

# Mathematik für Physiker I+II

Friedemann Schuricht

übertragen von  
Lukas Körber und Friedrich Zahn

Wintersemester 2014/2015



# Inhaltsverzeichnis

<b>VIII Integration auf Mannigfaltigkeiten</b>	<b>7</b>
29 Mannigfaltigkeiten . . . . .	7
30 Integration auf Kartengebieten . . . . .	26



# Überblick

Diese Vorlesung wird sich mit folgenden Themen befassen:

1. **Integration auf Mannigfaltigkeiten**
2. **Differenzialgleichungen**, sowohl gewöhnlich, als auch partiell
3. **Funktionalanalysis** in Banach- und Hilberträumen (insbesondere unendlich dimensionale Räume z.B. von Folgen und Funktionen)
4. **Funktionstheorie**, der Theorie von komplexwertigen Funktionen und z.B.  $\mathbb{C}$ -Differenzierbarkeit



# Kapitel VIII

## Integration auf Mannigfaltigkeiten

*Literaturtipp:* Königsberger Analysis 2, Springer

### 29 Mannigfaltigkeiten

Sei  $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$  mit  $q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ , also  $q$ -fach stetig differenzierbar, wobei  $V \subset \mathbb{R}^d$  offen ist, dann heißt  $\varphi$  **regulär**, falls

$$\varphi'(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ regulär (d.h. injektiv)} \quad (29.1)$$

Falls  $\varphi$  regulär für alle  $x \in V$  ist, heißt es auch **regulär auf  $V$**  beziehungsweise **reguläre  $C^q$ -Parametrisierung** (manchmal auch  $C^q$ -Immersion).

$V$  ist dann der **Parameterbereich** von  $\varphi$ .

*Bemerkung:*  $\varphi(V)$  wird selten auch **Spur** von  $\varphi$  genannt.

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass aus (29.1) sofort

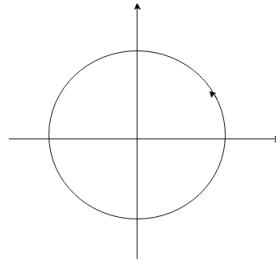
$$d \leq n \quad (29.2)$$

folgt. Dies sei in Kapitel VIII immer erfüllt! (29.2) ist außerdem äquivalent dazu, dass  $\text{rang } \varphi'(x) = d$ .



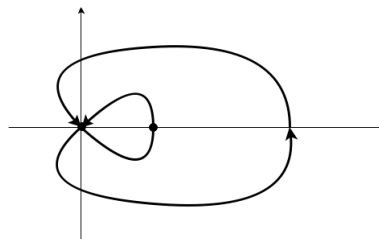
**Beispiel 29.1 (reguläre Kurven  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ )** Dabei ist  $I$  offen und der Tangentialvektor nirgendwo identisch mit dem Nullvektor, also  $\varphi'(x) \neq 0$

1.  $\varphi : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos kt \\ \sin kt \end{pmatrix}$  und  $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$



Der Einheitskreis wird hier  $k$ -mal durchlaufen. Da  $\varphi'(x) \neq 0$ , ist  $\varphi$  regulär.

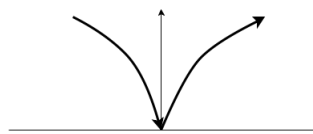
2.  $\varphi : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\varphi(t) = (1 + 2 \cos t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$



$$\varphi\left(\pm \frac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  gehört **nicht** zur Kurve ("=  $\varphi(\pm\pi)$ ") und  $\varphi$  ist regulär.

3.  $\varphi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\varphi(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$  ist wegen  $\varphi'(0) = 0$  **nicht** regulär



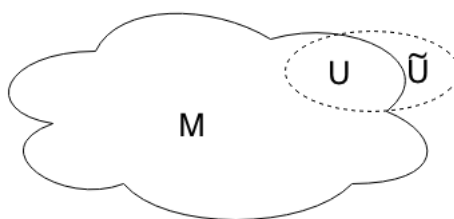


**Beispiel 29.2 (Parametrisierung von Graphen)** Sei  $f \in C^q(V, \mathbb{R}^{n-d})$ ,  $V \subset \mathbb{R}^d$ . Betrachtet wird  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi(x) = (x, f(x))$



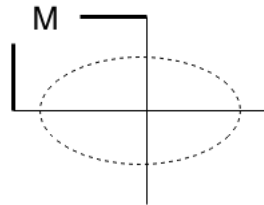
$\varphi$  ist regulär, da offenbar  $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$  und  $\varphi' = \begin{pmatrix} id^d \\ f'(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times d}$  ist.

Es folgt eine Wiederholung zur **Relativtopologie** (vgl. Kapitel 14). Wir wissen, dass  $U \subset M$  genau dann offen bezüglich  $M$  ist, wenn es ein  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$  gibt, dass offen ist, und das  $U = \tilde{U} \cap M$  erfüllt. Später wird  $M$  eine Mannigfaltigkeit sein und wir werden untersuchen, was in ihr offen ist.

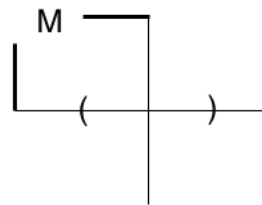


Auf dieser Grundlage lässt sich auch der Begriff der **Umgebung** definieren:  $U \subset M$  heißt nämlich genau dann Umgebung von  $u \in M$  bezüglich  $M$ , wenn es ein bezüglich  $M$  offenes  $U_0 \subset M$  gibt, in dem  $u$  liegt und das Teilmenge von  $U$  ist.

Beispiel für  $M \subset \mathbb{R}^n$ .



offen bzgl.  $M$



nicht offen bzgl.  $M$

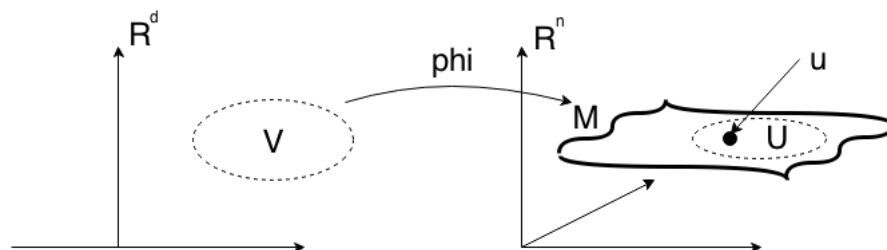
**Definition (Mannigfaltigkeiten)** Wir nennen  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  **$d$ -dimensionale  $C^q$ -Mannigfaltigkeit** ( $q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ), falls

1. es für alle  $u \in M$  eine (offene) Umgebung  $U$  von  $u$  bezüglich  $M$  gibt und
2. eine reguläre  $C^q$ -Parametrisierung  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $V$  ist offen) existiert, die homöomorph ist und in die Mannigfaltigkeit abbildet (also  $\varphi(V) = U$ ).

*Wiederholung: Eine stetige Abbildung heißt homöomorph, falls eine Umkehrabbildung existiert, die auch stetig ist.*

In der Literatur wird  $M$  auch manchmal als  $C^q$ -Untermannigfaltigkeit bezeichnet. Wir werden jedoch später zeigen, dass die verschiedenen Definitionen von Mannigfaltigkeiten gleichwertig sind.

Da ab jetzt immer hauptsächlich  $C^1$ -Mannigfaltigkeiten auftauchen werden, werden wir diese in Zukunft einfach "Mannigfaltigkeiten" nennen.



Die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  beziehungsweise  $(\varphi^{-1}, U)$  nennt man die **Karte** von  $M$  um  $u \in M$ , wobei  $U$  das zugehörige **Kartengebiet**,  $\varphi$  selbst die Parametrisierung und  $V$  der Parameterbereich ist.

Karten können eine Mannigfaltigkeit jedoch nur lokal beschreiben. Aus diesem Grund führt man den Begriff des Atlas, der eine globale Beschreibung ermöglicht, ein:

Die Menge  $\{\varphi_\alpha^{-1} | \alpha \in A\}$  heißt **Atlas** der Mannigfaltigkeit  $M$ , falls die zugehörigen Kartengebiete  $U_\alpha$  jene vollständig überdecken.

Weiterhin wichtig ist der Begriff der sogenannten **Einbettung**, bei der es sich um eine reguläre Parametrisierung handelt, die homöomorph ist. Wir vereinbaren, dass es sich im folgenden bei allen Parametrisierungen von Mannigfaltigkeiten stets um Einbettungen handelt.

