集合，全単射

素朴集合論

永明

数学部会

2023

集合

任意の性質 P に対して, その性質を満たすもの全体

$$S_P := \{x \mid x \text{ が性質 } P \text{ を満たす}\} \tag{1}$$

が存在し, これを集合と呼ぶ.

- $x \in S_P \iff x$ が性質 P を満たす.
- $x \notin S_P \iff x$ が性質 P を満たさない.

集合 A, B に対して, 任意の $a \in A$ について, $a \in B$ が成立するならば, A が B の部分集合といい, $A \subseteq B$ と書く.

直積と対応

集合 $A \times B$ に対して, それらの直積 $A \times B$ を

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \tag{2}$$

と定義する.
集合 A, B に対して, $A \times B$ の部分集合 $R \subseteq A \times B$ を集合 A から B への対応と呼ぶ.
R と任意の $(a, b) \in A \times B$ に対して, $(a, b) \in R \iff aRb$ と書く.

写像

集合 A, B と A から B への対応 f に対して, (A, B, f) の組が写像であるとは
任意の $a \in A$ に対して, 唯一の $b \in B$ が存在して, afb が成立する.
この時, (A, B, f) を $f : A \to B$ と書き, $a \in A$ に対して, afb が成立する $b \in B$ を $f(a)$ と表す.

逆対応と逆写像

集合 A から B への対応 R に対して, R の逆対応 R^{-1} を次のように定義する:

$$R^{-1} := \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}. \tag{3}$$

写像 (A, B, f) に対して, (B, A, f^{-1}) が写像になる時, f^{-1} を f の逆写像と呼ぶ.

単射, 全射, 全単射

写像 $f : A \to B$ が

- 単射であるとは
  任意の $a, a' \in A$ に対して, $f(a) = f(a')$ ならば $a = a'$ が成立する.
- 全射であるとは
  任意の $b \in B$ に対して, ある $a \in A$ が存在して, $f(a) = b$ が成立する.
- 全単射であるとは
  f が単射かつ全射.