Mathematik für Physiker I

Friedemann Schuricht

übertragen von
Lukas Körber

Wintersemester 2014/2015

Inhaltsverzeichnis

INHALTSVERZEICHNIS

Überblick

Diese Vorlesung wird sich mit folgenden Tehmen befassen:

1. **Integration auf Mannigfaltigkeiten**
2. **Differenzialgleichungen**, sowohl gewöhnlich, als auch partiel
3. **Funktionalanalysis** in Banach- und Hilberträumen (insbesondere unendlich dimensionale Räume z.B. von Folgen und Funktionen)
4. **Funktionstheorie**, der Theorie von komplexwertigen Funktionen und z.B. $\mathbb{C}$-Differenzierbarkeit

Kapitel VIII

Integration auf Mannigfaltigkeiten

Literaturtipp: Königsberger Analysis 2, Springer

29 Mannigfaltigkeiten

Sei $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$ mit $q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, also q-fach stetig differenzierbar, wobei $V \subset \mathbb{R}^d$ offen ist, dann heißt φ **regulär**, falls

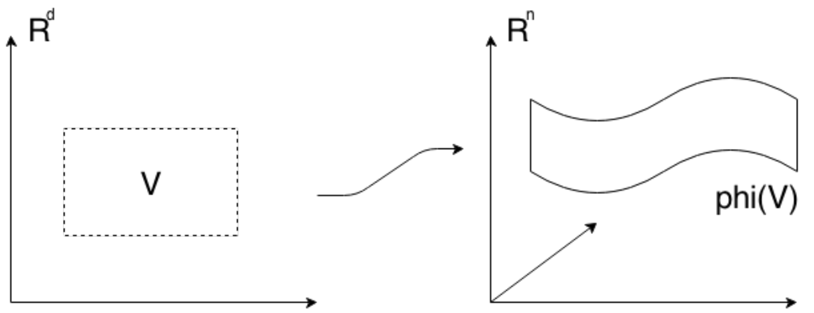
$$\varphi'(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \text{ regulär (d.h. injektiv)} \tag{29.1}$$

Falls φ regulär für alle $x \in V$ ist, heißt es auch **regulär auf V** beziehungsweise **reguläre C^q-Parametrisierung** (manchmal auch C^q-Immersion). V ist dann der **Parameterbereich** von φ.
Bemerkung: $\varphi(V)$ wird selten auch **Spur** von φ genannt.

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass aus (29.1) sofort

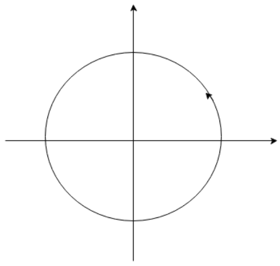
$$d \leq n \tag{29.2}$$

folgt. Dies sei in Kapitel VIII immer erfüllt! (29.2) ist außerdem äquivalent dazu, dass rang $\varphi'(x) = d$.



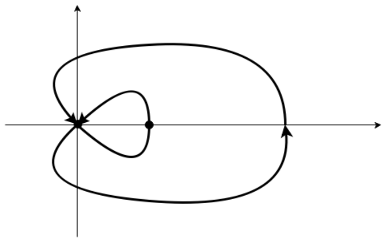
Beispiel 29.1 (reguläre Kurven $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$). Dabei ist I offen und der Tagentialvektor nirgendwo identisch mit dem Nullvektor, also $\varphi'(x) \neq 0$

1. $\varphi : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos kt \\ \sin kt \end{pmatrix}$ und $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$



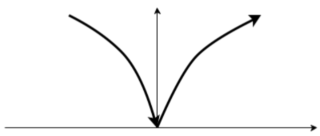
   Der Einheitskreis wird hier k-mal durchlaufen. Da $\varphi'(x) \neq 0$, ist φ regulär.

2. $\varphi(-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = (1 + 2\cos t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

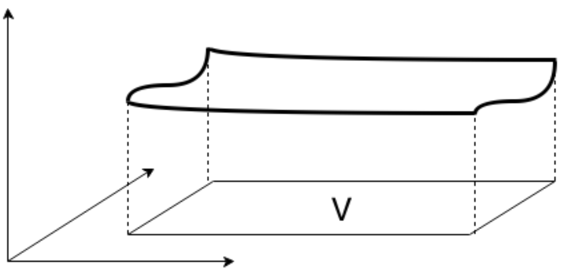


   $\varphi(\pm \frac{2\pi}{3}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
   $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gehört **nicht** zur Kurve ("$= \varphi(\pm\pi)$") und φ ist regulär.

