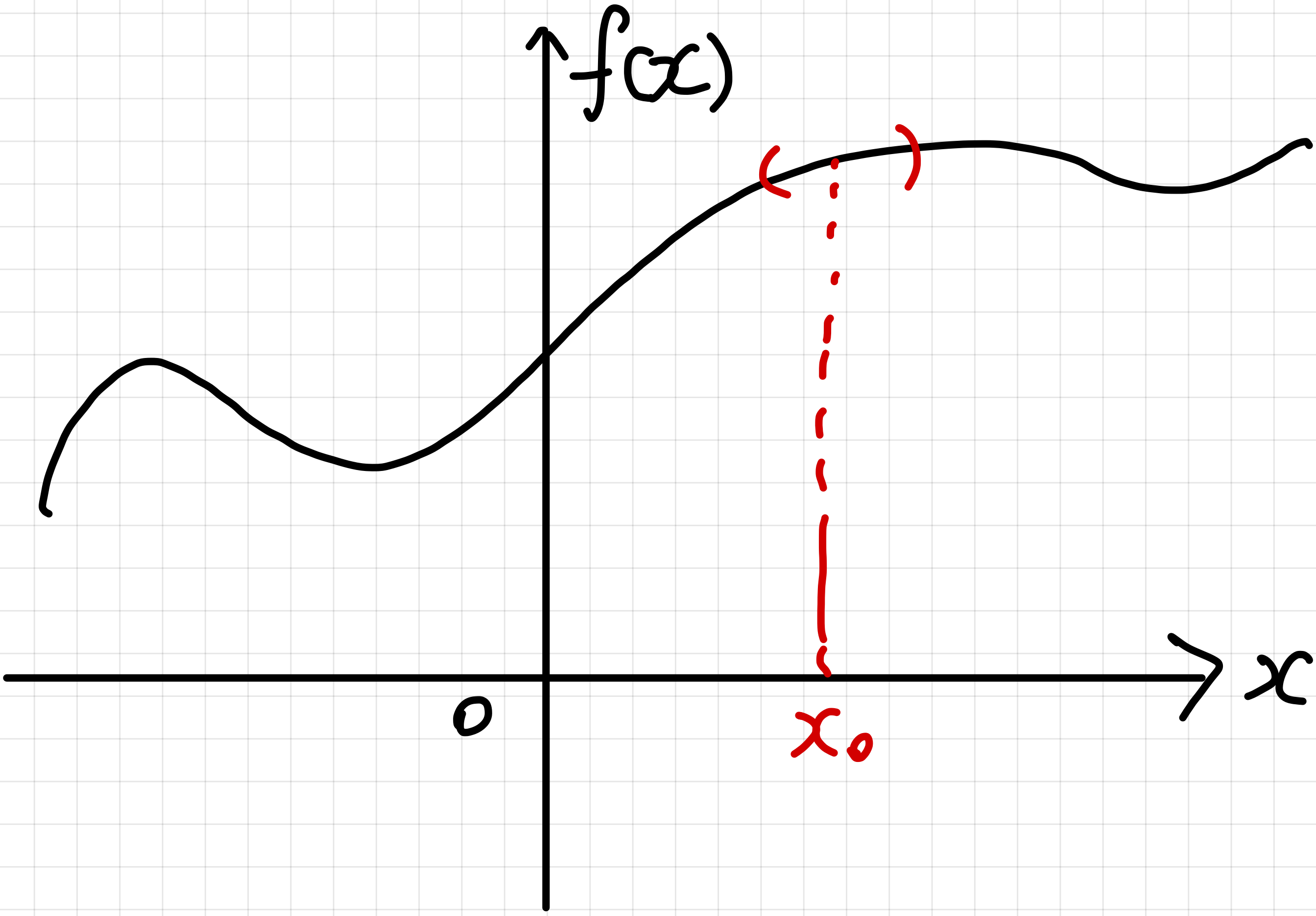
Introduction to manifolds

第2回 逆函数
陰函数



図のように $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は
滑らかの写像であり.
この写像は全単射ではない.
しかし, x_0 のまわりに局所
的に全単射(制限の意味で)

となる.

