Mathematik für Physiker I

Friedemann Schuricht

übertragen von
Lukas Körber und Friedrich Zahn

Wintersemester 2014/2015

Inhaltsverzeichnis

 INHALTSVERZEICHNIS

Überblick

Diese Vorlesung wird sich mit folgenden Tehmen befassen:

1. **Integration auf Mannigfaltigkeiten**
2. **Differenzialgleichungen**, sowohl gewöhnlich, als auch partiel
3. **Funktionalanalysis** in Banach- und Hilberträumen (insbesondere unendlich dimensionale Räume z.B. von Folgen und Funktionen)
4. **Funktionstheorie**, der Theorie von komplexwertigen Funktionen und z.B. $\mathbb{C}$-Differenzierbarkeit

Kapitel VIII

Integration auf Mannigfaltigkeiten

Literaturtipp: Königsberger Analysis 2, Springer

29 Mannigfaltigkeiten

Sei $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$ mit $q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, also q-fach stetig differenzierbar, wobei $V \subset \mathbb{R}^d$ offen ist, dann heißt φ **regulär**, falls

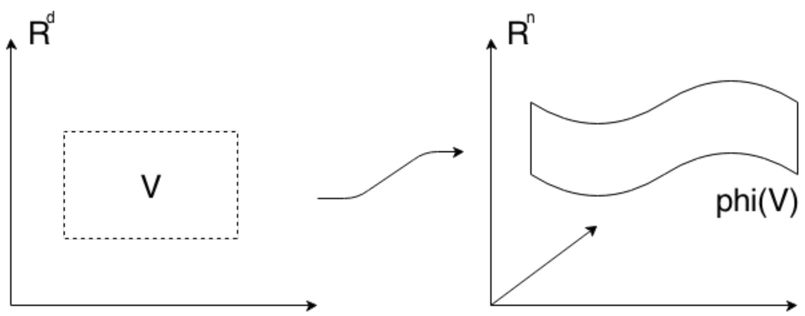
$$\varphi'(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \text{ regulär (d.h. injektiv)} \tag{29.1}$$

Falls φ regulär für alle $x \in V$ ist, heißt es auch **regulär auf V** beziehungsweise **reguläre** C^q**-Parametrisierung** (manchmal auch C^q-Immersion).
V ist dann der **Parameterbereich** von φ.
Bemerkung: $\varphi(V)$ wird selten auch **Spur** von φ genannt.

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass aus (29.1) sofort

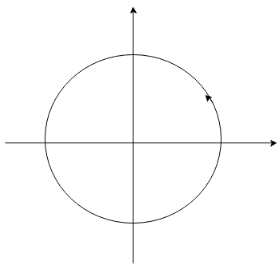
$$d \leq n \tag{29.2}$$

folgt. Dies sei in Kapitel VIII immer erfüllt! (29.2) ist außerdem äquivalent dazu, dass rang $\varphi'(x) = d$.



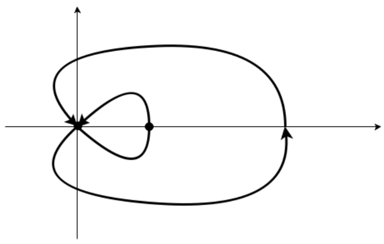
Beispiel 1 (reguläre Kurven $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$) Dabei ist I offen und der Tagentialvektor nirgendwo identisch mit dem Nullvektor, also $\varphi'(x) \neq 0$

1. $\varphi : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos kt \\ \sin kt \end{pmatrix}$ und $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

   Der Einheitskreis wird hier k-mal durchlaufen. Da $\varphi'(x) \neq 0$, ist φ regulär.

