  ist.

**Definition (Unterordnung)** Sei  $\mathcal{U}$  eine bezüglich  $M$  offene Überdeckung von  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Dann heißt die Zerlegung der Eins  $\{\alpha_j\}$  der Überdeckung  $\mathcal{U}$  **untergeordnet**, falls es für alle  $j \in \mathbb{N}$  ein  $U_j \in \mathcal{U}$  gibt, so dass

$$\text{supp } \alpha_j \subset U_j$$

wobei mit "supp" hier der Träger von  $\alpha_j$ , gegeben durch

$$\text{supp } \alpha_j = \overline{\{u \in M \mid \alpha_j(u) \neq 0\}}$$

gemeint ist.

**Satz 31.1 (Existenz der Zerlegung der Eins)** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{U}$  eine bezüglich  $M$  offene Überdeckung von  $M$ , dann existiert immer eine Zerlegung der Eins  $\{\alpha_j\}$  von  $M$ , die  $\mathcal{U}$  untergeordnet ist.

Hierzu muss man anmerken, dass wir  $\alpha_j$  immer so konstruieren können, dass es unendlich oft differenzierbar ist. Später betrachten wir dann die Überdeckung einer Mannigfaltigkeit mit Kartengebieten.

*Beweis.* Dieser Beweis ist sehr technisch und langweilig. Deshalb wird hier auf die Literatur (*Königsberger*) verwiesen. **q.e.d.**

**Definition (Integrierbarkeit auf Mannigfaltigkeiten)** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Mannigfaltigkeit,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{supp } f \subset U \subset M$ , wobei  $U$  ein Kartengebiet von  $M$  ist. Dann heißt  $f$  **integrierbar auf  $M$**  falls  $f|_U$  (die Funktion eingeschränkt auf  $U$ ) auf dem Kartengebiet integrierbar ist.

$$\int_M f da = \int_M f|_U da \quad (31.1)$$

heißt dann das **Integral** von  $f$  auf  $M$ .

---

**Lemma 31.2 (Kriterium für Integration auf Kartengebieten)** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Mannigfaltigkeit,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{supp } f \subset U \subset M$ , wobei  $U$  ein Kartengebiet von  $M$  ist, und  $\{\alpha_j\}$  eine Zerlegung der Eins auf  $M$ . Dann ist die Integrierbarkeit von  $f$  auf  $M$  zu folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $f\alpha_j$  ist für alle  $j \in \mathbb{N}$  integrierbar auf  $M$ .
2.  $\sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f|\alpha_j da < \infty$

Daraus folgt dann auch

$$\int_M f da = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M f\alpha_j da \quad (31.2)$$

---

*Beweis.* Ist  $f$  integrierbar auf  $M$ , so folgt 1. unmittelbar aus Satz 30.7. Außerdem ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f|\alpha_j da = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \int_M |f|\alpha_j da \leq \int_M |f| da < \infty$$

Durch die majorisierte Konvergenz folgt (31.2).

Gelten 1. und 2., so folgt durch die Monotone Konvergenz, dass  $|f|$  integrierbar und somit (nach Satz 30.7) auch  $f$  integrierbar ist.

**q.e.d.**

**Definition (Integral auf Mannigfaltigkeiten)** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $M$  mit Kartengebieten. Dann heißt  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  **integrierbar auf  $M$** , falls eine Zerlegung der Eins existiert, die  $\mathcal{U}$  untergeordnet ist, so dass

1.  $f\alpha_j$  für alle  $j \in \mathbb{N}$  integrierbar auf  $M$  ist.
2.  $\sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f|\alpha_j da < \infty$

Wir nennen dann

$$\int_M f da := \sum_{j=1}^{\infty} \int_M f\alpha_j da \quad (31.3)$$

auch **Integral auf  $M$** .

---

**Satz 31.3 (Rechtfertigung der Integralbegriffe)** Die Definitionen der Integrierbarkeit von  $f$  auf  $M$  und des Integrals  $\int_M f da$  sind unabhängig von der konkreten Überdeckung  $\mathcal{U}$  und der Zerlegung der Eins  $\{\alpha_j\}$ .

---

*Beweisidee:* Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar auf  $M$  und  $\mathcal{U}$  und  $\{\alpha_j\}$  wie in der Definition. Dann zeigen für weitere Überdeckungen  $\tilde{\mathcal{U}}$  und ihre untergeordneten Zerlegungen der Eins  $\{\tilde{\alpha}_j\}$ , dass

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_M \alpha_j da = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M \tilde{\alpha}_j da$$

Dazu verwenden wir Lemma 31.2.

**Definition (Integral auf Teilmengen von Mannigfaltigkeiten)** Ist  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Mannigfaltigkeit und  $A$  eine Teilmenge derselben, so heißt die Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar auf  $A$ , falls

$$f_A := \begin{cases} f & \text{auf } A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

auf  $M$  integrierbar ist. Wir setzen dann

$$\int_A f da := \int_M f_A da$$

als das Integral von  $f$  auf  $A$ . Dasselbe  $A$  heißt dann auch (endlich) **messbar in  $M$** , falls  $f \equiv 1$  integrierbar auf  $A$  ist. Natürlich nennen wir dann

$$v_d(A) := \int_A da$$

den  $d$ -dimensionalen Inhalt oder das  $d$ -dimensionale Maß von  $A$ .