### Beispiel 29.3 (Beweise bitte Selbststudium)

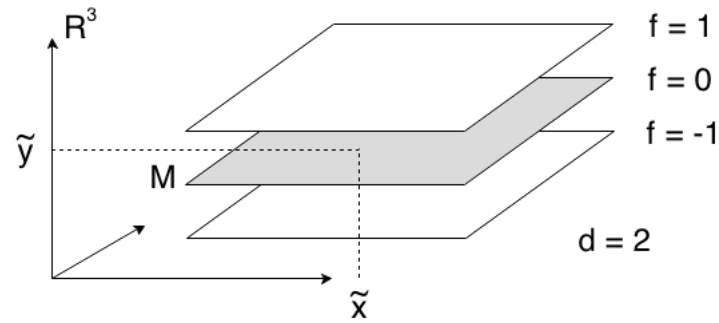
1. Der Kreis aus Beispiel 1.1 ist eine 1-dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, obwohl der Kreis  $k$ -fach durchlaufen wird. Der Atlas benötigt mindestens zwei Karten.
2. Die Kurven aus Beispiel 1.2 und 1.3 sind keine Mannigfaltigkeiten, da  $\varphi$  nicht überall homöomorph ist.
3. Jedes offene  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit mit  $\{id\}$  als Atlas.

**Beispiel 29.4** Sei  $M := \text{graph } f$  aus Beispiel 2. Offenbar ist  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  eine Einbettung. Das macht  $M$  zu einer  $d$ -dimensionalen  $C^q$ -Mannigfaltigkeit.

**Beispiel 29.5** Sei  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$  ( $D$  offen)  $q$ -fach stetig differenzierbar für  $q \geq 1$ . Offenbar ist

$$\text{rang } f'(u) = n - d \quad \forall u \in D \quad (*)$$

Wir nennen  $M = \{u \in D \mid f(u) = 0\}$  die Niveaumenge von  $f$



Fixieren wir  $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_{n-d}) \in M$ , so sehen wir mit (\*) und eventuellen Koordinatenvertauschungen, dass  $f(\tilde{x}, \tilde{y})$  regulär ist. Der *Satz über implizite Funktionen* sichert uns nun, dass es eine Umgebung  $V \subset \mathbb{R}^d$  von  $\tilde{x}$ , eine Umgebung  $W \subset \mathbb{R}^{n-d}$  von  $\tilde{y}$  und ein  $\psi : V \rightarrow W \in C^q(V, W)$  gibt, das  $(x, \psi(x)) \in M$  erfüllt und homöomorph ist.

Es folgt, dass  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi(x) = (x, \psi(x))$  eine homöomorphe, reguläre Einbettung und  $\varphi(V)$  Umgebung von  $\tilde{u} \in M$  bezüglich von  $M$  ist. Daraus können wir nun schließen, dass  $M$  eine  $d$ -dimensionale  $C^q$ -Mannigfaltigkeit ist.

*Bemerkung:*  $M = \text{graph } f$  und  $M = \{f = 0\}$  sind grundlegende Konstruktionen für Mannigfaltigkeiten. **Lokal** ist jede Mannigfaltigkeit von dieser Gestalt! Wir werden diese beiden wichtigen äquivalenten Eigenschaften im Folgenden genauer untersuchen.

**Satz 29.1 (lokale Darstellung einer Mannigfaltigkeit als Graph)**

$M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann eine  $d$ -dimensionale  $C^q$ -Mannigfaltigkeit, wenn für alle  $u \in M \subset \mathbb{R}^n$  eine Umgebung  $U$  von  $u$  bezüglich  $M$  und eine offene Menge  $W \subset \mathbb{R}^d$  existiert, sodass (gegebenenfalls unter einer Koordinatenpermutation  $\pi$  im  $\mathbb{R}^n$ ) für mindestens ein  $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$  ein  $\psi$  mit  $\psi[W] = U$  existiert, das

$$\psi(v) := \pi(v, f(v)) \quad \forall v \in W$$

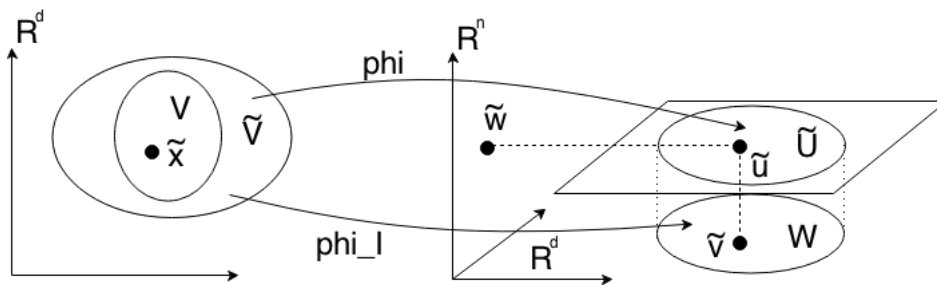
erfüllt. (d.h.  $U = \text{graph } f$ )

Wir können also sagen, dass sich jede  $C^q$ -Mannigfaltigkeit *lokal* als Graph einer  $C^q$ -Funktion darstellen lassen können muss. Die Umkehrung ist genauso richtig. So ist also jeder Graph einer  $C^q$ -Funktion gleichzeitig Mannigfaltigkeit.

*Beweis.* Die Rückrichtung folgt direkt aus den Beispielen 2 und 4. Für die Hinrichtung fixieren wir ein  $\tilde{u} \in M$  und wählen  $\varphi : \tilde{V} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$  als zugehörige Parametrisierung von  $\tilde{u} = \varphi(\tilde{x})$ . Wir schreiben nun  $\varphi$  als

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_I(x) \in \mathbb{R}^d \\ \varphi_{II}(x) \in \mathbb{R}^{n-d} \end{pmatrix}$$

Da  $\varphi'$  regulär sein muss, folgt (mit eventueller Vertauschung  $\pi$  der Zeilen), dass auch  $\varphi'_I(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$  regulär ist. Zerlegen wir nun  $\tilde{u} = \pi(\tilde{u}, \tilde{w})$  mit  $v \in \mathbb{R}^d$ ,



so folgt aus dem *Satz über inverse Funktionen*, dass es ein offenes  $V \subset \tilde{V}$  gibt, in dem ein  $\tilde{x} \in V$  liegt und wiederum ein  $W \subset \mathbb{R}^d$ , in dem ein  $\tilde{v} \in W$  liegt, so dass  $\tilde{v}$  durch  $\varphi^{-1}$  auf  $\tilde{x}$  abgebildet wird.  $\varphi^{-1}$  existiert auf jeden Fall, da  $\varphi$  homöomorph und  $C^q$ -differenzierbar ist. Es ist also

$$\varphi_I^{-1}(\tilde{v}) = \tilde{x}$$

Wählen wir nun

$$f(v) := \varphi_{II}(\varphi_I^{-1}(v))$$

welches für alle  $v \in W$   $q$ -mal stetig differenzierbar ist, also in  $C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$  liegt, und setzen

$$\psi(v) := \varphi(\varphi_I^{-1}(v)) = (\varphi_I(\varphi_I^{-1}(v)), (\varphi_{II}(\varphi_I^{-1}(v)))) = \pi(v, f(v))$$

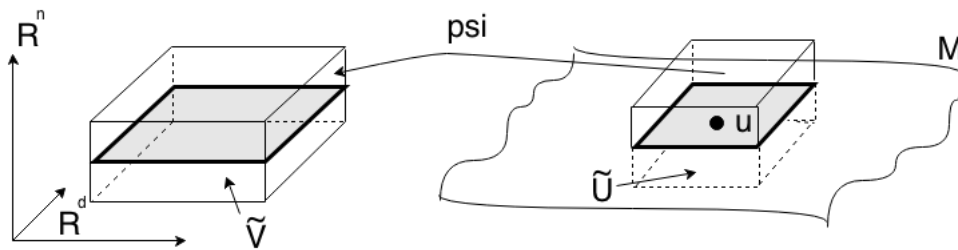
So folgt unmittelbar, dass  $\psi(\tilde{v}) = \pi(\tilde{v}, \tilde{w}) = \tilde{u}$  ist und  $\psi(w) = \varphi(v)$  in  $M$  liegt. Aufgrund der Homöomorphie von  $\varphi: \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$  ist  $\varphi[V]$  offen in  $M$  und somit auch  $U := \psi(W)$  offen bezüglich  $M$ . Da  $U$  nun eine Umgebung von  $\tilde{u}$  bezüglich  $M$  ist und  $\tilde{u}$  beliebig war, folgt direkt die Behauptung. **q.e.d.**

### Satz 29.2 (Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten mit umgebendem Raum)

$M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann eine  $d$ -dimensionale  $C^q$ -Mannigfaltigkeit, wenn für alle  $u \in M$  eine Umgebung  $\tilde{U}$  bezüglich des  $\mathbb{R}^n$  existiert, sodass  $\psi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  (mit  $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$  offen) ein  $C^q$ -Diffeomorphismus ist und

$$\psi(\tilde{U} \cap M) = \tilde{V} \cap (\mathbb{R}^d \times 0)$$

erfüllt.