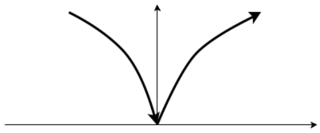
2. $\varphi(-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = (1 + 2\cos t)\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

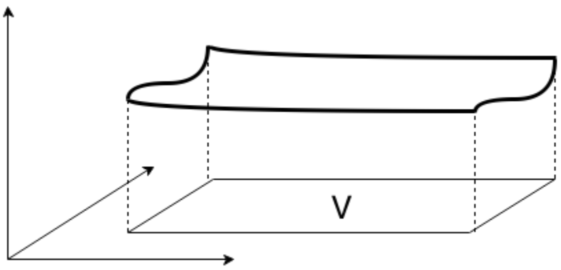
   $\varphi(\pm \frac{2\pi}{3}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gehört **nicht** zur Kurve ("$= \varphi(\pm\pi)$") und φ ist regulär.

3. $\varphi : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ ist wegen $\varphi'(0) = 0$ **nicht** regulär

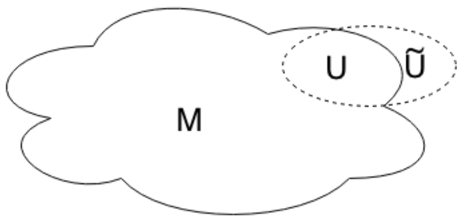
   

Beispiel 2 (Parametrisierung von Graphen) Sei $f \in C^q(V, \mathbb{R}^{n-d})$, $V \subset \mathbb{R}^d$. Betrachtet wird $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) = (x, f(x))$



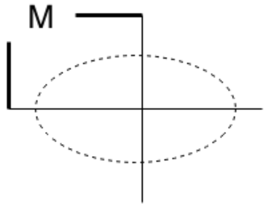
φ ist regulär, da offenbar $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$ und $\varphi' = \begin{pmatrix} id^d \\ f'(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ ist.

Es folgt eine Wiederholung zur **Relativtopologie** (vgl. Kapitel 14). Wir wissen, dass $U \subset M$ genau dann offen bezüglich M ist, wenn es ein $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ gibt, dass offen ist, und das $U = \tilde{U} \cap M$ erfüllt. Später wird M eine Mannigfaltigkeit sein und wir werden untersuchen, was in ihr offen ist.

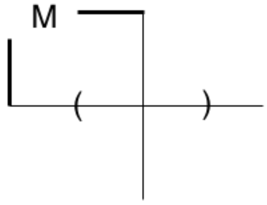


Auf dieser Grundlage lässt sich auch der Begriff der **Umgebung** definieren:
$U \subset M$ heißt nämlich genau dann Umgebung von $u \in M$ bezüglich M, wenn es ein bezüglich M offenes $U_0 \subset M$ gibt, in dem u liegt und das Teilmenge von U ist.

Beispiel für $M \subset \mathbb{R}^n$.



offen bzgl. M



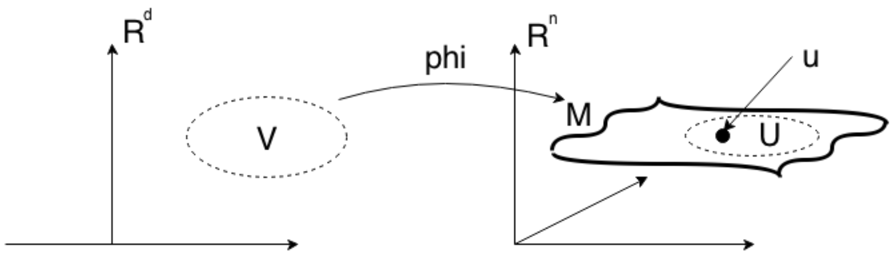
nicht offen bzgl. M

Definition (Mannigfaltigkeiten) Wir nennen $M \subset \mathbb{R}^n$ eine **d-dimensionale** C^q**-Mannigfaltigkeit** ($q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$), falls

1. es für alle $u \in M$ eine (offene) Umgebung U von u bezüglich M gibt und
2. es eine reguläre C^q-Parametrisierung $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ (V ist offen) existiert, die homöomorph ist und in die Mannigfaltigkeit abbildet (also $\varphi(V) = U$).

Wiederholung: Eine stetige Abbildung heißt homöomorph, falls eine Umkehrabbildung existiert, die auch stetig ist.

