

位相

Arnold Robinson

2024 年 5 月 2 日

まえがき

この資料を見つけた君は今数学科の集合と位相の講義で悩んでいるのではないでしょう
か？ また君は数学以外の分野を専攻していて、大学数学科の人間達は何を勉強しているか
に興味をもっているでしょう？「こんな君を待ち構えてこの本を作成したよ！」、「僕は君
の悩みを理解しているよ！」、「これを読めば基礎のすべてがわかるよ！」など胡散臭いな
宣伝は私にはできない。この本は私の学習ノートを整理した結果である。つまり、高度に
抽象化された議論を更に抽象的に書いたものである。決して楽に理解できるようなもので
はない。(もし楽にできたら私も苦労しなかつただろう。)

しかし、難しいから諦めちゃうという考え方もよろしくない、特に大学数学科の新入生
の方にとって、集合と位相と群がほぼどの分野に進むとしても必ず習得しなければいけな
い概念である。これらの分野で躓いてしまうと、今後より専門的な学習で痛い目に遭うの
はほぼ確実に言えるだろう。数学は先人達の知恵の結晶であり、読めばすぐわかるような
ものではない。したがって、一回学習したことに満足せず、理解するまで復習することが数
学における重要事項である。これらをコツコツ学んで、論理に忠実して、基礎的な概念を嚙
み砕いてからより専門的なことを勉強すると、君は絶対自分の成長に驚くだろう。

本書では難解な概念をサボらずに丁寧に解説するを主眼に置く。その代わりに本書で学
習している読者に練習問題に取り組むことを強要する。練習問題を解かないとわかつたつ
もりになった可能性がある。最初の第一部では手を動かしてすべての練習問題を丁寧に、
論理に忠実して書くことが必須である。また証明を書く時に、何を仮定したか、何を導こう
とするかを誰が見てもわかるように記述することが大切である。このような練習を二年間
ほど行えば、自分の頭の中に考えたアイデアをそのまま数学的な文章に整理できるよう
になる。それを目指して勉強しよう。

最低限の集合論を勉強してください。

目次

現時点の進捗	5
第 I 部 一般位相空間論	7
第 1 章 位相と位相空間の基本常識	9
1.1 位相, 開基, 準開基	9
1.2 順序位相, 積位相, 部分位相	11
1.3 閉集合, 集積点, 内部, 閉包, 近傍, 境界	13
1.4 連続写像	18
1.5 直積位相	21
1.6 Metric Topology	22
1.7 商位相	23
1.8 位相構造	24
第 2 章 連結性とコンパクト性	29
2.1 連結性	29
2.2 実数の連続性と弧状連結	31
2.3 連結成分と局所連結	32
2.4 コンパクト性	34
2.5 実数上のコンパクト空間	38
2.6 集積点コンパクト性	40
2.7 局所コンパクト性とコンパクト化	42
第 3 章 距離化可能性とパラコンパクト性	45
3.1 距離化可能性	45
3.2 パラコンパクト性	49
参考文献	51

第 I 部

一般位相空間論

第 1 章

位相と位相空間の基本常識

1.1 位相, 開基, 準開基

Definition 1.1 (位相). 集合 X の位相 (topology) \mathcal{O}_X は以下の 3 つの性質を満たすの部分集合族である:

1. $\emptyset \in \mathcal{O}_X \wedge X \in \mathcal{O}_X$
2. $\forall \Lambda (\Lambda \neq \emptyset); ((\forall \lambda \in \Lambda; U_\lambda \in \mathcal{O}_X) \implies \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}_X)$
3. $\forall T_1, T_2 \in \mathcal{O}_X; T_1 \cap T_2 \in \mathcal{O}_X$

位相 \mathcal{O} が与えられた集合 X のことを位相空間 (topological space) と呼ぶ.

位相 \mathcal{O} の元 U のことを集合 X 上の開集合 (open set) とする.

集合 X の 2 つの位相 $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ に対し, $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ が比較可能というのは $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$ または $\mathcal{O} \supseteq \mathcal{O}'$ が成り立つ. $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$ が成り立つ時, 位相 \mathcal{O} が位相 \mathcal{O}' より弱い (coarser), 位相 \mathcal{O}' が位相 \mathcal{O} より強い (finer) と呼ぶ.

Example 1.2. 集合 X に対し, $\mathcal{P}(X)$ が X の離散位相と呼ぶ. $\{\emptyset, X\}$ は X の自明な位相と呼ぶ.

Definition 1.3 (開基). 集合 X の開基 \mathcal{B} とは以下の 2 つの条件を満たす X の部分集合族である:

1. 任意の $x \in X$ に対し, ある $B \in \mathcal{B}$ が存在し, $x \in B$ が成り立つ.
2. 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ に対し, 任意の $x \in B_1 \cap B_2$ に対し, $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ を満たす集合 $B_3 \in \mathcal{B}$ が存在する.

Definition 1.4 (開基による位相の生成). 集合 X の開基 \mathcal{B} によって生成される位相 \mathcal{O} 次のような部分集合族である.

$$\mathcal{O} := \{U \in \mathcal{P}(X) \mid \forall x \in U; \exists B \in \mathcal{B}; ((B \subseteq U) \wedge (x \in B))\}$$

Claim 1.5. このように構成した集合 X の部分集合族 \mathcal{O} は X の位相である.

Proof. 集合 X の開基 \mathcal{B} に対し, 定義 1.4 により構成された X の部分集合族 \mathcal{O} は X の位相であることを以下示す:

まず $X, \emptyset \in \mathcal{O}$ が成立することを示す:

X に対して, 開基 \mathcal{B} の定義より, $\forall x \in X; \exists B \in \mathcal{B}; (B \subseteq X \wedge x \in B)$ が自明である.

\emptyset に対し, $\forall x \in \emptyset; \exists B \in \mathcal{B}; x \in B \subseteq \emptyset$ が常に真となるので, $\emptyset \in \mathcal{O}$

次に \mathcal{O} の任意要素の和集合は \mathcal{O} に属することを示す:

J を任意の空でない添字集合とする, $\forall \alpha \in J; U_\alpha \in \mathcal{O}$ が成立することを仮定して,

$\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{O}$ であることを示せばよい.

$x \in \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ を任意に取る.

この時, ある $\alpha \in J$ が存在し, $x \in U_\alpha$ を満たす. この集合 U_α を一つ取る.

$U_\alpha \in \mathcal{O}$ が成立することより, ある $B \in \mathcal{B}$ が存在し, $x \in B \wedge B \subseteq U_\alpha$ を満たす. このような集合 B を一つ取る.

この場合, $B \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ が成立する. つまり, 集合 $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ に対して, $\forall x \in \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha; \exists B \in \mathcal{B};$

$\left(B \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \right) \wedge (x \in B)$ が満たされていることより, $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{O}$ が成り立つ.

最後に, 任意の2つの集合 $T_1, T_2 \in \mathcal{O}$ に対し, $T_1 \cap T_2 \in \mathcal{O}$ を示す:

$T_1, T_2 \in \mathcal{O}$ を任意に取る, この時, 集合 $T_1 \cap T_2$ について, 先程と似たような議論をすれば良い.

$x \in T_1 \cap T_2$ を任意に取る, この時, $B_1 \subseteq T_1, B_2 \subseteq T_2$ かつ $x \in B_1 \cap B_2$ を満たすような $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ が存在することは集合 \mathcal{O} の定義より直ちにわかる.

このような集合 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ を取って, 開基 \mathcal{B} の二番目の性質を用いると, $x \in B_3, B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ を満たす $B_3 \in \mathcal{B}$ が存在する.

この集合 B_3 を取って, $B_3 \subseteq (B_1 \cap B_2) \subseteq (T_1 \cap T_2)$ が成立することより, 集合 $T_1 \cap T_2$ に対し, $\forall x \in T_1 \cap T_2; \exists B \in \mathcal{B}; ((B \subseteq T_1 \cap T_2) \wedge (x \in B))$ が得られ, $(T_1 \cap T_2) \in \mathcal{O}$ であることを示せた.

以上より, \mathcal{O} が集合 X の位相であることを導けた. □

Lemma 1.6 (開基の和集合族). X を集合とする. \mathcal{B} を集合 X の位相 \mathcal{O} の基底とする. この時, \mathcal{O} の任意要素が必ず \mathcal{B} の要素の和集合の形で書ける.

Proof. $U \in \mathcal{O}$ を任意に取る. この時, 開基の定義より, $\forall x \in U; \exists B_x \in \mathcal{B}; x \in B_x \subseteq U$. 従って, $U = \bigcup_{x \in U} B_x$ □

Lemma 1.7 (開基の構成). 位相空間 (X, \mathcal{O}) に対し, \mathcal{O} の部分集合 \mathcal{C} は以下の条件を満たす時に, \mathcal{C} が (X, \mathcal{O}) の開基である.

$$\forall U \in \mathcal{O}; \forall x \in U \exists C \in \mathcal{C}; x \in C \subseteq U$$

Proof. 開基となるための2つの条件を確認すれば良い, $X \in \mathcal{O}$ より, $\forall x \in X; \exists C \in \mathcal{C}; (x \in C \wedge C \subseteq X)$, これで開基に条件1を満たす. 次に共通部分について考察する: $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}$ より, $C_1, C_2 \in \mathcal{O}; C_1 \cap C_2 \in \mathcal{O}$ が得られる. この時, $\forall x \in C_1 \cap C_2; \exists C_3 \in \mathcal{C}; x \in C_3 \subseteq C_1 \cap C_2$ □

Lemma 1.8 (開基と位相の強弱). 集合 X の2つの位相 $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ の開基 $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ に対し, 以下の2つの命題が同値である: *¹

(1) \mathcal{O}' が \mathcal{O} より強い.

(2) $\forall x \in X; \forall B \in \mathcal{B}; (x \in B \implies \exists B' \in \mathcal{B}'; x \in B' \subseteq B)$

*¹ この lemma は位相の強弱を比較する際に変重要である. 理解することが必須.

Proof. (2) \implies (1): $U \in \mathcal{O}$ を任意に取る. この時, $U \in \mathcal{O}'$ を示せば良い. \mathcal{B} が \mathcal{O} を生成することに着目すると, $\forall x \in U; \exists B \in \mathcal{B}; x \in B \subseteq U$ は位相の生成に基づいて成立する. (2) の条件より, $\forall x \in U; \exists B \in \mathcal{B}; \exists B' \in \mathcal{B}'; x \in B' \subseteq B \subseteq U$. 従って, U が開基 \mathcal{B}' の元で生成される. よって, $U \in \mathcal{O}'$ が成立する.

(1) \implies (2): 開基の要素は開集合であることを利用すれば, $x \in B \in \mathcal{B} \implies x \in B \in \mathcal{O}'$ である. \mathcal{O}' が開基 \mathcal{B}' により生成されるから, $\exists B' \in \mathcal{B}'; x \in B' \subseteq B$ が得られる.

□

Definition 1.9.

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$\mathcal{B} := \{(a, b) \mid a < b, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

\mathcal{B} を開基とする位相は \mathbb{R} 上の標準位相と呼ぶ.

Definition 1.10 (準開基). 集合 X の部分集合族 \mathcal{S} が $\forall x \in X; \exists S \in \mathcal{S}; x \in S \subseteq X$ を満たす時, \mathcal{S} を集合 X の準開基と呼ぶ. 準開基 \mathcal{S} の有限個要素の共通集合を要素を持つ集合 \mathcal{B} が開基となる. この定義が *well-defined* であることは自明である.

1.2 順序位相, 積位相, 部分位相

Definition 1.11 (順序位相). 全順序集合 $(X, <)$ の順序位相 \mathcal{O} は以下の 3 つの条件のどれかを満たす元からなる集合 \mathcal{B} の生成位相である.

1. $(X, <)$ 上の开区間 (a, b)
2. $(X, <)$ 上の半开区間 $[a_0, b)$, a_0 は最小元である.
3. $(X, <)$ 上の半开区間 $(a, b_0]$, b_0 は最大元である.

Definition 1.12 (順序位相の準開基). 全順序集合 $(X, <)$ に対して, 以下の 4 つの区間について考える:

1. $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$
2. $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$
3. $[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$
4. $(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$

最初の 2 つの形をしている区間を *open rays* といい, 最後の 2 つの形をしている区間は *closed rays* という. *open rays* 全体からなる集合は準開基である.

Definition 1.13 (積位相). 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ に対し, 集合 $\mathcal{B} = \{U \times Y \mid U \in \mathcal{O}_X, Y \in \mathcal{O}_Y\}$ が集合 $X \times Y$ の開基である. このように生成される位相は標準積位相と呼ぶ.

Theorem 1.14. \mathcal{B} を位相空間 X の開基とする. \mathcal{C} を位相空間 Y の開基とする. この時, 次の集合が位相空間 (標準積位相が入る) $X \times Y$ の開基となる.

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}.$$

Proof. 標準積位相空間 $X \times Y$ の開集合 W を任意に取って固定する. $x \times y \in W$ を任意

に取る. 標準積位相の開基 \mathcal{B}' に対し, $x \times y \in U \times V \subseteq W$ となる $U \times V \in \mathcal{B}'$ が存在する. この時, 開基 \mathcal{B}, \mathcal{C} に対し, $x \in U' \subseteq U, y \in V' \subseteq V$ を満たす $U' \in \mathcal{B}, V' \in \mathcal{C}$ が存在する. この時, $x \times y \in U' \times V' \subseteq W, U' \times V' \in \mathcal{D}$ が成立し, Lemma 1.7 より, \mathcal{D} が積位相空間 $X \times Y$ の開基である. \square

Definition 1.15 (projection). 写像 $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ と写像 $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ を次のように定める:

$$\begin{aligned}\pi_1(x, y) &= x \\ \pi_2(x, y) &= y\end{aligned}$$

この時, 写像 π_1, π_2 を集合 $X \times Y$ の第一, 第二要素への射影 (*projection*) と呼ぶ.

Theorem 1.16.

$$\mathcal{S} := \{\pi_1^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{O}_X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{O}_Y\}.$$

が積位相空間 $X \times Y$ の準開基である.

Proof. $X \times Y$ の位相を \mathcal{O} とする. 集合 \mathcal{S} により生成される位相を \mathcal{O}' とする. 準開基の生成位相は有限個の共通集合の任意の和集合からなるので, 開集合の公理に基づいて考えると, $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$ が成立する. 次に $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$ を示せば良い. 位相 \mathcal{O} の基底の元 $U \times V$ を任意に取る.

$$U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$$

より, $U \times V \in \mathcal{O}'$ が得られ, 開集合は基底の任意和集合より生成されることより, $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$ が示された. \square

Definition 1.17 (部分位相空間). 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) の部分集合 Y の位相 \mathcal{O}_Y が次のように与えられる時, (Y, \mathcal{O}_Y) が (X, \mathcal{O}_X) の部分位相空間と呼ぶ.*2

$$\mathcal{O}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{O}_X\}.$$

Lemma 1.18 (部分開基). 位相空間 X の部分集合 Y と開基 \mathcal{B} に対し,

$$\mathcal{B}_Y := \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}.$$

により定まる集合は部分位相空間 Y の開基である.

Proof. 部分位相空間 Y の開集合 U を任意に取る. $x \in U$ を任意に取って, 開基の定義より, $\exists B \in \mathcal{B}; x \in B \subseteq U$ が成立する. この集合 B に対し, 集合 $B \cap Y \in \mathcal{B}_Y$ も $x \in B \cap Y \subseteq U$ を満たすので, Lemma 1.7 より, \mathcal{B}_Y が位相空間 Y の開基であることを示せた. \square

Lemma 1.19. 位相空間 Y が位相空間 X の部分位相空間とする. この時, Y が X の開集合ならば Y の開集合は X の開集合である.

Proof. 位相空間 Y の開集合 U を任意に取る. この時, 部分位相空間の定義より, ある X の開集合 V が存在して, $U = Y \cap V$ となる. Y, V がいずれも X の開集合であることより, 有限個の共通集合 U も位相空間 X の開集合である. \square

*2 これが位相の公理を満たすことを各自 check せよ.