Dies ist eine Charakterisierung, die den umgebenden Raum nutzt und oft auch als Definition von  $C^q$ -Mannigfaltigkeiten verwendet wird.

*Beweis.* Für die Rückrichtung schränken wir  $\psi$  auf  $\tilde{U} \cap M$  ein und erhalten sofort Karten, was die Behauptung bestätigt. Für die Hinrichtung fixieren wir ein  $\tilde{u} \in M$  und wählen wieder  $\tilde{U} \subset M$ ,  $W \subset \mathbb{R}^d$  und ein  $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ . Gemäß Satz 29.1 setzen wir o.B.d.A  $\pi = id$  und zerlegen  $\tilde{u} = (\tilde{v}, f(\tilde{v})) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ . Nun sei  $\hat{U} := W \times \mathbb{R}^{n-d} =: \hat{V}$ , welches den Zylinder aus  $U$  und  $W$  in Beweis zu Satz 29.1 liefert. Setzen wir schließlich noch  $\tilde{\phi} : \hat{V} \rightarrow \hat{U}$  mit

$$\tilde{\phi}(v, w) := (v, f(v) + w)$$

welches offenbar  $\in C^q$  ist und erhalten, dass

$$\tilde{\phi}'(\tilde{v}, 0) = \begin{pmatrix} id_d & 0 \\ f'(\tilde{v}) & id_{n-d} \end{pmatrix}$$

regulär ist. Nach dem Satz ü. inverse Funktionen existiert wiederum eine Umgebung  $\tilde{U} \subset \hat{U}$  von  $\tilde{u}$  und eine Umgebung  $\tilde{V} \subset \hat{V}$  von  $(\tilde{v}, 0)$ , sodass  $\tilde{\psi} := \tilde{\phi}^{-1} \in C^q(\tilde{U}, \tilde{V})$  existiert. Wegen  $\tilde{\phi}(\tilde{V} \cap (\mathbb{R}^d \times 0)) = \tilde{U} \cap M$  folgt die Behauptung. **q.e.d.**

**Folgerung 29.3** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $d$ -dimensionale  $C^q$ -Mannigfaltigkeit und  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow U \subset M$  die Parametrisierung um  $u \in M$ . Dann gibt es die offenen Mengen  $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$  mit  $U \subset \tilde{U}, V \times 0 \subset \tilde{V}$  für die  $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$  abbildet, ein  $C^q$ -Diffeomorphismus ist und  $\tilde{\varphi}(x, 0) = \varphi(x) \forall x \in V$

*Beweis.* Folgt aus Beweisen von Satz 29.1 und 29.2

**q.e.d.**



### Satz 29.4 (lokale Darstellung von Mannigfaltigkeiten als Niveaumengen)

$M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann eine  $d$ -dimensionale  $C^q$ -Mannigfaltigkeit, wenn für alle  $u \in M$  eine Umgebung  $\tilde{U}$  bezüglich des  $\mathbb{R}^n$ , so wie eine Funktion  $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$  mit  $\text{rang } f'(u) = n - d$  existiert, sodass

$$\tilde{U} \cap M = \{\tilde{u} \in \tilde{U} \mid f(\tilde{u}) = 0\}$$

Wir haben hiermit eine weitere wichtige Eigenschaft von Mannigfaltigkeiten gezeigt, nämlich, dass jede  $C^q$ -Mannigfaltigkeit immer gleichzeitig Niveaumenge einer  $C^q$ -Funktion ist und umgekehrt!

Eine durchaus berechtigte Frage ist, ob die Niveaumenge unbedingt der Gleichung  $f(u) = 0$  genügen muss, oder ob dies auch für andere  $c \neq 0$  funktioniert. Aus diesem Grund führen wir einen weiteren Begriff ein:

**Definition (Regulärer Wert)**  $c \in \mathbb{R}^{n-d}$  heißt **regulärer Wert** von  $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$  (mit  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$  offen), falls

$$\text{rang } f'(u) = n - d \quad \forall u \in \tilde{U} \text{ mit } f(u) = c$$

Vergleichen wir dies nun mit Satz 29.4, so ist jedes  $M := \{u \in \tilde{U} \mid f(u) = c\}$  eine  $d$ -dimensionale  $C^q$ -Mannigfaltigkeit, falls  $c$  ein regulärer Wert von  $f$  ist.

*Beweis.* Gemäß Beispiel 5 erhält man mit  $f$  eine lokale Parametrisierung. Damit ist die Rückrichtung gezeigt.  $\Rightarrow$  Behauptung.

"  $\Rightarrow$  " : fixiere  $\tilde{u} \in M$ , wähle  $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n, \tilde{\psi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  gemäß Satz 29.2

sei  $f := (\tilde{\psi}_{d+1}, \dots, \tilde{\psi}_n)$ , offenbar  $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$

mit  $\tilde{\psi}$  aus dem Beweis zu Satz 29.2:  $\tilde{\psi}'(\tilde{u}) = \tilde{\varphi}'(\tilde{v}, 0)^{-1}$  ist regulär

$\Rightarrow f'(\tilde{u})$  hat vollen Rang, d.h.  $\text{rang } f'(\tilde{u}) = n - d$

nach Konstruktion  $\{u \in \tilde{U} \mid f(u) = 0\} = U \cap M \Rightarrow$  Behauptung.

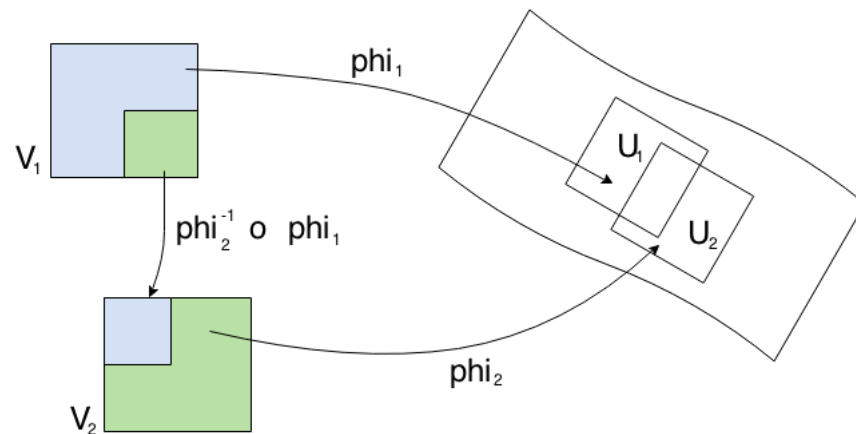
**q.e.d.**

**Lemma 29.5 (Kartenwechsel)**

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  d-dimensionale Mannigfaltigkeit

und  $\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}$  Karten mit zugehörigem Kartengebiet  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$

$\Rightarrow \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$  ist  $C^q$ -Diffeomorphismus.



*Beweis.* Ersetze  $\varphi_1, \varphi_2$  mit  $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$  gemäß Folgerung 29.3

$\Rightarrow$  Einschränkung von  $\tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1$  liefert Behauptung.

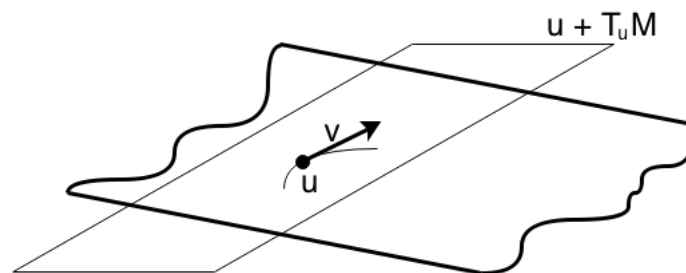
**q.e.d.**

**Definition** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  d-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  heißt **Tangentialvektor** in  $u \in M$  an  $M$ ,

falls eine stetig differenzierbare Kurve  $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  ( $\delta > 0$ ) existiert mit  $\gamma(0) = u$  und  $\gamma'(0) = v$ .

Die Menge aller Tangentialvektoren  $T_u M$  heißt Tangentialraum.



**Satz 29.6** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit,  $u \in M$ ,  $\varphi: V \rightarrow U$  der zugehörige Parameter um  $u$   
 $\Rightarrow T_u M$  ist  $d$ -dimensionaler  $(\mathbb{R}-)$  Vektorraum und

$$T_u M = \underbrace{\varphi'(x)}_{L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)} (\mathbb{R}^d) \text{ für } x = \varphi^{-1}(u) \quad (29.3)$$

wobei  $T_u M$  unabhängig vom speziellen Parameter  $\varphi$  ist.