In der Literatur wird M auch manchmal als C^q-*Unter*mannigfaltigkeit bezeichnet. Wir werden jedoch später zeigen, dass die verschiedenen Definitionen von Mannigfaltigkeiten gleichwertig sind.
Da ab jetzt immer hauptsächlich C^1-Mannigfaltigkeiten auftauchen werden, werden wir diese in Zukunft einfach "Mannigfaltigkeiten"nennen.



Die Umkehrabbildung φ^{-1} beziehungsweise (φ^{-1}, U) nennt man die **Karte** von M um $u \in M$, wobei U das zugehörige **Kartengebiet**, φ selbst die Parametrisierung und V der Parameterbereich ist.
Karten können eine Mannigfaltigkeit jedoch nur lokal beschreiben. Aus diesem Grund führt man den Begriff des Atlas, der eine globale Beschreibung ermöglicht, ein:
Die Menge $\{\varphi_\alpha^{-1} | \alpha \in A\}$ heißt **Atlas** der Mannigfaltigkeit M, falls die zugehörigen Kartengebiete U_α jene vollständig überdecken.

Weiterhin wichtig ist der Begriff der sogenannten **Einbettung**, bei der es sich um eine reguläre Parametrisierung handelt, die homöomorph ist. Wir vereinbaren, dass es sich im folgenden bei allen Parametrisierungen von Mannigfaltigkeiten stets um Einbettungen handelt.

Beispiel 3 (Beweise bitte Selbstudium)

1. Der Kreis aus Beispiel 1.1 ist eine 1-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit, obwohl der Kreis k-fach durchlaufen wird. Der Atlas benötigt mindestens zwei Karten.

2. Die Kurven aus Biespiel 1.2 und 1.3 sind keine Mannigfaltigkeiten, da φ nicht überall homöomorph ist.

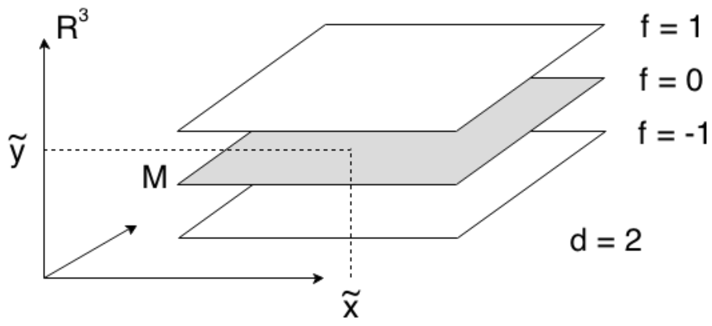
3. Jedes offene $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit mit $\{id\}$ als Atlas.

Beispiel 4 Sei M := graph f aus Beispiel 2. Offenbar ist $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \to M \subset \mathbb{R}^n$ eine Einbettung. Das macht M zu einer d-dimensionalen C^q-Mannigfaltigkeit.

Beispiel 5 Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ (D offen) q-fach stetig differenzierbar für $q \geq 1$. Offenbar ist

$$\operatorname{rang} f'(u) = n - d \qquad \forall u \in D \tag{29.3}$$

Wir nennen $M = \{u \in D \mid f(n) = 0\}$ die Niveaumenge von f



Fixieren wir $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x_1, ..., x_d, y_1, ..., y_{n-d}) \in M$, so sehen wir mit (29.3) und eventuellen Koordinatenvertauschungen, dass $f(\tilde{x}, \tilde{y})$ regulär ist. Der *Satz über implizite Funktionen* sichert uns nun, dass es eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^d$ von $\tilde{x}$, eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n-d}$ von $\tilde{y}$ und ein $\psi : V \to W \in C^q(V, W)$ gibt, das $(x, \psi(x)) \in M$ erfüllt und homöomorph ist.
Es folgt, dass $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) = (x, \psi(x))$ eine homöomorphe, reguläre Einbettung und $\varphi(V)$ Umgebung von $\tilde{u} \in M$ bezüglich von M ist. Daraus können wir nun schließen, dass M eine d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit ist.