Theorem 1.20 (積位相に関する部分位相). 位相空間 X の部分位相空間 A と位相空間 Y の部分位相空間 B について, 標準積位相空間 $A \times B$ は標準積位相空間 $X \times Y$ の部分位相空間である.

Proof. 標準積位相空間 $X \times Y$ の基底 $U \times V$ を任意に取る.

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B).$$

より, 積位相空間の部分位相空間の基底と部分位相空間の積位相空間の基底が一致する. 従って基底により生成される 2 つの位相が一致する. \square

積位相空間の部分位相空間と部分位相空間の積位相空間が一致することが上記の定理より得られたが, この部分位相空間の考え方が果たしてすべての位相空間に対して成立すると言えるのが我々の気になるところである. 実は順序位相に対して反例が取れる. $I = [0, 1]$ として, 順序位相空間 I_0^2 と順序位相空間 \mathbb{R}_0^2 の部分位相空間が一致しない. もっと詳しく説明すれば, 部分位相空間の位相がより強い. 興味のある方は確認すると良い.

順序位相空間の部分位相空間と部分集合の順序位相空間必ずしも一致するとは限らない話をしたが, 特殊な場合には一致することがある.

Definition 1.21 (凸集合). 順序集合 $(X, <)$ の部分集合 Y に対し, 任意の $a < b$ を満たす $a, b \in Y$ について, X の开区間 $(a, b) \subseteq Y$ ならば, 集合 Y が凸集合と呼ぶ.

Theorem 1.22. 順序位相空間 X の凸集合 Y に対し, Y の順序位相と X の部分位相に一致する.

Proof. $\mathcal{S} := \{(a, +\infty) \cap Y \mid a \in X\} \cup \{(-\infty, a) \cap Y \mid a \in X\}$ が部分位相空間 Y の準開基である. この時, X の open ray $(a, +\infty)$ に対し, Y が凸集合であることより, $(a, +\infty) \cap Y$ が Y 全体, 空集合, Y の open rays, のいずれかになる. つまり, \mathcal{S} の要素は順序位相空間 Y の開集合である. 従って, 順序位相は部分位相より強いことを示せた. 一方, Y の open rays は X の open rays と Y の共通集合からなるものであるため, Y の順序位相の準開基の要素は部分位相空間での開集合となる. 従って, 部分位相は順序位相より強いことが示された.

以上の議論より, Y が凸集合の時, 部分位相空間と順序位相空間が一致することがわかる. \square

1.3 閉集合, 集積点, 内部, 閉包, 近傍, 境界

Definition 1.23 (閉集合). 位相空間 X の部分集合 A に対し, $X \setminus A$ が開集合となる時, A を閉集合と定義する. ^{*3}

Theorem 1.24 (閉集合の公理). 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) に対して, 部分集合族 $\mathcal{C}_X := \{C \in \mathcal{P}(X) \mid X \setminus C \in \mathcal{O}_X\}$ について, 以下命題が成立する:

^{*3} A が開集合でない時と意味をもたないことに注意せよ.

1. $\emptyset, X \in \mathcal{C}_X$
2. $\forall \Lambda (\Lambda \neq \emptyset); ((\forall \lambda \in \Lambda; C_\lambda \in \mathcal{C}_X) \implies \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \in \mathcal{C}_X)$
3. $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}_X; C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}_X$

Proof. 1. X, \emptyset が開集合であるため, 補集合 \emptyset, X が閉集合である.

2. 閉集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ について, DeMorgan 則を適用すると

$$X \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in J} (X \setminus A_\alpha).$$

右辺は開集合の任意和集合であるから, $\bigcap A_\alpha$ が閉集合であることが示された.

3. 同様に 2 個の閉集合 A_1, A_2 に対し,

$$X \setminus (A_1 \cup A_2) = (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2).$$

より, $A_1 \cup A_2$ が閉集合であることがわかる.

□

Theorem 1.25. 位相空間 Y を位相空間 X の部分空間とする. 集合 A が位相空間 Y の閉集合であることは A が位相空間 X のある閉集合と Y の共通集合であることと同値である.

Proof. (\implies): 集合 A は部分位相空間 Y の閉集合とする. この時, $Y \setminus A$ が部分位相空間 Y の開集合である. 部分位相空間の定義より, 位相空間 X のある開集合 U が存在し, $Y \setminus A = U \cap Y$ となる. $X \setminus U$ が X の閉集合であり, $A = (X \setminus U) \cap Y$ より, A が X の閉集合と Y の共通集合であることを示せた.

(\impliedby): 集合 A が位相空間 X のある閉集合 C と集合 Y の共通集合とする. この時, $A = C \cap Y$, $X \setminus C$ は位相空間 X の開集合である. $Y \setminus A = Y \cap (X \setminus C)$ より, $Y \setminus A$ が部分位相空間 Y の開集合であり, A が部分位相空間 A の閉集合であることを示せた. □

Theorem 1.26. 位相空間 X の部分空間 Y の閉集合 A に対し, Y が X の閉集合ならば A も X の閉集合となる.

Proof. 位相空間 X のある閉集合 C が存在し, $A = C \cap Y$ となるので, 閉集合の共通集合もまた閉集合であることを用いるとすぐに導かれる. □

Definition 1.27 (内部, 閉包). 集合 A は位相空間 X の部分集合とする. 集合 A の内部 (*interior*) A° は A に含まれる開集合全体の和集合とする. 集合 A の閉包 (*closure*) $\bar{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ$ と定義する.

Claim 1.28. A° が A に含まれる最大の開集合であり, \bar{A} は A を含む最小の閉集合である.

Theorem 1.29 (部分位相空間の閉包). 位相空間 Y を位相空間 X の部分位相空間とする. Y の部分集合 A に対し, A の位相空間 X での閉包を \bar{A} とする. この時, 集合 A の部分位相空間 Y での閉包 $B = \bar{A} \cap Y$ である.

Proof. $B \subseteq \bar{A} \cap Y$ の証明: \bar{A} は位相空間 X での閉集合であるため, $\bar{A} \cap Y$ が部分位相空間 Y での閉集合である. $A \subseteq B, A \subseteq \bar{A} \cap Y$ と閉包が A を含む閉集合で包含関係での最

小集合であることより, $B \subseteq \overline{A} \cap Y$ となる.

$B \supseteq \overline{A} \cap Y$ の証明: B は部分位相空間 Y での閉包であるため, 特に Y での閉集合でもある. この時, ある X での閉集合 C が存在して, $B = C \cap Y$ となる. \overline{A} は A を含む X での閉集合の中で包含関係での最小集合であるため, $\overline{A} \subseteq C$, よって, $B = C \cap Y \supseteq \overline{A} \cap Y$ が得られる. \square

Definition 1.30 (近傍). 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) の点 $x \in X$ に対し, 近傍族 \mathcal{N}_x は次のように定める:

$$\mathcal{N}_x := \{N \in \mathcal{P}(X) \mid \exists U \in \mathcal{O}_X; x \in U \wedge U \subseteq N\}.$$

\mathcal{N}_x の元 N は点 x の近傍と呼ぶ.

Theorem 1.31 (近傍族の公理). 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) の任意の点 $x \in X$ における近傍族 \mathcal{N}_x に対して, 以下の 4 つの性質が成立する:

1. $\mathcal{N}_x \neq \emptyset \wedge (\forall N \in \mathcal{N}_x; x \in N)$
2. $\forall N \in \mathcal{N}_x; \forall U \in \mathcal{P}(X); N \subseteq U \implies U \in \mathcal{N}_x$
3. $\forall N_1, N_2 \in \mathcal{N}_x; N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_x$
4. $\forall N \in \mathcal{N}_x; \exists U \in \mathcal{N}_x; U \subseteq N \wedge (\forall y \in U; U \in \mathcal{N}_y)$

Proof. 1, 2, 3, 4 いずれも開集合の性質により自明である (4 に関しては U が開集合の時について考えれば良い). \square

実は近傍族と開集合族も対等な概念である. 近傍族の公理を満たす位相空間に対し, $\forall x \in N; N \in \mathcal{N}_x$ を満たす時, N を開集合と定義すれば開集合族が得られる.

閉集合とか近傍とかこれらを考えることで何かいいことでもあるかと思っている方がいらっしやるかもしれません. その理由は閉集合はユークリッドの世界で収束列を用いて特徴づけられたもので, 近傍は各点連続などの性質で特徴づけられた概念です. これらを一般化したらこのような公理から定まる形になります. 従って, これらを研究することによって, 点列と連続性が扱いやすくなります.

近傍族の公理があまりにも長くてつまらないので, 実際に扱う時は近傍の中に特別なものを抽出して議論することが多く, それは次に述べる開近傍です.

Definition 1.32 (開近傍). X を位相空間とする. X の部分集合 U が $x \in X$ の開近傍であるというのは, $x \in U$ かつ U が開集合である.

Definition 1.33 (点の開近傍族). 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) に対し, 点 $x \in X$ での開近傍族 \mathcal{U}_x は次のように定める:

$$\mathcal{U}_x := \{U \in \mathcal{O}_X \mid x \in U\}.$$

閉集合族と同じように, 位相空間の開集合族が与えられたら, 各点での (開) 近傍族が自動的に生成されると認識せよ.

Theorem 1.34 (閉包の特徴づけ). 位相空間 X の部分集合 A と任意の $x \in X$ に対し, 以下の 3 条件が同値である.

1. $x \in \overline{A}$
2. x の任意の開近傍 U に対し, $U \cap A \neq \emptyset$

3. 任意の開基 \mathcal{B} について, x を含む任意の $x \in B \in \mathcal{B}$ に対し, $B \cap A \neq \emptyset$

Proof. 2 と 3 の同値性が開基による位相の生成から直ちにわかる. よって, 1 と 2 の同値性を示せば良い. ここで対偶を示す:

\Rightarrow : x のある開近傍 U に対し, $U \cap A = \emptyset$ とする. この時, $X \setminus U$ は集合 A を含む閉集合である. しかし, $x \in U$ より, $x \notin X \setminus U$, 閉包が A を含む最小の閉集合であることから, $x \notin \overline{A}$ がわかる.

\Leftarrow を示す: $x \notin \overline{A}$ とする, 閉包が閉集合であるため, $X \setminus \overline{A}$ が $x \in X \setminus \overline{A}$ を満たす開集合である. $A \subseteq \overline{A}$ より, $(X \setminus \overline{A}) \cap A = \emptyset$. 従って, $X \setminus \overline{A}$ が示すべき性質が備える x の開近傍である.

□

Definition 1.35 (集積点). 位相空間 X の部分集合 A に対し, $x \in X$ が A の集積点 (*limit point*) であることは, x の任意の開近傍 U に対し, $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Definition 1.36 (導集合). 位相空間 X の部分集合 A の導集合 (*derived set*) A' は次のような X の部分集合である:

$$A' := \{x \in X \mid x \text{ が } A \text{ の集積点である}\}.$$

Definition 1.37 (孤立点). 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) の部分集合 A の元 x が A の孤立点であるとは $x \in A \setminus A'$ とする.

Theorem 1.38 (導集合による閉包の特徴づけ). 位相空間 X の部分集合 A と A の導集合 A' に対し, 次の関係式が成立する:

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Proof. $\overline{A} \subseteq A \cup A'$ の証明: $x \in \overline{A}$ を任意に取る. $x \notin A$ の時, 閉包の特徴づけより, x の任意の開近傍 $U \cap A \neq \emptyset$, $x \notin A$ より, $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, 従って, $x \in A'$ がわかる.

$\overline{A} \supseteq A \cup A'$ の証明: 閉包の定義より, $A \subseteq \overline{A}$ がわかり, 閉包の特徴づけから $A' \subseteq \overline{A}$ が得られる.

□

Definition 1.39 (境界). 位相空間 X の部分集合 A の境界 (*boundary*) は次のように与えられる:

$$\text{Bd } A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}.$$

Theorem 1.40 (境界の特徴づけ). 位相空間 X の部分集合 A について以下の 4 つの主張が成立する:

1. $A^\circ \cap \text{Bd } A = \emptyset$
2. $\overline{A} = A^\circ \cup \text{Bd } A$
3. $\text{Bd } A = \emptyset \iff A \in \mathcal{O}_X \wedge A \in \mathcal{C}_X$
4. $A \in \mathcal{O}_X \iff \text{Bd } A = \overline{A} \setminus A$

Proof. (1): $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$ より, $A^\circ \cap \text{Bd } A = \emptyset$

(2): \subseteq の証明: 任意の $x \in \overline{A}$ に対し, $x \notin A^\circ$ とすると, $x \in X \setminus A^\circ = \overline{(X \setminus A)}$, 従って,

$x \in \text{Bd } A$.

\supseteq の証明: $A^\circ \subseteq \bar{A}, \text{Bd } A \subseteq \bar{A}$ より $\bar{A} \supseteq A^\circ \cup \text{Bd } A$

(3): \implies の証明: $\text{Bd } A = \emptyset$ と仮定する. $\text{Bd } A \cup A^\circ = \bar{A}$ より, $A^\circ = \bar{A}$ となる, $A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$ より, $A^\circ = A = \bar{A}$ が得られる. 内部と閉包の定義より $A \in \mathcal{O}_X \wedge A \in \mathcal{C}_X$ が求まる.

\Leftarrow の証明: $A \in \mathcal{O}_X \wedge A \in \mathcal{C}_X$ と仮定する. この時, $\bar{A} = A, \overline{X \setminus A} = X \setminus A$ となる. 従って, $\text{Bd } A = A \cap (X \setminus A) = \emptyset$

(4): \implies の証明: $A \in \mathcal{O}_X$ と仮定する. この時, $\overline{(X \setminus A)} = (X \setminus A^\circ)$ より, $\text{Bd } A = \bar{A} \cap (X \setminus A) = \bar{A} \setminus A$

\Leftarrow の証明: $\text{Bd } A = \bar{A} \setminus A$ と仮定する. $\bar{A} = \text{Bd } A \sqcup A^\circ$ より, $\bar{A} = (\bar{A} \setminus A) \cup A^\circ$ が得られる. $A \subseteq \bar{A} \wedge A^\circ \subseteq \bar{A}$ に注目して, $A \subseteq A^\circ$ が分かる. しかし, 定義より $A^\circ \subseteq A$ が求まるので, $A^\circ = A$ が得られ, $A \in \mathcal{O}_X$ であることが示された.

□

Definition 1.41 (ハウスドルフ空間). 位相空間 X がハウスドルフ空間 (*Hausdorff space*) であるとは, $x \neq y$ を満たす任意の $x, y \in X$ に対し, $U \cap V = \emptyset$ となるような x の開近傍 U と y の開近傍 V が存在する.

Theorem 1.42. ハウスドルフ空間 X の任意の有限濃度を持つ部分集合は閉集合である.

Proof. 任意の $x \in X$ に対し, $\{x\}$ が閉集合であることを示せば良い. 位相空間がハウスドルフ的であるため, $x \neq y$ を満たす任意の $y \in X$ に対し, $U \cap V = \emptyset$ を満たす x の開近傍 U と y の開近傍 V が存在する. $V \cap \{x\} = \emptyset$ となり, $y \notin \overline{\{x\}}$ となる. 従って, $\overline{\{x\}} = \{x\}$ が得られ, $\{x\}$ が閉集合であることが示された. □

Definition 1.43. T_1 公理: 任意の有限濃度を持つ部分集合は閉集合である.

ハウスドルフ空間は必ず T_1 公理を満たすが, その逆が必ずしも成立するとは限らない. 例えば実数全体の集合に補有限位相を入れると T_1 公理を満たすが, ハウスドルフ空間ではない. もし $x \neq y \in \mathbb{R}$ は非交開近傍 U, V を持つならば, $\mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus (U \cap V) = (\mathbb{R} \setminus U) \cup (\mathbb{R} \setminus V)$, 補有限位相の定義より実数全体の集合が有限集合であることが導かれる. 矛盾であることがすぐにわかるだろう.

Theorem 1.44. T_1 公理を満たす位相空間 X の部分集合 A と任意の $x \in X$ に対し, 以下の2つの命題が同値である:

1. x が集合 A の集積点である.
2. x の任意の開近傍 U に対し, $|A \cap U| \geq \omega$.