Der feine Zusatz "endlich" ist zu beachten, denn unter dem normalen Lebesgue-Maß sind wir auch  $\mathcal{L}^n(A) = \infty$  gewohnt. Hier ist  $v_d(A)$  jedoch strikt endlich.

**Definition (d-Nullmengen)**  $A \subset M$  heißt **d-Nullmenge**, falls  $\nu_d(A) = 0$  ist. d-Nullmengen auf  $M$  entsprechen natürlich  $\mathcal{L}$ -Nullmengen im Parameterbereich.

---

**Satz 31.4** Ist  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Mannigfaltigkeit und  $A \subset M$  kompakt bezüglich  $M$ , sowie  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Abbildung. Dann ist  $f$  auf  $A$  integrierbar.

---

Wir wissen, dass  $A$  kompakt ist, wenn das Urbild  $\varphi^{-1}(A)$  kompakt ist, da  $\varphi$  ja homöomorph ist.

*Beweisidee:* Da  $A$  kompakt ist, gibt es eine endliche Überdeckung mit Kartengebieten. Da  $f(\varphi(\cdot))\sqrt{g^\varphi(\cdot)}$  stetig ist, ist es integrierbar auf kompakten Mengen.

Wir können nun, da wir statt nur auf Kartengebieten, auf ganzen Mannigfaltigkeiten integrieren können, die Integraleigenschaften aus Satz 30.7 neu formulieren:

**Satz 31.5 (Eigenschaften des Integrals über Mannigfaltigkeiten)** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Mannigfaltigkeit, und  $f, g, f_k : M \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen, die von der Mannigfaltigkeit nach  $\mathbb{R}$  abbilden, dann gelten die folgenden Beziehungen:

1.  $f$  ist einerseits genau dann auf  $M$  integrierbar, wenn  $|f|$  integrierbar auf  $M$  ist und auch genau dann, wenn es  $f^+$  und  $f^-$  sind.
2. Sind  $f$  und  $g$  integrierbar auf  $M$  und  $c \in \mathbb{R}$ , so ist

$$\int_M cf \pm g da = c \int_M f da \pm \int_M g da$$

3. Sind  $f$  und  $g$  integrierbar und  $g$  beschränkt auf  $M$ , dann ist auch  $f \circ g$  integrierbar auf  $M$ .
4. Sind  $f$  und  $g$  integrierbar und  $f \leq g$  auf  $M$ , dann dies auch für die Integrale:

$$\int_M f da \leq \int_M g da$$

5. **Monotone Konvergenz:** Seien alle  $f_k$  integrierbar und  $f_1 \leq f_2 \leq \dots$  auf  $M$ , außerdem sei die Folge der Integrale  $(\int_M f_k da)$  beschränkt sowie  $f(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(u) \quad \forall u \in M$ , dann ist  $f$  integrierbar auf  $M$  mit

$$\int_M f da = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M f_k da$$

6. **Majorisierte Konvergenz:** Seien  $g$  und alle  $f_k$  integrierbar und weiterhin  $f_k \leq g \quad \forall k$  auf  $M$ . Außerdem möge  $f(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(u) \quad \forall u \in M$  sein. Dann ist  $f$  integrierbar auf  $M$  mit

$$\int_M f da = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M f_k da$$

---

Für eine explizite Berechnung von  $\int_M f da$  benutzt man idR keine ZdE, sondern zerlegt  $M = \bigcup_j M_j$  mit  $M_j$  paarweise disjunkt und berechnet alle  $\int_{M_j} f da$

$$\longrightarrow \int_M f da = \sum_{j=1}^k \int_{M_j} f da$$

## 32 Integralsätze von Gauß und Stokes

### Definition (Regulärer Randpunkt)

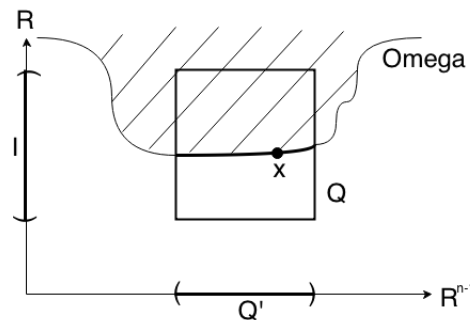
Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  heißt  $x \in \partial\Omega$  **regulärer Randpunkt** von  $\Omega$ , falls er eine offene Zylinderumgebung  $Q \subset \mathbb{R}^n$  besitzt, so dass *nach einer eventuell notwendigen Drehung des Koordinatensystems* gilt:

$Q = Q' \times I$  für  $Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}$  offen, beschränkt,  $I \subset \mathbb{R}$  offenes Intervall und es existiert eine  $C^1$ -Funktion  $h: \tilde{Q}' \rightarrow I$  mit  $\tilde{Q}'$  Umgebung von  $Q'$  in  $\mathbb{R}^{n-1}$  und