では、局所における写像の逆写像も滑かであるか?

Lem2.1 微分と単射

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A^\circ = A$とする.

$f: A \to \mathbb{R}^n$をC¹級写像とする.

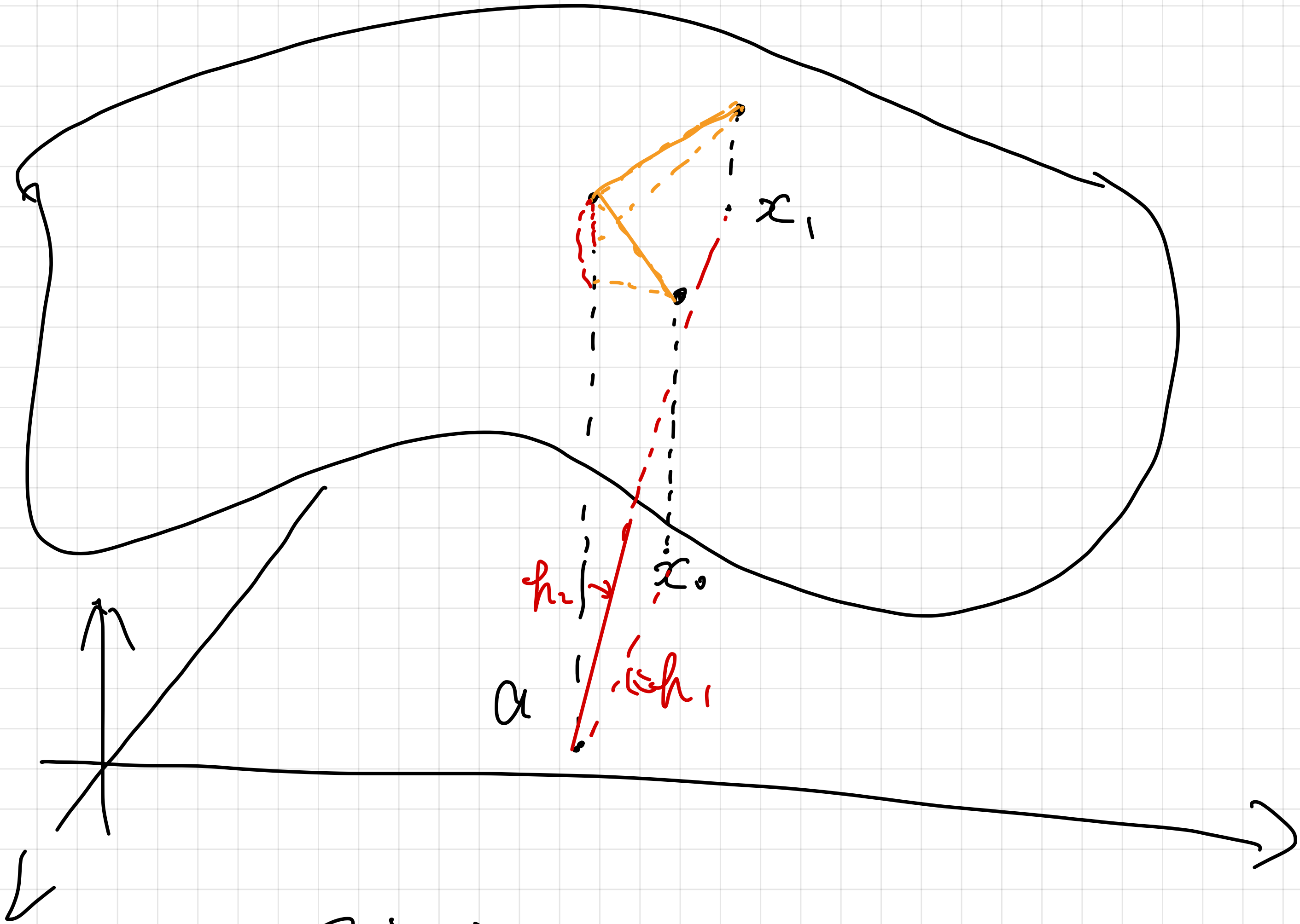
$Df(a)$が可逆行列とする.

