# 第5回演習課題

習近平

2022年5月18日

## 問題 5.1

(1)

*Proof.* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ を仮定して，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを導く:
$s = (l+1)/2, \varepsilon = s - l$ とする．
この時，仮定より $\exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; \left(n \geq N \to \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon\right)$
$\forall n \in \mathbb{N}; a_n > 0$ が成り立つため，以下の式が成り立つ:

$$\begin{aligned} &\frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon + l \\ &a_{n+1} < (\varepsilon + l)a_n < sa_n \end{aligned} \tag{1}$$

次に数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ を以下のように定める:

$$b_n := \begin{cases} s^{n-N}a_N & n \geq N \\ max\{a_k | 1 \leq k \leq N\} & n < N \end{cases} \tag{2}$$

この時，任意の $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対し，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} b_k = & \quad \frac{1-s^{n-N}}{1-s}a_N + N \cdot max\{a_k | 1 \leq k \leq N\} \\ < & \quad \frac{1}{1-s}a_N + N \cdot max\{a_k | 1 \leq k \leq N\} \end{aligned} \tag{3}$$

が得られ，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束することがわかる，$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; a_n < b_n$ という明らかな事実を用いて，比較判定法より，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することが示される． □

(2)[1]

*Proof.* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l>1$ を仮定して，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ が発散するすることを導く:
$s=(l+1)/2,\varepsilon=l-s$ とする．
この時，仮定より $\exists N\in\mathbb{N};\forall n\in\mathbb{N};\left(n\geq N\to\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l\right|<\varepsilon\right)$
$\forall n\in\mathbb{N};a_n>0$ が成り立つため，以下の式が成り立つ:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&>l-\varepsilon\\ a_{n+1}&>(l-\varepsilon)a_n>sa_n\end{aligned}\tag{4}$$

次に数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ を以下のように定める:

$$b_n:=\begin{cases}s^{n-N}a_N & n\geq N\\ min\{a_k|1\leq k\leq N\} & n<N\end{cases}\tag{5}$$

この時，$\alpha\in\mathbb{R}$ を任意に取る: 任意の $n>N$ を満たすような $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ に対し，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}b_k=&\quad\frac{1-s^{n-N}}{1-s}a_N+N\cdot min\{a_k|1\leq k\leq N\}\\ >&\quad\frac{s(n-N)}{s-1}a_N+N\cdot max\{a_k|1\leq k\leq N\}\end{aligned}\tag{6}$$

アルキメデス性よりある $N'\in\mathbb{N}$ が存在し，$n>N'$ を満たす任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $\sum\limits_{k=1}^{n}b_k>\alpha$ となる．
級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ が発散することがわかる，$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\};a_n>b_n$ という明らかな事実を用いて，比較判定法より，級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ も発散することが示された． □

[1]全く同じような議論する時はコードのコピペをすればうまく行く，楽勝 w

## 問題 5.2

上の問題 5.1 の結論を用いて証明をごまかしていく:
(1) 収束する:

*Proof.* $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ とする, この時 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/2$ を以下示す:
$\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ を任意に取る，この時，アルキメデス性より，$2/(N'-1) < \varepsilon$ を満たす $N' \in \mathbb{N}$ が存在する，これを一つ取る．
このもとで，$N := max2, N'$ と定め，$n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，以下の式が成り立つ:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{2}\right| < \frac{2}{n} < \varepsilon \tag{7}$$

従って，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/2$ が示され，問題 5.1 より，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ が収束することが示された. □

(2) 発散する:

*Proof.* $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ と定め，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$ であることを以下示す:
$\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ を任意に取る．アルキメデス性より $\frac{2}{N'} < \varepsilon$ を満たす $N' \in \mathbb{N}$ が存在する．
$N = max\{2, N'+1\}$ と定め，$n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，以下の式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - 4\right| &= \left|\frac{(2n+1)!(n!)^2}{(2n)!((n+1)!)^2} - 4\right| \\ &= \frac{2}{n+1} < \frac{2}{N} < \varepsilon \end{aligned} \tag{8}$$

従って，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4 > 1$ が示され，問題 5.1 より，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ が発散することが示された. □

(3) 収束する:

*Proof.* $a_n = \frac{2^n}{n^n}$ と定め，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ であることを以下示す:
まず，講義中に扱っていない $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \in \mathbb{R}_{>0}$ であることを証明せずに使わせていただく.[2]
$\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ を任意に取る，この時，先ほど宣言したことと，収束数列の四則演

[2]正直これは示せるが，コードを打つのがしんどいし，早く講義中に指数対数を定義してよ，毎回こんな脚注を書いて，これをみるのも面倒くさいでしょう？

算に関する性質より，ある自然数 $N'$ が存在し，$n' \geq N'$ を満たす任意の自然数 $n'$ に対し，次のようなことがわかる:

$$\left| \frac{n'^{n'}}{(n'+1)^{n'}} - \frac{1}{e} \right| < \varepsilon$$

また実数のアルキメデス性より，ある自然数 $N''$ が存在し，$\frac{2(\frac{1}{e}+\varepsilon)}{N''+1} < \varepsilon$ を満たす.
この時 $N = max\{N', N''\}$ とする，$n \geq N$ を満たす任意の自然数 $n$ に対し，

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - 0 \right| &= \frac{2^{n+1} n^n}{(n+1)^{n+1} 2^n} = \frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n (n+1)} \\ &\leq \frac{2(\frac{1}{e}+\varepsilon)}{n+1} < \varepsilon \end{aligned} \tag{9}$$

以上の議論に踏まえ，問題 5.1 の結論を施すと級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$ が収束することが示された. □

## 問題 5.6

まず収束に関する部分を以下示す:

*Proof.* $\gamma = (\alpha+1)/2$ として，$\varepsilon = \alpha - \gamma$ とする．この時 $\lim_{n \to \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \alpha$ であるため.
ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し，$n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，次のような関係が成り立つ:

$$\left| n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - \alpha \right| < \varepsilon$$

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > \gamma$$

$$na_n - na_{n+1} > \gamma a_{n+1}$$

ここで，左辺を階差数列の形に直すことを目的にして，変形を施すと次にようになる:

$$na_n - (n+1)a_{n+1} > (\gamma - 1)a_{n+1}$$

この式に対し，$k = N$ から $k = n$ まで動かして両辺足していくと次のようになる:

$$(\gamma - 1) \sum_{k=N}^{n} a_{k+1} < Na_N - (n+1)a_{n+1} < Na_N$$

変形して有限項を足せば以下の式になる:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < \frac{Na_N}{\gamma - 1} + \sum_{k=1}^{N-1} a_k$$

以上より正項級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ が上に有界であることがわかり，その収束性が示された.

$\square$

次に発散に関する部分を示す:

*Proof.* 第三回レポート問題で積分法を用いて調和級数を評価したため，本回答では調和級数が発散することを証明せずに用いるとする: $\delta = (\alpha + 1)/2$ として，$\varepsilon = \delta - \alpha$ とする．この時 $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \alpha$ であるため.
ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し，$n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，次のような関係が成り立つ:

$$\left| n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - \alpha \right| < \varepsilon$$

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < \delta$$

$$na_n - na_{n+1} < \delta a_{n+1}$$

$$na_n < (n + \delta)a_{n+1} < (n+1)a_{n+1}$$

ここで数列 $(na_n)$ が $n \geq N$ の時狭義単調増加で $n \geq N$ を満たす時の下限 $I$ を取る, $I > 0$ が正項級数であることより明らか

$$a_n > \frac{I}{n}$$

$$\sum_{k=N}^{n} a_k > I \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n > \sum_{n=1}^{N-1} a_n + I \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n}$$

右辺が調和級数であるため，発散する，比較判定法より正項級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散することが示された. $\square$

ダランベールの判定法より判定できず，ラーベの判定法がうまく行くのが講義中に扱っていた $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ である．$a_n = \frac{1}{n^2}$ と置いたところ，$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1; \lim_{n \to \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 2 > 1$，実際に収束することが講義中で説明されたためここで割愛する.

# $\#$ 雑談

はい，ではこれから例の雑談に入ろう．今回の問題 5.2(3) で重要な極限自然対数の底の逆数が出たのではないか？あとラーベの判定法で調和級数が出てきて，この判定法は微分法と何かの関連性でも持っているの？