第13回演習課題解答

習近平

2022年5月18日

目 次

13.1 問題 13.1

数列 $(a_n)_{\mathbb{N}_{\geq 1}}$ を次のように定める:

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

次に，級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを以下示す: 数列 $S_n = \sum\limits_{m=1}^{n} a_m$ とする．数列 S_n が単調増加である．次に，S_n が上に有界であることを示す:

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} \leq \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \leq 3$$

以上より，実数の連続性より S_n が収束する．続いて，$n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ を任意に取った時,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2} = a_n$$

が成り立つ．M-test より，この函数項級数が $\mathbb{R}$ 上一様収束する．

13.2 問題 13.2

区間 $I = [-1, 1]$ とする．

13.2.1 (1)

$x \in \mathbb{R}\{0\}$ を任意に取る．級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$ は初項が x^2, 公比が $\frac{1}{1+x^2} < 1$ の等比数列の無限和である．
この時，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1)}} = 1 + x^2$ となる．
$x = 0$ の時，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ となる．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}} = \begin{cases} 1 + x^2, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

13.2.2 (2)

一様収束しない．
一様収束と仮定してこのもとで矛盾を導く: 第十三回講義の補題より，函数項級数を $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^2}{(1+x^2)^{k-1}}$ として，その一様収束先は (1) を用いて，次のような函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で表せる:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

ここで各自然数 n に対し，f_n が I 上連続であり (有限個連続函数の和となるため，連続函数の性質に従う)，また第十一回レポートの問題 11.2 の定理より，f は I 上連続となる．しかし，$x = 0$ に対し，$\varepsilon = 1/2$ と定めたところ，任意の $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ に関して，$x_0 = \delta/2$ としたら，$|x_0 - 0| < \delta$ を満たすが，$|f(x_0) - f(0)| > 1 > \varepsilon$ で連続でないことを示せた．従って，矛盾が生じる．
以上より一様収束するわけがありません．

13.3 # 雑談

最初は定義どおりに一様収束でないことを確認したかったが，値の評価が細かすぎてうまく行かなかった．過去のレポート問題を復習したら，この方針に辿り着いた．てか定義どおりに確認できるなら，ぜひ教えてください．