3. $\varphi : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ ist wegen $\varphi'(0) = 0$ **nicht** regulär

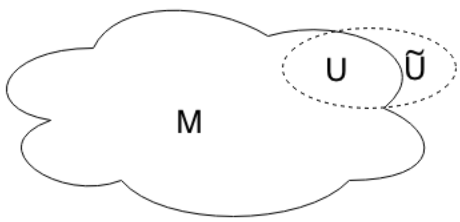


Beispiel 29.2 (Parametrisierung von Graphen). Sei $f \in C^q(V, \mathbb{R}^{n-d})$, $V \subset \mathbb{R}^d$. Betrachtet wird $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) = (x, f(x))$



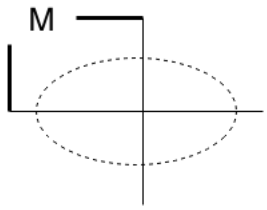
φ ist regulär, da offenbar $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$ und $\varphi' = \begin{pmatrix} id^d \\ f'(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ ist.

Es folgt eine Wiederholung zur **Relativtopologie** (vgl. Kapitel 14). Wir wissen, dass $U \subset M$ genau dann offen bezüglich M ist, wenn es ein $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ gibt, dass offen ist, und das $U = \tilde{U} \cap M$ erfüllt. Später wird M eine Mannigfaltigkeit sein und wir werden untersuchen, was in ihr offen ist.

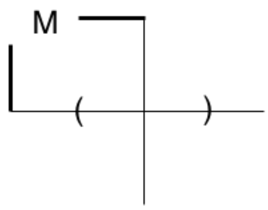


Auf dieser Grundlage lässt sich auch der Begriff der **Umgebung** definieren:
$U \subset M$ heißt nämlich genau dann Umgebung von $u \in M$ bezüglich M, wenn es ein bezüglich M offenes $U_0 \subset M$ gibt, in dem u liegt und das Teilmenge von U ist.

Beispiel für $M \subset \mathbb{R}^n$.



offen bzgl. M



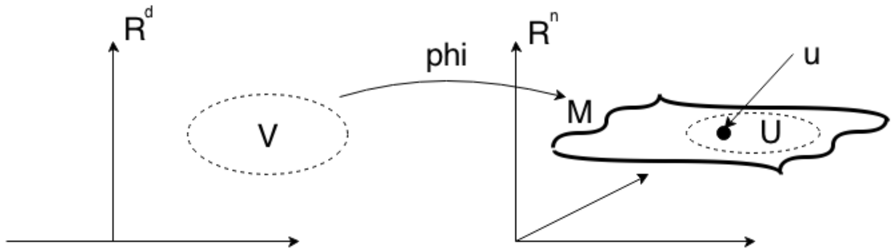
nicht offen bzgl. M

Definition (Mannigfaltigkeiten). Wir nennen $M \subset \mathbb{R}^n$ eine **d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit** ($q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$), falls

1. es für alle $u \in M$ eine (offene) Umgebung U von u bezüglich M gibt und
2. es eine reguläre C^q-Parametrisierung $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ (V ist offen) existiert, die homöomorph ist und in die Mannigfaltigkeit abbildet (also $\varphi(V) = U$).

Wiederholung: Eine stetige Abbildung heißt homöomorph, falls eine Umkehrabbildung existiert, die auch stetig ist.

In der Literatur wird M auch manchmal als C^q-*Unter*mannigfaltigkeit bezeichnet. Wir werden jedoch später zeigen, dass die verschiedenen Definitionen von Mannigfaltigkeiten gleichwertig sind.
Da ab jetzt immer hauptsächlich C^1-Mannigfaltigkeiten auftauchen werden, werden wir diese in Zukunft einfach "Mannigfaltigkeiten"nennen.