*Beweis.* Sei  $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow M$  eine  $C^1$ -Kurve mit  $\gamma(0) = u$   
 $\Rightarrow g := \varphi^{-1} \circ \gamma$  ist  $C^1$ -Kurve,  $g: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $g(0) = x$  und

$$\gamma'(0) = \varphi'(x) g'(0), \varphi'(x) \text{ ist regulär.} \quad (*)$$

Offenb. liefert auch jede  $C^1$ -Kurve  $g$  in  $\mathbb{R}^d$  durch  $x$  eine  $C^1$ -Kurve  $\gamma$  in  $M$  mit  $(*)$   
 Die Menge aller Tangentialvektoren  $g'(0)$  von  $C^1$ -Kurven  $g$  in  $\mathbb{R}^d$  ist offenbar  $\mathbb{R}^d$   
 $\Rightarrow 29.4 \xrightarrow{\varphi'(x) \text{ ist regulär}} \dim T_u M = d$

da  $(*)$  für jeden Parameter  $\varphi$  gilt, ist  $T_u M$  unabhängig von  $\varphi$ .

**q.e.d.**

**Bemerkung:** Man bezeichnet auch  $(u, T_u M) \subset M \times \mathbb{R}^n$  als Tangentialraum und  
 $TM = \bigcup_{u \in M} (u, T_u M) \subset M \times \mathbb{R}^n$  als Tangentialbündel.

**Beispiel 29.6** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  offen

$\Rightarrow M$  ist  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $T_u M = \mathbb{R}^n \forall u \in M$

**Definition** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$   $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Ein Vektor  $w \in \mathbb{R}^n$  heißt **Normalenvektor** in  $u \in M$  an  $M$ , falls

$\langle w, v \rangle = 0 \forall v \in T_u M$  (d.h.  $w \perp v \forall v \in T_u M$ )

Die Menge aller Normalenvektoren  $N_u M = T_u M^\perp$  heißt

**Normalenraum** von  $M$  in  $u$ .

**Satz 29.7** Sei  $f \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-d})$  mit  $V$  offen und  $c \in \mathbb{R}^{n-d}$  ein regulärer Wert von  $f$ . Dann ist die Niveaumenge  $M := \{v \in V \mid f(v) = c\}$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, für die gilt:

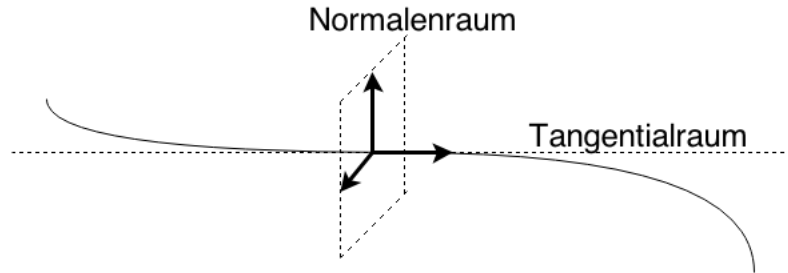
$$\begin{aligned} T_u M &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid f'(u)v = 0\} \quad (= \ker f'(u)) \quad \forall u \in M \\ N_u M &= \{w \in \mathbb{R}^n \mid w = f'(u)^T v, v \in \mathbb{R}^{n-d}\} \quad \forall u \in M \end{aligned}$$

Das heißt also, die Spalten von  $f'(u)^T$  bilden eine Basis des Normalenraums von  $M$ .

**Beispiel 29.7** Sei  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  und  $0 \in \mathbb{R}^2$  ein regulärer Wert von  $f$ . Dann ist

$$M := \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{f_1(u) = 0, f_2(u) = 0}_{\text{Schnitt zweier Flächen}}\}$$

eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann steht der Gradient  $f'_i(u)^T$  senkrecht auf  $\{f_i = 0\}$ .  $f'_1(u)^T$  und  $f'_2(u)^T$  sind also Normalen zu  $M$  in  $u$ .



$v$  ist hier die Tangente, da  $\langle f'_i(u)^T \mid v \rangle = 0$  ist (für  $i = 1, 2$ ).

*Beweis.* Wir wissen bereits, dass  $M$  eine Mannigfaltigkeit ist. Wählen wir nun die  $C^1$ -Kurve  $\gamma$  auf  $M$  mit  $\gamma(0) = u$  und  $\gamma'(0) = v$ , so sehen wir, dass  $f(\gamma(t)) = c \quad \forall t$  ist.  $f'(u)$  steht senkrecht auf  $v$  (also  $\langle f'(u) \mid v \rangle = 0$ ) und da  $\text{rang } f'(u) =$

$d$  ist, muss  $\dim \ker f'(u) = d$  sein. Damit ist die Behauptung für  $T_u M$  (wegen  $\dim T_u M = d$ ) gezeigt.

Nun wählen wir  $w = f'(u)^T \tilde{v}$  und  $w \in T_u M$ . Offenbar ist  $\langle w | v \rangle = \langle \tilde{v} | f'(u)v \rangle = 0$ . Damit ist  $w$  im Normalenraum  $N_u M$ . Da  $\text{rang } f'(u)^T = n - d$  und  $\dim N_u M = n - d$ , folgt die Behauptung. **q.e.d.**

**Beispiel 29.8** Wir betrachten  $M := \mathcal{O}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = id\}$ . Es handelt sich dabei um eine  $\frac{n(n-1)}{2}$ -dimensionale Mannigfaltigkeit von Matrizen. Man nennt  $\mathcal{O}$  auch *Orthogonale Gruppe* oder *Lie-Gruppe*. Sie bildet die Menge aller orthogonale Matrizen des  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Offenbar ist  $id$  das neutrale Element der Gruppe. Der Tangentialraum an diesem Element wird auch *Lie-Algebra* genannt:

$$T_{id} M = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid B + B^T = 0\}$$

Dies ist die Menge der schiefsymmetrischen Matrizen. Warum ist das so?

Sei  $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$  mit  $f(A) = A^T A$  eine stetig differenzierbare Funktion mit  $f'(A)B = A^T B + B^T A$  ( $\forall B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ). Letzterer Ausdruck ist ebenfalls eine symmetrische Matrix.  $id$  ist ein regulärer Wert, denn sei  $f(A) = id$  und  $S \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ .  $f'(A)B = S$  hat die Lösung  $B = \frac{1}{2}AS$ , denn  $\frac{1}{2}A^T AS + \frac{1}{2}SA^T A = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}S = S$ . Letzteres hätte man auch in der Grundschule herausbekommen!

Aus vorheriger Überlegung folgt, dass  $f'(A)$  vollen Rang hat. Aus Satz 4 wissen wir nun, dass die Dimension der Mannigfaltigkeit beträgt:

$$d = \dim \mathbb{R}^{n \times n} - \dim \mathbb{R}_{sym}^{n \times n} = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Satz 7 gewährleistet nun, dass

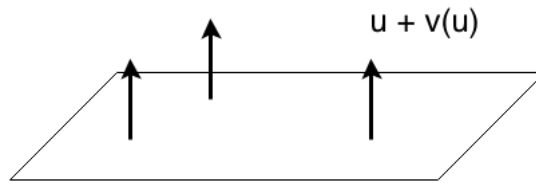
$$T_{id} M = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid id^T B + B^T id = 0\}$$

**Definition (Hyperflächen und Einheitsnormalenfelder)** Eine  $(n-d)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt auch **Hyperfläche**. Die stetige Abbildung

$$\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

heißt dann **Einheitsnormalenfeld**, falls

$$\nu(u) \in N_u M \text{ und } \|\nu(u)\| = 1 \quad \forall u \in M$$



---

**Lemma 29.8** Ist  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine zusammenhängende Hyperfläche, so existiert entweder *kein* oder *genau zwei* Einheitsnormalenfelder.

---

*Beweis.* Als Vorbetrachtung lässt sich sagen, dass wenn  $v$  ein Einheitsnormalenfeld ist, auch  $-v$  eins sein muss.