この時, aのあるδ-近傍$N(a,\delta) \subseteq A$が存在し

$\exists \alpha \in \mathbb{R}_{>0}$; $\forall x_0, x_1 \in N(a,\delta)$

$|f(x_0) - f(x_1)| \geq \alpha |x_0 - x_1|$

方針.



aの周りで,

$$f(x_0) = f(a+h_1) \approx f(a) + Df(a)h_1$$

$$f(x_1) = f(a+h_2) \approx f(a) + Df(a)h_2$$

$$f(x_0) - f(x_1) \approx Df(a)(x_0 - x_1)$$

$Df(a)$の最小値さえ分かればよい.

proof :

$Df(a)$が正則であるから,

$$2\alpha = \min\{\|Df(a)x\| \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}^m,\ |x| = 1\} > 0 .$$

fが C^1級函数より.

$$g(x) = f(x) - Df(a)x \text{ も } C^1 \text{級で}$$

$$Dg(x) = Df(x) - Df(a)$$

aの δ近傍 $N(a,\delta)$が存在し,

$$\forall x \in N(a,\delta) ; |Dg(x)| < \alpha$$

が成立する.

任意の$x_0 . x_1 \in N(a,\delta)$に対し,

$$x_0 = a + h_0$$
$$x_1 = a + h_1$$

とする.

平均値の定理より. $\exists c \in N(a,\delta) ;\ c = x_0 + t(x_1 - x_0),\ t \in (0,1)$

$$f(x_0) - f(x_1) = Df(c) \cdot (x_0 - x_1)$$

$$= Dg(c)(x_0 - x_1) + Df(a)(x_0 - x_1)$$

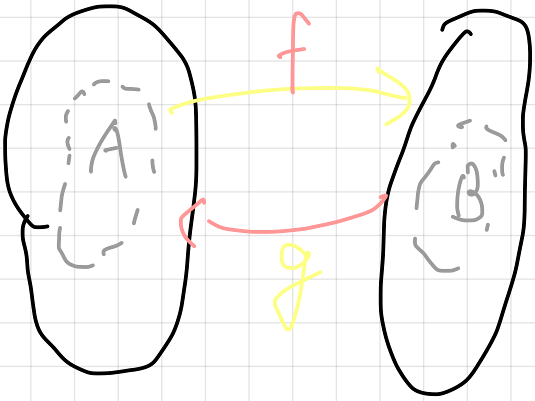
$$|f(x_0) - f(x_1) - Df(a)(x_0 - x_1)| \leq \alpha |x_0 - x_1|$$

$$-|f(x_0) - f(x_1)| + |Df(a)(x_0 - x_1)| \leq \alpha |x_0 - x_1|$$

$$|f(x_0) - f(x_1)| \geq \alpha |x_0 - x_1| \qquad \square$$

Thm 2.1

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A^\circ = A$, $f: A \to \mathbb{R}^n$ を C^r 級写像とする. $B = f(A)$ とし, f が単射かつ $Df(a)$ がすべての $a \in A$ に対し正則であるならば f の終域を $f(A)$ に制限する写像に対する逆写像 C^r 級写像 $g: B \to A$ が存在する.



proof

claim 1

写像 $\varphi : A \to \mathbb{R}$ が微分可能かつ $x_0 \in A$ で極値を取るならば

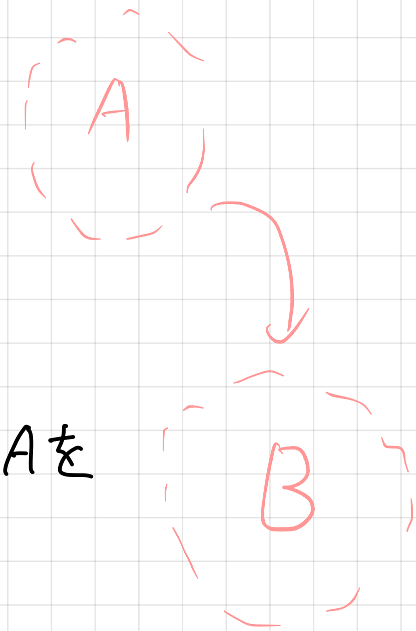
$D\varphi(x_0) = 0$ となる.