Die Umkehrabbildung φ^{-1} beziehungsweise (φ^{-1}, U) nennt man die **Karte** von M um $u \in M$, wobei U das zugehörige **Kartengebiet**, φ selbst die Parametrisierung und V der Parameterbereich ist.
Karten können eine Mannigfaltigkeit jedoch nur lokal beschreiben. Aus diesem Grund führt man den Begriff des Atlas, der eine globale Beschreibung ermöglicht, ein:
Die Menge $\{\varphi_\alpha^{-1} | \alpha \in A\}$ heißt **Atlas** der Mannigfaltigkeit M, falls die zugehörigen Kartengebiete U_α jene vollständig überdecken.

Weiterhin wichtig ist der Begriff der sogenannten **Einbettung**, bei der es sich um eine reguläre Parametrisierung handelt, die homöomorph ist. Wir vereinbaren, dass es sich im folgenden bei allen Parametrisierungen von Mannigfaltigkeiten stets um Einbettungen handelt.

Beispiel 29.3 (Beweise bitte Selbstudium).

1. Der Kreis aus Beispiel 1.1 ist eine 1-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit, obwohl der Kreis k-fach durchlaufen wird. Der Atlas benötigt mindestens zwei Karten.

2. Die Kurven aus Biespiel 1.2 und 1.3 sind keine Mannigfaltigkeiten, da φ nicht überall homöomorph ist.

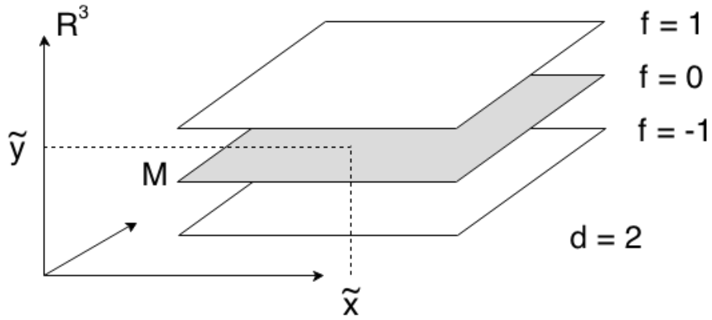
3. Jedes offene $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit mit $\{id\}$ als Atlas.

Beispiel 29.4. Sei $M :=$ graph f aus Beispiel 2. Offenbar ist $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \to M \subset \mathbb{R}^n$ eine Einbettung. Das macht M zu einer d-dimensionalen C^q-Mannigfaltigkeit.

Beispiel 29.5. Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ (D offen) q-fach stetig differenzierbar für $q \geq 1$. Offenbar ist

$$\text{rang } f'(u) = n - d \qquad \forall u \in D \tag{29.3}$$

Wir nennen $M = \{u \in D \mid f(n) = 0\}$ die Niveaumenge von f



Fixieren wir $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x_1, ..., x_d, y_1, ..., y_{n-d}) \in \mathrm{M}$, so sehen wir mit (29.3) und eventuellen Koordinatenvertauschungen, dass $f(\tilde{x}, \tilde{y})$ regulär ist. Der *Satz über implizite Funktionen* sichert uns nun, dass es eine Umgebung $\mathrm{V} \subset \mathbb{R}^d$ von $\tilde{x}$, eine Umgebung $\mathrm{W} \subset \mathbb{R}^{n-d}$ von $\tilde{y}$ und ein $\psi : \mathrm{V} \to \mathrm{W} \in \mathrm{C}^q(\mathrm{V}, \mathrm{W})$ gibt, das $(x, \psi(x)) \in \mathrm{M}$ erfüllt und homöomorph ist.
Es folgt, dass $\varphi : \mathrm{V} \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) = (x, \psi(x))$ eine homöomorphe, reguläre Einbettung und $\varphi(\mathrm{V})$ Umgebung von $\tilde{u} \in \mathrm{M}$ bezüglich von M ist. Daraus können wir nun schließen, dass M eine d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit ist.

Bemerkung: $\mathrm{M} = $ *graph* f *und* $\mathrm{M} = \{f = 0\}$ *sind grundlegende Konstruktionen für Mannigfaltigkeiten.* ***Lokal*** *ist jede Mannigfaltigkeit von dieser Gestalt!*