# Analysis on Manifolds

## 第三回

## 多変数関数の積分

### 本日の流れ

1. 長方形領域上の積分
2. リーマン積分の存在
3. 積分の計算

## Def 3.1

$\mathbb{R}^n$における長方形領域

$$Q := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$$

に対し、$[a_i, b_i]$を$Q$の成分区間(component interval)と呼ぶ.

$Q$の体積$v(Q)$を

$$v(Q) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \in \mathbb{R}$$

とする.

## Def 3.2 (分割)

$\mathbb{R}$ 上の閉区間 $[a,b]$ の分割(partition)とは便宜上 $a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b$ の形式で表せる $[a,b]$ の有限部分集合 $P$ である.

$[t_{i-1}, t_i]$, $i=1,\ldots,k$ を $P$ によって決定される部分区間(subinterval determined by $P$)と呼ぶ.

$\mathbb{R}^n$ における長方体 $Q := \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ の分割 $P$ とは任意の $i \in \{1,\ldots,n\}$ に対し $P_i$ が $[a_i, b_i]$ と分割となるような $(P_1,\ldots,P_n)$ の組とする.

各 $i \in \{1,\ldots,n\}$ に対し $I_i$ を $P_i$ によって決定される部分区間とすると.

$R = \prod_{i=1}^{n} I_i$ を $P$ によって決定される部分長方体(subrectangle determined by $P$)と呼ぶ.

## Def 3.3 (下界和, 上界和)

$\mathbb{R}^n$における長方体$Q$と有界函数$f: Q \to \mathbb{R}$と長方体$Q$の分割$P$および$P$によって決定される任意の長方体$R$に対し,

$$m_R(f) := \inf\{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in R\}$$

$$M_R(f) := \sup\{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in R\}$$

を定義し, $P$によって決定される下界和(lower sum)と上界和(upper sum)を

$$L(f, P) := \sum_R m_R(f) v(R)$$

$$U(f, P) := \sum_R M_R(f) v(R)$$

と定義する.

## Def 3.4（細分）

長方体 $Q$ の分割 $P := (P_1, \ldots, P_n)$ と $P' = (P_1', \ldots, P_n')$ に対し、$\forall i \in \{1, \ldots, n\}; P_i \subseteq P_i'$ を満たす時、$P'$ を $P$ の細分 (refinement) と呼ぶ.

$Q$ の分割 $P, P'$ に対し、

$P'' := (P_1 \cup P_1', \ldots, P_n \cup P_n')$ を $P, P'$ の共通細分 (common refinement) と呼ぶ.

## Lem 3.1

$P$を長方体 $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ の分割とする. $f : Q \to \mathbb{R}$ を有界関数とし, $P'$が$P$の細分ならば

$$L(f,P) \leq L(f,P'),\quad U(f,P') \leq U(f,P)$$

が成立する.

## proof

$P := (P_1, \dots, P_n)$ の任意成分 $P_j$ に一点を追加して上記の関係式が成立することが言えれば十分である.

$P_j$によって決定される部分区間 $[t_{i-1}, t_i]$ の内部に一点 $q$ を追加する.

すべての $R_S = [t_{i-1}, t_i] \times S$ の形で決定される部分長方体が変化し,

$$R_S = \underset{\overset{\shortparallel}{R_S'}}{[t_{i-1}, q] \times S} \cup \underset{\overset{\shortparallel}{R_S''}}{[q, t_i] \times S}$$

となる. 下限の定義より, $m_{R_S'}(f) \geq m_{R_S}(f)$, $m_{R_S''}(f) \geq m_{R_S}(f)$ が得られ.

