Introduction to manifolds

第1回　微分

記号の約束

$\mathbb{Z}$ ： 整数

$\mathbb{N}$ ： 自然数

$\mathbb{N}_{>0}$ ： 正の自然数

$\mathbb{Q}$ ： 有理数

$\mathbb{Q}_{>0}$ ： 正の有理数

$\mathbb{R}$ ： 実数

$\mathbb{R}_{>0}$ ： 正の実数

$\overline{A}$ ： 集合Aの閉包

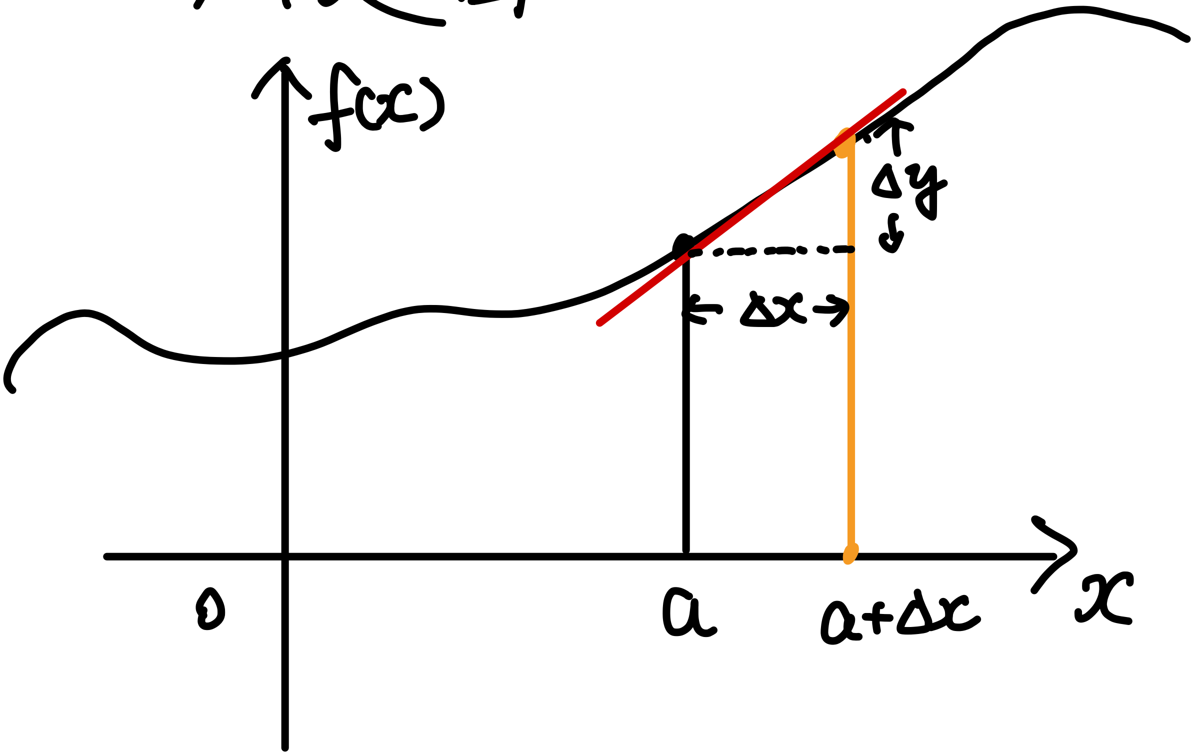
A° ： 集合Aの内部

$\mathrm{Bd}\,A$ ： 集合Aの境界

$N(a, \delta)$: aを中心, 半径δ の開近傍
$B(a, \delta)$

距離

単変数写像の微分可能性の復習：

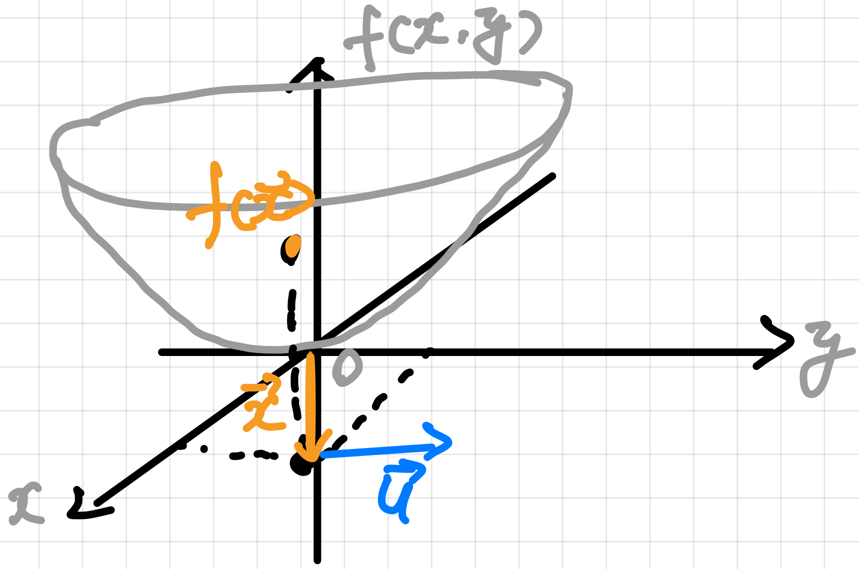


$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の点 a における微分 $f'(a)$ は

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

と定義されている.

微分の自然な拡張.



$\vec{x}$における微分はどのように定めればいい?

やはりある方向$\vec{u}$に沿って微小に動いた時の差分の商を考えたくなる.

Def 1.1 (方向微分)

$A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ に対し, 点 $a \in A^\circ$ において, $u \in \mathbb{R}^m$, $u \neq 0$ に関する方向微分 (directional derivative) は.

$$f'(a ; u) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$$

とする.

Example

写像 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ とする.

$a = (a_1, a_2)$ において. 方向 $u = (1, 2)$

に関する方向微分を求めよ.

"Def 1.2 微分可能"

$A \subset \mathbb{R}^m$, 写像 $f : A \to \mathbb{R}^n$ が
微分可能であるとは

$\forall x \in A^\circ ; \forall u \in \mathbb{R}^m ; (u \neq 0 \Rightarrow$

$f'(x;u)$ が存在する.

実はこの定義は誤りである。

微分可能な単変数写像 f, g の持つべき性質は、

$+$ が定義される場合

$f+g$ が微分可能

$\times$ が定義される時、

$f \times g$ が微分可能

$f \circ g$ が定義される時、

