第 11 回演習課題解答

習近平

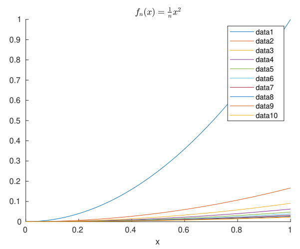
2022 年 5 月 18 日

目 次

11.1 問題 11.1

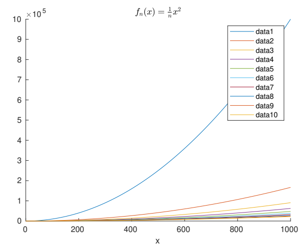
11.1.1 (1)I 上一様収束する

$$f(x) = 0$$



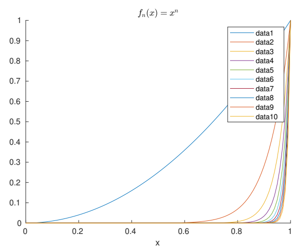
11.1.2 (2)I 上一様収束しない

$$f(x) = 0$$



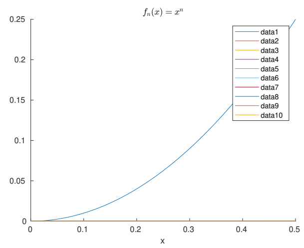
11.1.3 (3)I 上一様収束しない

$$f(x) = \begin{cases} 1, x = 1 \\ 0, x \neq 1 \end{cases}$$



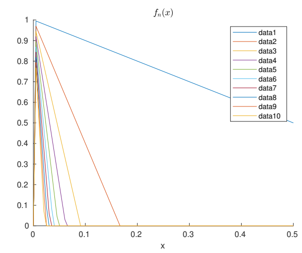
11.1.4　(4)I 上一様収束する

$$f(x) = 0$$



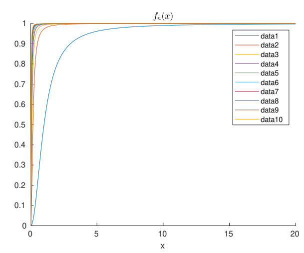
11.1.5　(5)I 上一様収束しない

$$f(x) = 0$$



11.1.6　(6)I 上一様収束しない

$$f(x) = 1$$



11.2 各 f_n は区間 I 上連続であり，(f_n) が I 上で f に一様収束とする．この時，f も I 上連続である

示すべきことは以下の論理式で表される命題である:

$$\forall a \in I; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}; \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}; \forall x \in I; (|x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

$a \in I, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ を任意に取る．この時，$\varepsilon_0 = \varepsilon/3$ とする．
(f_n) が I 上で f に一様収束することより，ε_0 に対し，ある自然数 N が存在し，$n \geq N$ を満たす任意の n に対し，任意の $x \in I$ に関して，$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_0$ が成り立つ．
このような自然数 N, n を一つずつ取る．
この自然数 n に対し，f_n が I 上で連続であることより，a, ε_0 に対し，ある $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し，$|x-a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に関して，$|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon_0$ が成立する．
このような $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ を取る．
この時，$|x-a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対し, 先程の自然数 n を用いて，以下の関係式が得られる:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \qquad (11.1) \\ &< \varepsilon_0 + \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = \varepsilon \end{aligned}$$

以上より，命題が成り立つことを示せた．

11.3　# 雑談

最後の問題での f_n が一様連続ならば f も一様連続になるかな．とりあえずここまでしておいて，来週以降確認するとしよう．