Nehmen wir nun an, es gäbe zwei verschiedene Einheitsnormalenfelder  $v$  und  $\tilde{v}$ . Wir können ausnutzen, dass die beiden Felder normiert sind und stellen sofort fest, da  $\dim N_u M = 1$  ist, dass das Skalarprodukt der beiden nur

$$s(u) := \langle v(u) \mid \tilde{v}(u) \rangle = \pm 1$$

sein kann. Wir können nun eine weitere wichtige Eigenschaft von  $s$  und  $M$  ausnutzen. Da  $M$  zusammenhängend und  $s$  stetig auf  $M$  ist, lässt sich der Zwischenwertsatz zu Hilfe nehmen, der uns liefert, dass  $s$  für alle  $u$  konstant sein muss, nämlich entweder  $s(u) = 1$  oder  $s(u) = -1$ . Damit kann  $\tilde{v}$  nur entweder gleich  $v$  oder gleich  $-v$  sein. **q.e.d.**

**Beispiel 29.9 (Möbiusband)** Das wohlbekannte Möbiusband besitzt *kein* Einheitsnormalenfeld.  
**grafk fehlt.**

**Beispiel 29.10** Wir betrachten die Konstruktion von Einheitsnormalenfeldern für Hyperflächen  $M := \{f = 0\}$ . Sei  $f \in C^1(V, \mathbb{R})$  mit  $V$  offen und 0 ein regulärer Wert von  $f$ . Wir können leicht ein Einheitsnormalenfeld definieren und wählen

$$v(u) := \frac{f'(u)}{\|f'(u)\|}$$

Wir wollen nun im folgenden weitere Operationen auf Mannigfaltigkeiten untersuchen. Im  $\mathbb{R}^n$  ist uns das Kreuzprodukt  $\dots \times \dots$  wohlbekannt. Es ist zweckmäßig diesen Begriff auf beliebige Dimensionen zu verallgemeinern.

**Definition (Äußeres Produkt)** Nehmen wir uns die Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$  und schreiben sie einfach als Spaltenvektoren hintereinander in eine Matrix:

$$A := (a_1 | a_2 | \dots | a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$$

Wir entfernen nun aus dieser die  $k$ -te Zeile und nennen sie dann  $A_k \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ . Den Ausdruck

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-1} := \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

nennen wir **äußeres Produkt** von  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , wobei

$$\alpha_k = (-1)^{k-1} \cdot \det A_k$$

Wir können sofort einige interessante Eigenschaften ablesen, die uns an das bekannte Kreuzprodukt erinnern:

1.  $\alpha$  steht senkrecht auf allen  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ .
2. Das *Volumen* des von  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  aufgespannten Parallelotops entspricht gerade der Norm  $\|\alpha\|$  des äußeren Produkts.

**Beispiel 29.11** Die eben untersuchten Eigenschaften bringen uns dazu, im  $\mathbb{R}^3$  das äußerde Produkt mit dem Kreuzprodukt zu identifizieren.

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \equiv \alpha_1 \times \alpha_2 \quad \text{für } n = 3$$



---

**Lemma 29.9** Sind  $b, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ , so ist

$$\langle b \mid a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \rangle = \det(b \mid a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_{n-1}) \quad (29.4)$$

wobei

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \perp a_i$$

und

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \quad \left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ falls } a_i \text{ linear abhängig} \\ \neq 0 \text{ falls } a_i \text{ linear unabhängig} \end{array} \right.$$

---

*Beweis.* Wir können die Determinante in (29.4) nach der 1. Spalte  $b$  entwickeln. Aus  $b = a_i$  folgen die Bedingungen. **q.e.d.**

**Beispiel 29.12** Konstruieren wir ein Einheitsnormalenfeld mittels der Parametrisierung  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $V$  offen.  $M = \{\varphi(v)\}$  sei die entsprechende Hyperfläche. Nach Satz 6 wissen wir, dass  $\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x)$  für alle  $x$  und für alle  $j = 1, 2, \dots, n-1$  im Tangentialraum  $T_{\varphi(x)}M$  liegt. Wir erkennen außerdem, dass

$$N(x) := \varphi_{x_1}(x) \wedge \varphi_{x_2}(x) \wedge \dots \wedge \varphi_{x_{n-1}}(x)$$

in  $N_{\varphi(x)}M$  liegt und können damit

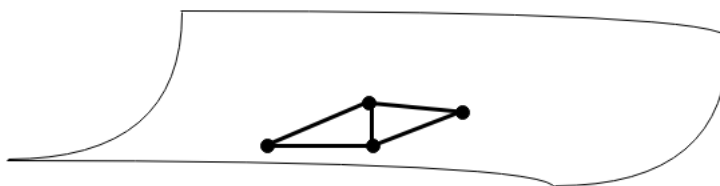
$$v(x) := \frac{N(x)}{\|N(x)\|}$$

als Einheitsnormalenfeld von  $M$  wählen. Man beachte, dass  $\varphi'(x)$  für alle  $x$  regulär ist!

Wir kommen zum Abschluss dieses Kapitels. Wir haben uns mit Mannigfaltigkeiten und ihren Eigenschaften beschäftigt. Als nächstes möchten wir die Integration auf ihnen untersuchen, beschränken uns dabei jedoch noch auf Kartengebiete.

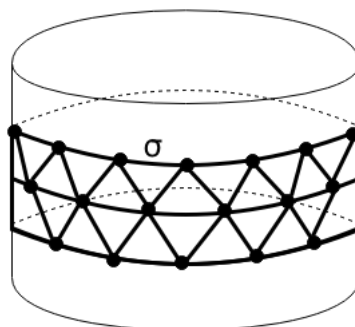
### 30 Integration auf Kartengebieten

Wir stellen uns zunächst die interessante Frage, wie man den Oberflächeninhalt beziehungsweise das  $d$ -dimensionale Äquivalent dazu von einer Mannigfaltigkeit bestimmen kann. Die Idee wäre natürlich, wie etwa bei der Integration über  $\mathbb{R}$ , sie durch *ebene* Mannigfaltigkeiten (etwa mit Dreiecken) stückweise zu approximieren.

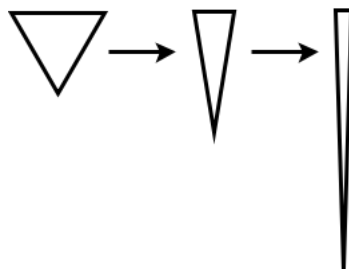


$$\text{Fläche}(M) = \sup_{\Delta} \sum \text{Dreiecksflächen}$$

Wir stellen jedoch mit großem Entsetzen schnell fest, dass diese Methode nur für Kurven ( $d = 1$ ) funktioniert.



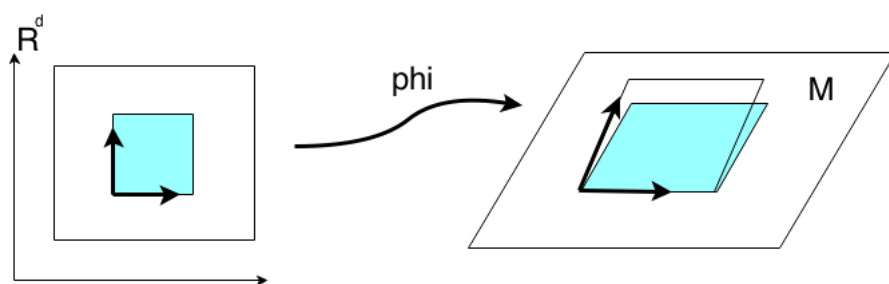
Schauen wir uns zum Beispiel eine Zylinderfläche  $M \subset \mathbb{R}^3$  an. Lassen wir die Feinheit  $\sigma$  beliebig klein werden - heute ist ja schließlich alles nano! - so wachsen die Dreiecksflächen immer weiter, bis die Fläche von  $M$  über alle Grenzen hinaus wächst. Wir müssen uns also wohl sofort wieder von dieser Methode verabschieden.



Über dieses Dilemma nachlesen kann man übrigens in Hildebrand, Analysis 2 unter "Schwartz'scher Stiefel".

Versuchen wir also etwas neues (für  $d = 2$ ) zu finden. Wir nehmen hierzu tangentielle Parallelogramme (äußere Approximation).  $\varphi'(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist linear. Die Methode gestaltet sich also zu

$$\text{Fläche}(M) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left( \sum \text{Fläche } \varphi'(x_j)(Q) \right)$$



**Definition (Parallelotop)** Seien  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}^n$  ( $d \leq n$ ) Dann nennen wir

$$P(a_1, \dots, a_d) := \left\{ \sum_{j=1}^d t_j a_j \mid t_j \in [0, 1], j = 1, \dots, d \right\}$$

das von  $a_1, \dots, a_d$  aufgespannte **Parallelotop** (manchmal auch d-Spat).

An dieser Stelle ein kleiner Einschub: Eine allgemeinere Theorie für d-dimensionale Inhalte liefert das sogenannte Hausdorff-Maß  $\mathcal{H}^d$ . Dieses ist jedoch sehr viel abstrakter und schwierig 'auszurechnen'. Mithilfe von Mannigfaltigkeiten kommt man schneller zu Ergebnissen.