Bemerkung: $M =$ *graph* f *und* $M = \{f = 0\}$ *sind grundlegende Konstruktionen für Mannigfaltigkeiten.* ***Lokal*** *ist jede Mannigfaltigkeit von dieser Gestalt!*

Satz 29.1 (lokale Darstellung einer Mannigfaltigkeit als Graph)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit.
$\Longleftrightarrow \forall u \in M \subset \mathbb{R}^n$ existiert eine Umgebung U von u bezüglich M, $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ und eine Permutation π von Koordinaten in $\mathbb{R}^n$ mit $\psi(W) = U$ für $\psi(v) := \psi(v, f(v)) \forall v \in W$ (das heißt U ist Graph von f).

somit: M ist C^q-Mannigfaltigkeit genau dann, wenn M lokaler Graph einer C^q-Funktion f ist (vergleiche Beispiel 2 und 4).

Beweis. " $\Leftarrow$ ": folgt aus Beispielen 2 und 4.
" $\Rightarrow$ ": fixiere $\tilde{u} \in M$, sei $\varphi : \tilde{V} \in \mathbb{R}^d \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ und der zugehörige C^q-Parameter $\tilde{u} = \varphi(\tilde{x})$

$\varphi'(x)$ ist regulär $\xRightarrow{\text{evtl. } \pi \text{ der Zeilen}} \varphi_I'(\tilde{x}) \subseteq \mathbb{R}^{d \times d}$ ist regulär für $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_I(x) \left[\in \mathbb{R}^d\right] \\ \varphi_{II}(x) \left[\in \mathbb{R}^{n-d}\right] \end{pmatrix}$

Zerlege $u = \pi(v, w)$ mit $v \in \mathbb{R}^d$, d.h. $\tilde{u} = \pi(\tilde{v}, \tilde{w})$

Skizzen fehlen!

$\xRightarrow{\text{Theorem über inverse Fkt.}} \exists V \subset \tilde{V}$ offen, $\tilde{x} \in V, W \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\tilde{v} \in W$ mit $\varphi_I^{-1} : W \to V$ Homöomorphismus und C^q-Abbildung, $\varphi_I^{-1}(\tilde{v}) = \tilde{x}$
mit $f(v) := \varphi_{II}\left(\varphi_I^{-1}(v)\right) \forall v \in W$ ist $f \in C^q\left(W, \mathbb{R}^{n-d}\right)$

und $\psi(v) := \varphi\left(\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(v)\right) = \left(\varphi_{\mathrm{I}}\left(\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(v)\right(, \varphi_{\mathrm{II}}\left(\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(v)\right)\right) = \pi\left(v, f(v)\right)$
$\Rightarrow \psi(\tilde{v}) = \pi(\tilde{v}, \tilde{w}) = \tilde{u}, \psi(w) = \varphi(v) \in \mathrm{M}$
$\varphi : \tilde{\mathrm{V}} \to \tilde{\mathrm{U}}$ ist Homöomorphismus
$\Rightarrow \varphi(v)$ ist offen in M
$\Rightarrow \mathrm{U} := \psi(\mathrm{W})$ ist offen bezüglich M $\Rightarrow$ U ist Umgebung von $\tilde{u}$ bezüglich M
$\xRightarrow{\tilde{u}\text{ beliebig}}$ Behauptung.

q.e.d.

Satz 29.2 (Charakterisierung von Mf mit umgebendem Raum)
$\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^n$ sei d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit.
$\Longleftrightarrow \forall u \in \mathrm{M}$ existiert eine Umgebung $\tilde{\mathrm{U}}$ von u bezüglich $\mathbb{R}^n$,
$\tilde{\mathrm{V}} \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{\psi} : \tilde{\mathrm{U}} \to \tilde{\mathrm{V}}$ wobei $\tilde{\psi}$ ein C^q-Diffeomorphismus ist und

$$\tilde{\psi}\left(\tilde{\mathrm{U}} \cap \mathrm{M}\right) = \tilde{\mathrm{V}} \cap \left(\mathbb{R}^d \times 0\right)$$

Skizzen fehlen!

Bemerkung: Diese Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten benutzt den umgebenden Raum und wird häufig als Definition der Mannigfaltigkeit benutzt.

