Introduction to Manifolds

第四回(自習)

内容:

1、有界集合上の積分

2. 体積確定集合

3、広義 積分

Def 4.1

Sを$\mathbb{R}^n$の有界集合とする.

S上の有界函数

$f: S \to \mathbb{R}$に対し,

$f_S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$を

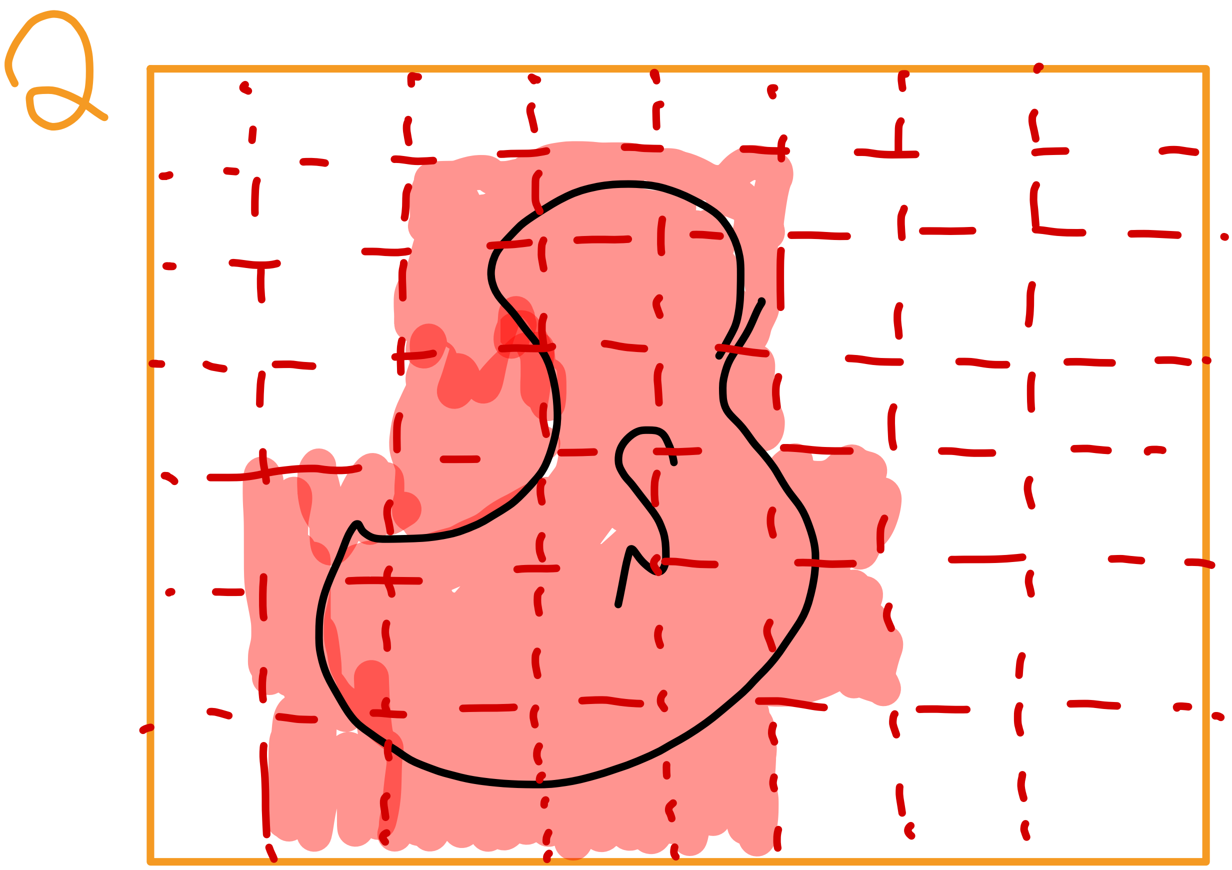
$$f_S(x) \begin{cases} f(x), & x \in S \\ 0, & x \notin S \end{cases}$$

とする. この時, Sを含む長方体Qを取り.

$$\int_S f = \int_Q f_S$$

と定める.

今まで長方体領域での積分しか議論していない。有界集合Sを長方体で切る操作はQを用いて実装できる。



Lem 4.1

Q, Q' を $\mathbb{R}^n$ 上の長方体とする
有界函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は
$Q \cap Q'$ を除いた領域で 0 を
取る時.

$$\int_Q f = \int_{Q'} f$$

が成立し, 一方が積分可能
ならば残りも積分可能.

