第三回レポート問題

習近平

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, 締切 $-\ \varepsilon <$ 提出時刻 $<$ 締切

Q3.1

(1.1)

Proof. 数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の有界性と単調性を以下示す:
有界性:
$\mathbf{A} = \left\{k \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{2} \leq b_k < 1\right\}$ とする.
$\mathbf{A} = \mathbb{N}$ であることを以下示す:
$\frac{1}{2} \leq b_0 = \frac{1}{2} < 1$ より $0 \in \mathbf{A}$.
$\mathbf{S}_{n+1} := \{j \in \mathbb{N} \mid j < n+1\}$ とする.
$\mathbf{S}_{n+1} \subset \mathbf{A}$ と仮定し， $n+1 \in \mathbf{A}$ を示す.
仮定より，$\frac{1}{2} \leq b_n < 1$ が成り立ち，漸化式に代入すると，
$\frac{1}{2} \leq b_{n+1} = \frac{{b_n}^2+1}{2} < \frac{1+1}{2} < 1$ が得られる.
従って，$n+1 \in \mathbf{A}$ となり，数学的帰納法より，$\mathbf{A} = \mathbb{N}$ が得られ,
数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の有界性が示された.

単調性:
$n \in \mathbb{N}$ を任意に取る．与えられた漸化式より,
$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}(b_n^2 - 2b_n + 1) = \frac{1}{2}(b_n - 1)^2 > 0$
よって，数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が単調列であることがわかる.

実数の連続性より，数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が閉区間 $[\frac{1}{2}, 1]$ の一点に収束することが示された. □ □

(1.2)

Proof. 数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が 1 に収束することを以下示す:
(1) の結論のもとで,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha, (\alpha \in [\frac{1}{2}, 1])$$

とする．

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

と収束列に関する四則演算の性質より，

$$\lim_{n\to\infty} b_n^2 = \alpha^2$$

となる．また，収束列の部分列は収束列と同じ極限を持つことより，

$$\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \alpha$$

が得られる．
以上のことから，

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n^2+1}{2} = \frac{1}{2}(\alpha^2+1)$$

ここで，中学校で習った知識をうまく活用してやると以下のことが分かる：

$$\alpha = 1$$

従って，

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1$$

であることが証明された． □ □

(2)

収束しない．

Proof.

$$\mathbf{B} = \{n \in \mathbb{N} \mid b_n \geq n-1\}$$

とする．
$b_0 = 2 \geq -1$ より，$0 \in \mathbf{B}$
$\mathbf{S}_{n+1} := \{j \in \mathbb{N} \mid j < n+1\}$ とする．
$\mathbf{S}_{n+1} \subset \mathbf{B}$ と仮定し， $n+1 \in \mathbf{B}$ を以下示す．
仮定より，$b_n \geq n-1$ が成り立つ．この時，漸化式より:

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n^2+1)$$

$$b_{n+1} - n \geq \frac{1}{2}(n^2-2n+1) = \frac{1}{2}(n-1)^2 \geq 0$$

従って，$n+1 \in \mathbf{B}$ よって，$\mathbf{B} = \mathbb{N}$ が成り立つ．
以上より，$\forall n \in \mathbb{N}; b_n \geq n-1$ が成り立つ．

任意の実数 $\beta \in \mathbb{R}$ に対し，アルキメデス性より，$N-1 > \beta$ となるような $N \in \mathbb{N}$ が存在する．
$n \geq N$ を満たすような任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$b_n \geq b_N \geq N-1 > \beta$$

が成り立つため．数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が無限大に発散することが示された． □ □

Q3.2

[1]

Proof. $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ を任意に取る．

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \alpha \text{ より}$$

ある $k_1 \in \mathbb{N}$ が存在し，$k_1^{'} \geq k_1$ を満たす任意の $k_1^{'} \in \mathbb{N}$ に対し，以下の式が成り立つ：

$$\mid a_{2k'} - \alpha \mid < \varepsilon$$

$$\text{次に} \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \alpha\text{より}$$

