第 12 回演習課題解答

習近平

2022 年 5 月 18 日

目 次

12.1　問題 12.1

12.1.1　(1)

函数列 (f_n) は区間 I で f に一様収束し，f は I で連続とする．この時，区間 I 上の数列 (x_n) は点 $a \in I$ に収束するとする．以下の論理式が成立することを示す:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; (n \geq N \implies |f_n(x_n) - f(a)| < \varepsilon)$$

まず，$\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ を任意に取る，(f_n) は区間 I で f に一様収束することより，

$$\exists N' \in \mathbb{N}; \forall x \in I; \forall n \in \mathbb{N}; \left(n \geq N' \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

が成立する．このような自然数 N' を一つ取る．次に，f が区間 I で連続することより，

$$\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}; \forall x \in I; \left(|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

も成立するから, このような $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ を一つ取る．また，数列 (x_n) は 点 a に収束する数列であるため,

$$\exists N'' \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; (n \geq N'' \implies |x_n - a| < \delta)$$

が得られる．この場合，このような自然数 N'' を一つ取り，$N = \max\{N', N''\}$ と定め，自然数 n を $n \geq N$ を満たすように任意に取る,

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(a)| &= |f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(a)| \\ &\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned} \tag{12.1}$$

12.1.2　(2)

成り立たない.

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, x \in (0,1) \\ 0, x = 1 \end{cases}$$

この函数列は $f(x) = 0$ に各点収束する，また数列 $x_n = 1 - 1/n$ に対し，$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ が成り立つ.
$f(1) = 0$ となる，しかし $f_n(x_n) = (1 - 1/n)^n$ で，$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = 1/e$.
よって，矛盾が生じた

12.2 # 雑談

(2) は (1) の証明を振り返ることで簡単にわかるだろう．今週もネタ尽きでここまでにしておきます．お疲れ様でした．