Rem

これは先ほどの有界集合上の
積分の well-defined 性を示す

proof

$Q \subseteq Q'$ の場合について考察する。

Eを$\mathrm{Int}\,Q$上fの不連続点集合とする。この場合$f: Q \to \mathbb{R}$と$f: Q' \to \mathbb{R}$がいずれも$\mathrm{Bd}\,Q \cup E$を除いた領域で連続となる。$\mathrm{Bd}\,Q$が測度0より、これらの積分の存在とEが測度0と同値である。

次に$\int_Q f$と$\int_{Q'} f$が存在すると仮定して、$\int_Q f = \int_{Q'} f$

を示す：

Q'の分割P'を任意に取り，
P'にQの各成分区間の端点
を追加した細分をPとする。

この時QはPによって決定
されるQ'の部分長方体の和
で書ける。

Qに含まれない長方体Rに
対し，$m_R(f) \leq 0$より。 check せよ

$$L(f, P'') \leq \sum_{R \subseteq Q} m_R(f) v(R)$$
$$\leq \int_Q f$$

従て, $L(f, P') \leq \int_Q f$

同様に $U(f, P') \geq \int_Q f$

も示せる.

P'の任意性より.

$$\int_{Q'} f = \int_Q f$$

が成立する.

$Q \not\subseteq Q'$ の場合

$Q \cup Q' \subseteq Q''$ となる

長方体Q''を一つ取り上記の議論をすればよい. $\square$

Lem 4.2

$S \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : S \to \mathbb{R}$ とし、

$F, G : S \to \mathbb{R}$ を

$F(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

$G(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ とする

この時

(1) f, g が x_0 で連続ならば F, G も x_0 で連続である

(2) f, g が S で積分可能ならば、F, G も S で積分可能.

(1) $f(x_0)=g(x_0)$ の時, $\forall \varepsilon>0$

$\exists \delta>0$; $\forall x \in S$; $|x-x_0|<\delta$;

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$

従って $|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$

$|G(x)-G(x_0)|<\varepsilon$.

$f(x_0)\neq g(x_0)$ の時,

$f-g$ の連続性に従う.

(2) S を含む長方体 Q において, f_S, g_S は D, E の測度

0の集合を除いて連続である。

F_ε, G_ε も DUE という

測度0の集合を除いて

連続で、積分可能。

Thm 4.1（積分の性質）

S を $\mathbb{R}^n$ の有界部分集合，

$f, g : S \to \mathbb{R}$ を有界函数

積分可能な函数とする．

(a)

$$\int_S (af + bg) = a\int_S f + b\int_S g$$

(b) $\forall x \in S$; $f(x) \leq g(x)$

$$\Rightarrow \int_S f \leq \int_S g$$

$|f|$ が S で積分可能

かつ

$$\left|\int_S f\right| \leq \int_S |f|$$

(c). $T \subseteq S$, f が非負値を取る $\Rightarrow$ $\int_T f \leq \int_S f$

(d) f が S_1, S_2 において積分可能

$\Rightarrow$

$$\int_{S_1 \cup S_2} f = \int_{S_1} f + \int_{S_2} f - \int_{S_1 \cap S_2} f$$

proof (a), (c) は定義に従って明らか.

(b) 不等式評価は明らかで

$|f| = \max\{f(x), -f(x)\}$ で積分可能

$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ より

$|\int f| \leq \int |f|$

(d) $T = S_1 \cap S_2$, $S' = S_1 \cup S_2$ とする

S' を含む長方体 Q を取り.

f が S' で非負値を取る時.

$f_{S'}(x) = \max\{f_{S_1}(x), f_{S_2}(x)\}$

$f_T(x) = \min\{f_{S_1}(x), f_{S_2}(x)\}$

f が S', T において積分可能である.

一般に

$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$

$f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ とすると

$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$

上記の特殊な場合の議論より

$f_+(x), f_-(x)$ が S', T において

積分可能. 線形性より

f が S', T において積分可能.

$$f_{S'}(x) = f_{S_1}(x) + f_{S_2}(x) - f_T(x)$$

に線形性を適用すれば良い

Cor 4.1

$S_1, \cdots, S_k$ は $\mathbb{R}^n$ 上有界集合とする. $i \neq j$ ならば $S_i \cap S_j$ が測度0とする

$S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$ とする.