方向微分から見れば明らか.

---

claim 2

B が開集合である.



claim proof

$b \in B$ を任意に取り, $a = f^{-1}(b) \in A$ を取る. a を内部に含む立方体 $Q \subseteq A$ を1つ取る. Q の境界を $Bd\,Q$ とする.

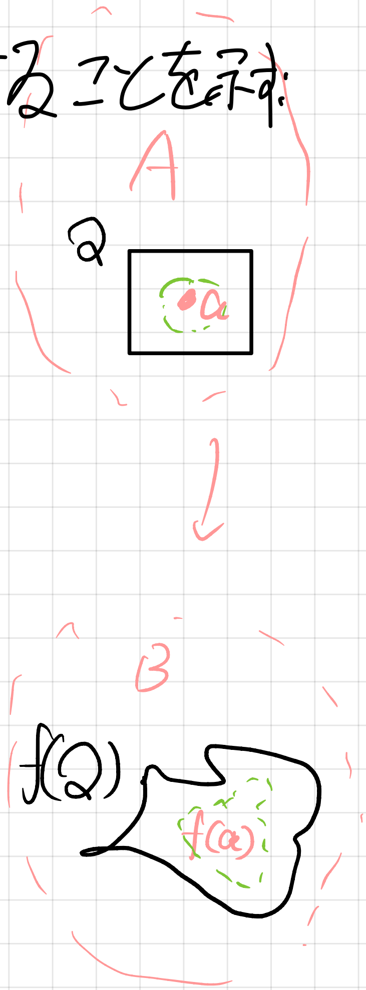
$Bd\,Q$ が有界閉集合であり, コンパクトである. また, f が連続写像なので $f(Bd\,Q)$ がコンパクトである. $\mathbb{R}^n$ が Hausdorff 的であるので, $f(Bd\,Q)$ が閉集合である. $b \notin f(Bd\,Q)$ より, ある $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し, $B(b, 2\delta) \cap f(Bd\,Q) = \phi$

位相学ノート Lem 2.4.6 に参照せよ.

以下任意の $c\in B(b,\delta)$ に対し,

$f(x)=c$ を満たすような $x\in Q$ が存在することを示す.

(つまり, $f(A)=B$ は任意点 b の周りの開近傍を含む)



$c\in B(b,\delta)$ に対し,

$\varphi : Q \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$\varphi(x) := \|f(x)-c\|^2$ と定める.

Q のコンパクト性より, φ が Q 上最小値を取る.

最小値を取る点を x_0 とする

$x_0 \notin \mathrm{Bd}\,Q$ がわかる.

$\left(\because\ x_0 \in \mathrm{Bd}\,Q \Rightarrow f(x_0) \notin B(b, 2\delta) \right.$

$\|f(x_0)-c\| \geq 2\delta$, しかし, $\|f(a)-c\|$

$\left. = \|b-c\| < \delta \right)$ 最小値に反する

$x_0 \in Q^\circ$ より, φ が x_0 において微分可能

φ が x_0 において極値を取り.

claim 1 より

$D\varphi(x_0) = 0$.

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} (f_k(x) - c_k)^2$$

$$D\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} 2(f_k(x) - c_k) \cdot Df_k(x)$$

これを行列の積に直すと

$$D\varphi(x) = 2[(f_1(x)-c_1) \cdots (f_n(x)-c_n)]\,Df(x) = 0$$

$Df(x)$が正則行列なので

$[(f_1(x_0)-c_1) \cdots\cdots (f_n(x_0)-c_n)] = 0$ となる.

すなわち: $f(x_0) = c$.

