適当な課題の解答解説

習近平

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}; deadline - \varepsilon <$ 提出時刻 $< deadline$

$\boxed{1}$

先に結論を言う: 函数 $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ が原点において連続，偏微分可能，全微分可能である．

ここでこの函数の全微分可能性だけ示して，全微分可能性に第三回講義ノートの $Thm(1),(2)$ を適用すれば，残りの主張が正しいことが直ちに分かる．

Proof. $\boldsymbol{h} = (h,k) \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{m} = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ とする．
$\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ を任意に取る．この時 $\delta = \frac{2\varepsilon}{\pi}$ とする．
$\|\ \boldsymbol{h}\ \| < \delta$ を満たす任意の $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^2$ に対し，

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(\boldsymbol{h}+\boldsymbol{0}) - f(\boldsymbol{0}) - <\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{h}>}{\|\ \boldsymbol{h}\ \|}\right| &= \left|\frac{f(\boldsymbol{h})}{\|\ \boldsymbol{h}\ \|}\right| \leq \frac{\frac{\pi}{2}\mid h^2\mid}{\|\ \boldsymbol{h}\ \|} \\ &\leq \frac{\pi}{2}\ \|\ \boldsymbol{h}\ \| < \varepsilon\end{aligned}$$

よって，原点における全微分可能性が示された．第三回講義ノートの $Thm(1),(2)$ より，原点における連続性と偏微分可能性も示された． □

次に，2 つの二階偏導関数を求める:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)=(0,0)} = 1$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y \partial x}\right|_{(x,y)=(0,0)} = 0$$

以上の式は偏導関数を求める時に 1 階導関数を普通に微分して，二階導関数を定義に従ってやれば以上になることが明らかである．

$\boxed{2}$

Proof. $\mathbb{R}^2$ 上の二項関係 $\sim$ を次のように定める:

$$(x,y) \sim (x',y') \Longleftrightarrow ax + by = ax' + by'$$