$f: S \to \mathbb{R}$ が各 S_i において積分可能ならば

$$\int_S f = \int_{S_1} f + \cdots + \int_{S_k} f$$

Thm 4.2

S を $\mathbb{R}^n$ 上有界集合とする.
$f : S \to \mathbb{R}$ を有界連続函数とする.

$$E := \left\{ x_0 \in \mathrm{Bd}\, S \;\middle|\; \lim_{x \to x_0} f(x) \neq 0 \right\}$$

とする. E が測度 0 ならば f が S 上積分可能である.

proof

$x_0 \notin E$ とした時, f_S が x_0 において連続であることを示せば良い.

$x_0 \in \mathrm{In}\,S$ の時 f と f_S が x_0 のある開近傍において一致する. f の連続性に従う.

$x_0 \in \mathrm{Ext}\,S$ の時, $f_S = 0$ に従う.

$x_0 \in \mathrm{Bd}\,S$ の時. $x_0 \in S$ ならば f の連続性より, $f(x_0) = 0$ で, $x \to x_0$ $f_S(x) \to 0$ が成立.

$x_0 \notin S$ の時, $f_S(x_0) = 0$

Thm 4.3

Sを$\mathbb{R}^n$有界集合とする

$f: S \to \mathbb{R}$をSにおいて

積分可能な函数とする

$A = \mathrm{Int}\, S$

$$\int_A f = \int_S f$$

Def 4.2

Sを$\mathbb{R}^n$上の有界集合とする

定函数 1 が S において積分可能ならば、

Sを体積確定集合 (rectifiable set) と呼び

$$v(S) = \int_S 1$$ とする.

Thm4.4

$S \subseteq \mathbb{R}^n$が体積確定集合であることと $\mathrm{Bd}\,S$ が測度0であることと同値

Thm 4.5

S_1, S_2が体積確定集合ならば

(1) $v(S) \geq 0$

(2) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow v(S_1) \leq v(S_2)$

(3) $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$が体積確定で

$$v(S_1 \cup S_2) = v(S_1) + v(S_2) - v(S_1 \cap S_2)$$

(4). $v(S) = 0 \Leftrightarrow S$が測度0.

(5). $v(\mathrm{Int}\, S) = v(S)$

(6) $f : S \to \mathbb{R}$が有界連続関数ならばSにおいて積分可能.

Def 4.3

C を $\mathbb{R}^{n-1}$ のコンパクトな体積確定集合とする.

連続函数 $\varphi, \psi : C \to \mathbb{R}$ を $\forall x \in C ; \varphi(x) \leq \psi(x)$ を満たすものとする. この時集合

$$\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n}}{S} := \{(x, t) \mid x \in C, \ \varphi(x) \leq t \leq \psi(x)\}$$

が簡単領域 (simple region) と呼ぶ

Lem 4.3

Sが$\mathbb{R}^n$上の簡単領域であるならば、Sがコンパクトな体積確定集合である。

proof

$$G\varphi := \{(x,t) \mid x \in C,\ t = \varphi(x)\}$$

$$G\psi := \{(x,t) \mid x \in C,\ t = \psi(x)\}$$

$$D = \{(x,t) \mid x \in \mathrm{Bd}\,C,\ \varphi(x) \leq t \leq \psi(x)\}$$

とする。$G\varphi,\ G\psi,\ D \subseteq S$が明らか。以下

$\mathrm{Bd}\,S \subseteq G\varphi \cup G\psi \cup D$であることを示す：

$(x_0, t_0) \notin G_\varphi \cup G_\psi \cup D$ ならば

$(x_0, t_0) \in \mathrm{Int}\, S \cup \mathrm{Ext}\, S$

が成立することは以下のどれかが成立することに従う.

(1) $x_0 \notin C$

(2) $x_0 \in C$, ($t_0 < \psi(x_0)$ または $t_0 > \psi(x_0)$)

(3) $x_0 \in \mathrm{Int}\, C$, $\varphi(x_0) < t_0 < \varphi(x_0)$

(check せよ)

次に G_φ, G_ψ が測度0であることを示す:

G_φ を示すだけで十分で

$\mathbb{R}^{n-1}$ において, $C \subseteq Q$ を満たす長方体 Q を取る.