$f \circ g$ も微分可能。

しかし、方向微分で定義した微分可能性は合成に対して破綻する。

Example

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{x^2 y}{(x^4 + y^2)}, & x \neq 0 \end{cases}$$

とする.

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$g(x, y) = (x, y + x^2)$ とする.

(1) f, g は 0 において、任意方向の方向微分を持つことを示せ：

(2) $f \circ g$ の 0 における方向微分は？

(2). $(f \circ g)(x, y)$

$$= f(x, y+x^2)$$

$$= \frac{x^2(y+x^2)}{x^4+(y+x^2)^2}$$

$$= \frac{x^4+x^2y}{x^4+x^4+2x^2y+y^2}$$

$$= \frac{x^4+x^2y}{2x^4+2x^2y+y^2}$$

少し論理の流れを振り返ってみよう。
単変数写像での微分というのは

点 a に対し、ある値 $f'(a)$ が存在する。

これを n 次元で拡張する時、方向微分での流れは

点 a に対し、任意の方向 u に対し、ある $f'(a,u)$ が存在する。

一次元の場合、任意方向 u とある $f'(a,u)$ が存在するというのは命題論理では順番が可換。つまり

ある $f'(a,u)$ が存在して、任意方向 u に対し、$f'(a,u)$ が差分の商として意味を持つ。

方向微分の定義が良くないのは
∀,∃の順番がダメじゃないか？

しかし，∃ ∀にすると．高次元では
差分の商としての意味が薄く，
どうすれば良いだろう？

ここで

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = f'(a)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)-\Delta x f'(a)}{\Delta x} = 0$$

として考えれば，

次のような拡張ができる．

Def 1.2 微分可能性

$A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: A \to \mathbb{R}^n$.

$a \in A^\circ$において, fが微分可能(differentiable)であるとは:

ある$n \times m$の行列$\underline{B}$が存在し,
任意の$h \in \mathbb{R}^m$に対し,

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - B\underline{h}}{|h|} = 0$$

この行列Bはfの点aにおける微分(derivative)と定義する.

$B = Df(a)$と書く.