$v(R_\xi) = v(R'_\xi) + v(R''_\xi)$ より、

$$m_{R'_\xi}(f)\, v(R'_\xi) + m_{R''_\xi}(f)\, v(R''_\xi) \geq m_R(f)\, v(R_\xi)$$

$R_\xi$が任意性を持つから、

$L(f, P') \geq L(f, P)$ が示される。

同様に $U(f, P') \leq U(f, P)$ が成立する。 $\square$

## Lem 3.2

長方体$Q \subseteq \mathbb{R}^n$に定義される有界函数を$f: Q \to \mathbb{R}$とする。$Q$の任意の2つの分割$P, P'$に対し、

$$L(f, P) \leq U(f, P')$$ が成立する。

**proof**

$P, P'$の共通細分$P''$を取れば

$$L(f, P) \leq L(f, P'') \leq U(f, P'') \leq U(f, P')$$

がLem 3.1に従う。 $\square$

## Def 3.5 下積分、上積分、積分可能

長方体$Q\subseteq\mathbb{R}^n$と有界函数$f:Q\to\mathbb{R}$に対し、

$P$が$Q$の任意分割に渡って次のようなものを定義し、

$$\underline{\int_Q} f := \sup_P \{L(f,P)\}$$

$$\overline{\int_Q} f := \inf_P \{U(f,P)\}$$

$\underline{\int_Q} f$を$f$の$Q$上の下積分(lower integral)

$\overline{\int_Q} f$を$f$の$Q$上の上積分(upper integral)と呼ぶ

$$\underline{\int_Q} f = \overline{\int_Q} f$$ の時、

$f$が$Q$上リーマン積分可能とする。

## Thm 3.1 (リーマン条件)

$Q \subseteq \mathbb{R}^n$を長方体とする. $f: Q \to \mathbb{R}$を有界函数とする. この時,

$$\underline{\int_Q} f \leq \overline{\int_Q} f$$

に対し, 等号が成立すること

任意正の$\varepsilon$に対し, $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$
となるような分割$P$が存在することと同値である.

proof:

等号成立と仮定して, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$を任意に取る.

この時,

$$\left| U(f, P) - \int_Q f \right| < \varepsilon/2$$

$$\left| L(f, P') - \int_Q f \right| < \varepsilon/2$$

を満たす分割$P, P'$が存在し, その共通細分$P''$を取る.

$$L(f, P') \leq L(f, P'') \leq \int_Q f \leq U(f, P'') \leq U(f, P)$$

が成立するので, $U(f, P'') - L(f, P'') < \varepsilon$

次に等号が不成立と仮定し，

$$\varepsilon = \overline{\int_Q} f - \underline{\int_Q} f > 0 \text{ を取り．}$$

Qの任意分割Pに対し，

$$L(f,P) \le \underline{\int_Q} f < \overline{\int_Q} f \le U(f,P)$$

$$U(f,P) - L(f,P) \ge \varepsilon$$

∎

## Thm3.2 定函数は長方体において積分可能

任意定数函数 $f(x)=C$ が長方体で積分可能

つまり、長方体 $Q\subseteq\mathbb{R}^n$ の任意分割 $P$ に対し、

$$\int_Q C = C\cdot v(Q) = C\sum_R v(R)$$

和 は $P$ によって決定される部分長方体全体に渡る。

**proof**

$P$ によって決定される部分長方体 $R$ を任意に取る。

$m_R(f)=C=M_R(f)$ が明らか、定義より

$$L(f,P)=C\sum_R v(R)=U(f,P)$$

この時、リーマン条件を満たし、$\int_Q C$ が存在し、

$C\sum_R v(R)$ に一致する。

$P'$ を部分長方体が $Q$ のみとなるような分割とすると、上記議論の任意性より

$$\int_Q C = C v(Q)$$

∎

# Cor 3.1

長方体 $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ の有限長方体被覆 $\{Q_1, \dots, Q_k\}$ に対し,

$$v(Q) \leq \sum_{i=1}^{k} v(Q_i)$$

proof:

$Q, Q_1, \dots, Q_k$ を含む長方体 $Q'$ を取り,
$Q, \dots, Q_k$ の成分区間端点全体が $Q'$ の分割 $P$ を成す. $Q, \dots, Q_k$ が $P$ によって決定される部分長方体の和で書ける. Thm 3.2 より

被覆性より

$$v(Q) = \sum_{R \subseteq Q} v(R) \leq \sum_{i=1}^{k} \sum_{R \subseteq Q_i} v(R)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} v(Q_i)$$

$\square$

## Def 3.6 (測度0)

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し, $A$ が測度0 (measure zero) であるとは任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し,

$\sum_{i=1}^{\infty} v(Q_i) < \varepsilon$ となる $A$ の高々可算な長方体被覆が存在する.