任意の正のεに対し，

$\varepsilon' = \varepsilon / 2v(Q)$とする．

φがコンパクト集合C上の連続写像なので，一様連続であり，ある$\delta > 0$が存在し，$|x-y| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon'$を満たす．

このδの幅でQの分割Pを定める．

Pによって決定される部分長方体Rに対し，$C \cap R \neq \phi$

の時，$x_R \in C \cap R$を一つ取り

$$I_R := [\varphi(x_R)-\varepsilon',\ \varphi(x_R)+\varepsilon']$$

とする.

$$\sum_R v(R \times I_R) = \sum_R v(R) \cdot 2\varepsilon'$$

$$\leq v(Q) \cdot 2\varepsilon'$$

$$= \varepsilon$$

最後にDが測度0であることを示す:

φ, ψが有界で，正の

実数 M が存在し,

$\forall x \in C, -M \leq \varphi(x) \leq \psi(x) \leq M$

を満たす. 正の実数 $\varepsilon > 0$ を任意に取る. C が体積確定で,

$\mathrm{Bd}\, C$ は測度 0,

総体積が $\varepsilon / 2M$ 以下の

$Q_1, \cdots$ 長方体列が取れて,

$Q_i \times [-M, M]$ となるように

$\mathbb{R}^n$ の部分集合へ拡張すれば

体積が ε 以下の被覆ができる.

Thm 4.5

$S = \{(x,t) \mid x \in C,\ \varphi(x) \leq t \leq \psi(x)\}$

を簡単領域とする.

$f : S \to \mathbb{R}$ を連続写像とする.

$\int_S f$ が存在し,

$$\int_S f = \int_{x \in C} \int_{t=\varphi(x)}^{t=\psi(x)} f(x,t)$$

広義積分

Def 4.4

Aを$\mathbb{R}^n$の開集合,

$f: A \to \mathbb{R}$を連続函数とする.

fが非負値を取るならば,

$\int_A f$を $\sup\{\int_D f \mid D \subseteq A, D$はコンパクトな体積確定集合$\}$

とする.

一般に,

$f_+ = \max\{f, 0\}$

$f_- = \max\{-f, 0\}$ とし,

$$\int_A f = \int_A f_+ - \int_A f_-$$

とする.

Lem 4.4

Aを$\mathbb{R}^n$上の開集合とする。

$(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$; $\forall i\in\mathbb{N}$; C_iが

コンパクトな体積確定集合で

$C_i \subseteq \mathrm{Int}\, C_{i+1}$ を満たす

かつ、$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i = A$ となる

集合列 $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が

存在する。

proof:

d を $\mathbb{R}^n$ 上の sup 距離とする.

$B \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し,

$$d(x, B) := \inf\{d(x, y) \mid y \in B\}$$

とする.

$B = \mathbb{R}^n \setminus A$ とする.

$$D_N := \{x \mid d(x, B) \geq 1/N,\ d(x, 0) \leq N\}$$

とする.

D_N は閉集合で, A に含まれる.

$$A_{N+1} := \{x \mid d(x, B) > 1/(N+1),\ d(x, 0) < N+1\}$$

とすると、A_{N+1}が開集合で、

$D_N \subseteq A_{N+1} \subseteq \mathrm{Int}\, D_{N+1} \subseteq D_{N+1}$

が成立する。

$\bigcup_{i\in \mathbb{N}} D_N = A$ がほぼ明らか

である。

しかし、D_Nが体積確定とは限らない！

任意の$x \in D_N$に対し、

$x \in \mathrm{Int}\, C'_x \subseteq C'_x \subseteq \mathrm{Int}\, D_{N+1}$ となる

長方体 C'_x を取り、D_N の開被覆をなす。

コンパクト性より、有限個 $C'_{x_1}, \cdots, C'_{x_k}$ が存在し、

$\bigcup_{i=1}^{k} C'_{x_i} = C_N$ とすると

コンパクト体積確定集合の有限和集合

$$D_N \subseteq \mathrm{Int}\, C_N \subseteq C_N$$
$$\subseteq \mathrm{Int}\, D_{N+1}$$

となる。

この列は $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が求めたもの。

Thm 4.6

Aを$\mathbb{R}^n$の開集合，$f: A \to \mathbb{R}$を連続関数，Lem4.4の条件を満たす集合列$(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$を任意に取り，fがA上積分可能であることと数列$\left(\int_{C_N} |f|\right)_{N \in \mathbb{N}}$が有界であることと同値で

$$\int_A f = \lim_{N \to \infty} \int_{C_N} f$$

proof

fが非負値の時、$f=|f|$

$\int_{C_N} f$が単調増加で、

収束することと有界であることと

同値である.