Proof. \Leftarrow この部分が自明である.

\implies ある開近傍 U に対し, $|A \cap U| < \omega$ と仮定して矛盾を導く: $A \cap U$ が有限集合ならば, $(A \cap U) \setminus \{x\}$ も有限集合であり, T_1 よりこれが閉集合となる. この時, 開集合 $U \cap (X \setminus ((A \cap U) \setminus \{x\}))$ に対し, x の開近傍になるが $A \setminus \{x\}$ と非交となるので, 集積点の定義に反する. □

ハウスドルフ空間を導入する一つの動機は実数の閉集合上の収束列の収束先がその集合

にあるという性質を一般化すること。(これは解析学に関連するお話であるので、ここでその理由を述べるつもりはない。) 問題が定数列は収束と定義したいけれども、一点集合が必ずしも閉集合となるわけではない。ハウスドルフ空間ではこのような問題が回避できる。さて、距離を使わずに点列の収束を定義しよう:(実はあとでネット (**net**) という概念を導入して、数列そのものを一般化することができる。)

Definition 1.45 (位相空間における収束列). 位相空間 (X, \mathcal{O}) 上の数列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束列であるとは:

$$\exists x \in X; \forall U \in \mathcal{O} (x \in U); \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; (n \geq N \implies x_n \in U).$$

Remark 1.46. 実は位相空間における数列が収束するということは収束先が一点になるとは限らない, 自明な位相が入る空間における任意の点列が位相空間論での収束列となる。ややこしいところであるが収束列の収束先が一点に保証してくる重要な位相空間がハウスドルフ空間である。

Theorem 1.47. *Hausdorff space* における収束列の収束先が一点のみ。

Proof. 収束先が 2 点以上存在して矛盾を導く: $x \neq y$ がハウスドルフ空間 X 上の収束列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の 2 つの収束先とする。この時, x, y の非交開近傍 U, V が取れる。収束の定義よりある番号 N 以降の点がすべて U に属する, 同様に V に対しても同じことが成立する。しかし, $U \cap V = \emptyset$ より矛盾が生じる。 \square

1.4 連続写像

ここから位相学の核となる概念である連続性 (**continuity**) に入ります。

Definition 1.48 (連続写像). 写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ が連続 (**continuous**) であるとは次の性質を満たすとする:

$$\forall U \in \mathcal{O}_Y; f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X.$$

Lemma 1.49 (開基による連続の定義). 開基 \mathcal{B} により生成された位相空間 (Y, \mathcal{O}_Y) に対し, 写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ が以下の性質を満たせば連続となる:

$$\forall B \in \mathcal{B}; f^{-1}(B) \in \mathcal{O}_X.$$

Lemma 1.50 (準開基による連続の定義). 準開基 \mathcal{S} により生成された位相空間 (Y, \mathcal{O}_Y) に対し, 写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ が以下の性質を満たせば連続となる:

$$\forall S \in \mathcal{S}; f^{-1}(S) \in \mathcal{O}_X.$$

Proof. 任意の写像 $f : X \rightarrow Y$ と空でない添字集合 Λ により定義される Y 上の集合族 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda).$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda).$$

が成立することと開基と準開基の定義より, 上記の 2 つの Lemma が直ちに導かれる.

*4

□

Theorem 1.51 (連続写像の特徴づけ). 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ と写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し, 以下の 4 つの命題が互いに同値である:

1. f が連続写像である.
2. $\forall A \subseteq X; f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$
3. $\forall B \in \mathcal{C}_Y; f^{-1}(B) \in \mathcal{C}_X$
4. $\forall x \in X; \forall V \in \mathcal{U}_{f(x)}; \exists U \in \mathcal{U}_x; f(U) \subseteq V$

Proof. (1) \implies (2): f が連続写像と仮定する. $A \subseteq X$ を任意に取る. 空集合となったら自明で以下 A が空でないもとで議論を進める: $x \in \overline{A}$ を任意に取り, $f(x) \in \overline{f(A)}$ であることを示す: $V \in \mathcal{U}_{f(x)}$ を任意に取る. この時, f が連続写像であることより, $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x$, 閉包の特徴づけより, $\exists y \in X; y \in f^{-1}(V) \cap A$ が得られ, よって, $V \cap f(A) \neq \emptyset$ が求まる. 閉包の特徴づけより, $f(x) \in \overline{f(A)}$ となり, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(2) \implies (3): $\forall A \subseteq X; f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ を仮定する. $B \in \mathcal{C}_Y$ を任意に取る. $A = f^{-1}(B)$ として, $A = \overline{A}$ を示す: $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ と $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ より, $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) = f^{-1}(B) = A$ が得られる. $A \subseteq \overline{A}$ と合わせて, $A = \overline{A}$ が求まり, $\forall B \in \mathcal{C}_Y; f^{-1}(B) \in \mathcal{C}_X$ が示された.

(3) \implies (4): $\forall B \in \mathcal{C}_Y; f^{-1}(B) \in \mathcal{C}_X$ を仮定する, $x \in X; V \in \mathcal{U}_{f(x)}$ を任意に取り, $\exists U \in \mathcal{U}_x; f(U) \subseteq V$ を示す: $Y \setminus V \in \mathcal{C}_Y$ が閉集合の定義に従う, この時, 仮定より, $f^{-1}(Y \setminus V) \in \mathcal{C}_X$ が得られる. $A = f^{-1}(Y \setminus V)$ とする. $X \setminus A \in \mathcal{U}_x$ が得られ, $f(X \setminus A) \cap (Y \setminus V) = \emptyset$ より, $f(X \setminus A) \subseteq V$ が求まる.

(4) \implies (1): $\forall x \in X; \forall V \in \mathcal{U}_{f(x)}; \exists U \in \mathcal{U}_x; f(U) \subseteq V$ を仮定して, f が連続写像であることを導く: $V \in \mathcal{O}_Y$ を任意に取る, $x \in f^{-1}(V)$ を任意に取り, 仮定より, $\exists U_x \in \mathcal{U}_x; f(U_x) \subseteq V$, このような U_x を一つ取る.*5 $U_x \subseteq f^{-1}(V)$ が明らか.

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$$

従って, $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ が示された.

□

Definition 1.52 (同相). 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) と位相空間 (Y, \mathcal{O}_Y) が同相 (*homeomorphism*) であるとはある全単射 $f: X \rightarrow Y$ が存在して, f, f^{-1} いずれも連続写像である.

Theorem 1.53 (典型的な連続写像). X, Y, Z を位相空間とする, 以下の 6 種類の写像はすべて連続写像である:

1. 定写像 $f: X \rightarrow Y; \exists y_0 \in Y; f(X) = \{y_0\}$.

*4 上記の逆像に関する性質がきれいだと思うが, それが像に対してでも成立するかに気になる方もいるでしょう. ここで答えを言っておくと和に関しては成立で, 共通集合に関する部分が不成立である. 単射である時のみ, 等号が成立する.

*5 ここでは選択公理が暗黙に使われているのを知ったの? 実は (1), (4) と (3), (1) の同値性を示すことで選択公理の使用を回避できる. しかし, 本を書く人にとって仕事が増えるから読者の皆様の演習問題にしておく. 実は x に対応する U_x はなんでもいいから全部取って来て, 和集合を考えても結局開集合となるので, この方法で選択公理の利用も回避できる.

2. 包含写像 $A \subseteq X; f: A \rightarrow X; \forall x \in A; f(x) = x$.
3. 連続写像 $f: X \rightarrow Y; g: Y \rightarrow Z$ に対する合成写像 $g \circ f$.
4. X の部分位相空間 A に対し, 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ の定義域を A に制限した写像 $f \upharpoonright A$.
5. Y の部分位相空間 Z , 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し, $f(X) \subseteq Z$ の時, f の終域を Z に制限した写像.
6. X が開集合列 $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$ の和集合の時, $\forall \alpha \in J; f \upharpoonright U_\alpha$ が連続写像となる写像 $f: X \rightarrow Y$

Proof. 1, 2, 3, 4, 5 はいずれも自明な命題であり, 以下 6 のみを示す:

$V \in \mathcal{O}_Y$ を任意に取る. $\alpha \in J$ を任意に取る.

$$f^{-1}(V) \cap U_\alpha = (f \upharpoonright U_\alpha)^{-1}(V).$$

Lemma 1.19 より, $(f \upharpoonright U_\alpha)^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$.

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in J} (f \upharpoonright U_\alpha)^{-1}(V).$$

従って, $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ であることが示された. \square

Theorem 1.54. 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) に対し, $X = A \cup B; A, B \in \mathcal{C}_X$ とする. 連続写像 $f: A \rightarrow Y, g: B \rightarrow Y$ を用いて次のように定まる写像 $h: X \rightarrow Y$ が連続写像である:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in A \\ g(x) & , x \in X \setminus A \end{cases}$$

Proof. 閉集合の逆像が閉集合であることを示せば良い. $V \in \mathcal{C}_Y$ を任意に取る.

$$h^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cup g^{-1}(V) = (f^{-1}(V) \cap A) \cup (g^{-1}(V) \cap B).$$

Theorem 1.26 より, $(f^{-1}(V) \cap A), (g^{-1}(V) \cap B) \in \mathcal{C}_X$, 従って, $h^{-1}(V) \in \mathcal{C}_X$ \square

Theorem 1.55 (積位相空間の連続性). 写像 $f: A \rightarrow X \times Y$

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a)).$$

が連続であることと $f_1: A \rightarrow X$ かつ $f_2: A \rightarrow Y$ が連続であることと同値である.

Proof. \Rightarrow : $\pi_1: X \times Y \rightarrow X, \pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ が連続であることが自明である. $f_1 = \pi_1 \circ f, f_2 = \pi_2 \circ f$, 連続写像の合成また連続写像となるから f_1, f_2 が連続写像であることが示された.

\Leftarrow : $X \times Y$ の任意開基 $U \times V$ に対し, $f^{-1}(U \times V) \in \mathcal{O}_{X \times Y}$ を示す: $a \in f^{-1}(U \times V) \iff f(a) \in U \times V \iff f_1(a) \in U \wedge f_2(a) \in V$ 従って,

$$f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V).$$

$f_1^{-1}(U), f_2^{-1}(V) \in \mathcal{O}_{X \times Y}$ より, $f^{-1}(U \times V) \in \mathcal{O}_{X \times Y}$ が示された. \square

1.5 直積位相

私達は前の節で積位相空間、積位相空間の連続写像について考察していたが、一般性を求める私達にとっては積位相という概念を一般化しなくてはならない。

Definition 1.56 (一般化された順序対と座標). 添字集合 J と集合 X に対し, X の J 組 (J -tuple) 要素は写像 $x : J \rightarrow X$ として与えられる. $\alpha \in J$ に対し, $x_\alpha := x(\alpha)$ と定義し, これを x の α 番目座標と呼ぶ.

Definition 1.57 (直積). 添字集合 J と集合族 $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ に対し, $X = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$, X の直積 $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$ は次のように定める:

$$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha := \{x : J \rightarrow X \mid \forall \alpha \in J; x(\alpha) \in A_\alpha\}$$

直積の元 x と $\alpha \in J$ に対し, 射影写像 $\pi_\alpha : \prod_{\beta \in J} A_\beta \rightarrow A_\alpha$ は $\pi_\alpha(x) := x(\alpha)$ と定める.

Remark 1.58. 選択公理を仮定すると任意の空でない添字集合と任意の空でない集合族に対し, 直積は空でないことが保証される. また公理的集合論の話になって申し訳ないのだが, X^J が空でないことが X が空でないもとで常に言えるが (それは同じ点に写す写像を考えれば良い), 集合族のすべての集合は互いに交わりをもたないのであれば, 写し先の元を無限回選ばなければいけなくなる. 実数全体の集合は非可算濃度を持つため, 添字集合を実数全体にした時, 直積の元を再帰的に定めるには無理がある. なので, 直積と選択公理は深く関連していることが見えるはず.

これから二種類の位相空間を紹介する, いずれも有限積位相の世界で同じものとなるが無限次元の世界では話が変わるような位相空間を紹介する.

Definition 1.59 (box topology). 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) と添字集合 J に対し, 箱位相 (*box topology*) は次の集合を開基とする $\prod_{\alpha \in J} X$ の位相である.

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \mid \forall \alpha \in J; U_\alpha \in \mathcal{O}_X \right\}.$$

Definition 1.60 (積位相). 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) と添字集合 J に対し, 積位相 (*product topology*) は次の集合を準開基とする $\prod_{\alpha \in J} X$ の位相である.

$$\mathcal{S} := \left\{ \bigcup_{\alpha \in J} S_\alpha \mid S_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(U), U \in \mathcal{O}_X \right\}.$$

上記の定義を見ていただくと箱位相の方が構成として私達の直感に即しているのだが, このノートは数学のノートなので, そんな思う通りにうまく行くことがなかなかないのだ. 積位相は準開基を用いて定義したが, 開基に直すと $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$ の高々有限個の A_α に対し開集合となり, 残りすべて X となるような直積を開基とする位相である. これで, 箱位相は積位相より強いことが分かる.

Theorem 1.61 (共通性質). $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ の箱位相や積位相にかかわらず, 次の3つの命題成立する:

1. $\forall \alpha \in J; A_\alpha \subseteq X_\alpha$ かつ $\prod_\alpha A_\alpha$ は $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ と同じ種類の位相を持つならば, $\prod_\alpha A_\alpha$ は部分位相空間となる.
2. $\forall \alpha \in J; X_\alpha$ がハウスドルフ空間ならば, $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ もハウスドルフ空間である.
3. $\forall \alpha \in J; A_\alpha \subseteq X_\alpha$ ならば,

$$\prod_{\alpha \in J} \overline{A_\alpha} = \overline{\prod_{\alpha \in J} A_\alpha}.$$

Proof. 1.

$$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha \cap \prod_{\alpha \in J} U_\alpha = \prod_{\alpha \in J} (A_\alpha \cap U_\alpha).$$

より自明.

2. $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ 異なる x, y に対し, $x(\beta) \neq y(\beta)$ を満たす $\beta \in J$ が存在して, X_β を $x(\beta), y(\beta)$ それぞれの非交開近傍に置き換えれば良い.
- 3.

$$\begin{aligned} x \in \prod_{\alpha \in J} \overline{A_\alpha} &\iff \forall U = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{U}_x; \forall \alpha \in J; \exists y(\alpha) \in U_\alpha \cap A_\alpha \\ &\iff \forall U = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{U}_x; \exists y \in \prod_{\alpha \in J} X_\alpha; \forall \alpha \in J; y(\alpha) \in (U_\alpha \cap A_\alpha) \\ &\iff \forall U = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{U}_x; \exists y \in \prod_{\alpha \in J} (A_\alpha \cap U_\alpha) \\ &\iff \forall U = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{U}_x; \exists y \in \prod_{\alpha \in J} A_\alpha \cap U \\ &\iff x \in \overline{\prod_{\alpha \in J} A_\alpha} \end{aligned}$$

□

Theorem 1.62 (積位相での連続). 写像 $f: A \rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ は

$$f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha \in J}.$$

と与えられる, $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ に積位相が装備される時, f が連続であることと任意の $\alpha \in J$ に対し, f_α が連続であることと同値である.

Proof. \implies : $\forall \alpha \in J; f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ に注目し, 連続写像の合成もまた連続であることより, 命題が示される.

\impliedby : 準開基の逆像について議論すれば十分である. 準開基の元 $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ を任意に取る. この時,

$$f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)) = f_\alpha^{-1}(U_\alpha).$$

$f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ が連続写像であることより, $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha))$ が A での開集合となる. よって, f が連続写像であることが得られる. □

1.6 Metric Topology

これから一般位相空間論における特殊な位相構造を持つもの, いわゆる距離空間について議論するつもりである.

Definition 1.63. 集合 X の距離関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ が以下の3つの性質を満たす写像である:

1. $\forall x, y \in X; (d(x, y) \geq 0 \wedge (d(x, y) = 0 \iff x = y))$
2. $\forall x, y \in X; d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x, y, z; d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

集合 X に距離関数 d が装備される (X, d) を距離空間 (*metric space*) と呼ぶ.

