なんとかなりそうなごまかし

習近平

2022 年 5 月 18 日

目次

1　凸関数と Positive-Defined Matrix

Proof. (1) $\Longrightarrow$ (2)
$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n; \forall t \in [0,1]$ に対し,

$$f\left((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}\right) \leq (1-t)f(\boldsymbol{x}) + tf(\boldsymbol{y})$$

が成り立つことを仮定して,
$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; \forall \boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し,

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) \geq 0$$

が成り立つことを以下示す:
今すべてのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ に対し, 次の式が成り立つ:

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{h} \cdot \nabla f(\boldsymbol{x})$$

ここで $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}$ とする, 自由変数 $t \in [0,1]$ を導入して, 仮定より:

$$f\left((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}\right) \leq (1-t)f(\boldsymbol{x}) + tf(\boldsymbol{y})$$

この式を変形させてやると次のようになる:

$$\frac{f(\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})) - f(\boldsymbol{x})}{t - 0} + f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{y})$$

補助函数を導入して議論を行う:
連続写像 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次のように定める:

$$g(t) := f(\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}))$$

これで準備が完了, 多少数学の教育を受けた方のであれば, 次の変形は自明だと思う:

$$\frac{f(\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})) - f(\boldsymbol{x})}{t - 0} = \frac{g(t) - g(0)}{t - 0}$$

平均値の定理より:

$$\exists \varepsilon \in (0, t); g'(\varepsilon) = \frac{g(t) - g(0)}{t - 0}$$

$t \to 0$ の極限を考えて, 次の方程式が得られる:

$$g'(\varepsilon) = g'(0) = \nabla f(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$$

これまですべてのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ に対し, $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{h}$ が成り立つ.
言い換えると次のようなことと同値:

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n; \forall t \in \mathbb{R}; f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{h}) \geq f(\boldsymbol{x}) + t\nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{h}$$

Taylor's theorem より, 以下の式が明らかである:

$$f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + t\nabla f(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{h} + \frac{1}{2}t^2\left(\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x})\right) + o(t^2)$$

また, 先程の不等式を考えてみれば以下のような不等式も成り立つ:

$$\frac{1}{2}t^2\left(\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x})\right) + o(t^2) \geq 0$$

t^2 で割って, $t \to 0$ の極限を考えてみれば:

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) \geq 0$$

このようにきれいに証明できた.

はい, では後半戦に入ろう: $\square$

Proof. (2) $\Rightarrow$ (1) が成り立つことを以下示す:

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; \forall \boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j f(\boldsymbol{x}) \geq 0 \tag{1}$$

を仮定して,

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n; \forall t \in [0,1]; f((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}) \leq (1-t)f(\boldsymbol{x}) + tf(\boldsymbol{y}) \tag{2}$$

を導く:

しかし, 2 を証明する前に, 次の補題を以下示す:

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n; \forall t \in \mathbb{R}; f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}) \geq f(\boldsymbol{x}) + t\nabla f(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{h} \tag{3}$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ と $t \in \mathbb{R}$ を任意に取る, Taylor's theorem より:

$\exists\theta \in (0,1)$;

$$f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + t\nabla f(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{h} + \frac{1}{2}t^2\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})$$

仮定はすべてのベクトル $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して成り立つため,　特にベクトル $\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h}$ に対して, 成り立つ. 仮定のもとで次の不等式が明らかである.

$$f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}) \geq f(\boldsymbol{x}) + t\nabla f(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{h}$$

では本番 2 を示して行こう:

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ と $t \in [0,1]$ を任意に取る.

$$f((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{y} - (1-t)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))$$

後ろの二項に対し, 適切な変形を考えて, 補題の議論のもとで不等式を作る.
$f(\boldsymbol{x})$ について議論を行う:

$$f(\boldsymbol{x}) = f\left((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} - t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\right) \geq f((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}) - t\nabla f((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$$

この式の両辺に $(1-t)$ をかけてやる:[*1]

$$(1-t)f(\boldsymbol{x}) = (1-t)f\left((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} - t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\right) \geq (1-t)f((1-t)\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}) - t(1-t)\nabla f((1-t)\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$$

$f(\boldsymbol{y})$ について変形を施す:

$$f(\boldsymbol{y}) = f\left((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} + (1-t)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\right) \geq f((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}) + (1-t)\nabla f((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$$

両辺に t をかけてやる:

$$tf(\boldsymbol{y}) = tf\left((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} + (1-t)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\right) \geq tf((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}) + t(1-t)\nabla f((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$$

和をとって, 次の式が出てくる:

$$(1-t)f(\boldsymbol{x}) + tf(\boldsymbol{y}) \geq f((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y})$$

□

では, 同値であることの証明は以上となります, アンケートを取ります:

- よく理解できた.
- まあまあ理解できた.
- ちょっと理解しづらい.
- まったく理解できなかった.

ここでアンケートの結果を共有できませんが, よくわからなかった人は必ず復習してください. では section を切ります. お疲れ様でした。

[*1] $t \in [0,1]$ であるため,$t \geq 0, (1-t) \geq 0$ 掛け算を行っても不等号の向きが変わらない

2　ただの計算問題

2.1　f の極値をすべて求めよ

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 10x - 6y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 10y = 0 \end{cases}$$

この時,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ f(x,y) = f(0,0) = -4 \end{cases}$$

またこの時:

$$\mathbf{X} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(0,0)}$$

$$det(X) = 100 - 36 = 64 > 0$$

したがって, 函数 f が $(x,y) = (0,0)$ において極小値 -4 を取る.

2.2　$g(x,y) = 0$ の下での f の極値をすべて求めよ

f が $\boldsymbol{a} = (a,b)$ において極値をとり, その時 $g(\boldsymbol{a}) = 0$ を満たすかつ $\nabla g(\boldsymbol{a}) \neq \mathbf{0}$ とする, ラグランジュの未定乗数法より,
$F(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ とした時,$\exists \lambda \in \mathbb{R}$;

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 10a - 6b - 2\lambda a = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -6a + 10b - 2\lambda b = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

これらを解いてしまうと次のような式が得られる:

$$\begin{cases} (2-\lambda)(a+b) = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

簡単な計算より極値は次のように与えられる:

$$\begin{cases} f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -2 \\ f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -2 \\ f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4 \\ f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 4 \end{cases}$$

2.3　定義域を原点中心半径 1 の円板まで制限した写像 f の最大値最小値を求めよ

最小値は極小値であるため,f の極小値がただ一つ存在するため, 前問で求めた結果によれば、f の最小値が -4 である.

また $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ を定義域とした時,$|xy| < \frac{1}{2}$ であることを考慮すると:$f(x,y) < 4$ であることが明らか.
前問を参照して, 円板境界部を定義域とした時, 最大値が 4 となる.
以上の議論より f の最大値は 4 で最小値が -4 である.

3 # 雑談

以上の議論は答えになっているんでしょうか. 何か感想があれば, コメント欄に書いていただければ助かります.