次にfがA上積分可能ならば

$$\int_{C_N} f \leq \sup_D \left\{ \int_D f \right\} = \int_A f$$

(ただし、DをAに含まれるコンパクトな

体積確定集合とする) 従って

$$\lim_{N\to\infty} \int_{C_N} f \leq \int_A f$$

任意のコンパクトな体積確定集合 D に対し，ある $m \in \mathbb{N}$ が存在し，$D \subseteq C_m$ を満たす.

$$\int_D f \leq \int_{C_m} f \leq \lim_{n \to \infty} \int_{C_n} f$$

が成立する.

一般に，

$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$$

$\left(\int_{C_n} f_+\right)_{n \in \mathbb{N}}$，$\left(\int_{C_n} f_-\right)_{n \in \mathbb{N}}$ が

有界であることと

$\int_{C_N}|f|$ が有界である

ことと同値で、

前者が収束すれば

$$\int_{C_N} f = \int_{C_N} f_+ - \int_{C_N} f_-$$

より、$\int_A f = \int_A f_+ - \int_A f_-$

が定義より求まる。

Thm 4.7

Aを$\mathbb{R}^n$上有界開集合とする.

$f: A \to \mathbb{R}$を有界連続函数とし,

広義積分$\int_A f$が存在する.

通常な積分$\int_A f$も存在する

ならば,両者が一致する.

proof

fが有界なので $\exists M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$;

$\forall x \in A$; $|f(x)| \leq M$ が成立し、

任意の $D \subseteq A$ を満たすコンパクト体積確定集合に対し、

$$\int_D |f| \leq \int_D M \leq M \cdot v(Q)$$

fがAにおいて広義積分可能

次にfが非負値を取る時、

Aを含む長方体Qを取り、

通常 意味

$$\int_D f = \int_D f_A \leq \int_Q f_A = \int_A f$$

従って、

広義 $\int_A f \le$ 通常 $\int_A f$ が成立.

Q の分割 P と P によって決定される部分長方体で A に含まれる $R_1, \dots, R_k$ 対し,

$$L(f_A, P) = \sum_{i=1}^{k} m_{R_i}(f) \cdot v(R_i)$$

$$\left(\because R \subseteq A \Rightarrow m_R(f) = m_R(f_A), \quad R \not\subseteq A \Rightarrow m_R(f_A) = 0 \right)$$

$$\sum_{i=1}^{k} m_{R_i}(f) \cdot v(R_i) \le \sum_{i=1}^{k} \int_{R_i} f \le \int_{\bigcup_{i=1}^{k} R_i} f \le \text{広義} \int_A f.$$

従って,

$$(\text{通常})\int_A f \leq (\text{広義})\int_A f$$

一般の場合.

$f = f_+ - f_-$ に対し, 上記の議論に適用すれば良い.

Rem

$(0,1)$ 開区間に対し、

$0<a<1$ を満たす a を任意に取る。

$\mathbb{Q}$ が可算集合で、$(0,1)$ の

有理数全体集合が可算で、

整列化すると

$q_1, \cdots\cdots$, として、

任意の q_i に対し、幅が

$a/2^i$ より小さい $q_i \in (a_i, b_i)$

$\subseteq (0,1)$ を満たす (a_i, b_i) を

取る。

$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$ とすると,

Aが開集合で, $\bar{A}=[0,1]$ で, 仮にBdAが測度0とすると, $\varepsilon=1-a$ とした時,

BdAを長さε以下の開区間列で被覆され, $\bar{A}$がコンパクトより, BdAを被覆開区間列とAの組成成分(a_i,b_i)から有限個をもって, $\bar{A}$を被覆する合計長さは $\varepsilon+a<1$ となり, $\bar{A}$を被覆するには長さが1以上であることに反する.

従って、Aが有界開集合であるが（広義）$\int_A 1$ が存在するに対し、（通常）$\int_A 1$ が存在しないことが分かる