常微分方程式の初期値問題

Arnold Robinson

2024 年 6 月 10 日

Theorem 1. *$U \subseteq \mathbb{R}^n$ を開集合, $V^i : U \to \mathbb{R}$ を C^∞ 函数とする $(i = 1, 2, \ldots, n)$.*

$$
\dot{y}^i(t) = V^i(y^1(t), \ldots, y^n(t)) \tag{1}
$$
$$
y^i(t_0) = c^i \tag{2}
$$

を常微分方程式の初期値問題といい, y を初期値問題の解という. この初期値問題に対して, 以下のことが成立する:

1. *(解の存在性) 任意の $t_0 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ に対して, ある t_0 の開近傍 J_0 と x_0 の開近傍 $U_0 \subseteq U$ が存在して, $\forall c \in U_0, \exists y_c : J_0 \to U\,(C^1$ 級$)$, y_c が初期値問題の解となる.*
2. *(解の一意性) $y_c, \tilde{y}_c$ が同じ初期値問題の解ならば, $y_c, \tilde{y}_c$ が共通の定義域で一致する.*
3. *(解の滑らかさ) J_0, U_0 を解の存在性で登場した開集合とする. この時, $\theta : J_0 \times U_0, (t, c) \mapsto y_c(t)$ で定めた写像が C^∞ 級.*

証明を後回しにして, まず重要な道具を紹介する.

Theorem 2 (Gronwall の不等式)**.** *実数 $x_0 < x_1$ に対し, $I := [x_0, x_1]$ とする. $\alpha, \beta, u \in C(I)$ とする. $\beta \geq 0$ とする. この時,*

1. $$
u(t) \leq \alpha(t) + \int_{x_0}^t \beta(s) u(s) ds, \quad \forall t \in I \tag{3}
$$
   を満たすなら,
   $$
u(t) \leq \alpha(t) + \int_{x_0}^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r) dr\right) ds \tag{4}
$$
   が成立する.
2. *さらに α が広義単調増加ならば,*
   $$
u(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_{x_0}^t \beta(s) ds\right) \tag{5}
$$
   が成立する.

Proof. $v := \exp(-\int_{x_0}^t \beta(s)ds), w := \int_{x_0}^t \beta(s)u(s)ds$ とする.

$$
\begin{aligned}
(vw)' &= \exp\left(-\int_{x_0}^t \beta(s)ds\right)\left(-\beta(t)\int_{x_0}^t \beta(s)u(s)ds + \beta(t)u(t)\right) \\
&\leq v\beta(t)\alpha(t)
\end{aligned} \tag{6}
$$

両辺を x_0 から x まで積分すると,

$$
\exp\left(-\int_{x_0}^x \beta(s)ds\right)\int_{x_0}^x \beta(s)u(s)ds \leq \int_{x_0}^x \alpha(t)\beta(t)\exp\left(-\int_{x_0}^t \beta(s)ds\right)dt \tag{7}
$$

つまり,

$$\int_{x_0}^{x} \beta(s)u(s)ds \le \int_{x_0}^{x} \alpha(t)\beta(t)\exp\left(\int_{t}^{x} \beta(s)ds\right)dt \tag{8}$$

が成立する．両辺に $\alpha(x)$ を足せば,

$$u(x) \le \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \beta(s)u(s)ds \le \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \alpha(t)\beta(t)\exp\left(\int_{t}^{x} \beta(s)ds\right)dt. \tag{9}$$

α が広義単調増加の場合は

$$u(x) \le \alpha(x) - \alpha(x)\exp\left(\int_{t}^{x} \beta(s)ds\right)\Big|_{t=x_0}^{x} = \alpha(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} \beta(s)ds\right) \tag{10}$$

が成立する．

□

Theorem 3 (比較定理)**.** *$J \subseteq \mathbb{R}$ を開区間, $u : J \to \mathbb{R}^n$ を微分可能とする．$f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ を Lipschitz 連続函数で,*

$$|u'(t)| \le f(|u(t)|), \quad \forall t \in J \tag{11}$$

ある $t_0 \in J$ に対して $v : [0,\infty) \to [0,\infty)$ を微分可能な以下の初期値問題の解とする．

$$v'(t) = f(v(t)), \tag{12}$$

$$v(0) = |u(t_0)|. \tag{13}$$

この時,

$$|u(t)| \le v(|t - t_0|), \quad \forall t \in J \tag{14}$$

が成立する．

Proof. $|u(t)| > 0$ を満たすところにおいて,

$$\frac{d}{dt}|u(t)| \le f(|u(t)|)$$

が成立する．まず $t_0 = 0$ と仮定する．$J^+ := \{t \in J \mid t \ge t_0\}$ とする．

$$w(t) := e^{-Kt}\left(|u(t)| - v(t)\right) \tag{15}$$

と定める．ただし, K を f の Lipschitz 定数とする．$t \ge t_0$ に対して, $w(t) > 0 \implies w'(t) \le 0$, $w \le 0$ が成立するなら示すことなく, $w(t_1) > 0$ を満たす $t_1 \ge t_0$ が存在するなら, $\tilde{t} := \sup\{t \in J | w(t) \le 0, t \le t_1\}$ とすれば, $w(\tilde{t}) = 0$ が連続性に従う．平均値の定理より, 矛盾が生じる．$t \le t_0$ の場合は上記の議論で t を $-t$ にすれば良い．$t_0 \ne 0$ の場合は $\tilde{u}(t) := u(t + t_0), \tilde{J} := \{t | t + t_0 \in J\}$ に置き換えればよい．

□

Lemma 1. *$U \subseteq \mathbb{R}^n$ を開集合, $V^i : U \to \mathbb{R}$ を局所 Lipschitz 連続函数とする $(i = 1, 2, \ldots, n)$. $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$ に対して, ある t_0 の開近傍 J_0, x_0 の開近傍 $U_0 \subseteq U$ が存在して, $\forall c \in U_0$ に対して, 以下の初期値問題の解となる C^1 級写像が存在する．*

$$\dot{y}^i(t) = V^i(y^1(t), \ldots, y^n(t)) \tag{16}$$

$$y^i(t_0) = c^i \tag{17}$$

Proof. つまり,

$$y^i(t) = c^i + \int_{t_0}^{t} V^i(y^1(s), \ldots, y^n(s))ds \tag{18}$$

を解くことと同じ, つまり, 次のような写像を適切な定義域で考えて c に関して一様に不動点をもつことを示せば良い.

$$I_c : y \mapsto \left(t \mapsto c + \int_{t_0}^{t} V(y(s))ds \right) \tag{19}$$

□