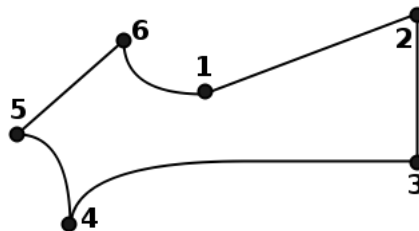
$$\Omega \cap Q = \{(x', x^n) \in Q' \times I \mid x^n \geq h(x')\}$$

$$\partial\Omega \cap Q = \{(x', x^n) \in Q' \times I \mid x^n = h(x')\} \quad (32.1)$$

$x'$  bezeichnet nach Konvention einen  $(n-1)$ -dimensionalen Vektor,  $x_n$  stellt die 'fehlende'  $n$ -te Komponente dar,  $(x', x_n)$  ist also ein  $n$ -dimensionaler Vektor. Analog wird  $Q'$  durch das Intervall  $I$  zur Teilmenge vom  $\mathbb{R}^n$  ergänzt.



Das heißt in einer Umgebung von  $x$  stimmt  $\partial\Omega$  mit dem Graphen von  $h$  überein und  $\Omega$  liegt über dem Graphen.



1: regulärer Randpunkt 2-6: singuläre Randpunkte



$\partial_r \Omega$  bezeichnet die **Menge aller regulären Randpunkte**.

$\partial_s \Omega := \partial \Omega \setminus \partial_r \Omega$  ist die **Menge der singulären Randpunkte**.

$\Gamma := \partial \Omega \cap Q \subset \partial_r \Omega$  gemäß (1) heißt **glatter** (regulärer) **Teilrand** von  $\Omega$  falls  $\mathcal{L}^{n-1}(\partial \Omega') = 0$  für zugehörige  $Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ .

Es ist zu beachten, dass  $\partial_r \Omega$  lokal Graph einer  $C^1$ -Funktion ist und somit eine  $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit nach Satz 29.1.

Für einen glatten Teilrand  $\Gamma \subset \partial_r \Omega$  gilt:  $\nu_{n-1}(\bar{\Gamma}/\Gamma) = 0$

$(\varphi(x') = (x', h(x')))$  ist eine Parametrisierung der Mannigfaltigkeit und

$\bar{\Gamma}/\Gamma$  ist Bild der  $(n-1)$ -dimensionalen Nullmenge  $\partial_r Q'$

Man erhält eine äquivalente Formulierung zu (1) mittels

$\gamma(x) := h(x') - x_n \forall (x', x_n) \in Q$  ( $Q$ ,  $h$  wie oben) durch

$$\Omega \cap Q = \{x \in Q \mid \gamma(x) \leq 0\}$$

$$\partial \Omega \cap Q = \{x \in Q \mid \gamma(x) = 0\} \quad (32.2)$$

(Dies ist eine lokale Darstellung von  $\partial_r \Omega$  als Niveauläche und liefert mit Satz 29.4 eine Mannigfaltigkeit, beachte  $\gamma'(x) \neq 0$ )

**Definition (Stückweise glatter Rand)**

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  hat einen **stückweise glatten Rand**, falls es glatte Teilränder  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$  von  $\Omega$  gibt mit  $\partial \Omega = \bigcup_{j=1}^m \bar{\Gamma}_j$

Zum Beispiel haben Würfel oder Polyeder einen stückweise glatten Rand.

Gemäß Bsp. 29.10 erhält man die Einheitsnormalen auf  $\partial_r \Omega$  (mit  $\gamma$  wie in (2) bzw.  $h$  wie in (1)):

$$\nu(x) = \frac{\gamma'(x)}{|\gamma'(x)|} = \frac{(h'(x'), -1)}{|(h'(x'), -1)|} \quad \forall x \in \partial_r \Omega \quad (32.3)$$

**Lemma 32.1**  $\forall x \in \partial_r \Omega \exists \delta = \delta(x) > 0$ :

$$x + tv(x) \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \quad x - tv(x) \in \Omega \quad \forall t \in (0, \delta) \quad (32.4)$$

*Beweis.* Selbststudium.

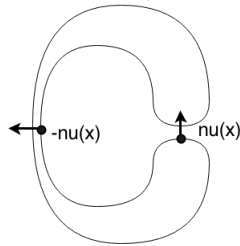
**q.e.d.**

Man beachte, dass die Koordinaten in (1), (2) und (3) eventuell bezüglich einem gedrehten Koordinatensystem zu verstehen sind.

Da in jedem  $x \in \partial_r \Omega$  nur zwei Einheitsnormalen existieren, da  $\gamma'(\cdot)$  stetig ist und wegen (4) liefert (3) ein ENF auf der Menge  $\partial_r \Omega$  (insbesondere ist  $v(\cdot)$  stetig auf  $\partial_r \Omega$ )

Da alle  $v(x)$  nach 'außen' zeigen, heißt  $v$  aus (3) **äußeres ENF** von  $\partial_r \Omega$ .

Damit ist  $\partial_r \Omega$  mit  $v$  eine orientierte  $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.



### Definition (Divergenz eines Vektorfelds)

Eine Abbildung  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt auch **Vektorfeld**.