Beweis. " $\Leftarrow$ ": ψ eingeschränkt auf $\tilde{\mathrm{U}} \cap \mathrm{M}$ liefert Karten $\Rightarrow$ Behauptung.
" $\Rightarrow$ ": fixiere $\tilde{u} \in \mathrm{M}$, wähle $\tilde{\mathrm{U}} \subset \mathrm{M}$, $\mathrm{W} \subset \mathbb{R}^d$, $f \in \mathrm{C}^q\left(\mathrm{W}, \mathbb{R}^{n-d}\right)$
gemäß Satz 29.1 oBdA $\pi = id$
zerlege $u = (v, w) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$, $\tilde{u} = \left(\tilde{v}, f(\tilde{v})\right)$
sei $\hat{\mathrm{U}} := \mathrm{W} \times \mathbb{R}^{n-d} =: \hat{\mathrm{V}}$, liefert SZylinderäus U und W in Beweis zu Satz 29.1
sei $\tilde{\varphi} : \hat{\mathrm{V}} \to \hat{\mathrm{U}}$ mit $\tilde{\varphi}(v, w) := (v, f(v) + w) \Rightarrow \tilde{\varphi} \in \mathrm{C}^q$
$\tilde{\varphi}'(\tilde{v}, 0) = \begin{pmatrix} id_d & 0 \\ f'(v) & id_{n-d} \end{pmatrix}$ ist regulär
$\xRightarrow{\text{Satz ü. inverse Fkt.}} \exists$ Umgebung $\tilde{\mathrm{U}} \subset \hat{\mathrm{U}}$ von $\tilde{\mathrm{U}}$, Umgebung $\tilde{\mathrm{V}} \subset \hat{\mathrm{V}}$ von $(\tilde{v}, 0)$, sodass
$\tilde{\psi} := \tilde{\varphi}^{-1} \in \mathrm{C}^q\left(\tilde{\mathrm{U}}, \tilde{\mathrm{V}}\right)$ exisitiert.
wegen $\tilde{\varphi}\left(\tilde{\mathrm{V}} \cap \left(\mathbb{R}^d \times 0\right)\right) = \tilde{\mathrm{U}} \cap \mathrm{M}$ folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Folgerung 29.3 Sei $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit
und $\varphi : \mathrm{V} \subset \mathbb{R}^d \to \mathrm{U} \subset \mathrm{M}$ Parameter um $u \in \mathrm{M}$
$\Longrightarrow \exists \tilde{\mathrm{U}}, \tilde{\mathrm{V}} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathrm{V}} \to \tilde{\mathrm{U}}$ mit $\mathrm{U} \subset \tilde{\mathrm{U}}, \mathrm{V} \times 0 \subset \tilde{\mathrm{V}}$,
$\tilde{\varphi}$ ist C^q-Diffeomorphismus und $\tilde{\varphi}(x, 0) = \varphi(x) \forall x \in \mathrm{V}$

Beweis. Folgt aus Beweisen von Satz 29.1 und 29.2 **q.e.d.**

Theorem 29.4 (lokale Darstellung von Mf als Niveaumenge)
$\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^n$ sei d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit.
$\Longleftrightarrow \forall u \in \mathrm{M}$ existiert eine Umgebing $\tilde{\mathrm{U}}$ von u bezüglich $\mathbb{R}^n$ und
$f \in \mathrm{C}^q\left(\tilde{\mathrm{U}}, \mathbb{R}^{n-d}\right)$ mit *rang* $f'(u) = n - d$ und
$\tilde{\mathrm{U}} \cap \mathrm{M} = \left\{\tilde{u} \in \tilde{\mathrm{U}} | f(\tilde{u}) = 0\right\}$

somit: M ist eine C^q-Mannigfaltigkeit genau dann, wenn M die lokale Niveaumenge einer C^q-Funktion f ist.

Bemerkung: $c \in \mathbb{R}^{n-d}$ heißt *regulärer Wert* von $f \in C^q\left(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d}\right)$,
$\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, falls $rang\, f'(u) = n - d \forall u \in \tilde{U}$ mit $f(u) = c$
Folglich ist $M := \left\{u \in \tilde{U} | f(u) = c\right\}$ eine d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit, falls c ein regulärer Wert von f ist.