Exercise

先程の定義において、
写像 f の微分が一意的
であることを示せ：

Thm 1.1

$A \subset \mathbb{R}^m$; $f: A \to \mathbb{R}^n$;

点 $a \in A^\circ$において, fが微分可能ならば, 任意の $u \in \mathbb{R}^m$に対し,

$u \neq 0 \Rightarrow$

$$f'(a;u) = Df(a) \cdot u$$

proof:

$$\frac{f(a+tu)-f(a)-Df(a)\,tu}{|tu|}\to 0$$

より. 両辺 $|u|$ をかけて.

$$\frac{f(a+tu)-f(a)}{t}-Df(a)u\to 0$$

$$f'(a;u)=Df(a)\cdot u \qquad \square$$

Thm 1.2

$A \subset \mathbb{R}^m$; $f : A \to \mathbb{R}^n$ が

$a \in A^\circ$ において微分可能

ならば,

f が a において連続である.

proof

$$f(x+u)-f(x)$$

$$= |\Delta u| \frac{|f(x+u)-f(x)|}{|\Delta u|}$$

$$= |\Delta u| \frac{f(x+u)-f(x)-Df(x)u}{\Delta u} + Df(x)u$$

より.

$$\lim_{\Delta u \to 0} \left[|f(x+u)-f(x)| \right] = 0$$

$\square$

Def 1.3 偏微分

m次元ベクトル $e_i := (\delta_{1i}, \cdots, \delta_{mi})^T$
とする.

写像 $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ の a における i番目の偏微分 (i^{th} partial derivative) を

$$D_i f(a) := \lim_{t \to 0} \left(\frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} \right)$$

と定める.

Thm 1.3 微分の行列表示

写像 $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が点 a において微分可能ならば

$$Df(a) = [D_1 f(a), \ldots\ldots, D_m f(a)]$$

となる.

proof

$Df(a) := [a_1, \cdots, a_n]$ とする.

Thm 1.1 より.

$$D_i f(a) = f(a; e_i) = Df(a) e_i$$

$$= a_i$$

$\square$

Thm 1.4

写像 $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ に対し、写像

$f_i: A \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_i(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

となるような写像と定める。

以下の2つの命題が成立する

(a) f が a において微分可能であるては各 i に対し f_i が a において微分可能である。

(b) f が a において微分可能ならば $Df(a)$ の i 行目は $Df_i(a)$ となる。

proof:

$$F(h) := \frac{f(a+h) - f(a) - B \cdot h}{|h|}$$

$$F_i(h) := \frac{f_i(a+h) - f_i(a) - (B\text{の}i\text{行目}) \cdot h}{|h|}$$

とする.

$h \to 0$ の時, $F(h) \to 0$ とすべての i に対し, $F_i(h) \to 0$ と同値である. $\square$

Thm 1.5 平均値の定理

$\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続で、

(a,b) において微分可能ならば.

$\exists c \in (a,b)$

$$\phi(b) - \phi(a) = \phi'(c)(b-a)$$

$$\frac{\phi(b)-\phi(a)}{b-a} = \phi'(c)$$

proof:

$$h(x) := \frac{\phi(b)-\phi(a)}{b-a}(x-a) - \phi(x)$$

とする.

$h(x)$ が $[a,b] \to \mathbb{R}$ での連続写像,

$h(a) = h(b) = -\phi(a)$ より, ある $c \in (a,b)$

が存在して, $h(c)$ が $\max h([a,b])$ となる.

$(a,c]$ において, c での微分を

計算すると $h'(c) \geq 0$,

$[c,b)$ において, c での微分を

計算すると $h'(c) \leq 0$.

従って, $h'(c) = 0$. つまり

$$\phi'(c)(b-a) = \phi(b) - \phi(a) \quad \Box$$

Thm 1.6 (重要)

Aを$\mathbb{R}^m$の開集合とする.

写像 $f: A \to \mathbb{R}^n$ に対し,任意$x \in A$ と任意のiに関する偏微分$D_i f(x)$ が連続ならば. fがAで微分可能.

proof

Thm 1.4 より, $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$ とする時, 任意の i に対し $f_i(x)$ が微分可能であることを示せば十分.

$f_i : A \to \mathbb{R}$ に対し, $a \in A$ を任意に取る. この時, 任意 j に対し,

$D_j f_i(a)$ が存在し, かつ a で連続となる.