Falls  $F$  in  $x \in M$  differenzierbar ist, heißt

$$\operatorname{div} F(x) := \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) = \operatorname{tr} (F'(x))$$

**Divergenz** des Vektorfelds  $F$  in  $x$ .

**Satz 32.2 (Gaußscher Integralsatz - Spezialfall für Quader)**

Sei  $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbares VF,  $U$  sei offen,  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ein Quader,  $\overline{Q} \subset U$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_Q \operatorname{div} F(x) dx}_{\text{Lebesgue-Integral in } \mathbb{R}^n} = \underbrace{\int_{\partial Q} F(x) \nu(x) da}_{\text{Integral auf (n-1)-dim. Fläche } \partial Q} \quad (32.5)$$

Gelegentlich schreibt man auch  $\int_{\partial Q} F d\vec{a}$  anstatt der rechten Seite in (5) und bezeichnet  $d\vec{a} = \nu da$  als vektorielles Flächenelement auf  $\partial Q$ .

**Interpretation bei  $n = 1$ :**

$Q = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{div} F(x) = F'(x)$

Man kann  $\partial Q = \{a, b\}$  als 0-dimensionale Mannigfaltigkeit betrachten,

$\nu(b) = 1$ ,  $\nu(a) = -1$

in (5) wäre dann  $\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$

Das heißt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist ein Spezialfall des Gaußschen Integralsatzes!

**Beweis.**

Sei  $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$

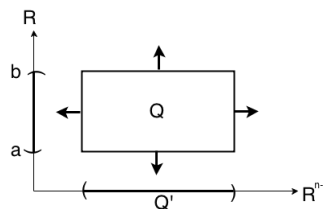
Wir zeigen für beliebige  $C^1$ -Funktionen  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , dass gilt:

$$\int_Q \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) dx = \int_{\partial Q} f(x) \nu_k(x) da \quad (32.6)$$

Ersetzt man hier  $f$  durch  $F_k$  und summiert über  $k$  so folgt (5).

Zeige (6) (oBdA sei  $k = n$ ): Sei  $Q = Q' \times (a, b)$ ,  $Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}$  Quader

Auf  $\partial_r Q$  hat man  $\nu_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ auf } Q' \times \{b\} \\ -1 \text{ auf } Q' \times \{a\} \\ 0 \text{ auf } \partial Q' \times (a, b) \end{cases}$



$$\Rightarrow \int_{\partial Q} v_n f da = \int_{Q' \times \{b\}} f da - \int_{Q' \times \{a\}} f da$$

Nun parametrisiert man die Mannigfaltigkeiten  $Q' \times \{a\}$  bzw.  $Q' \times \{b\}$  durch  $x' \rightarrow (x', a)$  bzw.  $x' \rightarrow (x', b)$  mit  $x' \in Q'$

Offenbar ist die Gramsche Determinante jeweils 1.

$$\Rightarrow \int_{\partial Q} f v_n da = \int_{Q'} f(x', b) dx' - \int_{Q'} f(x', a) dx'$$

$$\stackrel{\text{HS Int'rechnung}}{=} \int_{Q'} \left( \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_n} f(x', \psi) d\psi \right) dx'$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) dx \Rightarrow (6) \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

**q.e.d.**

Wie können wir uns das formale Konstrukt  $\text{div } F$  anschaulich vorstellen? Setzen wir zum Beispiel  $F$  als Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit an, so können wir

$$\int_{\partial Q} F \cdot r da$$

als ein Maß für den Massentransport (pro Zeiteinheit) durch die Oberfläche eines Quaders  $Q$  ansehen. Ist der (skalierte) Mittelwert dieses Flusses

$$\frac{1}{v_n(Q)} \int_{\partial Q} F \cdot r da$$

positiv, so spricht man anschaulich von einem "Zufluss" und analog dazu, falls er negativ ist, von einem "Abfluss". Ist er gleich Null, so handelt es sich um eine ausgeglichene Bilanz.

---

**Lemma 32.3** Sei  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld und  $U$  offen. Dann sei weiter  $\tilde{x} \in U$  und  $\{Q_k\}$  eine Folge von Quadern, deren Abschluss  $\overline{Q}$  Teilmenge von  $U$  ist, sodass  $\tilde{x} \in Q_k \forall k$ . Außerdem soll  $r_k > 0$  als größte Kantenlänge von  $Q_k$  für  $k \rightarrow \infty$  gegen Null gehen. Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n(Q)} \int_{\partial Q} F \cdot r \, da = \operatorname{div} F(\tilde{x}) \quad (32.7)$$

---

*Beweis.* Da alle  $\overline{Q}_k$  kompakt sind und  $\operatorname{div} F$  stetig ist, existiert ein  $a_k := \min_{x \in \overline{Q}_k} \operatorname{div} F(x)$  und ein  $b_k := \max_{x \in \overline{Q}_k} \operatorname{div} F(x)$ , so dass wir nach Satz 31.2 folgern können

$$a_k \cdot v_n(Q) \leq \int_{Q_k} \operatorname{div} F(x) \, dx = \int_{\partial Q_k} F \cdot r \, da \leq b_k \cdot v_n(Q_k)$$

Aus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \operatorname{div} F(\tilde{x})$$

folgt dann die Behauptung.

