第 4 回レポート問題

習近平

2022 年 5 月 18 日

Q4.1

Proof. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid$ が収束すると仮定して，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを導く：
$\mathbb{R}$ の連続性より，数列 $\widetilde{\mathbf{S}}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid$ が Cauchy 列であることのもとで，
数列 $\mathbf{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ も Cauchy 列であることを以下示す:
$\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ を任意に取る．
仮定より，ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在し，このような N を一つとると以下の命題が成り立つ．
$m \geq n \geq N$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対し，次の式が成立する:

$$\mid \widetilde{\mathbf{S}}_m - \widetilde{\mathbf{S}}_n \mid = \mid \sum_{k=n+1}^{m} \mid a_k \mid\mid < \varepsilon$$

この時,

$$\mid \mathbf{S}_m - \mathbf{S}_n \mid = \mid \sum_{k=n+1}^{m} a_k \mid$$

に三角不等式を帰納的に適用していくと，次の関係が得られる：

$$\mid \mathbf{S}_m - \mathbf{S}_n \mid = \mid \sum_{k=n+1}^{m} a_k \mid < \mid \sum_{k=n+1}^{m} \mid a_k \mid\mid < \varepsilon$$

従って，数列 $(\mathbf{S_n})_{n \in \mathbb{N}\setminus}$ が Cauchy 列であることがわかり，実数の連続性より，数列 $(\mathbf{S_n})_{n \in \mathbb{N}\setminus}$ が $\mathbb{R}$ 上の収束列であり，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することが示された． □

Q4.2

(1)

Proof.

$$b_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \dfrac{1}{n(n-1)} & n > 1 \end{cases} \Bigg\| a_n = \frac{n}{(n+1)^3} \tag{1}$$

とする．この時，

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^2} \leq b_n$$

が成り立つため，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$ が正項級数であることがわかり，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$ が上に有界であることを以下示す:
$N \geq 2$ を満たす任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し，

$$\sum_{n=1}^{N} b_n = 1 + 1 - \frac{1}{N} = 2 - \frac{1}{N}$$

従って，$(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k)_{n\in\mathbb{N}}$ が上に有界で，$(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k) \leq (\sum\limits_{k=1}^{n} b_k)$ より，
$(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ も上に有界，実数の連続性より，
$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ が存在する．以上より，級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することが示された． □

(2)

Proof. 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ と数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ を以下のように定める:

$$b_n = \begin{cases} 1 & n = 1, 2 \\ \dfrac{6}{n(n-1)} & n > 2 \end{cases} \Bigg\| a_n = \frac{n}{3^n + 1} \tag{2}$$

$n = 1, 2$ の時，以下の式が成り立つ:

$$\begin{aligned} 0 < a_1 &= \frac{1}{4} &< b_1 = 1 \\ 0 < a_2 &= \frac{1}{5} &< b_2 = 1 \end{aligned} \tag{3}$$

$n > 2$ の時:

$$\begin{aligned} 0 < a_n = & \frac{n}{3^n + 1} < \frac{n}{2^n} \\ < & \frac{n}{(1+1)^n} < \frac{6}{n^2} < \frac{6}{n(n-1)} = b_n \end{aligned} \tag{4}$$

以上より，$(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ が正項級数がわかり，その有界性を以下示す: $N \geq 3$ を満たす任意の自然数 N に対し，次の関係が成り立つ:

$$\sum_{k=1}^{N} b_k \leq 6(1+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N}) < 15$$

なので，$(\sum_{k=1}^{n} b_k)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ が上に有界で, よって $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ も上に有界である．
以上より，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することが示された．

$\square$

#雑談

今週の数学序論 B は重そうなので，おまけ問題の提出を遅らせていただきます．それらの性質を全て満たす面積函数がただ一つ存在することから類推して，以前やった行列式も性質から決められるでしょう．あと小学生に説明する問題に関して，こういうふうに定義したから，覚えなさいというしかないと感じている．(教職とっていないから日本社会が救われる世界線 w)