ある $k_2 \in \mathbb{N}$ が存在し，$k_2^{'} \geq k_2$ を満たす任意の $k_2^{'} \in \mathbb{N}$ に対し，以下の式が成り立つ：

$$\mid a_{2k_2'+1} - \alpha \mid < \varepsilon$$

数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が α に収束することを以下示す:

$$N := max\,\{2k_1, 2k_2+1\} + k_1 + k_2$$

$n \geq N$ を満たすような $n \in \mathbb{N}$ を任意に取る．
この時，$k \geq max\,\{k_1, k_2\}$ を満たす $k \in \mathbb{N}$ が存在し, $(n = 2k) \vee (n = 2k+1)$ が成り立つ.
いずれにせよ,

$$\mid a_n - \alpha \mid < \varepsilon$$

が成り立つため，数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が α に収束することが示された． □ □

[1] $0 \in \mathbb{N}$ から $k=0$ の時 a_{2k-1} が定義されていないため，以下 a_{2k-1} の代わりに a_{2k+1} を使わせていただきます.

Q3.7

Proof. [2]
条件から簡単に分かること:

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{\alpha}{k}) > 1$$

ここで, $a_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{\alpha}{k})$ とする. $b_n = \ln a_n$ と定める.

この時

$b_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{\alpha}{k})$ であることが簡単にわかる. (気になる人は $check$ せよ!)

$x > 0$ の時 $\ln(1+x) < x$ が成り立つことより,

$$\begin{aligned} b_n &< \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha}{k} = \alpha\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\ &= \alpha + \alpha\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \end{aligned} \tag{1}$$

この時, 微積分の手法を使うと:

$$\frac{1}{k} = \int_{k-1}^{k}\frac{1}{k}dx < \int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx = \ln(k) - \ln(k-1)$$

従って,

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < \ln(n)$$

が得られ,

$$b_n < \alpha + \alpha\ln n \tag{2}$$

が成り立つ.
また

$$\begin{aligned} \ln(1+\frac{\alpha}{k}) &= \int_{0}^{\frac{\alpha}{k}}\frac{1}{1+x}dx > \int_{0}^{\frac{\alpha}{k}}\frac{1}{1+\frac{\alpha}{k}}dx \\ &= \frac{\alpha}{k+\alpha} \end{aligned} \tag{3}$$

[2] この問題って実数が累乗のところに来ているから, 対数や微積を使わない解法が僕の脳内に存在しないので, 対数や微積の諸性質を宣言せずに使わせていただきます.

が成り立つから,

$$\alpha\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+\alpha}<b_n$$

が成り立つ.
また,

$$\frac{1}{k+\alpha}=\int_{k}^{k+1}\frac{1}{k+\alpha}dx>\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x+\alpha}dx=\ln(k+1+\alpha)-\ln(k+\alpha)$$

より,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+\alpha}>\ln(n+1+\alpha)-\ln(1+\alpha)>\ln n\ -\ln(1+\alpha)$$

従って,

$$b_n>\alpha\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+\alpha}>\alpha\ln(n+1+\alpha)-\alpha\ln(1+\alpha)>\alpha\ln n\ -\alpha$$

が成り立つ.
以上より:

$$-\alpha+\alpha\ln n<b_n<\alpha+\alpha\ln n$$

が得られる，これを指数の形に直すと次のようになる:

$$e^{-\alpha+\alpha\ln n}<a_n<e^{\alpha+\alpha\ln n}$$

つまり,

$$e^{-\alpha}n^{\alpha}<\frac{(\alpha+1)...(\alpha+n)}{n!}<e^{\alpha}n^{\alpha}$$

が成り立つ.
以上の議論より:

$$c_1=e^{\alpha}\,;c_2=e^{-\alpha}$$

と置けば，すべてがうまく行くよ. □ □

#雑談

前回対数に関する質問を答えてくれて，ありがとう．今回は流石に対数を使わなければいけないよね.（笑）早く講義中に対数を定義してくれたらありがたいw.
今回はおまけ問題を全部やろうとしていたが，時間がなさそうなので，点数

になれる部分しか解いていなかった．今回のおまけ問題を解く時，定数の決め方に悩んでいた．三角関数に関する不等式 $\frac{2x}{\pi} < sinx$ を思い出して，もしかして，何らかの指数を定数として評価すればいいかに気づいて，雑な不等式を数時間いじってみたらうまくいった．
もう一つだね，LaTeX で行内数式を使うと $\sum_{k=1}^{n}$，下標が右に出ているのが気持ち悪い．何か対策とかあるの？