**q.e.d.**

Somit nennt man einen Punkt  $x$  **Quelle** von  $F$ , falls  $\operatorname{div} F(x) > 0$  und **Senke**, falls  $\operatorname{div} F(x) < 0$ . Die Divergenz  $\operatorname{div} F$  können wir dann schließlich auch als Quellendichte von  $F$  bezeichnen. (32.5) besagt somit, dass die Summe der in  $Q$  erzeugten beziehungsweise vernichteten Flüssigkeit durch den Rand des Quaders ab- oder zufließen muss. Dieser Gedanke führt auf viele grundlegende Bilanzgleichungen der Physik.

---

**Theorem 32.4 (Gaußscher Integralsatz)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und habe einen stückweise glatten Rand. Außerdem sei  $F : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und differenzierbar auf  $\Omega$  und sei  $\operatorname{div} F$  integrierbar auf  $\Omega$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) dx = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot \nu(x) da \quad (32.8)$$

---

Hierbei ist zu bemerken, dass  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , falls es stetig differenzierbar auf der offenen Umgebung  $U$  von  $\overline{\Omega}$  ist, schon alle Bedingungen für Theorem 32.4 erfüllt.

Außerdem bleibt anzumerken, dass der Gaußsche Integralsatz auch richtig bleibt, wenn  $\Omega$  einen Lipschitz-Rand hat, der sich als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion darstellen lässt.

*Beweisstrategie:* Man zeigt die Behauptung zunächst für ein  $F$  mit kompaktem Träger.

Gelegentlich wird der Gaußsche Satz auch in folgender Form definiert:

---

**Satz 32.5 (Variante des Gaußschen Satzes)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und habe einen stückweise glatten Rand. Außerdem sei  $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  als skalare Funktion stetig und differenzierbar auf  $\Omega$  und  $\frac{\partial}{\partial x_n} f$  integrierbar auf  $\Omega$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(x) \cdot v_k(x) da \quad (32.9)$$

wobei  $v_k$  die  $k$ -te Komponente des Einheitsnormalenfeldes  $v$  ist.

---

*Beweis.* Wir definieren das Vektorfeld  $F(x) := (0, 0, \dots, f_k(x), \dots, 0)$ , welches alle Voraussetzungen für Theorem 32.4 erfüllt. Damit impliziert (32.8) gerade (32.9). **q.e.d.**

Es fällt auf, dass wir auch Satz 32.5 als eigentlich Satz von Gauß hätten formulieren können, denn mit  $F = (F^1, \dots, F^n)$  erfüllen alle  $f = F^k$  die Voraussetzungen für Satz 32.5. Dann summieren wir einfach alle  $\int_{\Omega} F_{x_k}^k dx$  auf und erhalten (32.8).

---

**Theorem 32.6 (Partielle Integration)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und mit stückweise glattem Rand, dann gilt

1. Sind  $f, g : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und stetig differenzierbar auf  $\Omega$  und  $f_{x_k}, g_{x_k}$  integrierbar auf  $\Omega$ , dann

$$\int_{\Omega} f_{x_k}(x) g(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) g_{x_k}(x) dx + \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) v_k(x) da \quad (32.10)$$

2. Sind  $F : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $g : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  jeweils stetig und stetig differenzierbar auf  $\Omega$ , sowie  $\operatorname{div} F$  und  $g'$  integrierbar auf  $\Omega$ , dann

$$\int_{\Omega} F(x) g'(x) dx = - \int_{\Omega} g(x) \operatorname{div} F(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) F(x) v(x) da \quad (32.11)$$


---

*Beweis.* Für 1. wenden wir (32.8) auf  $f \cdot g$  an und erhalten die Behauptung. Für 2. wenden wir (32.8) auf das Vektorfeld  $g \cdot F$  an. Dabei ist zu beachten, dass

$$\operatorname{div}(gF) = g \cdot \operatorname{div} F + F \cdot g'$$

**q.e.d.**

Gerade in der Potentialtheorie ( $\Delta\varphi = f$ ) sind folgende Formeln wichtig:

**Satz 32.7 (Greensche Formeln)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und mit stückweise glattem Rand. Außerdem seien  $f, g : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $C^2$  auf  $\Omega$ , dann gilt, falls die Integrale existieren, folgendes:

$$\int_{\Omega} f'(x) \cdot g'(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \Delta g(x) dx + \int_{\partial\Omega} f(x) g'(x) \nu(x) da \quad (32.12)$$

$$\int_{\Omega} f(x) \Delta g(x) - g(x) \Delta f(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(x) g'(x) \nu(x) - g(x) f'(x) \nu(x) da \quad (32.13)$$

wobei  $\Delta f(x) = \operatorname{div} f'(x)$ .