$h \in \mathbb{R}^m$ を任意に取り, $h := (h_1, \dots, h_m)$ とする. 点列 $(p_i)_{0 \le i \le m}$ を

$$p_0 = a$$

$$p_1 = p_0 + h_1 e_1$$

$$p_i = p_{i-1} + h_i e_i$$

と定め，

$$f_i(a+h)-f_i(a)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(f_i(p_j) - f_i(p_{j-1}) \right)$$

とする．

以下各 j に対し，

$\phi(t) = f_i(p_{j-1} + t e_j)$ として，

平均値の定理を用いると

$$f_i(p_j) - f_i(p_{j-1}) = \phi'(c_j) h_j$$

これを

$$f_i(p_j) - f_i(p_{j-1}) = D_j f_i(q_i) h_j$$

と書き直す．

$$f_i(a+h) - f_i(a) = \sum_{j=1}^{m} D_j f_i(g_j) h_j$$

で、

$$Df_i(a) \cdot h = \sum_{j=1}^{m} D_j f_i(a) h_j$$

$$\frac{f_i(a+h) - f_i(a) - Df_i(a) \cdot h}{|h|}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{[D_j f_i(g_j) - D_j f_i(a)] h_j}{|h|}$$

で、$|h| \to 0$ ならば、$D_j f_i$ の連続性より、上記の極限が 0 になる

$\square$

Rem

Thm1.6の仮定を満たす写像 f を C^1 級函数と呼ぶ

$$C^r(A,B)$$

$$:= \left\{ f: A \to B \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall i; \forall j; D_j f_i(x) \in \\ C^{r-1}(A, \mathbb{R}) \end{array} \right\}$$

Thm 1.7 (微分の順序交換)

Aを$\mathbb{R}^n$の開集合とする.

$f : A \to \mathbb{R}$ が C^2級函数とする.

この時, 任意の $a \in A$ に対し,

$$D_k D_j f(a) = D_j D_k f(a)$$

が成立する.

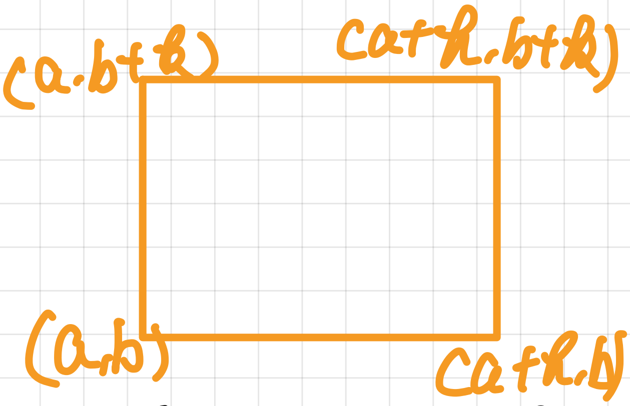
proof:

偏微分は特定方向以外のベクトルを定数とみなすから，$A \subset \mathbb{R}^2$ と仮定しても一般性を失わない．

Step1

まず2変数版の平均値の定理を示す：

Aが開集合より



$$Q=[a,a+h]\times[b,b+h]\subseteq A$$

となるような Q が取れる．

$$\lambda(h,k)=f(a,b)-f(a+h,b)$$
$$-f(a,b+k)+f(a+h,b+k)$$

とする.

以下ある $p,q\in Q$ が存在し,

$$\begin{cases}\lambda(h,k)=D_2D_1f(p)hk \cdots ① \\ \lambda(h,k)=D_1D_2f(q)hk \cdots ②\end{cases}$$

が成立することを示す:

$$\phi(s)=f(s,b+k)-f(s,b)$$

とする.

$$\phi(a+h)-\phi(a)=\lambda(h,k)$$

で,平均値の定理より.

$\exists p_1\in(a,a+h)$.

$\lambda(h,k) = \phi'(p_1)h$
$= [D_1 f(p_1, b+k) - D_1 f(p_1, b)] \cdot h$

$D_2 D_1 f$が存在し,かつ連続であるため.

$\varphi(t) := D_1 f(p_1, b+t)$ が

$(0,k)$において,平均値の定理を適用できる.すると

ある $p_2 \in (0,k)$ が存在し

$D_1 f(p_1, b+k) - D_1 f(p_1, b)$
$= \varphi'(p_2) k$
$= D_2 D_1 f(p_1, p_2) k$ となる.

上と合わせて、

$$\lambda(h,k) = D_2 D_1 f(p_1, p_2) hk$$

が成立する.

②は同様に示せる.

step2:

$\dfrac{\lambda(h,k)}{h \cdot k}$ に対し, $h, k \to 0$

連続性の利用.