Definition 1.64. 距離空間 (X, d) について, $x \in X, r > 0 \in \mathbb{R}$ に対し, 次の集合 $B_d(x, r)$ を中心が x 半径が r となる開球体 (*open ball*) と呼ぶ.

$$B_d(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

Lemma 1.65. 距離空間 (X, d) に対し, 次の集合が開基の2条件を満たす:

$$\mathcal{B} = \{B_d(x, r) \mid x \in X, r > 0 \in \mathbb{R}\}.$$

Proof. $x \in X$ を任意に取る. $x \in B_d(x, 1) \in \mathcal{B}$ より条件1が満たされる.

$x \in X$ を任意に取る, $x \in B_1, x \in B_2$ を満たす $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ を任意にとり, これらの開球の中心を x_1, x_2 , 半径を r_1, r_2 とする. $r = \min\{r_1 - d(x, x_1), r_2 - d(x, x_2)\}$ とする. 開球体 $x \in B_d(x, r) \subseteq B_1 \cap B_2$ が成立する. よって, 条件2も成立する. \square

今後, 集合 X に距離関数 d によって誘導される位相空間を (X, d) と略記する.

Definition 1.66. X を位相空間とする. X が距離づけ可能 (*metrizable*) であるとは, X 上に定義される距離関数 d が存在して, (X, d) が X と同じ位相構造を持つ.

Definition 1.67. 距離空間 (X, d) の部分集合 A が有界 (*bounded*) とは, $\exists M > 0 \in \mathbb{R}; \forall x, y \in A; d(x, y) \leq M$ である.

Definition 1.68. 距離空間 (X, d) の空でない部分集合 A に対し, その半径 (*diameter*) は次のように定める:

$$\text{diam}A = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Theorem 1.69. (X, d) を距離空間とする. $\hat{d}: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を次に定める.

$$\hat{d}(x, y) := \min\{d(x, y), 1\}. \quad (1.1)$$

この時, (X, d) と (X, \hat{d}) が同相である.

Proof. 簡単なため演習問題とする. \square

Remark 1.70. 上の定理は距離関数から定める位相は距離関数の局所的な振る舞いで決まることを言っている.

1.7 商位相

これでは点集合位相学の基本常識の最後となります. いわゆる空間を貼り付けて, 直感に反するような位相空間の構成はこの節で行う. 複雑に見えるかもしれないのだが, 商位

相空間の考え方は現代数学の各分野に浸透したのでこの部分を乗り越えられないと話にならないからちゃんとついていけるようにしてください。

Definition 1.71 (商写像). 全射 $p: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ が商写像 (*quotient map*) であるとは

$$\forall U \subseteq Y; (p^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X \iff U \in \mathcal{O}_Y).$$

Definition 1.72 (商位相). 全射 $p: (X, \mathcal{O}_X \rightarrow Y)$ に対し, 次の集合が p によって誘導される商位相 (*quotient topology*) である:

$$\mathcal{O}_Y := \{U \in \mathcal{P}(Y) \mid p^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X\}.$$

Definition 1.73 (商空間). 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) に同値関係 \sim が装備されている. 写像 $p: X \rightarrow X/\sim$

$$x \mapsto [x]_\sim := \{y \in X \mid x \sim y\}$$

によって誘導される位相空間 $(X/\sim, \mathcal{O}_{X/\sim})$ が商空間 (*quotient space*) と定義する.

Definition 1.74 (開写像, 閉写像). 開集合の像が開集合となるような写像は開写像 (*open map*) である. 閉集合の像が閉集合となるような写像が閉写像 (*closed map*) である.

Theorem 1.75. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y), (Z, \mathcal{O}_Z)$ に対し, 商写像 $p: X \rightarrow Y$ に対し, $\forall y \in Y; \forall x, x' \in p^{-1}(y); g(x) = g(x')$ を満たす任意の写像 $g: X \rightarrow Z$ について, ただ一つの写像 $f: Y \rightarrow Z$ が存在して, $f \circ p = g$ を満たす. この時, f が連続であることと g が連続であることと同値である. f が商写像であることと g が商写像であることと同値である.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow p & \searrow \forall g & \\ Y & \xrightarrow{\exists! f} & Z \end{array}$$

Proof. f の存在と一意性に関しては, 自然な射影を取ることによって得られる. 以下連続性と商写像に関する議論を行う: $\forall U \subseteq Z; (f \circ p)^{-1}(U) = p^{-1}(f^{-1}(U))$ であることを利用して, $f \circ p = g$ を考えれば良い. \square

1.8 位相構造

Definition 1.76. 集合 X に対し, 次のような3つの性質を満たす部分集合族 \mathcal{O} を X の開集合族と呼ぶ.

1. $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
2. $\forall \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{O}; \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in \mathcal{O}$
3. $\forall \mathcal{O}' \in \mathcal{P}(\mathcal{O}); \bigcup \mathcal{O}' \in \mathcal{O}$

Definition 1.77. 集合 X に対し, 次のような3つの性質を満たす部分集合族 \mathcal{C} を X の閉集合族と呼ぶ.

1. $\emptyset, X \in \mathcal{C}$

2. $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}; C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$
3. $\forall \mathcal{C}' \in \mathcal{P}(\mathcal{C}); \bigcap \mathcal{C}' \in \mathcal{C}$

Definition 1.78. 集合 X に対し, 写像 $i: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ が以下の 4 つの性質を満たす時, X の開核作用素と呼ぶ.

1. $X^i = X$
2. $\forall M \in \mathcal{P}(X); M^i \subseteq M$
3. $\forall M, N \in \mathcal{P}(X); (M \cap N)^i = M^i \cap N^i$
4. $\forall M \in \mathcal{P}(X); M^{ii} = M^i$

Definition 1.79. 集合 X に対し, 写像 $a: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ が以下の 4 つの性質を満たす時, X の閉包作用素と呼ぶ.

1. $\emptyset^a = \emptyset$
2. $\forall M \in \mathcal{P}(X); M^a \supseteq M$
3. $\forall M, N \in \mathcal{P}(X); (M \cup N)^a = M^a \cup N^a$
4. $\forall M \in \mathcal{P}(X); M^{aa} = M^a$

Definition 1.80. 集合 X に対し, 各 $x \in X$ に対し, X の部分集合族 \mathcal{N}_x が以下の 5 つの性質を満たすならば, \mathcal{N}_x を点 x の近傍系と呼ぶ.

1. $\mathcal{N}_x \neq \emptyset$
2. $\forall N \in \mathcal{N}_x; x \in N$
3. $\forall N \in \mathcal{N}_x; \forall N' \in \mathcal{P}(X); (N \subseteq N' \implies N' \in \mathcal{N}_x)$
4. $\forall M, N \in \mathcal{N}_x; M \cap N \in \mathcal{N}_x$
5. $\forall N \in \mathcal{N}_x; \exists N' \in \mathcal{N}_x; \forall y \in N'; N \in \mathcal{N}_y$

では以上の定義を持って、どれか一つが与えられた場合、それと一対一に対応する他の概念が定まることを見ていきましょう。

Theorem 1.81. 集合 X とその開集合族 \mathcal{O} が与えられた場合、次のように定義される集合族 \mathcal{C} は閉集合族の性質を満たし、更に閉集合族 $\tilde{\mathcal{C}}$ を用いて定義される集合族 $\tilde{\mathcal{O}}$ は開集合族の性質を満たし、 $\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{C}}$ ならば $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ が成立する。 $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ ならば $\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{C}}$ が成立する。

$$\mathcal{C} = \{X \setminus O \in \mathcal{P}(X) \mid O \in \mathcal{O}\}.$$

$$\tilde{\mathcal{O}} = \{X \setminus C \in \mathcal{P}(X) \mid C \in \tilde{\mathcal{C}}\}.$$

Proof. De Morgan の法則に従う。 □

Theorem 1.82. 集合 X とその開集合族 \mathcal{O} が与えられた場合、次のように定義される写像 $i: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ が開核作用素の性質を満たし、更に開核作用素の性質を満たす写像 \tilde{i} を用いて定義される集合族 $\tilde{\mathcal{O}}$ が開集合族の性質を満たす。

$$M^i = i(M) = \bigcup \{O \in \mathcal{O} \mid O \subseteq M\}.$$

$$\tilde{\mathcal{O}} = \{M \in \mathcal{P}(X) \mid M = M^{\tilde{i}}\}.$$

Proof. 性質1と性質2と性質4が構成より自明である。

性質3の証明: $M, N \in \mathcal{P}(X)$ を任意に取る。 $(M \cap N)^i \subseteq M^i \cap N^i$ を示す: 性質2より、 $(M \cap N)^i \subseteq M^i, (M \cap N)^i \subseteq N^i$ が成立する。従って、 $(M \cap N)^i \subseteq M^i \cap N^i$ が得られる。次に $(M \cap N)^i \supseteq M^i \cap N^i$ を示す: $M^i, N^i \in \mathcal{O}$ より、 $M^i \cap N^i \in \mathcal{O}$ また $M^i \cap N^i \subseteq M \cap N$ より、 $M^i \cap N^i \subseteq (M \cap N)^i$ が得られる。

$\emptyset, X \in \tilde{\mathcal{O}}$ が開核作用素の性質1, 2より直ちに導かれる。

$O_1, O_2 \in \tilde{\mathcal{O}}$ を任意に取る、性質3より $(O_1 \cap O_2)^{\tilde{i}} = O_1^{\tilde{i}} \cap O_2^{\tilde{i}} = O_1 \cap O_2$ より $O_1 \cap O_2 \in \tilde{\mathcal{O}}$ が成立する。

$\mathcal{O}' \subseteq \tilde{\mathcal{O}}$ を任意に取る。 $(\bigcup \mathcal{O}')^{\tilde{i}} \subseteq \bigcup \mathcal{O}'$ が性質2より導かれる。任意の $O \in \mathcal{O}'$ に対し、 $O \subseteq \bigcup \mathcal{O}'$ が成立するから、 $O = O^{\tilde{i}} \subseteq (\bigcup \mathcal{O}')^{\tilde{i}}$ が得られ、従って、 $\bigcup \mathcal{O}' \subseteq (\bigcup \mathcal{O}')^{\tilde{i}}$ 、以上より、 $\bigcup \mathcal{O}' = (\bigcup \mathcal{O}')^{\tilde{i}}$ が得られ、 $\bigcup \mathcal{O}' \in \tilde{\mathcal{O}}$ が示された。 □

Theorem 1.83. X の任意の開核作用素 i と任意の開集合族 \mathcal{O} と i から定まる開集合族 \mathcal{O}_i と開集合族 \mathcal{O} から定まる開核作用素に $i_{\mathcal{O}}$ 対し、以下の主張が成立する:

$$i_{\mathcal{O}} = i \implies \mathcal{O} = \mathcal{O}_i.$$

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_i \implies i_{\mathcal{O}} = i.$$

Proof. $i_{\mathcal{O}} = i$ と仮定して、 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_i$ を導く:

$O \in \mathcal{O}$ を任意に取る。 $i_{\mathcal{O}}$ の定義より、 $O = O^{i_{\mathcal{O}}}$ が成立し、仮定より $O = O^i$ となり、 $O \in \mathcal{O}_i$ が得られる。

$O_i \in \mathcal{O}_i$ を任意に取る。 $O_i = O_i^i = O_i^{i_{\mathcal{O}}}$ が成立し、 $O_i \in \mathcal{O}$ が得られる。

$\mathcal{O} = \mathcal{O}_i$ と仮定して、 $i_{\mathcal{O}} = i$ を示す:

$M \in \mathcal{P}(X)$ を任意に取る。 $M^{i_{\mathcal{O}}} = \bigcup \{O \in \mathcal{O} \mid O \subseteq M\}$ が定義より自明である。

以下 $M^{i_{\mathcal{O}}} = M^i$ を示す:

$M^i \subseteq M$ が開核作用素の性質 2 からわかる. また性質 4 より $M^{ii} = M^i$ より, $M^i \in \mathcal{O}_i$ が成立する. 仮定の条件を使えば $M^i \in \mathcal{O}$ が求まり, $M^i \subseteq M^{i\circ}$ が導かれる.

$O \in \{O \in \mathcal{O} \mid O \subseteq M\}$ を任意に取る. 仮定に \mathcal{O}_i の定義を適用すると $O^i = O$ がわかる. 開核作用素の性質より, $O = O^i \subseteq M^i$. 従って $M^{i\circ} \subseteq M^i$ が示される. \square

Theorem 1.84. 集合 X とその開核作用素 i に対し, 次のように定義される写像 $a : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ が閉包作用素の性質を満たす. 閉包作用素の性質を満たす写像 \tilde{a} から作られた写像 \tilde{i} に対し, $i = \tilde{i} \implies a = \tilde{a}$, $a = \tilde{a} \implies i = \tilde{i}$ が成立する.

$$M^a = a(M) = M^{cic}.$$

$$M^{\tilde{i}} = \tilde{i}(M) = M^{\tilde{a}c\tilde{a}}.$$

Proof. De Morgan に従う. \square

Theorem 1.85. 集合 X とその開集合族 \mathcal{O} に対し, 各点 $x \in X$ に対し, 次のように定める 集合族 \mathcal{N}_x が近傍系の性質を満たす. 更に, 近傍系が $\tilde{\mathcal{N}}_x$ から定まる集合族 $\tilde{\mathcal{O}}$ が開集合族の性質を満たす.

$$\mathcal{N}_x = \{V \in \mathcal{P}(X) \mid x \in V^i\}.$$

$$\tilde{\mathcal{O}} = \{O \in \mathcal{P}(X) \mid \forall x \in O; O \in \tilde{\mathcal{N}}_x\}.$$

Proof. 性質 1, 2 は定義より自明である. 性質 3 は $M \subseteq N \implies M^i \subseteq N^i$ に従う. 性質 4 は $M^i \cap N^i = (M \cap N)^i$ より明らかである. 性質 5 は開核を取れば自明となる.

以下近傍系から生成される集合族は開集合の公理を満たすことを示す:

$\emptyset, X \in \tilde{\mathcal{O}}$ が自明である.

$O_1, O_2 \in \tilde{\mathcal{O}}$ を任意に取る. $x \in O_1 \cap O_2$ を任意に取り, 性質 4 より $O_1 \cap O_2 \in \tilde{\mathcal{N}}_x$ が得られ, 定義に従えば $O_1 \cap O_2 \in \tilde{\mathcal{O}}$ がわかる.

$\mathcal{O}' \subseteq \tilde{\mathcal{O}}$ を任意に取る. $x \in \bigcup \mathcal{O}'$ を任意に取り, ある $O \in \mathcal{O}'$ が存在して, $x \in O$ を満たす. 性質 3 より $\bigcup \mathcal{O}' \in \tilde{\mathcal{N}}_x$ が示される. \square

Theorem 1.86. 集合 X に対し, 開集合族 \mathcal{O} から生成される各点における近傍系 \mathcal{N}_x と各点の近傍系 $\tilde{\mathcal{N}}_x$ から生成される開集合族 $\tilde{\mathcal{O}}$ に対し, 以下の命題が成立する:

$$\left(\forall x \in X; \mathcal{N}_x = \tilde{\mathcal{N}}_x \right) \implies \mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}}.$$

$$\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}} \implies \left(\forall x \in X; \mathcal{N}_x = \tilde{\mathcal{N}}_x \right).$$

Proof. \mathcal{O} から定まる開核作用素を i , $\tilde{\mathcal{O}}$ の開核作用素を \tilde{i} とする.

近傍系が同じと仮定して, $\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}}$ を示す:

$O \in \mathcal{O}$ を任意に取る. $\forall x \in O; O \in \mathcal{N}_x$ と仮定より, $\forall x \in O; O \in \tilde{\mathcal{N}}_x$ が成立し, $O \in \tilde{\mathcal{O}}$ がわかる.

$O' \in \tilde{\mathcal{O}}$ を任意に取る. $x \in O'$ を任意に取って, $O' \in \tilde{\mathcal{N}}_x$ が成立する. 仮定より, $O' \in \mathcal{N}_x$ が得られ, すなわち $O' \subseteq O^i \in \mathcal{O}$ である.