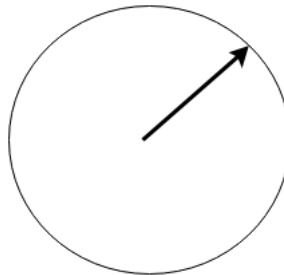
*Beweis.* Wir verwenden (32.11) mit  $(g', f)$  statt  $(F, G)$  und kommen damit auf (32.12) mit  $(f, g)$  und  $(g, f)$  und erhalten damit (32.13). **q.e.d.**

**Beispiel 32.1** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  wie in Theorem 32.4 und  $F(x) = x$ . Offenbar ist  $\operatorname{div} F(x) = n$  auf  $\Omega$ , daraus folgt mit (32.8)

$$n v_n(\Omega) = \int_{\partial\Omega} x \cdot \nu(x) da \quad (32.14)$$

1.  $\Omega = B_1(0)$ . Hier ist  $x \cdot \nu(x) = 1$  auf  $\partial\Omega$  und nach (32.14) gilt dann

$$n \kappa_n = \omega_n$$



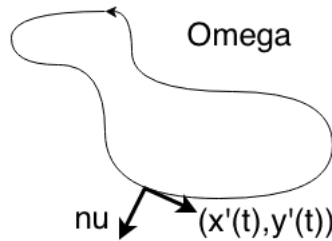


2.  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Hier sei der Rand eine  $C^2$ -Kurve  $t \rightarrow (x(t), y(t))$  dann ist

$$v(x(t), y(t)) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{|(y'(t), -x'(t))|}$$

Daraus folgt mit (32.14)

$$v_2(\Omega) = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \frac{1}{2} \int_a^b x(t)y'(t) - y(t)x'(t) dt$$



Nach dem Satz von Gauß kommen wir nun zu einem zweiten wichtigen Integralsatz, dem Satz von Stokes. Dazu klären wir zunächst ein paar Begriffe.

**Definition (Rotation)** Sei  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^1$ -Vektorfeld auf dem offenen  $\Omega$  mit  $F = (F^1, F^2, F^3)$ . Das Vektorfeld  $\text{rot } F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben durch

$$\text{rot } F(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} F^3(x) - \frac{\partial}{\partial x_3} F^2(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} F^1(x) - \frac{\partial}{\partial x_1} F^3(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} F^2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2} F^1(x) \end{pmatrix} \quad (32.15)$$

heißt **Rotation** oder auch Zirkulation von  $F$ . Sie lässt sich auch sehr effektiv durch den **Nabla-Operator** gewinnen.

$$\nabla := e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F^1 & F^2 & F^3 \end{pmatrix} \quad (32.15')$$

**Beispiel 32.2** Betrachten wir das Vektorfeld

$$F(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha x_2 \\ \alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgrund des Kreuzproduktes steht  $F(x)$  immer senkrecht auf  $x$ . Die Rotation ist

$$\operatorname{rot} F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\alpha \end{pmatrix}$$

Wir können das ganze so interpretieren, dass  $F(x)$ , falls die Rotation nicht verschwindet, nahe  $x$  um die Achse

$$\{x + t \cdot \operatorname{rot} F(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

rotiert, wobei  $|\operatorname{rot} F(x)|$  ein Maß für die *Rotationsgeschwindigkeit* ist. Ist diese ungleich Null, so sagt man, dass  $F$  einen Wirbel in  $x$  hat.

**Satz 32.8 (Rechenregeln)** Seien  $F, G : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  beides  $C^1$ -Vektorfelder auf dem offenen  $\Omega$  und  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ebenfalls  $C^1$ . Dann gilt

1. Linearität

$$\operatorname{rot} (\alpha F + \beta G) = \alpha \operatorname{rot} F + \beta \operatorname{rot} G$$

2. Produktregel

$$\operatorname{rot} (gF) = g \operatorname{rot} F + g' \times F$$

3. Gradienten sind wirbelfrei.

$$\operatorname{rot} g' = \operatorname{rot} \operatorname{grad} g = 0$$

4. Rotationsfelder sind quellenfrei.

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$$

*Beweis.* Lässt sich mit (32.15) oder (32.15') leicht nachrechnen.

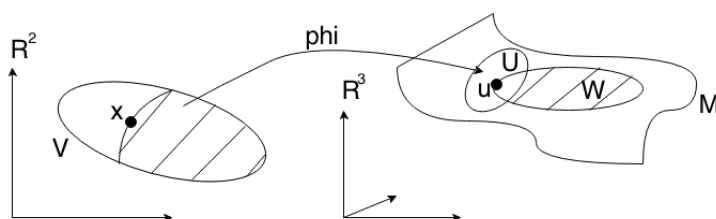
**q.e.d.**

Weiterhin können wir durch nachrechnen diese weiteren Eigenschaften überprüfen:

1.  $\text{rot } F = \text{rot } (F + \tilde{F})$ , falls  $\tilde{F} = \text{div } g$  ein Gradientenfeld ist.
2.  $\text{div } F = \text{div } (F + \tilde{F})$ , falls  $\tilde{F} = \text{rot } G$  ein Rotationsfeld ist.

### Definition (Kohärente Orientierung)

Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit dem ENF  $v$  und sei  $W \subset M$  offen bezüglich  $M$ ,  $\partial_M W$  bezeichne den Rand von  $W$  bezüglich  $M$ .



Ein Randpunkt  $u \in \partial_M W$  heißt **regulär**, falls für ein Kartengebiet  $U$  und eine zugehörige Parametrisierung  $\varphi$  der Punkt  $x = \varphi^{-1}(u)$  ein regulärer Randpunkt von  $\varphi^{-1}(U \cap W) \subset \mathbb{R}^2$  ist.

