Demonstrați legea silogismului: $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ utilizând o metodă sintactică.

Metoda rezoluției: • metodă de demonstrare automată sintactică, prin respingere; • este o metodă corectă și completă de demonstrare automată; verificarea consistenței / inconsistenței unei mulțimi de clauze (scop)

Sistem formal (axiomatic) asociat Rezoluției propoziționale

$Res = (\Sigma_{Res}, F_{Res}, A_{Res}, R_{Res})$

$\Sigma_{Res} = \Sigma_p \setminus \{\wedge, \to, \leftrightarrow\}$ alfabetul

$F_{Res} \cup \{\square\}$ - mulțimea formulelor bine-formate

F_{Res} - mulțimea tuturor clauzelor ce se pot forma folosind alfabetul Σ_{Res}

$\square$ - clauza vidă care nu conține nici un literal, simbolizează inconsistența

A_{Res} - $\emptyset$ mulțimea axiomelor

R_{Res} - $\{res\}$ mulțimea regulilor de inferență care conține doar regula rezoluției: $A \vee l, B \vee \neg l \vdash_{res} A \vee B$, unde l este un literal iar $A, B \in F_{Res}$

Terminologie: clauzele $C_1 = A \vee l$, $C_2 = B \vee \neg l$ rezolvă deoarece conțin doi literali opuși (complementari)

Notație $C_3 = Res(C_1, C_2)$

C_3 rezolventul clauzelor C_1 și C_2

caz particular: $C_1 = \ell$, $C_2 = \neg\ell$, $Res_\ell(C_1, C_2) = \square$
inconsistentă

Obs: Rezoluția ca și regulă de interferență este o generalizare a regulilor modus ponens, modus tollens și a silogismului

• $S \vdash_{Res} \square$ " din mulțimea S de clauze s-a derivat clauza vidă prin aplicarea algoritmului rezoluției propoziționale"

Teorema de corectitudine și completitudine

• Teorema de corectitudine
Dacă $S \vdash_{Res} \square$ atunci S este inconsistentă

Teorema de completitudine
Dacă S este inconsistentă atunci $S \vdash_{Res} \square$

Teorema de corectitudine și completitudine
mulțimea S este consistentă dacă și numai dacă $S \vdash_{Res} \square$

Teorema:
U este tautologie dacă și numai dacă $FNC(\neg U) \vdash_{Res} \square$

$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) \equiv$

$\equiv (\neg p \vee q) \to ((\neg q \vee r) \to (\neg p \vee r)) \equiv$

$\equiv (\neg p \vee q) \to (\neg(\neg q \vee r) \vee (\neg p \vee r)) \equiv$

$\equiv (\neg p \vee q) \to ((q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee r)) \equiv$

$\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee ((q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee r)) \equiv$

$\equiv (p \wedge \neg q) \vee ((q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee r)) = U$

$\neg U \equiv \neg((p \wedge \neg q) \vee ((q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee r))) \equiv$

$\equiv (\neg p \vee q) \wedge ((\neg q \vee r) \wedge (p \wedge \neg r)) \equiv$

$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge p \wedge \neg r$

$S = \{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p, \neg r\}$

$C_1 \overset{not}{=} \neg p \vee q \quad C_2 \overset{not}{=} \neg q \vee r \quad C_3 \overset{not}{=} p \quad C_4 \overset{not}{=} \neg r$

$C_1 = \neg p \vee q \qquad C_3 = p$

$C_5 = q \qquad C_2 = \neg q \vee r$

$C_6 = r \qquad C_4 = \neg r$

$C_7 = \square \Rightarrow$ S inconsistentă