---

claim 3

$g: B \to A$ が連続写像である.

claimproof

Aの任意開集合Uに対し, $g^{-1}(U)$が開であると示せばいい.

すわなち $f(U)$が開集合であることを示せば十分. Aが開集合なので, Uが$\mathbb{R}^n$での開集合である. fの定義域をUに制限して claim2を適用すれば十分.

---

claim 4

g が B において微分可能である

claimproof

$b\in B$ を任意に取る。この時 $f(a)=b$ となる $a\in A$ が一意に存在するため、
正則行列 $E=Df(a)$ を取り、E^{-1} も取る。

$$G(k):=\frac{[g(b+k)-g(b)-E^{-1}k]}{|k|}$$

を $k\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に定め、

$\lim_{k\to 0} G(k)=0$ を示せば証明完了

$\Delta(k)=g(b+k)-g(b)$ とする。

$\frac{|\Delta(k)|}{|k|}$ が 0 のある近傍において有界であることを示す：

Lem 2.1 より $g(b)$ のある δ' 近傍において、ある正の α が存在し、

$$|f(g(b+k))-f(g(b))|=|b+k-b|\geq\alpha|g(b+k)-g(b)|$$

が成立。$g(b+k)$ が $g(b)$ の δ' 近傍に入るように 0 のある近傍から k を任意に取る。(連続性に従う)

1の場合：$\dfrac{|\Delta(k)|}{|k|} < \dfrac{1}{\alpha}$ が成立

0のδ'近傍において

$$G(k) := \frac{\Delta(k) - E^{-1}\cdot k}{|k|}$$

$$= -E^{-1}\left[\frac{k - E\cdot\Delta(k)}{|\Delta(k)|}\right]\cdot\frac{|\Delta(k)|}{|k|}$$

$$\frac{k - E\Delta(k)}{|\Delta(k)|} := \frac{b+k-b-E\Delta(k)}{|\Delta(k)|}$$

$$:= \frac{f(g(b+k)) - f(a) - E\Delta(k)}{|\Delta(k)|}$$

$$= \frac{f(a+\Delta(k)) - f(a) - E\Delta(k)}{|\Delta(k)|}$$

aにおけるfの微分可能性より0に近づく

$$\lim_{k\to 0} G(k) = 0.$$

Claim 5. gがC^r級写像である

$$Dg(y) = [Df(g(y))]^{-1}$$

$$B \xrightarrow{g} A \xrightarrow{Df} GL(n) \xrightarrow{I} GL(n)$$

Iは逆行列に対応する写像である.
rについて帰納法を用いる.

fがC^1級の時，Dfが連続で，gが連続より
$(Df)\circ g$が連続で，余因子行列による逆行列の構成
より，$[(Df)\circ g]^{-1}$も連続で Dgが連続であるから
$g \in C^1$.

この定理が C^{r-1}級写像に対し成立すると
仮定して，

fがC^r級の時，fがC^{r-1}級でもあり，
gがC^{r-1}級が分かる．またDfがC^{r-1}級で
あり．上記の合成に従うと，$[Df\circ g]^{-1}$が
C^{r-1}級となり．gがC^r級であることが分かる．
$\square$

Thm 2.2 逆函数の定理(超重要)

Aを$\mathbb{R}^n$の開集合とする: C^r級写像

$f: A \to \mathbb{R}^n$に対し, $a \in A$に対し, $Df(a)$が

正則ならば, aの開近傍Uが存在し,

ある開集合$V \subseteq \mathbb{R}^n$が存在し, fの定義域

をU, 終域をVに制限した写像が全単射で,

逆写像がC^r級である.

proof

Lem 2.1より 単射となる近傍U_0が存在する.

det が連続写像なので, $\det Df(x) \neq 0$となる

ような近傍U_1も存在する. $U = U_0 \cap U_1$とすれば

Thm 2.1より 本定理成立.

□

Def 2.1

Aを$\mathbb{R}^m$の開集合とする. $f: A \to \mathbb{R}^n$を 微分可能とする. $f_1, \dots, f_n$をfの各成分とし,

$$Df = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}$$ とする.