次に開集合族が一致すると仮定して, 各点において $\mathcal{N}_x = \tilde{\mathcal{N}}_x$ が成立することを示す:

$N \in \mathcal{N}_x$ を任意に取り, $x \in N^i \in \mathcal{O}$ より $x \in N^i = N^{\tilde{i}} \in \tilde{\mathcal{O}}$ が成立する. 従って $N^i \in \tilde{\mathcal{N}}_x$ が求まる. $N^i = N^{\tilde{i}} \subseteq N$ と近傍系の性質 3 より, $N \in \tilde{\mathcal{N}}_x$ がわかる.

$N' \in \tilde{\mathcal{N}}_x$ を任意に取る.

$$U = \{y \in X \mid N' \in \tilde{\mathcal{N}}_y\}.$$

とする. $z \in U$ を任意に取る, 性質5より $\forall y \in W; N' \in \tilde{\mathcal{N}}_y$ を満たす $W \in \tilde{\mathcal{N}}_z$ が存在する. 性質2よりこれは N' の部分集合でもある. また U の定義より $W \subseteq U$ が成立し, 性質3から $U \in \tilde{\mathcal{N}}_z$ が得られる. 従って, $U \in \tilde{\mathcal{O}}$ で, $x \in U \in \mathcal{O}$ が成立し, $U \in \mathcal{O}$ がわかる. $U \subseteq N'$ より, $U^i \subseteq N'^i$ が得られ, すなわち $x \in N'^i$ が成立する. $N' \in \mathcal{N}_x$ が示された. \square

第 2 章

連結性とコンパクト性

2.1 連結性

Definition 2.1 (分割, 連結). 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) において, 集合 A の分割 (*separation*) が存在するとは, ある空でない集合 $U, V \in \mathcal{O}_X$ に対し, $A = U \sqcup V$. 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) が連結 (*connected*) であるとは X の分割が存在しないとする.

Lemma 2.2. (X, \mathcal{O}_X) の部分位相空間 Y の分割が存在するとは, 互いの集積点を含まない非交和が Y となる集合 A, B が存在することと同値である.

Proof. \implies : A, B が互いの集積点を含まない非交和が Y となるような集合とする. この時, $\overline{A} \cap B = \emptyset, \overline{B} \cap A = \emptyset$ が成立する. $\overline{A} \cap Y = A, \overline{B} \cap Y = B$ が得られる. よって, A, B は部分位相空間での閉集合であることが導かれる. 補集合をとれば, いずれも部分位相空間での開集合であるがわかり, 分割の定義に従う.

\impliedby : 部分位相空間 Y における分割 A, B に対し, A, B は部分位相空間で開集合でもあり, 閉集合でもあるため, A の部分位相空間での閉包は $\overline{A} \cap Y$ で与えられる. A が Y での閉集合なので $A = \overline{A} \cap Y$ が成立する. よって, $\overline{A} \cap B = \emptyset$ となり, B が A の集積点を含まないことを示せた. A が B の集積点を含まないことも同様に示せる. \square

Lemma 2.3. 集合 C, D は位相空間 (X, \mathcal{O}_X) の分割とする. Y が X の連結な部分位相空間ならば, $Y \subseteq C \vee Y \subseteq D$ が成立する.

Proof. 背理法で示す: $\neg(Y \subseteq C \vee Y \subseteq D)$ と仮定して矛盾を導く.

仮定より, $Y \cap C, Y \cap D$ が部分位相空間 Y の分割になる. 矛盾が生じる. \square

Theorem 2.4. 共通部分が空でない連結な部分位相空間族の和集合が連結である.

Proof. 連結でないと仮定して矛盾を導く:

集合族 $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ 共通部分から点 x を取って固定する. 集合族の和集合の分割を C, D とする. この時, $x \in C$ と仮定しても一般性を失わない, 集合族から集合 A_α を任意に取ってくる. 前の補題より, $A_\alpha \subseteq C \vee A_\alpha \subseteq D$ が成立する. しかし, $x \in A_\alpha \cap C$ より, A_α しか考えられない. したがって, 和集合が C の部分集合であることが得られ, $D = \emptyset$ とならなければならない. 矛盾が生じた. \square

Theorem 2.5. 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) の部分位相空間 A, B に対し, $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ かつ, A

が連結な位相空間ならば、 B も連結な位相空間となる。

Proof. これも背理法で示す:

C, D が部分位相空間 B の分割であると仮定して、矛盾を導く:

この時、 $A \subseteq C \vee A \subseteq D$ が成立する。ここで、 $A \subseteq C$ としても一般性を失わない。閉包の基本性質より、 $\overline{A} \subseteq \overline{C}$ が得られる。部分位相空間の分割が互いの集積点を含まない性質を満たすので、 $B \cap D \subseteq \overline{A} \cap D \subseteq \overline{C} \cap D = \emptyset$, $B \cap D = \emptyset$ となり、分割の定義に反する。□

Theorem 2.6. 連結な位相空間の連続写像での像が連結である。

Proof. 像が連結でなければ、分割の逆像が定義域の分割になるので、矛盾が生じる。□

Theorem 2.7. 連結な位相空間 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ の積位相空間も連結である。

Proof. $(x, b) \in X \times Y$ を任意に取る。この時、 $T_x := \{x\} \times Y \cup X \times \{b\}$ が連結である。
 \therefore 共通点 (x, y) を持つ。

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} T_x.$$

右辺の集合族の共通部分が空ではないより、 $X \times Y$ が連結である。□

Remark 2.8. 上記の結論を数学的帰納法を用いると任意の有限積位相空間へ拡張できる。

あんまり実用性はないんだけど、標準積位相を装備している集合ならば、無限積の場合に関しても同じ結論が成立する。これを示して行こう。

Theorem 2.9. $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ を連結な位相空間族とする。標準積位相が装備されている位相空間

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha.$$

も連結な部分位相空間である。

Proof. $a \in X$ を1つ取って固定する。

J の有限部分集合 K を任意に取って固定する。 X_K を次のような点 x の集合とする:

$$\forall \alpha \in J; (\alpha \notin K \implies x_\alpha = a_\alpha)$$

X_K が有限積位相空間と同相である。従って、これが連結である。

J の有限部分集合全体 \mathcal{F} として、

$$Y = \bigcup_{K \in \mathcal{F}} X_K.$$

が連結となる。 $\therefore a \in \bigcap_{K \in \mathcal{F}} X_K$.

次に Y の閉包 $\overline{Y} = X$ を示す:

$x \in X$ を任意に取る、 $U \in \mathcal{U}_x$ を任意取る。 U に属する元は有限個の射影成分を除いて、他の成分には制限がない。該当する射影の有限添字集合を K とすれば、 $U \cap X_K \neq \emptyset$ がわかる。

従って、 $x \in \overline{Y}$ となり、 X が連結な位相空間であることを示せた。□

2.2 実数の連続性と弧状連結

Definition 2.10 (線形連続). 全順序集合 L が線形連続 (*linear continuum*) であることは以下の 2 つの条件を満たすとする:

1. 最小上界性を有する.
2. $\forall x < y \in L; \exists z \in L; x < z < y$ が成立する.

Theorem 2.11. 線形連続な集合に順序位相を入れた位相空間に対し, 任意の凸集合が連結である.

Proof. L を線形連続の順序位相空間とする. Y を L における凸集合と定める. 以下 Y の分割 C, D が存在すると仮定して矛盾を導く:

まず $a < b$ となるように a, b を異なる分割の集合から任意に取って固定する. ここで, $a \in C, b \in D$ においても一般性を失わない.

また集合 A, B を次のように定める:

$$A = [a, b] \cap C, B = [a, b] \cap D.$$

とおく. この時, 最小上界性より, $c = \sup A$ が存在する.

Y が凸集合なので, $[a, b] \subseteq Y$ が成立し, $c \in A \cup B$ が成立する.

$c \in A$ の時, $c \neq b$ が成立する. また, C が開集合なので, $A = [a, b] \cap C$ が閉区間 $[a, b]$ の開集合である. この時, ある $e \in L$ が存在して, $[c, e] \subseteq A$ を満たす. L が線形連続なので, $c < z < e$ を満たす $z \in L$ が存在する. $z \in [c, e] \subseteq A$ より, c が A の上界に反する.

$c \in B$ の時, $c \neq a$ が成立する.

B も閉区間 $[a, b]$ の開集合なので, ある $d \in L$ が存在し, $(d, c] \subseteq B$ を満たす. $(d, b] = (d, c] \cup (c, b]$, d も A の上界であることがわかる. しかし, これが c の最小上界性に反する. \square

Corollary 2.12. 実数全体の集合は連結である.

Theorem 2.13 (中間値の定理). 連結な順序位相空間 (X, \mathcal{O}_X) と順序位相空間 (Y, \mathcal{O}_Y) 間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ について, 以下の命題が成立する:

$$\forall a, b \in X; \forall r \in Y; (f(a) < r < f(b) \implies \exists c \in X; f(c) = r)$$

Proof. 定理の条件を仮定する.

$$A = f(X) \cap (r, +\infty), B = f(X) \cap (-\infty, r).$$

とする, $f(c) = r$ を満たす, $c \in X$ が存在しないと仮定すると, A, B が $f(X)$ の分割となる. これが連結な位相空間の連続写像での像も連結であることに反する. \square

Definition 2.14 (弧状連結). 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) の二点 $x, y \in X$ に対し, 実数のある閉区間 $[a, b]$ から, $f(a) = x, f(b) = y$ を満たすような連続写像 $f: [a, b] \rightarrow X$ は x から y への道 (*path*) といい, 位相空間が弧状連結 (*path connected*) とは, 任意の二点を結ぶ道が存在すること.

Lemma 2.15. 弧状連結な位相空間が連結である.

Proof. 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) が弧状連結とする. 位相空間が連結でないと仮定して矛盾を導く:

C, D を X の分割とする. $x \in C, y \in D$ に対し, 弧状連結であるから, x, y を結ぶ道が存在する, 道の像が連結であるから, C, D のどれかに含まれる. その時, x, y が同一集合に属することになり, 矛盾が生じる. \square

ここで自然な質問が出てくると思うが, 連結と弧状連結が同値であるか? 当然ながらわざわざ弧状連結を定義したから同値なわけないだろう. でもこれについて, 少し議論をしないと皆さんが納得できないだろう.

Example 2.16 (位相学者の正弦曲線). $S = \{(x, \sin(\frac{1}{x}) \mid 0 < x < 1\}$ が連結であることが明らか, \bar{S} が連結であることは自明, しかし, \bar{S} が弧状連結ならば, 0 に収束する数列 $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}; \sin \frac{1}{s_n} = (-1)^n$ となるようなものが取れる, これが道が連続写像であることに反する.

2.3 連結成分と局所連結

前のセクションでは連結な位相空間についていろんな議論を行った. そこで, 任意の位相空間に対し, それを連結な部分空間に分解して議論したくなる気持ちは持っているのではないか?

Definition 2.17. 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) に次のような同値関係を定める:

$$x \sim y \iff x, y \text{ を含む連結な部分位相空間が存在する.}$$

この時, 同値関係 \sim による同値類を X の成分 (*components*) と呼ぶ.

この二項関係は同値関係であることを各自確認してみると良い.

Definition 2.18. 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) に次のような同値関係を定める:

$$x \sim y \iff x, y \text{ を結ぶ道が存在する.}$$

この時, 同値関係 \sim による同値類を X の道成分 (*path components*) と呼ぶ.

この二項関係も同値関係である. これは自明に見えるが証明は自明ではない. しかし, Theorem 1.54 を利用すれば流石にお猿さんでも解けるから, ここの言わないようにしておく.

Exercise 2.19. 連結あるいは弧状連結な空でない部分位相空間に対し, それと交わりを持てる連結種類に対応する成分がただ一つしかありえない. ^{*1}

Definition 2.20. 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) が x で局所 (弧状) 連結 (*locally (path) connected at x*) であるとは, x の任意の開近傍 U に対し, $x \in V \subseteq U$ を満たす (弧状) 連

^{*1} これは成分が同値関係で結ばれていることに由来する性質である.

結な開近傍 V が存在する. X が任意の点 $x \in X$ で局所 (弧状) 連結となる時, X が局所 (弧状) 連結空間 (*locally (path) connected space*) と呼ぶ.

Remark 2.21. 位相空間が連結ならば局所連結である. 位相空間が弧状連結ならば局所弧状連結である. ^{*2} これらの主張はいずれも不成立である. 前者の反例は位相学者の正弦曲線で与えられて, 後者の反例は次の演習問題に取り組んでいただくとわかるのではないかな.

Exercise 2.22. X を区間 $[0, 1] \times \{0\}$ 上の有理点とする. T を X 上の各点と点 $(0, 1)$ を結ぶ線分からなる集合とする. この集合 T に \mathbb{R}^2 に対する部分位相を入れる, 位相空間 (T, \mathcal{O}_T) が弧状連結であるが, 局所弧状連結ではないことを示せ.

さて, 局所における連結や弧状連結はなぜ必要とされるでしょう? そもそも連結と弧状連結は我々のイメージに即しているし, これ以上の連結性は何に使われるかが意味不明に見えるでしょう. しかし, 局所における連結性をよく見てみると, 開集合の連結性と深く関わっている. 局所連結性と局所弧状連結性の位相的性質が似ているため, 今後議論がこの両者のいずれに対しても成立する時, 単に局所的連結性で表現する.

Theorem 2.23. 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) に対し, 以下の2つの命題が互いに同値である:

1. X が局所 (弧状) 連結である.
2. X の任意の開集合 U に対し, U の (道) 成分が開集合である.

Proof. \Rightarrow を示す: U の任意の (道) 成分 C を取る. $x \in C$ を任意に固定して, X の局所的連結性より, $x \in V \subseteq U$ を満たす (弧状) 連結な開集合が存在する, この場合, V と交わりを持ちうる U の (道) 成分が C しか存在しない. よって, $V \subseteq C$ がわかり, C が開集合であることを示せた.

\Leftarrow を示す: $x \in X$ を任意に取る. x の開近傍 U を任意に取る. この時, x を含む U の (道) 成分 V を取れば, 仮定より V が開集合であることがわかる. これで局所的連結性を示せた. \square

いよいよ連結性の最後の部分になった. つまり局所連結性と局所弧状連結性は開集合の世界では類似な構造を持つことそれが成分に現れている. この関係性は次の定理で述べられる:

Theorem 2.24. 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) の任意の道成分がある成分に含まれている時, もし位相空間自体が局所弧状連結ならば, 成分と道成分が一致する.

Proof. 位相空間 X の成分 C を任意に取る. $x \in C$ を任意にとって固定する. x を含む X の道成分 P を一つとり, P が弧状連結なので, 連結でもある. よって, $P \subseteq C$ が導かれる. 以下 $C \subseteq P$ を示す:

$P \subsetneq C$ と仮定して, 矛盾を導く: Q を C と交わりを持つが, P と交わらない道成分全体の和集合とする.

$$C = P \cup Q.$$

道成分が弧状連結で, 連結であるから, 成分が同値関係で定義されたことを思い出せば, $Q \subseteq C$ となる. 局所弧状連結であるから, 道成分が開集合となる. 従って, P, Q が C の分

^{*2} 同じ 0 に収束な点列を開近傍の中から選び出せば良い.

割をなす。矛盾が生じた。以上より $P = C$ が得られ、局所連結な位相空間では、道成分と成分が一致することを示せた。□

2.4 コンパクト性

Definition 2.25 (被覆). 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) の部分集合族 \mathcal{A} に対し, $\bigcup \mathcal{A} = X$ を満たすならば, \mathcal{A} を X の被覆 (*covering*) と呼び, さらに \mathcal{A} の各元が開集合の時, \mathcal{A} を X の開被覆 (*open covering*) とする. 部分空間の被覆は集合を含むことを満たせば良いとする. 特に被覆が有限個の集合からなる場合, 被覆のことを有限被覆と呼ぶ.

Definition 2.26 (コンパクト性). 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) がコンパクト (*compact*) とは, 任意の開被覆が X の有限被覆を部分集合に持つ.

Lemma 2.27 (部分空間におけるコンパクト性). 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) の部分空間 Y に対し, Y がコンパクトであることと, Y の任意の X で開集合族が被覆となる場合, その部分有限被覆が存在する.