# Thm 3.3

(a) $B \subset A$，かつ$A$が測度0ならば，$B$も測度0

(b) $A$が 測度0となるような集合$(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$の 和集合ならば，

$A$も測度0である．

(c) $A$が測度0であることと，任意の$\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$

に対し，可算個の開長方体$\mathrm{Int}\, Q_1, \ldots$がAの

被覆として存在し，$\sum_{i=1}^{\infty} v(Q_i) < \varepsilon$を満たす．

(d) 長方体$Q \subseteq \mathbb{R}^n$に対し，$\mathrm{Bd}\, Q$が測度0で，$Q$が

測度0にならない．

## proof

(a) 自明

(b) $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$を任意に取り，$A_i$に対し，$\sum_{j=1}^{\infty} v(Q_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2^i}$を

満たす$\{Q_{ij}\}$の列を取る．可算和定理より，$\{Q_{ij}\}$が高々可算

で，$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_{ij}) < \varepsilon$

(c) 長方体の存在から$A$の測度が0の部分が明らか．

$A$が測度0の時，$\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$を任意に取り，$\sum_{i=1}^{\infty} v(Q_i') < \frac{\varepsilon}{2}$となる

$A$の長方体被覆を取る．各$Q_i'$に対，$Q_i' \subseteq \mathrm{Int}\, Q_i$，$v(Q_i) < 2v(Q')$

となるように$Q_i$へ拡張する．これに従う．

(d) $Q := \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$に対し，$\varepsilon$を任意に取る．$\delta := \frac{\varepsilon}{2^n v(Q)}$とする

$f_a^i := [a_1, b_1] \times \cdots [a_i, a_i+\delta] \times \cdots \times [a_n, b_n]$

$f_b^i := [a_1, b_1] \times \cdots \times [b_i, b_i+\delta] \times \cdots \times [a_n + b_n]$

とする．$\mathrm{Bd}\, Q \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (f_a^i \cup f_b^i)$が成立し

$\sum_{i=1}^{n} v(f_a^i \cup f_b^i) < \varepsilon$．

$Q$の測度が0にならないことは (c)と Cor 3.1に従う．

## Thm 3.4 (重要)

$Q \subseteq \mathbb{R}^n$ を長方体, $f : Q \to \mathbb{R}$ を有界函数とする.

$D$ を $f$ の $Q$ 上の不連続点の集合とする.

$$\int_Q f \text{ が存在} \iff D \text{ が測度 } 0$$

**proof**

$\forall x \in Q ; |f(x)| < M$ を満たす $M \in \mathbb{R}_{>0}$ を取る.

**Step 1.**

$D$ が測度 $0$ と仮定し, $\int_Q f$ の存在を示す:

$\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ を任意に取る. 以下 $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$ を満たす分割 $P$ を決める.

$\varepsilon' = \varepsilon / (2M + 2v(Q))$ と定め, $\sum_{i=1}^{\infty} v(Q_i) < \varepsilon'$, $Q \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Int}\, Q_i$ を満たす可算長方体列を取る.

また $Q \setminus D$ に属する任意の点 $a$ に対し, ある $a \in \mathrm{Int}\, Q_a$ かつ ($\forall x \in Q_a \cap Q ;\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon'$) を満たす開長方体 $Q_a$ が存在する. この $\mathrm{Int}\, Q_a$ を取る.