Aus der theoretischen Physik ist uns bereits das Maß über die Delta-Distribution bekannt, mit dem wir zum Beispiel die Ladungsdichte einer Punktmasse

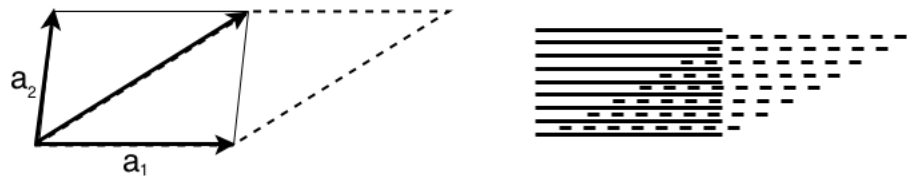
$$\rho(r) = \int_{\mathbb{R}^3} q \delta(r - r_o) dV$$

exakt definieren können.

**Satz 30.1** Seien  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  und  $v(a_1, \dots, a_n) := \mathcal{L}^n(P(a_1, \dots, a_n))$  das von ihnen aufgespannte Volumen. Dann gilt:

- i)  $v(a_1, \dots, \lambda a_k, \dots, a_n) = |\lambda| v(a_1, \dots, a_n) \forall \lambda \in \mathbb{R}^n$
- ii)  $v(a_1, \dots, a_k + a_j, \dots, a_n) = v(a_1, \dots, a_n)$  falls  $k \neq j$

Dies ist bekannt als *Prinzip des Cavalieri*. Als Veranschaulichung kann ein Stapel Spielkarten dienen: Egal wie man eine Seitenfläche von einem Rechteck in ein Parallelogramm (oder umgekehrt) verschiebt, das Volumen des Stapels bleibt gleich.



- iii)  $v(a_1, \dots, a_n) = 1$  falls  $a_1, \dots, a_n$  ein Orthonormalsystem in  $\mathbb{R}^n$  bilden. (Der Parallelotop ist dann der Einheitswürfel.)
- iv)  $v(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$  für  $A := (a_1 | \dots | a_n)$

Das heißt die Determinante der Matrix mit den Spaltenvektoren  $a_1, \dots, a_n$  liefert das Volumen des aufgespannten Parallelotops. (Vgl. lin. Algebra)

Es ist zu beachten, dass die Eigenschaften i) - iii) bereits iv) implizieren. Die Argumentation dazu verläuft wie zu den aus der Linearen Algebra bekannten Eigenschaften der Determinante, vgl. auch die axiomatische Definition der Determinante.

*Beweis.*

- a) Nehmen wir an,  $a_1, \dots, a_n$  sind linear abhängig.  
Dann ist das aufgespannte Parallelotop 'flach', da es in mindestens einer

Dimension an Ausdehnung fehlt und somit  $v(a_1, \dots, a_n) = 0$ . Weil die Determinante jeder singulären Matrix verschwindet, ist iv) korrekt. Es folgt sofort, dass auch i) und ii) richtig sein müssen.

b) Nun seien  $a_1, \dots, a_n$  linear unabhängig.

Sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  die Standard-Orthonormalbasis in  $\mathbb{R}^n$ . Für diese gilt iii) nach der Definition des Lebesgue-Maß. Sie bildet nämlich einen Quader der Kantenlänge Eins.

Weiter seien nun  $U := P(e_1, \dots, e_n)$ ,  $V := P(a_1, \dots, a_n)$

Dann ist  $A : \text{int } U \rightarrow \text{int } V$  ein Diffeomorphismus ( $A$  ist regulär, ist damit differenzierbar und besitzt ein differenzierbares Inverses).

Offenbar ist  $A'(y) = A \quad \forall y$

Wenn wir nun den Transformationssatz (Kap. 24) an, so ergibt sich

$$\mathcal{L}^n(V) = \int_V dx \stackrel{y=Ax}{=} \int_U |\det A| dy = |\det A| \underbrace{\mathcal{L}^n(U)}_1 = |\det A|$$

Daraus folgt iv) und i), ii), iii) als Eigenschaften der Determinanten

**q.e.d.**

Machen wir uns noch einmal die Zielstellung klar. Wir wollen den d-dimensionalen Inhalt  $v_d(P(a_1, \dots, a_d))$  im  $\mathbb{R}^n$  bestimmen.

Dabei ist folgende Idee zweckmäßig: Man betrachtet  $P(a_1, \dots, a_n)$  als Teilmenge eines d-dimensionalen Vektorraums  $X$  und nimmt das d-dimensional Lebesgue-Maß in  $X$ .

Somit sollte

$$v_d : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{d\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

folgende Eigenschaften haben:

$$(v1) \quad v_d(a_1, \dots, \lambda a_k, \dots, a_d) = |\lambda| v_d(a_1, \dots, a_d) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(v2) \quad v_d(a_1, \dots, a_k + a_j, \dots, a_d) = v_d(a_1, \dots, a_d) \quad \text{falls } k \neq j \quad (\text{Prinzip des Cavalieri})$$

$$(v3) \quad v_d(a_1, \dots, a_d) = 1 \quad \text{falls } \{a_1, \dots, a_d\} \text{ orthonormal zueinander sind.}$$

**Satz 30.2**  $v_d$  ist durch (v1), (v2), (v3) eindeutig bestimmt, und es gilt:

$$v_d(a_1, \dots, a_d) = \sqrt{\det \underbrace{A^T A}_{\in \mathbb{R}^{d \times d}}} \text{ mit } A := \underbrace{(a_1 | \dots | a_d)}_{\in \mathbb{R}^{n \times d}} \quad (30.1)$$

An dieser Stelle können wir sofort einige Aussagen treffen:

1. für  $d = n$  liefert (30.1) Gleichung iv) in Satz 1
2.  $A^T A$  ist stets symmetrisch und positiv definit ( $\langle x | A^T A x \rangle = \langle A x | A x \rangle = \|A x\|^2 \geq 0$ ) und somit ist auch stets  $\det A^T A \geq 0$
3.  $v_d(a_1, \dots, a_d)$  verschwindet genau dann, wenn  $a_1, \dots, a_d$  linear abhängig sind.

*Beweis.* Dies ist für das Selbststudium überlassen. Es lohnt sich jedoch

$$A^T A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha_{ij} = \langle a_i | a_j \rangle$$

zu verwenden und wie bei den Eigenschaften der Determinante zu argumentieren. **q.e.d.**

**Beispiel 30.1**  $d = n - 1$ : Sei  $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ ,  $a := a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1}$

$$v_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) = |a|_2 \quad (30.2)$$

Die euklidische Länge des äußeren Produkts liefert also das Volumen. Das prüfen wir leicht nach:

$$\begin{pmatrix} a^T \\ - \\ A^T \end{pmatrix} \bullet (a | A) = \begin{pmatrix} \langle a | a \rangle & 0 \\ 0 & A^T A \end{pmatrix}$$

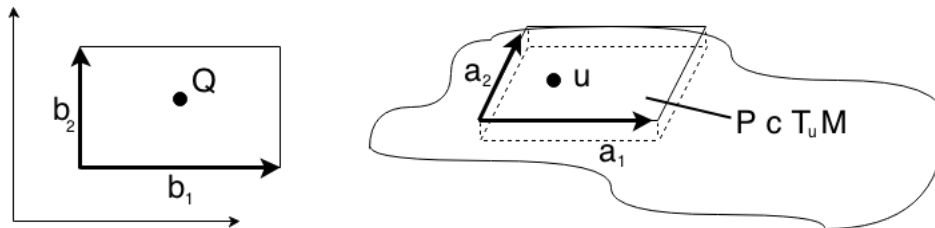
denn  $\langle a_i | a_j \rangle = 0 \quad \forall j$  mit  $A$  wie in (1). Es folgt sofort

$$\|a\|_2^2 \cdot \det A^T A = (\det(a|A))^2 \stackrel{(29.4)}{=} \|a\|_2^4$$

und dann mit (1) sofort (2).

Es stellt sich folgende Frage: Existiert für eine Mannigfaltigkeit  $M$  eine Transformation, so dass das Volumen eines Quaders  $Q \in \mathbb{R}^d$  auf das eines Parallelotops  $P \subset T_u M \in \mathbb{R}^n$  abgebildet wird? Dass also

$$\nu_d(\text{Quader } Q) \xrightarrow{\varphi'(x)} \nu_d(\text{Parallelotop } P)$$



Für einen Quader  $Q = P(b_1, \dots, b_d) \subset \mathbb{R}^d$  ist  $P(a_1, \dots, a_d) \subset T_u M \in \mathbb{R}^n$  das zugehörige Parallelotop, falls  $a_j = \varphi'(x)b_j$ , für  $j = 1, \dots, d$

**Satz 30.3** Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit,  $\varphi$  eine Parametrisierung um  $\varphi(x) = u \in M$  und  $Q := P(b_1, \dots, b_d) \subset \mathbb{R}^d$  ein Quader mit  $b_j \in \mathbb{R}^d$ , weiterhin sei  $a_j := \varphi'(x)b_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ . Dann gilt:

$$\nu_d(a_1, \dots, a_d) = \sqrt{\det \varphi'(x)^T \varphi'(x)} \nu_d(b_1, \dots, b_d) \quad (30.3)$$

**Definition (Maßtensor)** Das Produkt der transponierten Ableitung mit sich selbst

$$\varphi'(x)^T \varphi'(x) \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

heißt **Maßtensor** von  $\varphi$  in  $x$ , dessen Determinante

$$g^\varphi(x) := \det \varphi'(x)^T \varphi'(x)$$

man die **Gramsche Determinante** von  $\varphi$  in  $x$  nennt.