これに関して, 部分位相空間が開集合との共通集合からできることより直ちに導かれる.

Theorem 2.28. コンパクトな位相空間における閉集合からなる部分位相空間もコンパクトである.

Proof. コンパクトな位相空間 (X, \mathcal{O}_X) の閉集合 Y の任意の開被覆 \mathcal{A} を取る.

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X \setminus Y\}.$$

が X の開被覆となるので, \mathcal{B} から X の有限開被覆 \mathcal{B}' が取れる, この場合, $\mathcal{B}' \setminus \{X \setminus Y\}$ が \mathcal{A} から取り出した Y の有限被覆となる. □

こんなの思いつくわけないだろう! と思っているでしょう. 僕も最初の時にこう思ったよ. でもよく考えたら閉集合と言われたら, その補集合が開であることを常に意識する必要はあるかもしれない. 一言聞いただけで位相のすべてを理解できるわけないから, 細かいところまで証明を書く練習をすると良い.

Theorem 2.29. Hausdorff 空間において任意のコンパクトな部分空間が閉集合である.

Proof. Hausdorff 空間 (X, \mathcal{O}_X) のコンパクトな部分位相空間 Y を任意に取る. 以下 Y が (X, \mathcal{O}_X) での閉集合であることを示す:

言い換えると, $X \setminus Y$ が開集合であり, 任意の $x \in X \setminus Y$ に対し, $V \cap Y = \emptyset$ となる x の開近傍が存在することを示せば良い. このような x を 1 つ取って固定する.

空間の Hausdorff 性より, 任意の点 $y \in Y$ と 固定された x に対し, 互いに非交な開近傍 $V \in \mathcal{U}_y, U \in \mathcal{U}_x$ が取れる. このようにできた開集合族 $(V_y)_{y \in Y}$ が Y の開被覆であり, 空間のコンパクト性より, Y の有限部分集合 J が取れて, $(V_y)_{y \in J}$ が集合 Y の有限被覆となる. この時, Hausdorff 性より定まる非交開近傍の共通部分 $\bigcap (U_y)_{y \in J}$ が開集合であり, これが Y と交わらない. つまり, 任意の $y \notin Y$ に対し, $X \setminus Y$ に含まれる開集合が取れるので, $X \setminus Y$ が開集合であり, つまり, Y が閉集合であることを得られた. □

この証明では次のような Lemma も示された.

Lemma 2.30. Y が Hausdorff 空間 X のコンパクトな部分位相空間である. $x_0 \notin Y$ ならば, $x_0 \in U, Y \subseteq W$ を満たす互いに交わらない開集合 U, W が存在する.

Theorem 2.31. コンパクト空間の連続写像での像もコンパクト空間である.

Proof. (X, \mathcal{O}_X) をコンパクトな位相空間, (Y, \mathcal{O}_Y) を位相空間とする. 写像 $f : X \rightarrow Y$ を連続写像とする. $f(X)$ が (Y, \mathcal{O}_Y) のコンパクトな部分位相空間であることを示す:

$f(X)$ の開被覆 $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ を任意に取る. f が連続写像なので, $(f^{-1}(A_\alpha))_{\alpha \in J}$ が X の開被覆となる. X がコンパクトな位相空間なので, J の有限部分集合 K が存在し, $(f^{-1}(A_\alpha))_{\alpha \in K}$ が X の有限開被覆となる. つまり, $(A_\alpha)_{\alpha \in K}$ が $f(X)$ の有限開被覆となる.

□

Theorem 2.32. (X, \mathcal{O}_X) をコンパクトな位相空間, (Y, \mathcal{O}_Y) を Hausdorff 空間とする. $f : X \rightarrow Y$ を連続な全単射であるならば, f が同相写像である.

Proof. 逆写像 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ が連続写像であることを示せばよくて, この時, 閉集合を用いて議論する:

A を X の閉集合とする. この時, コンパクトな位相空間の閉集合がコンパクトな部分位相空間であるので, 連続写像 f での像 $f(A)$ が Y のコンパクトな部分位相空間である. また Hausdorff 空間のコンパクトな集合が閉集合であることが示されていたので, $f(A)$ が閉集合であり, f^{-1} が連続写像であることが確認でき, f が同相写像であることが導かれる.

□

Lemma 2.33. 積位相空間 $(X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y})$ に対し, Y がコンパクトな位相空間とする. この時, N が積位相空間で, $\{x_0\} \times Y$ を含む開集合ならば, N が x_0 のある開近傍 W からなる集合 $W \times Y$ を含む.

Proof. N に含まれる積位相空間の開基要素 $U \times V$ 全体が開集合 N を生成するから, N の開被覆である. この場合, $\{x_0\} \times Y$ が Y と同相であるから, 先程の開被覆から有限開被覆が取れる. さらに, 有限開被覆の任意要素が $\{x_0\} \times Y$ と交わりを持つものまで制限できる.

この有限開被覆の族を $(U_i \times V_i)_{i \in K}$, K を有限集合とする.

$$W = \bigcap_{i \in K} U_i$$

とすれば, W が X での開集合となる. しかも, $(U_i \times V_i)_{i \in K}$ が W の有限開被覆でもある. 従って, $W \times Y \subseteq N$ であることがわかった.

□

Theorem 2.34. 有限個のコンパクトな位相空間から作られる積位相空間もコンパクトである.

Proof. コンパクトな位相空間 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ の積位相空間 $(X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y})$ がコンパクトな位相空間であることを示せば, 数学的帰納法より任意の有限個のコンパクト位相空間からなる積位相空間がコンパクトであることがわかる.

まず, $X \times Y$ の開被覆 \mathcal{A} を任意に取る, $x_0 \in X$ を任意に取る. この時, $\{x_0\} \times Y$ の有限開被覆 \mathcal{A}' が \mathcal{A} から取れる.

$N = \bigcup \mathcal{A}_{x_0}$ とする. 先程の補題より, ある x_0 の開近傍 W が存在して, $W \times Y \subseteq N$ が成立する. 任意の $x \in X$ に対し, W_x を取ってくると, $(W_x)_{x \in X}$ が X の開被覆となり, X のコンパクト性より, X の有限部分集合 K が存在し, $(W_x)_{x \in K}$ が X の開被覆となる. 従って, $\bigcup_{x \in K} \mathcal{A}_x$ が $X \times Y$ の有限開被覆となる. \square

これでコンパクト性を持つ集合を用いてより大きなコンパクト集合を作れることがある意味では保証されている. しかし, 上記の証明では選択公理を暗黙に使っている. どこで用いられているでしょう? 一応演習問題として該当箇所を指摘してください, また上記の証明を標準積位相空間まで拡張できるかを考えてみてください. 今から続きを見ることをやめて, ゆっくり考えてから下の標準積位相空間への拡張を鑑賞してください.

Definition 2.35 (有限交叉性). 集合 X の部分集合族 \mathcal{C} が有限交叉性 (*finite intersection property*) を持つとは \mathcal{C} の任意の有限部分集合 \mathcal{C}' に対し, $\bigcap \mathcal{C}' \neq \emptyset$ が成立する.

Theorem 2.36. 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) がコンパクトな位相空間であることと (X, \mathcal{O}_X) の任意の有限交叉性を持つ閉集合族 \mathcal{C} に対し, $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$ と同値である.

Proof. X の部分集合族 \mathcal{A} が与えられた時,

$$\mathcal{C} = \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

と定義する. そして以下の命題が成立する:

1. \mathcal{A} が X の開集合族であることと \mathcal{C} が X の閉集合族であることと同値である.
2. \mathcal{A} が X の被覆であることと, $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$ と同値である.
3. \mathcal{A} のある有限部分集合 \mathcal{A}' が X の被覆であることと \mathcal{C} のある有限部分集合 \mathcal{C}' に対し, $\bigcap \mathcal{C}' = \emptyset$ と同値である.

以下 X がコンパクトであることと同値命題を考えれば良い. X の任意の開集合族 \mathcal{A} に対し, X の有限被覆を持っていなければ, \mathcal{A} が X の被覆にならない. この命題を上記の三条件で書き換えると正しく, X の任意の開集合族 \mathcal{C} に対し, \mathcal{C} が有限交叉性を持つならば, $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$ となる. \square

Lemma 2.37. 集合 X に対し, $\mathcal{F} = \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{A} \text{ が有限交叉性を持つ}\}$ とする. \mathcal{F} が包含関係での帰納的順序集合である.

Proof. \mathcal{F} の鎖 (包含関係での全順序部分集合) \mathcal{C} を任意に取る. $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathcal{C}$ を示す:

$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ の有限部分集合 $B = \{B_1, \dots, B_i\}$ を任意に取る. 任意の B_k に対し, それを含む \mathcal{C} の元 C_k が存在する. C_1, \dots, C_i の中から包含関係での最大元が存在して, それが有限交叉性を持つので, $\bigcap B \neq \emptyset$ が示される. 以上より, \mathcal{F} が帰納的順序集合であることが示された. \square

Lemma 2.38. 集合 X に対し, \mathcal{D} が X の有限交叉性を持つ部分集合族の中で包含関係での極大元であるならば, 以下の2つの命題が成立する:

1. \mathcal{D} の任意の有限個の要素の共通部分が \mathcal{D} に属する.
2. X の部分集合 A が \mathcal{D} の任意要素と交わるならば, A が \mathcal{D} に属する.

Proof. 1 の証明, \mathcal{D} の任意の有限個の要素の共通部分を B とする, $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{B\}$ と定める. \mathcal{E} は有限交叉性を持つことが明らかであり, \mathcal{D} の包含関係での極大性より, $\mathcal{E} = \mathcal{D}$ とならざるを得ない.

2 の証明, $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{A\}$ とすれば, 同じく極大性原理のもとで示される. \square

Theorem 2.39 (Tychonoff theorem). 任意のコンパクトな位相空間からなる標準積位相空間がコンパクトである.

Proof.

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_{\alpha}.$$

任意の X_{α} をコンパクトな位相空間とする. \mathcal{A} を有限交叉性を持つ X の部分集合族とする. 以下,

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} \neq \emptyset.$$

を示せば, X のコンパクト性が直ちにこれに従う. Zorn の補題より, \mathcal{A} を含む有限交叉性を持つ包含関係での極大元 \mathcal{D} が取れる.

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D} \neq \emptyset.$$

を示せば, \mathcal{A} に関する部分がすぐに導かれる. 任意の $\alpha \in J$ に対し, 成分射影 $\pi_{\alpha} : X \rightarrow X_{\alpha}$ について, 集合 P_{α} を次のように定める:

$$P_{\alpha} = \{\pi_{\alpha}(D) \mid D \in \mathcal{D}\}.$$

P_{α} が有限交叉性を有し, X_{α} のコンパクト性より,

$$x_{\alpha} \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_{\alpha}(D)}.$$

が取れる. このように, x_{α} を成分に持つ $x = (x_{\alpha})_{\alpha \in J} \in X$ を固定する. 以下, 任意の $D \in \mathcal{D}$ に対し, $x \in \overline{D}$ が成立することを示す:

まず, $\pi_{\alpha}^{-1}(U_{\alpha})$ が x を含むならば, $\pi_{\alpha}^{-1}(U_{\alpha})$ と \mathcal{D} の任意要素と交わることを示す:

$D \in \mathcal{D}$ を任意に取る. U_{α} が x_{α} の開近傍であるから, $U_{\alpha} \cap \overline{\pi_{\alpha}(D)} \neq \emptyset$, 従って, ある点 $y \in D$ が存在し, $\pi_{\alpha}(y) \in U_{\alpha} \cap \overline{\pi_{\alpha}(D)}$ が言える, つまり, $y \in \pi_{\alpha}^{-1}(U_{\alpha}) \cap D$ が成立する.

よって, x を含む準開基がすべて \mathcal{D} と交わりを持つ, x を含む準開基がすべて \mathcal{D} に属することとなり, \mathcal{D} の有限交叉性より, x の開近傍がすべて \mathcal{D} に属し, 任意の $D \in \mathcal{D}$ に対し, x の任意開近傍と D との交わりが空でないため, $x \in \overline{D}$ が言える. 以上より,

$$x \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D}.$$

が成立することを示せたので, X がコンパクトな位相空間であることがわかる. \square

実は上記の証明には選択公理を2回用いました, Zorn の補題ともう一箇所暗黙に選択公理を利用していました. これも読者の皆様に任せておきます. では完全に観賞用なのですが, コンパクト性を持つ位相空間の積位相空間がコンパクトであることから選択公理を導けます.

Theorem 2.40. *Tychonoff* の定理は選択公理を含意する.

Proof. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し, $A_\lambda \neq \emptyset$ となるような集合系 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し, その直積が空でないことを示す:

$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ に属さない集合 ω を選び,

$$X_\lambda = A_\lambda \cup \{\omega\}.$$

となるような集合系 $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を構成する. $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に $(\omega)_{\lambda \in \Lambda}$ となる元が存在するので, 空でないことがわかる. 各 X_λ に補有限位相を入れ, $\{\omega\}$ を位相に入れるとコンパクトな位相空間であることが直ちにわかる. $F_\lambda = \pi^{-1}(A_\lambda)$ となる集合系 $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が有限交叉性を持つ閉集合系となる. 閉集合であることは閉集合の連続写像での逆像が閉集合であることに由来し, 有限交叉性は有限個射影成分が $(A_{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n}$ に属し残りが ω と指定するような元 x が存在することより導かれる. 積位相空間がコンパクトであることを使えば, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$ が導かれ, この集合は正しく $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ そのものである. \square

2.5 実数上のコンパクト空間

Theorem 2.41. 最小上界性を有する順序位相空間における閉区間がコンパクトである.

Proof. 閉区間 $[a, b]$ を $a < b$ を満たすように取る. この区間の開被覆 \mathcal{A} について, 次の集合を考える:

$$S = \{x \in [a, b] \mid \mathcal{A} \text{ から } [a, x] \text{ の有限開被覆が取れる}\}.$$

$x \in S$ が自明で最小上界性より, $s = \sup S$ が存在して, 以下 $s = b$ であることを示す:

まず $s \in S$ であることを示す: s を含め開集合 $A \in \mathcal{A}$ を任意に取り, A が $(d, s]$ となるような $[a, b]$ に含まれる区間を含む, この区間から元 z を任意に取る, 最小上界性より, $z \in S$ が成立する. もし $s \notin S$ ならば, $[a, z]$ が有限開被覆を持ち, 更に A が $[z, s]$ を含むので, 合わせて有限開被覆が取れるから矛盾が生じる.

次に, $s < b$ と仮定して矛盾を導く:

s の後続元が存在するならば, s の後続元を含む開集合を取れば, 最小上界性に反する.

s の後続元が存在しないならば, s を含む開集合 A' が存在し, $[a, b]$ に含まれるような $[s, c]$ が取れる, 更に (s, c) が空とならないので, s より大きい x が存在し, $[a, x]$ が有限被覆を持つ. これも矛盾を導く.

従って, $s = b$ とならなければ行けない, 定理が示された. \square

Corollary 2.42. 実数の任意閉区間がコンパクトである.

Exercise 2.43. 実数の集合において, 区間縮小法が成立する.

Theorem 2.44. n 次元ユークリッド空間の通常の距離に誘導される位相空間の部分集合 A に対し, A がコンパクトであることと有界かつ閉集合であることと同値である.

Proof. \implies A がコンパクトな部分集合とする. 距離空間が Hausdorff 空間であることより, A が閉集合である. A がコンパクトな集合なので, 開被覆

$$\mathcal{A} = \{B_d(0, n) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

から A の有限被覆が存在する. 従って, ある $M \in \mathbb{Z}$ が存在し, $A \subseteq B_d(0, M)$ が存在する. 従って, 任意の $x, y \in A$ に対し, $d(x, y) < 2M$ が三角不等式から得られ, 有界性を示せた.