そうすると, $(\mathrm{Int}\, Q_i)_{i \in \mathbb{N}} \cup (\mathrm{Int}\, Q_a)_{a \in Q \setminus D}$ が $Q$ の開被覆となる. コンパクト性より, 有限個の開被覆

$$\mathrm{Int}\, Q_1, \ldots, \mathrm{Int}\, Q_k, \mathrm{Int}\, Q_{a_1}, \ldots, \mathrm{Int}\, Q_{a_l}$$

が取れる.

これらの部分区間の端点から成る分割を $P$ とし,

$P$によって決定される部分長方体 $R$ に対し,

$R$が不連続点の開被覆に含まれる時, $R \in \mathcal{R}$ とし, そうでない時, $R \in \mathcal{R}_a$ とする.

$$\sum_{R\in\mathcal{R}} (M_R(f) - m_R(f))\, v(R) \leq 2M \sum_{R\in\mathcal{R}} v(R) < 2M\varepsilon'$$

$$\sum_{R\in\mathcal{R}_a} (M_R(f) - m_R(f))\, v(R) \leq 2\varepsilon' \sum_{R\in\mathcal{R}_a} v(R) \leq 2\varepsilon' v(Q)$$

$$U(f,P) - L(f,P) < 2M\varepsilon' + 2\varepsilon' v(Q) = \varepsilon.$$

従って, $\int_Q f$ が存在.

---

## Step2

次に$f$の連結性を記述する補助函数を作る.

$a \in Q$ と $\delta > 0$ に対し,

$$A_\delta := \{ f(x) \mid |x-a| < \delta,\ x \in Q \}$$ とする.

$M_\delta(f) := \sup A_\delta$, $m_\delta(f) := \inf A_\delta$ とする.

$$v(f,a) := \inf_{\delta>0} [M_\delta(f) - m_\delta(f)]$$ とする.

$v(f,a) = 0 \iff f$ が $a$ において連続である.

この同値性は明らか(各自check せよ)

## Step 3.

$\int_Q f$ が存在すると仮定する.

$D_m = \{a \mid v(f, a) \geq 1/m\}$ とする.

任意の $D_m$ が測度0と言えれば良い.

$\varepsilon > 0$ を任意に取り, $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon/2m$ となる分割 $P$ を取る.

$D_m' := \{x \in D_m \mid x$ がある分部長方体 $R$ に属する$\}$

$D_m'' := D_m \setminus D_m'$ とする.

$D_m'$ が測度0で, $\sum_{i=1}^{\infty} v(Q_i) < \varepsilon/2$ となる列で被覆される
($\because$ $BdR$ が測度0)

$D_m''$ が $P$ によって決定される長方体 $R_1, \ldots, R_k$ で被覆され, 各 $R_i$ に対し, $R_i \cap D_m'' \neq \phi$ とする.

任意 $a \in D_m'' \cap R_i$ に対し, $a \notin BdR_i$ より
ある $\delta$ 近傍が $R_i$ 内部に含まれる.

$$1/m \leq v(f, a) \leq M_\delta(f) - m_\delta(f) \leq M_{R_i}(f) - m_\delta(f)$$

両辺 $v(R_i)$ をかけて, $i$ について和を取ると

$$\sum_{i=1}^{k} (1/m)\, v(R_i) \leq U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon/2m$$

$\square$

# Thm 3.5

$Q \subseteq \mathbb{R}^n$ を長方体, $f: Q \to \mathbb{R}$ を積分可能とする.

(a) $f$ が測度0の集合を除いて0となる $\Rightarrow \int_Q f = 0$

(b) $f$ が非負函数で, $\int_Q f = 0 \Rightarrow f$ が測度0の集合を除いて0となる.

## proof

(a) $Q$ の分割 $P$ を任意に取る. $P$ によって決定される長方体 $R$ が測度0の領域に含まれないので

$M_R(f) \geq 0$, $m_R(f) \leq 0$. 従って

$$\underline{\int_Q} f \leq 0 \quad , \quad \overline{\int_Q} f \geq 0$$

$\int_Q f$ が存在するので $\int_Q f = 0$.