*Beweis.* Sei  $B = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^{d \times d}$  und  $A = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{n \times d}$ . Mit Gleichung (30.1) folgt

$$\nu_d(a_1, \dots, a_d) = \sqrt{\det A^T A} = \sqrt{\det((\varphi'(x)B)^T \varphi'(x)B)} = \sqrt{\det \varphi'(x)^T \varphi'(x)} \underbrace{\sqrt{\det B^T B}}_{=\nu_d(b_1, \dots, b_d)}$$

**q.e.d.**

Sei nun  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit,  $\varphi : V \rightarrow U$  eine lokale Parametrisierung,  $f : \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf dem Kartengebiet  $U$ .

Motiviert durch die Riemann-Summen (Kap. 22)

$\sum f(u_i) \nu_d(P_i) = \sum f(\varphi(x_i)) \sqrt{g^\varphi(x_i)} \nu_d(Q_i)$  mit  $P_i = \varphi'(x_i)Q_i$  definieren wir:

**Definition (Integral über Kartengebiet)**

$$\int_U f da := \int_V f(\varphi(x)) \sqrt{g^\varphi(x)} dx \quad (30.4)$$

als **Integral von  $f$**  über das Kartengebiet  $U$  falls die rechte Seite existiert.  $f$  heißt dann **integrierbar** auf  $U$ .



**Bemerkung:**

- die rechte Seite in (30.4) ist ein Lebesgue-Integral in  $\mathbb{R}$
- damit die Definition von (30.4) sinnvoll ist, sollte die rechte Seite unabhängig von  $\varphi$  sein
- mittels des Hausdorff-Maß  $\mathcal{H}^d$  kann  $\int_U f da$  völlig analog zum Lebesgue-Maß definiert werden  $\left( \int_U f(u) d\mathcal{H}(u) \right)$
- für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten  $M \subset \mathbb{R}^n$  :  
 $\int_U f da = \text{Lebesgue-Integral } \int_U f dx$  falls dieses existiert

**Satz 30.4** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit,  $U \subset M$  ein Kartengebiet,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\varphi_i : V_i \rightarrow U$ ,  $i = 1, 2$  seien zugehörige Parametrisierungen. Dann gilt

$$\int_{V_1} f(\varphi_1(x)) \sqrt{g^{\varphi_1}(x)} dx = \int_{V_2} f(\varphi_2(x)) \sqrt{g^{\varphi_2}(x)} dx$$

falls eines der Integrale existiert.

(30.4) ist also unabhängig von der Parametrisierung. Denn

$$f(\cdot) \text{ int'bar auf } U \iff f(\varphi(\cdot)) \sqrt{g^\varphi(x)} \text{ int'bar auf } V \text{ für eine Param. } \varphi : V \rightarrow U \quad (30.5)$$

*Beweis.*  $\psi := \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : V_2 \rightarrow V_1$  ist ein Diffeomorphismus nach Lemma 5. Wir wenden wieder den Transformationssatz an und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{V_1} f(\varphi_1(x)) \sqrt{g^{\varphi_1}(x)} dx &\stackrel{x=\psi(y)}{=} \int_{V_2} f(\varphi_1(\psi(y))) \sqrt{\det \varphi_1'(\psi(y))^T \varphi_1'(\psi(y))} \underbrace{|\det \psi'(y)|}_{=\sqrt{\det \psi'(y)^T \psi'(y)}} dy \\ &= \sqrt{\det \psi'^T \varphi_1'^T \psi' \varphi_1'} = \sqrt{\det (\psi' \varphi_1')^T \psi' \varphi_1'} \end{aligned}$$

denn da

$$\varphi_2(y) = \varphi_1(\psi(y))$$

folgt mit Kettenregel

$$\varphi_2'(y) = \varphi_1'(\psi(y)) \psi'(y)$$

und somit die Behauptung. **q.e.d.**

Nehmen wir uns die Funktion  $f \equiv 1$  her, die offensichtlich integrierbar auf jedem Kartengebiet  $U \subset M$  ist, dann ist

$$\nu_d(U) := \int_U 1 da \left( = \int_V 1 \sqrt{g^\varphi(x)} dx \right) \quad (30.6)$$

der  $d$ -dimensionale Inhalt (Maß, Länge, Fläche, Volumen,...) von  $U$  wobei  $\sqrt{g^\varphi(x)}$  das Flächenelement von  $U$  bezüglich  $\varphi$  ist.

Mit dieser Definition entspricht  $\nu_d(U) \equiv \mathcal{H}^d(U)$  direkt mit dem  $d$ -dimensionalen Hausdorffmaß überein (siehe Literatur).

Wir stellen außerdem nach (30.4) fest, dass  $\nu_d(U)$  genau dann verschwindet, wenn  $U$  eine Nullmenge ist:

$$\nu_d(U) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}^d(\varphi^{-1}(U)) = 0$$

**Beispiel 30.2** Wir wollen  $\int_M f da$  auf einer Halbsphäre mit Radius  $r$ , gegeben durch

$$M := \{u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \|u\| = r, u_1 > 0\}$$

berechnen und parametrisieren  $M$  dafür in Kugelkoordinaten durch

$$\varphi(x_1, x_2) = r \begin{pmatrix} \cos x_1 \cos x_2 \\ \cos x_2 \sin x_1 \\ \sin x_2 \end{pmatrix} \text{ für } (x_1, x_2) \in V := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^2$$

Offenbar ist  $\varphi : V \rightarrow M$  stetig differenzierbar, regulär und homöomorph. Es handelt sich also tatsächlich um eine echte Parametrisierung von  $M$ . Das macht natürlich  $M$  zu einer Mannigfaltigkeit und sogar zu einem Kartengebiet. Um das Volumen zu berechnen benötigen wir zunächst

$$\varphi'(x) = r \begin{pmatrix} -\cos x_2 \sin x_1 & -\sin x_2 \cos x_1 \\ \cos x_2 \cos x_1 & -\sin x_2 \sin x_1 \\ 0 & \cos x_2 \end{pmatrix}$$

um über

$$\varphi'(x)^T \varphi'(x) = r^2 \begin{pmatrix} \cos^2 x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

das Flächenelement

$$\sqrt{g^\varphi(x)} = r^2 \cos x_2$$

zu berechnen.

Damit können wir das zu berechnende Integral folgendermaßen ausdrücken:

$$\int_M f da = r^2 \int_V f(\varphi(x)) \cos x_2 dx = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x_2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(x)) dx_1 dx_2$$

Wählen wir nun zum Beispiel  $f(u) = u_1^2 + u_2^2$ , dann ist  $f(\varphi(x)) = r^2 \cos^2 x_2$  und das Integral wird zu

$$\int_M (u_1^2 + u_2^2) da = r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x_2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx_1 dx_2 =$$

$$= \pi r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x_2 dx_2 = \pi r^4 \left[ \sin x_2 - \frac{1}{3} \sin^3 x_2 \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r^4 \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^4$$

Ist nun  $f(u) = 1$ , dann ist

$$v_d(M) = \pi r^2 \int_M da = \pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x_2 dx_2 = \pi r^2 [\sin x_2]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r^2$$

was genau genau der halben Sphärenfläche entspricht. Es ist zu bemerken, dass wir in unserer Rechnung den Rand von  $M$  komplett vernachlässigt haben. Wir werden jedoch später zeigen, dass derartige Nullmengen keinen Beitrag leisten.

### Satz 30.5 (Integral über $(n-1)$ -dimensionale Graphen)

Sei  $g: V \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $V$  offen eine stetig differenzierbare Funktion und

$$\Gamma := \{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^n \mid x \in V\}$$

der Graph von  $g$ . Dann gilt für  $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\Gamma} f da = \int_V f(x, g(x)) \sqrt{1 + |g'(x)|^2} dx \quad (30.7)$$

falls die rechte Seite existiert.