\Leftarrow A が有界な閉集合とする. この時, ある正の実数 M が存在し, 任意の $x, y \in A$ に対し, $d(x, y) \leq M$ が成立する. このような M を 1 つ取って固定する. $x_0 \in A$ を 1 つ取って固定する. $N = M + d(x_0, 0)$ と定める. この場合 $A \subseteq [-N, N]^n$ がわかる. A はコンパクトな位相空間の閉集合なので, A もコンパクトである. \square

Theorem 2.45 (最大値, 最小値の定理). 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し, X がコンパクトな位相空間, Y が順序位相空間ならば, $f(X)$ の最大値と最小値が存在する.

Proof. 最大値を持つことを示す (最小値の部分は同じように示せるから演習問題にする): 最大値が存在しないと仮定して矛盾を導く.

$$\mathcal{A} = \{(-\infty, a) \mid a \in f(X)\}.$$

が $f(X)$ の開被覆である. X がコンパクトな位相空間で, f が連続写像より, $f(X)$ もコンパクトな位相空間となる. この場合, \mathcal{A} から $f(X)$ の有限被覆 $\mathcal{A}' = \{(-\infty, a_1), \dots, (-\infty, a_i)\}$ が取れる, しかし, $f(X)$ に最大値が存在しないから, \mathcal{A}' が $f(X)$ の被覆にならない. 矛盾が生じる. \square

Definition 2.46. 距離空間 (X, d) について, 点 $x \in X$ から空でない部分集合 $A \subseteq X$ への距離は次のように定める:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Claim 2.47. 距離空間 (X, d) の空でない部分集合 A より定まる写像 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x \mapsto d(x, A).$$

が連続である.

Proof. 任意の $x, y \in X$ と任意の $a \in A$ に対し,

$$\begin{aligned} d(x, A) &\leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) \\ \iff d(x, A) - d(x, y) &\leq d(y, a) \\ \implies d(x, A) - d(x, y) &\leq d(y, A) \\ \iff d(x, A) - d(y, A) &\leq d(x, y) \end{aligned}$$

より, 連続であることが明らかである. \square

Theorem 2.48. コンパクトな距離空間 (X, d) の任意の開被覆 \mathcal{A} に対し, ある正の実数 δ が存在し, X の任意の部分集合 U に対し, $\text{diam} U < \delta$ ならば, 開被覆のある要素 A が存在し, $U \subseteq A$ を満たす. このような正の実数 δ を *Lebesgue number* と呼ぶ.

Proof. (X, d) の開被覆 \mathcal{A} を任意に取る. X がコンパクトな位相空間なので, \mathcal{A} から有限開被覆 \mathcal{A}' が取れる. \mathcal{A}' に対応する n 個の要素からなる閉集合族 $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ を取り, 次のような連続写像 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を定める:

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(x, C_i).$$

任意の $x \in X$ に対し, $x \in A_i$ を満たす, $A_i \in \mathcal{A}'$ を取り, 距離空間の定義より, ある ε を半径とする開近傍が取れて, A_i に含まれる, C_i が A_i の補集合なので, 任意の $y \in C$ に対し, $d(x, y) \geq \varepsilon$ となる. したがって, $f(x) \geq \frac{1}{n} d(x, C_i) \geq \frac{\varepsilon}{n} > 0$. これがコンパクトな位相空間に定義される連続写像なので, 最小値 $\delta > 0$ が取れる. 次に $\text{diam} U < \delta$ を満たす X の部分集合 U を任意に取る. $x \in U$ を任意に一つ取って固定する.

$$\delta \leq f(x) \leq d(x, C_m)$$

を満たすかつ $d(x, C_m)$ が最大となるような C_m を取る. C_i に対応する $A_i \in \mathcal{A}'$ を取り, この時, x の半径 δ の開球体が A_i に含まれるから問題が示された. \square

Definition 2.49. 距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ 間の写像 $f: X \rightarrow Y$ が一様連続 (*uniformly continuous*) とは, 任意の正の実数 ε に対し, ある正の実数 δ が存在し, 任意の $x, y \in X$ について,

$$d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Theorem 2.50. 距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ に対し, $f: X \rightarrow Y$ が連続写像とする. 距離空間 X がコンパクトならば, 写像 f が一様連続である.

Proof. $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ を任意に取る. f が連続写像なので, $\mathcal{A} = \{f^{-1}(B_{d_Y}(x, \frac{\varepsilon}{2})) \mid x \in Y\}$ が X の開被覆となる. この時, Lebesgue number δ を一つ取って固定する. $d(a, b) < \delta$ を満たす $a, b \in X$ を任意に取り, この時, ある $x \in Y$ が存在し, $f(a), f(b) \in B_{d_Y}(x, \frac{\varepsilon}{2})$ が成立する. したがって, $d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon$. 一様連続性が示された. \square

2.6 集積点コンパクト性

Definition 2.51. 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) が集積点コンパクト (*limit point compact*) であるとは任意の無限濃度の部分集合に集積点をもつ.

Theorem 2.52. コンパクト性は集積点コンパクト性を含意するがその逆は必ずしも成立するとは限らない.

Proof. 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) の部分集合 A を任意に取る. ここで, X がコンパクトであることを仮定して, 集積点コンパクト性の対偶を示す:

A が集積点を持たないと仮定して, A は有限濃度を持つことを示せば十分である. A が集積点を持たなければ, $\overline{A} = A' \cup A = \emptyset \cup A = A$ となり, A が閉集合となる. 次に任意の $x \in A$ に対し, A が集積点を持たないことから, $U \cap A = \{x\}$ となるような開近傍 $U \in \mathcal{U}_x$ を取ることができる. このように A の開被覆を構成する. A コンパクト空間における閉集合はコンパクトであることから, A が有限個要素から構成されることがわかる.

逆が成立しない例として、順序位相での最小不可算集合は最大値を持たないからコンパクト性を満たさず、無限部分集合 A を取り出した時、更に可算無限の部分集合 $B \subseteq A$ を取り出す。最小不可算性より、 B がある閉区間に含まれて、最小上界性を持つ閉区間が順序位相ではコンパクトであるから、上記の証明より集積点を持つ。したがって集積点コンパクト性を満たす。 \square

Definition 2.53. 写像 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ を X 上の点列と呼ぶ。通常 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ と表す。 \mathbb{N} 上に定義される狭義単調増加写像 $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ に対し、

$$h(x) = f(g(x)).$$

の形で定義される写像 $h: \mathbb{N} \rightarrow X$ が点列 f の部分列と呼ぶ。

Definition 2.54. 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) が点列コンパクト (*sequentially compact*) であるとは任意の点列に対し、収束部分列が存在する。

Theorem 2.55. 距離空間 (X, d) において以下3つの命題が互いに同値である。

1. X がコンパクトである。
2. X が集積点コンパクトである。
3. X が点列コンパクトである。

Proof. (1) \implies (2) はすでに示されたので、ここで (2) \implies (3), (3) \implies (2) を示す:

(2) \implies (3) の証明:

点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を任意に取る。 $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とする。 A が有限集合ならば、点列がある自然数以降で定数列となるから収束である。 A が無限集合の時、集積点コンパクト性より A の集積点 $a \in X$ が存在する。距離空間が Hausdorff 空間であることから (check せよ) Theorem 1.44 より、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、

$$C_n = B_d(a, \frac{1}{2^n}) \cap A.$$

が無限集合である。選択公理より、 $x_{n(k)} \in C_k$ を満たす、狭義単調増加の $n(k)$ の列が取れる。これより構成される $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ が収束する部分列である。(check せよ)

(3) \implies (1) の証明: この証明はかなり複雑であり、まず流れを述べておくと: 点列コンパクト性から任意の開被覆に対し、Lebesgue number が存在する。更に任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し、有限個の半径 ε の開球で X を覆うことができる。この事実を用いて距離空間のコンパクト性が得られる。

Step1: ある X の開被覆 \mathcal{A} に対し、Lebesgue number が存在しないと仮定する。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、 $\text{diam} C_n < \frac{1}{2^n}$ で、 \mathcal{A} の任意の元に含まれないような集合 C_n が存在する。選択公理よりこのような集合列 $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が取れる。更に、選択公理より先程の集合列から一点ずつ取り出してできる数列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が構成される。点列コンパクト性より、収束部分列 $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ のが取れて、収束先を a とする。 $a \in A \in \mathcal{A}$ を満たす A を一つ取る。 A が開集合より、ある正の実数 δ が存在し、 $B_d(a, \delta) \subseteq A$ を満たす。 $d(x_{n(k)}, a) < \frac{\delta}{2}$ かつ $\frac{1}{2^k} < \frac{\delta}{2}$ を満たすような自然数 k を一つ取り、この時、 $C_k \subseteq A$ が成立し、構成に反する。従って、Lebesgue number が存在する。

Step2: ある正の実数 ε が存在して、任意の有限個半径 ε の開球体で X の開被覆になら

ないと仮定して、矛盾を導く: $x_0 \in X$ を任意に取り、仮定より $B_d(x_0, \varepsilon)$ が全体を覆うことができないので、 $x_1 \notin B_d(x_0, \varepsilon)$ となるような x_1 を取れる。 x_n が定まる段階で、 $\bigcup_{0 \leq i \leq n} B_d(x_i, \varepsilon)$ が全体を覆うことができないので、それ以外のところから x_{n+1} を取れる。選択公理より、このような点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を構成できる。しかし、いかなる部分列が収束しないことが構成よりわかる。実は任意の $0 \leq j \leq n$ に対し $d(x_{n+1}, x_j) > \varepsilon$ 。これが点列コンパクト性に反する。従って、任意の正の実数 ε に対し、 X を有限個の半径 ε となるような開球で覆うことができる。

Step3: X の開被覆 \mathcal{A} を任意に取る。Step1 より Lebesgue number δ が存在する。Step2 より X を有限個の半径 $\frac{\delta}{3}$ の開球で覆うことができる。各開球の直径が $\frac{2\delta}{3}$ より、それを含む開被覆の要素が存在する。従って、有限個の開球に対し、このような開被覆の元を取り出せば、 X の被覆となる \mathcal{A} の有限部分集合が構成されるので、コンパクト性が示された。 \square

2.7 局所コンパクト性とコンパクト化

この section を読み飛ばしても良い。

Definition 2.56. 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) が点 x において局所コンパクト (*locally compact at x*) であるとは x のある開近傍を含むようなコンパクトな位相空間 C が存在する。 X のすべての点において局所コンパクトであることを位相空間 (X, \mathcal{O}_X) が局所コンパクト (*locally compact*) であることをいう。

Theorem 2.57. 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) に対し、 X が局所コンパクトな Hausdorff 空間であることと以下の3つの性質を満たす位相空間 Y が存在することと同値である:

1. X が Y の部分位相空間である。
2. $Y \setminus X$ が一点集合である。
3. Y がコンパクトな Hausdorff 空間である。

上記の性質を同時に満たす Y, Y' が存在するならば、 X において恒等写像となるような Y, Y' 間の同相写像が存在する。

Proof. Step1: まず一意性を示す: Y, Y' を上記の性質を満たす位相空間とする。写像 $h: Y \rightarrow Y'$ を X において恒等写像で、一点集合 $Y \setminus X = \{p\}$ の h での像が $Y' \setminus X = \{q\}$ となるような写像とする。この写像が全単射であることが明らかである。また h^{-1} が連続写像であることさえ言えば、対称性より h が同相写像であることがわかる。 Y での開集合 U を任意に取り、 $h(U)$ が Y' での開集合であることを示す:

$p \notin U$ の場合、 $h(U) = U$ 、 U が Y の開集合であるから、 U が X での開集合であることが明らか、また $Y' \setminus X$ が一点集合で Y' が Hausdorff 空間であるから、有限濃度を持つ集合がすべて閉集合であり、 X が Y' での開集合となる。従って、 $h(U)$ が Y' で開集合となる。
 $p \in U$ の場合、 $C = Y \setminus U$ が Y の閉集合で、従って、 C が Y のコンパクトな部分集合である。 $C \subseteq X$ から C が X でのコンパクトな部分空間でもある。 X が Y' の部分位相空間であるから、 C が Y' のコンパクトな部分位相空間であることは自明である。 Y' が Hausdorff 空間より、 C が閉集合で、 $h(U) = Y \setminus C$ で、 $h(U)$ が開集合となる。

Step2: これから局所コンパクトな Hausdorff 空間から上記 3 条件を満たすコンパクトな位相空間 Y を構成する:

便宜上, $Y = X \cup \{\infty\}$ と定める. Step1 の証明において, (Y, \mathcal{O}_Y) は X の開集合全体, C がコンパクト集合となるような $Y \setminus C$ 全体を開集合として含む.

$$A = \{U \in \mathcal{P}(Y) \mid U \in \mathcal{O}_X\}$$

$$B = \{Y \setminus C \mid C \text{ が } X \text{ においてコンパクトである.}\}$$

以下, $\mathcal{O}_Y = A \cup B$ が位相の公理を満たすことを確認する:

空集合が A に属し, Y が B に属するから一番目の性質が自明である.

共通部分に関して,

$$\begin{array}{ll} U_1 \cap U_2 \in A & U_1, U_2 \in A \\ (Y \setminus U_1) \cap (Y \setminus U_2) = Y \setminus (U_1 \cup U_2) \in B & Y \setminus U_1, Y \setminus U_2 \in B \\ U_1 \cap (Y \setminus C_1) = U_1 \cap (X \setminus C_1) \in A & U_1 \in A, Y \setminus C_1 \in B \end{array}$$

次に和集合に関して閉じていることを示す:

$$\begin{aligned} \bigcup U_\alpha &= U \in A \\ \bigcup (Y \setminus C_\beta) &= Y \setminus \left(\bigcap C_\beta \right) = Y \setminus C \in B \\ \left(\bigcup U_\alpha \right) \cup \left(\bigcup (Y \setminus C_\beta) \right) &= U \cup (Y \setminus C) = Y \setminus (C \setminus U) \in B \end{aligned}$$

次に X が Y の部分位相空間であることを示す: $U \in \mathcal{O}_Y$ を任意に取る. $U \in A$ ならば, $U \cap X = U \in \mathcal{O}_X$. $U = Y \setminus C \in B$ ならば, $(Y \setminus C) \cap X = X \setminus C$ で C が閉集合より, $U \cap X$ が X での開集合である.

続いて Y がコンパクトであることを示す: Y の任意の開被覆 \mathcal{A} が B の元を含む. $Y \setminus C \in \mathcal{A} \cap B$ を一つ取り, $D = \{A \cap X \in \mathcal{A} \mid A \neq Y \setminus C\}$ とすると, D がコンパクト集合 C の開被覆となり, \mathcal{A} から有限個の要素を用いて, C の開被覆となる. $Y \setminus C$ を加えると, Y 全体の有限開被覆をなす.

これから Y の Hausdorff 性を確認する. $x, y \in Y$ を任意に取る, $x, y \in X$ の時, X の Hausdorff 性に従う. $x \in X, y = \infty$ の場合のみを議論すれば良い. この時, X の局所コンパクト性より, x のある開近傍 U を含むコンパクト集合 C が存在する. $U, Y \setminus C$ が x, y を分離させる互いに交わらない開集合となる.

Step3: 上記 3 条件を満たす Y が存在する時, X が局所コンパクトな Hausdorff 空間であることを示す:

Hausdorff 性は X が Y の部分位相空間 であることに従う. $x \in X$ を任意にとると, ∞, x を分離させる互いに交わらない $U \in \mathcal{U}_x, V \in \mathcal{U}_\infty$ が存在する. $Y \setminus V$ が閉集合で, コンパクトである. 従って, 局所コンパクト性を示せた.

□

Definition 2.58. コンパクトな Hausdorff 空間 Y の真の部分集合 X の閉包は Y に一致するならば, Y を 位相空間 X のコンパクト化 (*compactification*) といい, $Y \setminus X$ が一点集合の場合, Y を X の一点コンパクト化 (*one-point compactification*) という.

Theorem 2.59. (X, \mathcal{O}_X) を Hausdorff 空間とする. X が局所コンパクトであることと任意の点 $x \in X$ と $U \in \mathcal{U}_x$ に対し, $\bar{V} \subseteq U$ を満たすコンパクトな $\bar{V} \in \mathcal{N}_x$ が成立することと同値である.

