answer

your friend

2022-02-14

Contents

0.1 問題１

$y = \log f(x)$ とする，これの微分は $\frac{f'(x)}{f(x)} = \log x + 1$．$f(x)$ を掛けると $f'(x) = f(x)\,(\log x + 1) = (\log x + 1)\, x^x$.
同じように $y = \log x^{x^x} = x^x \log x$ とする．これの微分は $(x^x)' \log x + x^{x-1}$, $(x^x)' = (\log x + 1)\, x^x$ より, y の微分は $(x \log x + x + 1)x^{n-1}$. 次に x^{x^x} を両辺にかければ, $f'(x) = (x \log x + x + 1)x^{x-1+x^x}$ が導かれる
最後の問題がやや難しいかもしれないが，0^0 の処理が今まで扱っていないけど, 実は集合論での考え方によれば，1 にならなければいけない.（空集合から空集合への写像は空写像のみであるから）ただし，我々はこれを解析的に証明せざるを得ない
不定形の処理に使われる強力な道具は L'Hospital's rule だけ，しかし $\frac{0}{0}$ または $\frac{\infty}{\infty}$ のような不定形が存在しない. 従って，不定形を作ればこの問題が解決と言うことになる．この時，指数を対数に直すことを思いつけばよい．x^x の対数, つまり $x \log x$ の極限を議論することになる, $\frac{\log x}{x^{-1}}$ のような分数型に変形するのは自然な発想だろう, L'Hospital's rule を使えば $\log x^x = x = 0$ が直ちにわかる, よって，$\lim_{x\to 0} x^x = e^0 = 1$.

0.2 問題２

積分定数を省略すれば次のようになる：

$$\int \frac{1}{x^3+8}dx = \frac{1}{10}\int \left(\frac{1}{x+2} - \frac{x-3}{x^2-x+4}\right)dx$$
$$= \frac{1}{10}\left(\log(x+2) - \frac{1}{2}\log(x^2-x) + \frac{5\sqrt{15}}{3}\arctan(\frac{2}{\sqrt{15}}x)\right).$$

0.3 問題３

$$f(x,y) = 1 - \frac{1}{2!}\left(x^2+y^2\right) + o((x,y)^4).$$

0.4 問題４

一般化しよう，凸 n 角形の各辺の対する円心角を x_n とする, 円の半径は 1 のもとで議論すれば，面積函数は正弦定理のもとで次のように定まる：

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin(x_k).$$

円心角の総和より $\sum_{k=1}^{n} x_k = 2\pi, 0 < x_k \leq \pi,$
函数 $g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i - 2\pi$ とすると，Lagrange multiplier より $\forall k_{1 \leq k \leq n}; \frac{1}{2}\cos(x_k) - \lambda x_k = 0$
余弦函数と一次函数が $[0, \pi]$ では持ちうる解はただ一つなので， $0 < x_k < \pi,$ $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. 各辺が等しいことがわかる．なおこれが極大となることは自明，なぜかと言うと，面積が極小となる場合はないから．