*Beweis.*  $\Gamma$  ist eine  $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit (vgl. Bsp. 29.2) und auch Kartengebiet bezüglich der Parametrisierung  $\varphi: V \rightarrow \Gamma$  mit  $\varphi(x) = (x, g(x))$ . Wir setzen

$$\gamma := \sqrt{\det \varphi'(x)^T \varphi'(x)}$$

und sehen mit (30.1), dass

$$\gamma = v_{n-1}(\varphi_{x_1}(x) | \dots | \varphi_{x_{n-1}}(x))$$

und dann wiederum mit (30.2)

$$\gamma = \|\varphi_{x_1}(x) \wedge \dots \wedge \varphi_{x_{n-1}}(x)\|$$

Da aber auch

$$\varphi_{x_1}(x) \wedge \dots \wedge \varphi_{x_{n-1}}(x) = (-1)^n \begin{pmatrix} g'(x) \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

gilt, können wir  $\gamma$  auch als

$$\gamma = \sqrt{1 + \|g'(x)\|^2}$$

schreiben. Damit erhalten wir

$$\int_{\Gamma} f \, da = \int f(\varphi(x)) \sqrt{1 + \|g'(x)\|^2} \, dx$$

falls die rechte Seite existiert. Damit gilt für den Inhalt von  $\Gamma$  (falls er existiert):

$$v_{n-1}(\Gamma) = \int_V \sqrt{1 + \|g'(x)\|^2} \, dx \quad (30.8)$$

**q.e.d.**

**Beispiel 30.3** Betrachten wir die Halbsphäre

$$S_+^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1, x_n > 0\}$$

die offenbar für alle  $x \in B_1(x) \subset \mathbb{R}^{n-1}$  der Graph von  $g(x) = \sqrt{1 - |x|^2}$  ist. Mit (30.8) sehen wir sofort

$$v_{n-1}(S_+^{n-1}) = \int_{B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n-1}} \sqrt{1 + \frac{|x|^2}{1 - |x|^2}} \, dx = \int_{B_1(0)} \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}} \, dx$$

Wir können an dieser Stelle ohne Beweis annehmen, dass  $f$  rotationssymmetrisch auf  $B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n-1}$  ist (d.h.  $f(x) = f(|x|)$ ). Dann verwenden wir (aus Königsberger Analysis 2, Kap 8.2)

$$\int_{B_r(0)} f(x) \, dx = n \kappa_n \int_0^r \tilde{f}(\rho) \rho^{n-1} \, d\rho \quad \text{für } B_r(0) \subset \mathbb{R}^n \text{ und } \kappa_n := \mathcal{L}^n(B_r(0)) \quad (30.9)$$

und münzen dies auf  $(n-1)$  um:

$$v_{n-1}(S_+^{n-1}) = (n-1) \kappa_{n-1} \int_0^1 \frac{r^{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \, dr = (n-1) \kappa_{n-1} \int_0^1 r^n \frac{1}{r^2 \sqrt{1-r^2}} \, dr =$$

Dies integrieren wir partiell und erhalten

$$= n(n-1)\kappa_{n-1} \int_0^1 r^{n-1} \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} dr = n \int_{B_1(0)} \sqrt{1-|x|^2} dx = \frac{n}{2} \kappa_n$$

Was haben wir damit herausbekommen? Wir setzen

$$\omega := (S^{n-1}) = 2\nu_{n-1}(S_+^{n-1})$$

als die Oberfläche der Sphäre  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  und sehen, dass für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$$\omega_n = n\kappa_n \quad (30.10)$$

Das ist ein erstaunliches Resultat, welches wir uns an zwei Beispielen verdeutlichen wollen.

$$\begin{aligned} n=2: \quad \nu_{n-1} &= 2\pi = 2 \cdot \nu_n = 2 \cdot \pi \\ n=3: \quad \nu_{n-1} &= 4\pi = 3 \cdot \nu_n = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

Wir können dieses Resultat sogar auf beliebige Kugeln skalieren:

$$\nu_n(B_r(0)) = \mathcal{L}^n(B_r(0)) = r^n \kappa_n$$

Mithilfe des Transformationssatzes können wir das ganze sogar noch umschreiben und erhalten eine Beziehung die sich später in der Differentialgleichungstheorie als maßgeblich herausstellen wird:

$$\nu_{n-1}(\partial B_r(0)) = r^{n-1} \omega_n = r^{n-1} n \kappa_n$$

**Beispiel 30.4 (Kurvenintegral)** Wir betrachten die Kurve  $\varphi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $I$  ein offenes Intervall ist, so dass

$$C := \varphi(I)$$

eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Wir erinnern uns, dass  $\varphi$  genau dann regulär ist, wenn  $\varphi'(t) \neq 0$  ist. Offenbar ist

$$\det \varphi'(t)^T \varphi'(t) = |\varphi'(t)|^2$$

und so können wir, falls es existiert, für ein  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $I = (a, b)$  formulieren

$$\int_C f da = \int_a^b f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt \quad (30.11)$$

Dieses Integral nennen wir das Kurvenintegral von  $f$  entlang des Weges  $C$ . Auf diesem Wege können wir natürlich auch den 1-dimensionalen Inhalt,  $C$ , den wir **Bogenlänge** nennen, bestimmen, in dem wir einfach  $f \equiv 1$  setzen.

$$\nu_1(C) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt \quad (30.12)$$

Falls wir nun noch ein  $\varphi$  finden, sodass  $|\varphi'(t)| = 1$  ist, dann nennen wir dieses  $\varphi$  **Bogenlängenparametrisierung** von  $C$ , da uns in diesem Fall  $t$  direkt die Bogenlänge liefert:

$$t_2 - t_1 = \nu_1(\varphi(t_2 - t_1))$$

Wir können natürlich auch durch einen Kartenwechsel umparametrisieren und erhalten so für

$$\sigma(s) = \int_a^s |\varphi'(t)| dt \quad (*)$$

immer ein  $\psi : (0, \nu_s(C)) \rightarrow \mathbb{R}^n$  finden, das mit  $\psi(I) = \varphi(\sigma^{-1}(I))$  stets eine Bogenlängenparametrisierung ist. Das können wir ganz leicht zeigen:

Offenbar ist  $\sigma$  stetig differenzierbar und sogar monoton wachsend, weil  $\varphi'$  regulär ist. Das bedeutet, dass ein  $\sigma^{-1}$  existiert, das ebenfalls stetig differenzierbar ist. So können wir folgern

$$|\psi'(\tau)| = \left| \varphi'(\sigma^{-1}(\tau)) \cdot \sigma^{-1}'(\tau) \right| = \left| \varphi'(\sigma^{-1}) \right| \frac{1}{|\sigma'(\sigma^{-1}(\tau))|} \stackrel{(*)}{=} 1$$

Für jede Kurve existiert also *genau eine* ausgezeichnete Parametrisierung, nämlich die Bogenlängenparametrisierung.

Wir wollen uns dem Thema der Kurvenlänge nun auf eine etwas andere Weise annähern.

**Definition (Rektifizierbarkeit)** Für eine beliebige stetige Funktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt die zugehörige Kurve  $C = \varphi([a, b])$  **rektifizierbar**, falls

$$l(C) := \sup_Z \left\{ \sum_{j=1}^k |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})| \mid \{t_0, \dots, t_k\} \in Z \right\} < \infty$$

wobei  $Z$  die Menge aller geordneten Zerlegungen von  $C$  ist. Man kann  $C$  also eine Länge zuordnen.

---

**Satz 30.6 (Rektifizierbare Kurven)** Sei  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Funktion, dann ist

1.  $\varphi$  rektifizierbar und
2.  $C := \varphi([a, b])$  eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit der zugehörigen Parametrisierung  $\varphi$ .

Insbesondere gilt dann:

$$l(C) = \nu_1(C) = \mathcal{H}^1(C)$$

---

Das ist beruhigend. Wir möchten uns den gesamten Beweis ersparen, dann er mit sehr viel Schreiarbeit verbunden ist. Deshalb hier nur eine *Beweisskizze*:  $\varphi$  ist Lipschitz-stetig auf  $[a, b]$ , also

$$l(\varphi[a, b]) < L[a, b]$$

Damit ist  $\varphi$  rektifizierbar und 1. gezeigt. Für 2. zeigen wir, dass

$$l(t) := l(\varphi[a, t]) < L[a, b]$$

stetig differenzierbar auf  $(a, b)$  mit  $l'(t) = |\varphi'(t)|$  ist. Daraus folgt dann

$$l(b) = \int_a^b l'(t) dt = \int_a^b |\varphi'(t)| dt = \nu_1(C)$$

**Beispiel 30.5 (Umfang des Einheitskreises)**

$$\varphi : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit } \varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$C := \varphi([-\pi, \pi])$  ist der Einheitskreis ohne den Punkt  $(-1, 0)^T$ . Dann ist

$$\nu_1(C) = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(t)| dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left\| \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \right\| dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 2\pi$$

Wichtig hierbei ist, dass  $\varphi$  die Bogenparametrisierung ist.