の極限を考えれば良い. □

Def 1.4. 行列のノルム

$n \times m$ 行列 A に対し，ノルム

$$\|A\| := \max\{|Ax| \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}^m, |x| = 1\}$$

と定義する.

Rem

行列のノルムは線形変換においてベクトルの長さの拡大倍率の上界を与える.

Thm 1.8 合成函数の微分

$A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}^n$,
$g: B \to \mathbb{R}^p$; $f(A) \subseteq B$ とする.

$a \in A$ に対し, $f(a) = b$ とする.

f が a において微分可能かつ,
g が b において微分可能ならば
$g \circ f$ が a において微分可能
であり,

$$D(g \circ f)(a) = Dg(b) \cdot Df(a)$$

が成立する.

proof

$B_{d_n}(b,\delta')\subseteq B$ を満たす δ'-開近傍

$B_{d_n}(b,\delta')$ を取る.

$$f(B_{d_m}(a,\delta))\subseteq B_{d_n}(b,\delta')$$

を満たす a の δ-開近傍を取る.

次に,

集合 $D:=\{h\in\mathbb{R}^m\setminus\{0\}\mid |h|<\delta\}$

に対し, $\Delta(h)=f(a+h)-f(a)$

$F: D\cup\{0\}\to\mathbb{R}^n$

$$F(h) := \begin{cases} \dfrac{\Delta(h) - Df(a)\cdot h}{|h|}, & h \neq 0 \\ 0, & h = 0 \end{cases}$$

とする.

$$(*) \quad \Delta(h) = Df(a)\cdot h + |h| F(h)$$

となり. F が 0 において連続より, $h=0$ に対しても $(*)$ が成立.

三角不等式より.

$$|\Delta(h)| \leq \|Df(a)\| \cdot |h| + |h| \, |F(h)|$$

$\|Df(a)\|$ が有限な値で, $F(h)$ が 0 において連続であるから, $|F(h)|$ が

0のある近傍Nにおいて有界となる

$f(B)$において、

$D' := \{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid |h| < \delta'\}$

とする. $G : D' \cup \{0\} \to \mathbb{R}^p$

$$G(h) = \begin{cases} \dfrac{g(b+h) - g(b) - Dg(b) \cdot h}{|h|} & , h \neq 0 \\ 0 & , h = 0 \end{cases}$$

に対し

$$g(b+h) - g(b) = |h| G(h) + Dg(b) \cdot h$$

この時,

$$b + \Delta(h) = f(a) + \Delta(h) = f(a+h)$$

$$g(f(a+h))-g(f(a))=g(b+\Delta(h))-g(b)$$

$$=|\Delta(h)|G(\Delta(h))+Dg(b)\Delta(h)$$

$$\frac{g(f(a+h))-g(f(a))-Dg(b)\cdot Df(a)h}{|h|}$$

$$=Dg(b)\cdot F(h)+\frac{1}{|h|}|\Delta(h)|G(\Delta(h))$$

$h\to 0$とすると、右辺が0に収束

$\square$

Cor 1.1

$f: A \to \mathbb{R}^m$, $g: B \to \mathbb{R}^n$

$f(A) \subseteq B$とする.

$f, g \in C^r$ならば.

$$g \circ f \in C^r$$

proof

Thm 1.6, 1.8より直ちに導かれる.

Thm 1.9

$A \subseteq \mathbb{R}^m$, $A^\circ = A$ とする.
$f: A \to \mathbb{R}^n$ が微分可能
かつ, a と $a+h$ を結ぶ
線分が A に含まれる時,

$\exists t_0 \in (0,1)$;

$$f(a+h) - f(a) = Df(a+t_0h)h$$

となる.

proof

$\varphi(t) = f(a+th)$

一変数の平均値定理より

$\exists t_0 \in (0,1)$

$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t_0) \cdot 1$

$\varphi'(t) = Df(a+th) \cdot h$ より

$\varphi'(t_0) = Df(a+t_0h) \cdot h$

Thm 1.10 逆函数の微分

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A^\circ = A$,

$f: A \to \mathbb{R}^n$, $f(a) = b$ とする.

g が b のある開近傍を $\mathbb{R}^n$ に映す写像とし, a のある開近傍において,

$g(f(x)) = x$ とする.

f が a において微分可能,

g が b において微分可能ならば

$$Dg(b) = [Df(a)]^{-1}$$