(b) $f(x) \geq 0$, $\int_Q f = 0$ とする.

$f$ が $a$ で連続 $\Rightarrow f(a) = 0$ ($\because$ 連続性から $a$ の十分小さな開長方体 $R$ で, $m(R) > 0$ を取る)

$f$ の不連続点に対し, Thm 3.4 より測度0. ▨

# Thm 3.6 (Fubini's theorem) (一番の最重要定理)

$Q := A \times B$, $A \subseteq \mathbb{R}^k$ の長方体, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ の長方体
とする. $f : Q \to \mathbb{R}$ を有界函数とする.

$f(x, y)$, $x \in A$, $y \in B$ と表示する.

任意 $x \in A$ に対し,

$$\underline{\int}_{y \in B} f(x, y) \quad と \quad \overline{\int}_{y \in B} f(x, y)$$

を考える.

$f$ が $Q$ において積分可能ならば:

$$\int_Q f = \int_{x \in A} \underline{\int}_{y \in B} f(x, y) = \int_{x \in A} \overline{\int}_{y \in B} f(x, y)$$

## proof

$$\begin{cases} \underline{I}(x) := \underline{\int}_{y\in B} f(x,y) \\ \overline{I}(x) := \overline{\int}_{y\in B} f(x,y) \end{cases}$$

とする.

$Q$の分割$P$を任意に取る. $P$が$A,B$を分割するから, $P := (P_A, P_B)$と略記してもよい.

## step1

$R_A \times R_B$を任意に取る. $x_0 \in R_A$を任意に取り.

任意の$y \in B$に対し,

$m_{R_A \times R_B}(f) \leq f(x_0, y)$ が成立.

従って

$m_{R_A \times R_B}(f) \leq m_B(f(x_0, y))$ が得られ,

$x_0$と$R_A$を固定し, $R_B$を$P_B$で決定される長方体で

$$\sum_{R_B} m_{R_A \times R_B}(f)\, v(R_B) \leq L(f(x_0,y), P_B)$$
$$\leq \underline{\int}_{y\in B} f(x_0,y) = \underline{I}(x_0)$$

$x_0$の任意性より.

$$\sum_{R_B} m_{R_A} \chi_{R_B}(f)\, v(R_B) \le m_{R_A}(\underline{I})$$

$v(R_A)$をかけて，$R_A$について和を求めると

$$L(f,P) \le L(\underline{I}, P_A)$$

---

<u>Step2</u>

同様に

$$U(f,P) \ge U(\overline{I}, P_A)$$

が示せる

---

<u>Step3.</u>

$$\le U(\underline{I}, P_A) \le$$

$$U(\overline{I}, P_A) \le U(f,P)$$

$$L(f,P) \le L(\underline{I}, P_A) \quad \le L(\overline{I}, P_A) \le$$

$f$の積分可能性より，$\overline{I}$，$\underline{I}$ も積分可能

上記の不等式より $\int_{x\in A} \overline{I} = \int_{x\in A} \underline{I} = \int_Q f$

## Cor 3.2

$Q = A \times B$, $A \subseteq \mathbb{R}^k$を長方体, $B \subseteq \mathbb{R}^n$を長方体とする. $f: Q \to \mathbb{R}$を有界函数とする.

$\int_Q f$が存在するかつ($\forall x \in A$; $\int_{y \in B} f(x,y)$が存在する)

$$\Rightarrow \int_Q f = \int_{x \in A} \int_{y \in B} f(x,y)$$

---

## Cor 3.3

$Q = I_1 \times \cdots \times I_n$とする. $I_i$を$\mathbb{R}$上閉区間とする.

$f: Q \to \mathbb{R}$が連続ならば

$$\int_Q f = \int_{x_1 \in I_1} \cdots \int_{x_n \in I_n} f(x_1, \ldots, x_n)$$