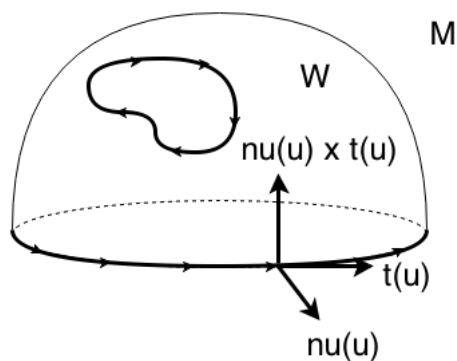
(Da ein Kartenwechsel ein Diffeomorphismus ist, ist diese Definition unabhängig vom speziellen  $\varphi$ .)

$W \subset M$  hat einen **glatten Rand**  $\partial_M W$  bezüglich  $M$  falls alle  $u \in \partial_M W$  regulär sind. In diesem Fall ist  $\partial_M W$  eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.

(Denn  $\varphi$  auf  $\varphi^{-1}(\partial_M W \cap U)$  ist die zugehörige Parametrisierung und  $\varphi^{-1}(\partial_M W \cap U)$  ist eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.)

Somit ist  $\partial_M W$  lokal als reguläre Kurve darstellbar und eine Einheitstangente  $t(u)$  existiert.

$t : \partial_M W \rightarrow \mathbb{R}^3$  **orientiert**  $\partial_M W$  **kohärent** zu  $M$ , falls  $t(u)$  der Tangenteneinheitsvektor an  $\partial_M W \forall u$  und eine stetige Abbildung ist und  $v(u) \times t(u) \in T_u M$  für alle  $u$  'zur Menge  $W$  zeigt'. (Man sagt auch,  $W$  liegt 'links vom Rand'.)



**Satz 32.9 (Integralsatz von Stokes - klassisch im  $\mathbb{R}^3$ )**

Sei  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\Omega$  offen, ein  $C^1$ -Vektorfeld; sei  $M \subset \Omega$  eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, orientiert, mit dem ENF  $v$  und sei  $W \subset M$  beschränkt, mit glattem Rand  $\partial_M W$  welcher mit  $t$  zu  $M$  kohärent orientiert ist. Dann gilt:

$$\int_W \operatorname{rot} F(u) \cdot v(u) da = \int_{\partial_M W} F(u) \cdot t(u) da \quad (32.16)$$

Das heißt das Integral über die Wirbel des Vektorfelds  $F$  'in der Fläche'  $W$  (d.h.  $v \cdot \operatorname{rot} F$ ) ist gleich der Zirkulation von  $F$  entlang des Randes  $\partial_M W$ .

*Beweis.*  $W$  möge im Kartengebiet  $U$  von  $M$  liegen (sonst ZdE nötig), die zugehörige Parametrisierung sei  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ , die Koordinate  $x = (x_1, x_2)$  liegt in  $V$ ,  $u = (u_1, u_2, u_3)$  in  $M$  bzw.  $\Omega$ .  $G$  sei  $\varphi^{-1}(W) \subset V$ , offen und beschränkt mit glattem Rand  $\partial G$ .

Man will nun (32.16) auf den Gaußschen Satz in  $G \subset \mathbb{R}^2$  zurückführen.

Zunächst hat man:

$$v(\varphi(x)) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)}{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \right|}$$

(Vergleiche Bsp 29.12:  $a \wedge b \stackrel{\mathbb{R}^3}{=} a \times b$ ) und

$$\sqrt{\det \varphi'(x)^T \varphi'(x)} = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \right|$$

(vgl. 30.1, 30.2)

Als Integral auf der Mannigfaltigkeit  $W$  ist somit die linke Seite in (32.16):

$$\begin{aligned} & \int_W \operatorname{rot} F(u) \cdot v(u) da = \\ & \stackrel{\text{Def.}}{=} \int_G \operatorname{rot}_u F(\varphi(x)) \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)}{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \right|} \sqrt{\det \varphi'(x)^T \varphi'(x)} dx = \\ & = \int_G \operatorname{rot}_u F(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) dx = \dots \end{aligned}$$

Wir nutzen im Folgenden zwecks Kompaktheit folgende Notation:

$$F_l^k := \frac{\partial F_k}{\partial u_l}, \quad \varphi_l^k := \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} \quad \text{wobei } \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

$$\dots = \int_G \begin{pmatrix} F_2^3 - F_3^2 \\ F_3^1 - F_1^3 \\ F_1^2 - F_2^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1^2 \varphi_2^3 - \varphi_1^3 \varphi_2^2 \\ \varphi_1^3 \varphi_2^1 - \varphi_1^1 \varphi_2^3 \\ \varphi_1^1 \varphi_2^2 - \varphi_1^2 \varphi_2^1 \end{pmatrix} dx$$

Um weitere Schreibarbeit zu sparen, beschränken wir uns nun auf die die Terme mit  $F^1$ . Für  $F^2$  und  $F^3$  sieht das ganze völlig analog aus.

$$= \int_G F_1^1 \cdot 0 + F_2^1 (\varphi_1^2 \varphi_2^1 - \varphi_1^1 \varphi_2^2) + F_3^1 (\varphi_1^3 \varphi_2^1 - \varphi_1^1 \varphi_2^3) + \dots dx \quad (\heartsuit)$$