Proof. 構成から局所コンパクト性が成立するのが明らかであるので, その逆を示す:
 $x \in X$ と $U \in \mathcal{U}_x$ を任意に取り, X の一点コンパクト化 Y を取り, $C = Y \setminus U$ が Y のコンパクトな閉集合となる. Lemma 2.30 より, $x \in V, C \subseteq W$ となる互いに交わらない開集合 V, W が存在する. $V \subseteq U, \bar{V}$ が Y でのコンパクト集合で, $V \subseteq Y \setminus W$ より, $\bar{V} \subseteq Y \setminus W$, 従って $C \subseteq Y \setminus V$ が成立する. すなわち, $\bar{V} \subseteq U$ が成立する. \square

Corollary 2.60. X を Hausdorff な局所コンパクト空間とする. 任意の $A \subseteq X$ に対し, A が開集合または閉集合である時, 部分位相空間 A が局所コンパクトである.

Corollary 2.61. X があるコンパクトな Hausdorff 空間の部分空間と同相であることと, X が局所コンパクトな Hausdorff 空間であることと同値である.

第 3 章

距離化可能性とパラコンパクト性

この章では、抽象的な位相空間が直感的にわかりやすい距離関数で表現できる必要十分条件と幾何学の重要な道具である一の分割を学習する。

この chapter で登場するすべての位相空間に Hausdorff 性を課す。

3.1 距離化可能性

Definition 3.1. 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) が正則空間 (*regular space*) であるとは、任意の $x \in X$ と任意の閉集合 $A \subseteq X$ に対して、 $x \notin A$ ならば、ある $U, V \in \mathcal{O}_X$, $x \in U, A \subseteq V, U \cap V = \emptyset$ が成立する。

位相空間 (X, \mathcal{O}_X) が正規空間 (*normal space*) であるとは、任意の閉集合 A, B に対して、 $A \cap B = \emptyset$ ならば、ある開集合 U, V が存在し、 $A \subseteq U, B \subseteq V, U \cap V = \emptyset$ を満たす。

次に分離性の使いやすい言い換えを考える。

Proposition 3.2. (X, \mathcal{O}_X) に対して、

1. X が正則空間 \iff 任意の $x \in X$ と任意の $U \in \mathcal{U}_x$ に対して、ある $V \in \mathcal{U}_x$ が存在して、 $\overline{V} \subseteq U$ が成立する。
2. X が正規空間 \iff 任意の閉集合 W と任意の開集合 U に対して、 $W \subseteq U$ ならば、ある開集合 V が存在して、 $W \subseteq V$ かつ $\overline{V} \subseteq U$ が成立する。

Proof. 簡単なため、演習問題とする。(Hint: 図を描いてみよう!) □

次に今までの学習で最も”難しい”定理に出会うことになる。その定理は今までやってきたほぼ自明なものと違って、幾何学的な直感がなければその定理に辿り着くことはない。

Theorem 3.3 (Urysohn の補題). (X, \mathcal{O}_X) を正規空間とする。 $A, B \subseteq X$ を $A \cap B = \emptyset$ を満たす閉集合とする。この時、ある連続関数 $f : X \rightarrow [0, 1]$ が存在して、 $f|_A \equiv 0, f|_B \equiv 1$ を満たす。

まず証明の方針を述べておく。やりたいことは X 上の等高線図を描くことである。 A を等高線 0 の地域 A_0 , B を高さ 1 の高原 A_1 だと思。正規空間の言い換えから等高線 $\frac{1}{2}$ の集合 $U_{\frac{1}{2}}$ が取れる。その閉包 $A_{\frac{1}{2}}$ とする。このプロセスですべての既約分数 $\frac{p}{q}$ で表示される有理数に対応する $A_{\frac{p}{q}}$ を数の大小関係で集合の包含関係を保つ順序で構成して、関数 f を各点 x に対して、 x を含む $A_{\frac{p}{q}}$ の $\frac{p}{q}$ の下限として定めればよい。最後にこれが連続で

あることを示せば定理が従う.

Proof. X が正規空間なので, $A \subseteq U_1, \overline{U_1} \subseteq X \setminus B$ を満たす開集合 U_1 が存在する. これを一つ取る. 更に, $A \subseteq U_0, \overline{U_0} \subseteq U_1$ を満たす開集合 U_0 が存在する. これを固定する.

$(0, 1)$ 上の有理数を $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ で番号づける. (これができるのは集合論の教科書を参照すればわかる Bernstein の定理と呼ばれている) 開集合 U_{q_0} が存在して, $\overline{U_0} \subseteq U_{q_0}$ かつ $\overline{U_{q_0}} \subseteq U_1$ を満たす. この U_{q_0} を取る. 今, U_{q_0}, \dots, U_{q_k} がすべて定義できたとする. 次に $U_{q_{k+1}}$ を構成する. $\{0, q_0, \dots, q_k, 1\}$ の中で, a を q_{k+1} を超えない最大の数, b を q_{k+1} 以上の最小の数とする. 再び X の正規性を利用することで, $\overline{U_a} \subseteq U_{q_{k+1}}, \overline{U_{q_{k+1}}} \subseteq U_b$ を満たす開集合 $U_{q_{k+1}}$ が存在する. これを $U_{q_{k+1}}$ と定める. 帰納的に $(0, 1)$ 上のすべての有理数 q に対して, U_q が定まる.

次に任意の有理数 p に対し,

$$U_p := \begin{cases} \emptyset, & p < 0 \\ X, & p > 1 \end{cases}$$

と拡張する.

この列は構成より, 任意の $p < q$ を満たす有理数に対して, $\overline{U_p} \subseteq U_q$ が成立する. X 上の関数 f を $x \mapsto \inf\{q \mid x \in U_q\}$ と定める. これが所望の関数であることの証明を読者の演習問題にする.

□

次に, 距離空間の分離性について学習する.

Proposition 3.4. (X, d) を距離空間とする. この時, X が正規空間である.

Proof. A, B を $A \cap B = \emptyset$ を満たす閉集合とする. この時, 任意の $x \in A$ に対して, $r_x := \inf\{d(x, y) \mid y \in B\} > 0$. これにより, $\{B_d(x, \frac{r_x}{3})\}_{x \in A}$ が A の開被覆である. 同様に任意の $y \in B$ に対して, $r_y := \inf\{d(y, x) \mid x \in A\} > 0$. これを用いて, $\{B_d(y, \frac{r_y}{3})\}_{y \in B}$ が B の開被覆になる. $U := \bigcup_{x \in A} B_d(x, \frac{r_x}{3}), V := \bigcup_{y \in B} B_d(y, \frac{r_y}{3})$ と定めて, $U \cap V = \emptyset$ であることの証明を読者に任せる.

□

距離化可能性を理解するには局所有限という概念を習得する必要がある. それに局所有限性が今後の微分可能多様体論における 1 の分割という概念と深く関わっている. とりあえず定義だけを先にしておくことにする.

Definition 3.5. (X, \mathcal{O}_X) に対し, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ とする. \mathcal{A} が局所有限 (*locally finite*) であるとは, 任意の $x \in X$ に対して, ある $U \in \mathcal{O}_X$ が存在して, $\{A \in \mathcal{A} \mid A \cap U \neq \emptyset\}$ が有限集合である時をいう.

局所有限性を持つ集合族は閉包との相性がよい. 以下の命題から実感してみよう.

Proposition 3.6. (X, \mathcal{O}_X) の局所有限な部分集合族 \mathcal{A} に対し, 以下の命題が成立する:

1. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ならば, \mathcal{B} も局所有限.
2. $\tilde{\mathcal{A}} := \{\overline{A} \mid A \in \mathcal{A}\}$ も局所有限.
3. $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} = \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A}$.

Proof. 一番目が明らか. 二番目は開集合と A の閉包と交わるなら A との共通部分ももちろん空ではないことより簡単にわかる.

三番目だけを証明する. \subseteq の部分は閉包の特徴づけ Definition 1.79 より直ちに従う. $x \in \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A}$ を任意に取る. この時, $\forall U \in \mathcal{U}_x; U \cap \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$ が成立する. U を \mathcal{A} の有限個の要素 A_1, \dots, A_k としか交わらない開集合として取る.

もし, $x \notin \bigcup_{i=1}^k \overline{A_i}$ だったら, $U \setminus \bigcup_{i=1}^k \overline{A_i}$ が $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ との共通部分が空な x の開近傍になる. これが矛盾を導く. \square

Definition 3.7. (X, \mathcal{O}_X) の部分集合族 \mathcal{B} が可算局所有有限であるとは $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ の形で書ける. ここで, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, \mathcal{B}_n が局所有有限である.

Definition 3.8. \mathcal{A} を (X, \mathcal{O}_X) の部分集合族であるとする. \mathcal{B} が \mathcal{A} の細分 (*refinement*) であるとは, $\forall B \in \mathcal{B}, \exists A \in \mathcal{A}, B \subseteq A$ を満たす時をいう.

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}_X$ の時, \mathcal{A} の開細分といい, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}_X$ の時, \mathcal{A} の閉細分という.

Lemma 3.9. (X, d) を距離空間とする. \mathcal{A} を X の開被覆とする. この時, \mathcal{A} の可算局所有有限な開細分で, X を被覆するような開部分集合族 \mathcal{E} が存在する.

Proof. \mathcal{A} 上の整列順序 $<$ を一つ固定する. $n \in \mathbb{N}$ を任意に一つ固定する. $U \in \mathcal{A}$ に対し, $S_n(U) := \{x \mid B_d(x, 1/2^n) \subseteq U\}$ とする. 次に, 整列順序 $<$ を用いて, $T_n(U) := S_n(U) \setminus \bigcup_{V < U} V$ として定める. $E_n(U) := \bigcup_{x \in T_n(U)} B_d(x, 1/8^n)$ とする.

最後に, $\mathcal{E}_n := \{E_n(U) \mid U \in \mathcal{A}\}$ とする. $\mathcal{E} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n$ が所望の集合族である. この事実を check せよ. \square

実は上記の補題まで距離空間の特徴づけとなる性質をほぼすべて確認した. 次にそれらの性質を満たす位相空間に距離構造を入れることを考えよう.

Definition 3.10. 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) の部分集合 A が G_δ 集合であるとは, A が可算個の開集合の共通部分で表せる時をいう.

Lemma 3.11. (X, \mathcal{O}_X) を可算局所有有限な開基 \mathcal{B} を持つ正則空間とする. この時, X が正規空間で, すべての閉集合が G_δ 集合である.

Proof. 証明は開集合からスタートする. 任意の開集合 W が可算個の開集合の和で書けることを示せば, 補集合を取る操作で, もとの主張が従う. では $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ とする. $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\mathcal{C}_n := \{B \in \mathcal{B}_n \mid \overline{B} \subseteq W\}$ と定める. $U_n := \bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} B$ とおく.

この時, 局所有有限性から, $\overline{U_n} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_n} \overline{B}$ が成立する. 正則性と合わせて,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n} \subseteq W$$

が成立する.

最後に, X が正規空間であることを示す: C, D を $C \cap D = \emptyset$ を満たす閉集合とする. 先ほどの証明まで, $X \setminus D$ を $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n} = X \setminus D$ を満たす開集合列 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が取れる. これが C を被覆して, かつ $\overline{U_n} \cap D = \emptyset$ が成立する. 同じように, $X \setminus C$ に対して, 開集合の列 $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を取って, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$U'_n := U_n \setminus \bigcup_{i \leq n} \overline{V_i}, \quad V'_n := V_n \setminus \bigcup_{i \leq n} \overline{U_i}$$

と定める. $U' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U'_n, V' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V'_n$ が C, D を分離する開集合となる. \square

Lemma 3.12. X を正規空間とする. A を G_δ 集合とする. この時, $f|_A \equiv 0, f(x) > 0 (\forall x \notin A)$ を満たす連続関数 $f : X \rightarrow [0, 1]$ が存在する.

Proof. $A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ を満たす開集合列を取り, Theorem 3.3 より, 連続関数 $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ が存在して, $f_n|_A \equiv 0, f_n|_{X \setminus U_n} \equiv 1$ を満たすものが存在する. よって, $f := \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n/2^n$ が所望の連続関数. (この連続性は Weierstrass の M-test によりわかる) \square

以上の準備を持って, 距離化可能性の必要十分条件を考えよう. 気持ちとしては等高線図を重ね合わせること.

Theorem 3.13. (X, \mathcal{O}_X) が距離化可能であることと X が正則空間かつ可算局所有限開基をもつことと同値である.

Proof. \implies Proposition 3.4 と Lemma 3.9 より従う.

X が正則かつ可算局所有限開基 $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ をもつとする. この時, $B \in \mathcal{B}_n$ に対して, Lemma 3.12 を適用することより, 連続関数

$$f_{n,B} : X \rightarrow [0, 1/2^n] \quad (3.1)$$

が存在して, $f_{n,B}|_B > 0, f_{n,B}|_{X \setminus B} \equiv 0$ を満たす. $J := \{(n, B) \mid B \in \mathcal{B}_n, n \in \mathbb{N}\}$ と定める. $F : X \rightarrow [0, 1]^J$ を, $x \mapsto (f_{n,B}(x))_{(n,B) \in J}$ とする. 今, $[0, 1]^J$ に直積位相を入れた状態で話を進める. F が像への開写像であることを示す. 任意の $(n, B) \in J$ に対して, $F(B)$ が $F(X)$ 上の開集合であることを示す. $\pi_{(n,B)} : [0, 1]^J \rightarrow [0, 1]$ を自然な射影とする. $\pi_{(n,B)}^{-1}((0, 1]) \cap F(X) = F(B)$ であることに注意すれば, $F(B)$ が $F(X)$ 上の開集合であることがわかる. (check せよ)

最後に連続性を示す: $[0, 1]^J$ 上の距離 ρ を

$$\rho(x, y) := \sup_{(n,B) \in J} |x_{(n,B)} - y_{(n,B)}| \quad (3.2)$$

とする. この距離から定める位相は直積位相より強い. (check せよ)

$x \in X, \varepsilon > 0$ を任意に取り, $1/2^N \leq \varepsilon/4$ を満たす N を一つ取る. \mathcal{B} が可算局所有限なので, ある x の開近傍 U が存在して, $A := \{(n, B) \mid n \leq N, B \cap U \neq \emptyset\}$ が有限集合となる. $f_{n,B}$ が連続なので, A が有限であることと合わせると, ある x の開近傍 V が存在して, $|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(y)| \leq \varepsilon/2, \forall (n, B) \in A, \forall y \in V$ が成立する.

$n > N$ の時, $f_{n,B}(x) \leq \varepsilon/4, \forall x \in X$ なので,

$$\rho(F(x), F(y)) \leq \varepsilon, \forall y \in V \quad (3.3)$$

が成立する. よって連続性が従い, $F : X \rightarrow F(X)$ が同相写像で, $F(X)$ が距離空間の部分空間で X が距離化可能である. \square

3.2 パラコンパクト性

Definition 3.14. (X, \mathcal{O}_X) がパラコンパクト (*paracompact*) であるとは, X の任意の開被覆 \mathcal{A} に対して, 局所有限な開被覆となるような細分 \mathcal{B} が存在する時をいう.

Proposition 3.15. すべてのパラコンパクトなハウスドルフ空間が正規空間である.

Proof. ここで, 正則空間であることの証明のみを与える. (正規空間の部分は同じ方法で証明できるので演習問題にする) $a \in X, B \subseteq X$ を a を含まない閉集合とする. 任意の $b \in B$ に対して, X のハウスドルフ性より, ある U_b が存在して, $a \notin \overline{U_b}$, $\{U_b \mid b \in B\} \cup \{X \setminus B\}$ が X の開被覆をなす. パラコンパクト性より局所有限な X の開被覆となるような細分 \mathcal{C} が取れる. $\mathcal{D} := \{C \in \mathcal{C} \mid C \cap B \neq \emptyset\}$ とする. この時, $V := \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$ として, 局所有限性より $\overline{V} = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \overline{D}$ が成立する. $a \notin \overline{V}$ で (なぜか考えてみよう, 細分の定義を思い出そう) 証明終了.

□

Lemma 3.16. X を

参考文献

- [1] James R. Munkres *Topology 2nd.*
- [2] 内田伏一『集合と位相』.