Beweis. " $\Leftarrow$ " : gemäß Bsp. 5 erhält man lokale Parametriesierung
$\Rightarrow$ Behauptung.
" $\Rightarrow$ " : fixiere $\tilde{u} \in M$, wähle $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n, \tilde{\psi} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ gemäß Satz 29.2
sei $f := \left(\tilde{\psi}_{d+1}, \ldots, \tilde{\psi}_n\right)$, offenbar $f \in C^q\left(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d}\right)$
mit $\tilde{\psi}$ aus dem Beweis zu Satz 29.2: $\tilde{\psi}'(\tilde{u}) = \tilde{\varphi}'(\tilde{v}, 0)^{-1}$ ist regulär
$\Rightarrow f'(\tilde{u})$ hat vollen Rang, d.h. $rang\, f'(\tilde{u}) = n - d$
nach Konstruktion $\left\{u \in \tilde{U} | f(u) = 0\right\} = U \cap M \Rightarrow$ Behauptung. **q.e.d.**

Lemma 29.5 (Kartenwechsel)
Sei $M \in \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit
und $\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}$ Karten mit zugehörigem Kartengebiet $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$
$\Longrightarrow \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ ist C^q-Diffeomorphismus.
Skizze fehlt!

Beweis. Ersetze φ_1, φ_2 mit $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ gemäß Folgerung 29.3
$\Rightarrow$ Einschränkung von $\tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1$ liefert Behauptung. **q.e.d.**

Definition Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit.
Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt **Tangentialvektor** in $u \in M$ an M,
falls eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : (-\delta, \delta) \to M (\delta > 0)$ exisitiert mit $\gamma(0) = u$ und $\gamma'(0) = v$.
Die Menge aller Tangentialvektoren $T_u M$ heißt Tangentialraum.

Satz 29.6 Sei $M \in \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit,
$u \in M$, $\varphi : V \to U$ der zugehörige Parameter um u
$\Longrightarrow T_u M$ ist d-dimensionaler ($\mathbb{R}-$) Vektorraum und

$$T_u M = \underbrace{\varphi'(x)}_{L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)} \left(\mathbb{R}^d\right) \text{ für } x = \varphi^{-1}(u) \tag{29.4}$$

wobei $T_u M$ unabhängig vom speziellen Parameter φ ist.

Beweis. Sei $\gamma : (-\delta, \delta) \to M eine C^1$-Kurve mit $\gamma(0) = u$
$\Rightarrow g := \varphi^{-1} \circ \gamma$ ist C^1-Kurve, $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^d$ mit $g(0) = x$ und

$$\gamma'(0) = \varphi'(x) g'(0), \ \varphi'(x) \text{ist regulär.} \qquad (\spadesuit)$$

Offenb. liefert auch jede C^1-Kurve g in $\mathbb{R}^d$ durch x eine C^1-Kurve γ in M mit (♠)
Die Menge aller Tangentialvektoren $g'(0)$ von C^1-Kurven g in $\mathbb{R}^d$ ist offenbar $\mathbb{R}^d$
$\Rightarrow$ 29.4 $\xRightarrow{\varphi'(x) \text{ ist regulär}} dim\, T_u M = d$
da (♠) für jeden Parameter φ gilt, ist $T_u M$ unabhängig von φ. **q.e.d.**

Bemerkung: Man bezeichnet auch $(u, T_u M) \subset M \times \mathbb{R}^n$ als Tangentialraum und $TM = \bigcup_{U \in M} (u, T_u M) \subset M \times \mathbb{R}^n$ als Tangentialbündel.

Beispiel 6 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen
$\Rightarrow$ M ist ist n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $T_u M = \mathbb{R}^n \forall u \in M$

Definition Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensinale Mannigfaltigkeit.
Ein Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ heißt **Normalenvektor** in $u \in M$ an M, falls
$\langle w, v \rangle = 0 \forall v \in T_u M$ (d.h. $w \perp v \forall v \in T_u M$)
Die Menge aller Normalenvektoren $N_u M = T_u M^\perp$ heißt
Normalenraum von M in u.