$Df = \partial f / \partial x$と略記する場合が多い!

$$\frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_k})}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_l})}$$ を Dfの $i_1, \dots, i_k$行と$j_1, \dots, j_l$列の交叉成分とする.

Thm 2.3.

A を $\mathbb{R}^{k+n}$ の開集合とする. $f: A \to \mathbb{R}^n$ を微分可能な写像とする. f を $f(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^n$ とし,

$Df = [\partial f/\partial x \quad \partial f/\partial y]$ と表す.

$\mathbb{R}^k$ 内の開集合で定義される微分可能な写像 $g: B \to \mathbb{R}^n$ が存在し, 任意 $x \in B$ に対し,

$f(x, g(x)) = 0$ を満たすならば.

$\forall x \in B$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot Dg(x) = 0$$

proof

仮定の写像 g を取り、写像 $h: B \to \mathbb{R}^{k+n}$ を

$$h(x) := (x, g(x))$$ とする。

$$H(x) = f(h(x)) = f(x, g(x))$$ とする。

$$
\begin{aligned}
0 = DH(x) &= Df(h(x)) \cdot Dh(x) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(h(x)) & \frac{\partial f}{\partial y}(h(x)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ Dg(x) \end{bmatrix} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(h(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(h(x)) \cdot Dg(x)
\end{aligned}
$$

$\square$

Thm 2.4 (陰函数の定理)(超超重要)

Aを$\mathbb{R}^{k+n}$の開集合とする. $f: A \to \mathbb{R}^n$をC^r級写像とする fを$f(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^n$と表す. $(a, b) \in A$とする. $f(a, b) = 0$ かつ $\det \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ ならば,

aの開近傍Bが存在し, ただ1つの$g: B \to \mathbb{R}^n$が存在し

$f(x, g(x)) = 0$となる.

しかも, gがC^r級である.

proof :

逆函数定理を用いることになる.

$F : A \to \mathbb{R}^{k+n}$ を

$F(x, y) := (x, f(x, y))$ とする.

$$DF := \begin{bmatrix} I_k & O \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$ となる

$\det(DF) = \det(\frac{\partial f}{\partial y})$ で, $\frac{\partial f}{\partial y}$ が (a, b) において

正則であるから, $\det(DF) \neq 0$.

$F(a, b) = (a, 0)$ に着目し. 逆函数定理より.

(a, b) の開近傍 $U \times V \subseteq \mathbb{R}^{k+n}$ が存在し,

(1) F が $U \times V$ から $(a, 0)$ を含む開集合 $W \subseteq \mathbb{R}^{k+n}$

への全単射で (制限の意味).

(2) 逆写像 $G : W \to U \times V$ が C^r 級写像.

$F(x, y) = (x, f(x, y))$ より.

$G(x, f(x, y)) = (x, y)$

$G(x, z) = (x, h(x, z))$ と書き直す:

h が $W \to \mathbb{R}^n$ の C^r 級写像. ($h = \pi_V \circ G$ より明らか) である

Wに含まれる$(a,0)$の連結な開近傍Bを取る。

$G(x,0) := (x, h(x,0))$

$(x,0) = F(x, h(x,0)) = (x, f(x, h(x,0)))$

$0 = f(x, h(x,0))$となる。

$g(x) = h(x,0)$とすれば、条件を満たす。

以下一意性を示す:

$g_0 : B \to \mathbb{R}^n$を条件を満たす写像とする。

g_0がaにおいて連続であるより、aの開近傍

B_0が存在し、$g_0(B_0) \subseteq V$を満たす。

$x \in B_0$において、

$F(x, g_0(x)) = (x, 0)$

$(x, g_0(x)) = G(x,0) = (x, h(x,0))$となる

つまり、B_0において、$g_0 = g$となる。

$|g_0(x) - g(x)| > 0$を満たす$x \in B$からなる集合

B'が開集合で、$B = B_0 \cup B'$となるが、

Bの連結性より、$B' = \phi$.

$\square$