Für die rechte Seite in (32.16) sei

$$x \rightarrow \tilde{x}(s) = (\tilde{x}_1(s), \tilde{x}_2(s))$$

die Parametrisierung der 1-dim. Mf  $\partial G$  mit  $s \in I \subset \mathbb{R}$ . Dann ist  $s \rightarrow \psi(s) := \varphi(\tilde{x}(s))$  die Parametrisierung der 1-dim. Mf  $\partial_M W$  und

$$t(\psi(s)) = \frac{\psi'(s)}{|\psi'(s)|}$$

$$\psi'(s) = \varphi'(\tilde{x}(s)) \cdot \tilde{x}'(s)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_{\partial_M W} F \cdot t da &\stackrel{\text{Def.}}{=} \int_I F(\psi(s)) \cdot t(\psi(s)) \underbrace{\sqrt{\det \varphi'(s)^T \varphi'(s)}}_{|\psi'(s)|} ds = \\ &= \int_I F(\varphi(\tilde{x}(s))) \cdot \left( \varphi'(\tilde{x}(s)) \underbrace{\frac{\tilde{x}'(s)}{|\tilde{x}'(s)|}}_{:= \tilde{t}(\tilde{x}(s))} \right) |\tilde{x}'(s)| ds = \\ &= \int_{\partial G} F(\varphi(x)) \cdot (\varphi'(x) \cdot \tilde{t}(x)) ds = \dots \\ \tilde{v}(\tilde{x}(s)) &= \frac{1}{|\tilde{x}'(s)|} \begin{pmatrix} \tilde{x}_2'(s) \\ \tilde{x}_1'(s) \end{pmatrix} \text{ ist die äußere Einheitsnormale in } \tilde{x}(s) \in \partial G \text{ an } G \\ &\dots = \int_{\partial G} F^1(\varphi(x)) (\varphi_1^1 \tilde{x}_1' + \varphi_2^1 \tilde{x}_2') \frac{1}{|\tilde{x}'|} + \dots da = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_G F^1(\varphi(x)) \begin{pmatrix} \varphi_2^1(x) \\ -\varphi_1^1(x) \end{pmatrix} \tilde{v} + \dots da = \\
&\stackrel{\text{Gau\ss}}{=} \int_G \operatorname{div}_x F^1(\varphi(x)) \begin{pmatrix} \varphi_2^1(x) \\ -\varphi_1^1(x) \end{pmatrix} + \dots dx = \\
&= \int_G \operatorname{div}_u F^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \varphi_2^1(x) + \underbrace{F_1 \varphi_{21}^1}_{\text{Schwarzscher Satz}} - \operatorname{div}_u F^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \varphi_1^1 - \underbrace{F^1 \varphi_{12}^1}_{\Sigma=0} + \dots dx = \\
&= \int_G F_1^1 \underbrace{(\varphi_1^1 \varphi_2^1 - \varphi_2^1 \varphi_1^1)}_{=0} + F_2^1 (\varphi_1^2 \varphi_2^1 - \varphi_2^2 \varphi_1^1) + F_3^1 (\varphi_1^3 \varphi_2^1 - \varphi_2^3 \varphi_1^1) + \dots dx
\end{aligned}$$

Vergleich mit (♥) liefert die Behauptung aus (32.16).

**q.e.d.**

Nachdem wir uns nun mit Rotation und Divergenz von Feldern auskennen, können wir kurz auf den Hauptsatz der Vektoranalysis eingehen, den wir jedoch im Rahmen dieser Vorlesung nicht weiter behandeln.

### Einschub: Hauptsatz der Vektoranalysis

Falls für ein unbekanntes Vektorfeld  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Quellen, die Wirbel und der Fluss durch den Rand bekannt sind, das heißt, gilt für gegebene Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\varphi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\operatorname{div} F = f, \operatorname{rot} F = G \text{ auf } \Omega$$

$$F \cdot v = \varphi \text{ auf } \partial\Omega$$

und die Kompatibilitätsbedingungen:

$$\operatorname{div} G = 0 \text{ auf } \Omega$$

$$\int_{\Omega} f dx = \int_{\partial\Omega} \varphi da$$

so ist  $F$ , falls  $\Omega$ ,  $f$ ,  $G$ ,  $\varphi$  hinreichend regulär sind, eindeutig bestimmt. Wichtige Anwendungen dessen finden sich z.B. in der Elektrodynamik.

## 33 Gradientenfelder

### Definition (Gradientenfeld)

Eine Abbildung  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  offen, heißt **Gradientenfeld**, falls eine differenzierbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, die

$$F(x) = f'(x) \quad \forall x \in \Omega$$

erfüllt.

Wir wollen untersuchen, welche Vektorfelder Gradientenfelder sind, analog zur Suche nach Stammfunktionen in Kapitel 25.

**Satz 33.1 (Notwendige Bedingung)** Sei  $F = (F_1, \dots, F_n) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  offen, stetig differenzierbar und ein Gradientenfeld, dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} F_j(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n; \quad i, j = 1, \dots, n \quad (33.1)$$

(33.1) heißt *Integrabilitätsbedingung*;  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$

*Anmerkung:* Für  $n = 3$  ist (32.1) äquivalent dazu, dass  $\operatorname{rot} F = 0$  ist.