Introduction to Manifolds (5)

今日のテーマ

「1の分割」
変数変換の原理

Lem 5.1

Q を $\mathbb{R}^n$ 上の長方体とする.

この時, $\forall x \in \mathbb{R}^n$; $\begin{pmatrix} x \in \mathrm{Int}\,Q \Rightarrow \varphi(x) > 0 \\ x \notin \mathrm{Int}\,Q \Rightarrow \varphi(x) = 0 \end{pmatrix}$

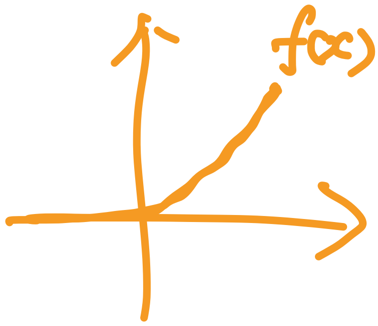
となる C^∞ 級函数 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

が存在する.

proof

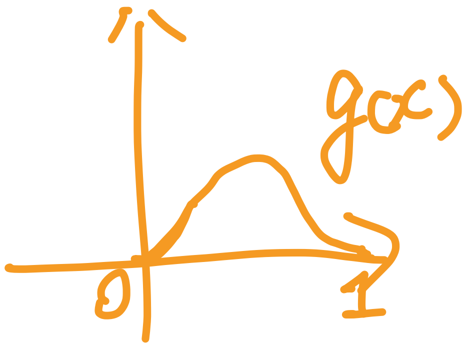
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$ とする.



f が C^∞ 級写像

$g(x) = f(x) \cdot f(1-x)$ とすれば



となる.

$Q := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$

とすれば

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{n} g\left(\frac{x_i - a_i}{b_i - a_i}\right)$$ が望む

写像となる.

Lem 5.2

$\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合族とする

$A = \bigcup \mathcal{A}$ とすれば、A に含まれる可算個長方体の列 $Q_1, \cdots$ が存在し、

(1) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Int}\, Q_i = A$

(2) $\forall i \in \mathbb{N}; \exists A_i \in \mathcal{A}; Q_i \subseteq A_i$

(3) 任意の $x \in A$ に対し、x のある開近傍 U_x が存在し、有限個の長方体としか交わらない

proof

$D_1, \cdots,$ を $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i = A$, $\forall i \in \mathbb{N}$; $D_i \subseteq \mathrm{Int}\, D_{i+1}$ となるコンパクト集合列とする　$i \leq 0$ の時 $D_i = \emptyset$ と約束する.

任意の $i \in \mathbb{N}$ に対し,

$B_i = D_i \setminus \mathrm{Int}\, D_{i-1}$ とする.

B_i が有界閉集合であり故にコンパクトである.

$x \in B_i$ を任意に取り,

x を中心とする D_{i-2} と交わらず

かつ $\mathcal{A}$ のある要素 A_x に含まれるような長方体 C_x を取る.

当然、 $\bigcup_{y \in B_i} \mathrm{Int}\, C_y \supseteq B_i$

を満たすから, B_i の有限個被覆 $C_1^i, \cdots, C_k^i$ が取れる.

$\mathcal{C}_i = \{C_1^i, \cdots, C_k^i\}$ として,

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_i$$

と定まればよい.

$\mathcal{C}$は可算個長方体列で、以下(1), (2), (3)の条件を確認する。$x \in A$を任意に取る。$x \in \mathrm{Int}\, D_i$を満たす最小のiを取り、$x \in B_i$が成立する。よってxを元にもつ$c \in \mathcal{C}$が構成より取れる。

(2)は明らか。

(3) $x \in A$に対し、$x \in \mathrm{Int}\, D_i$を満たすD_iに対し、$\mathcal{C}_{i+2}, \mathcal{C}_{i+3}$の元は$D_i$と

交わりをもたず，

$\bigcup_{k=1}^{i+1} C_k$ が有限集合

より，証明完了．

Def 5.1

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の support を次の集合の集合の閉包として定義する.

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \neq 0\}.$$

$\mathcal{S}(\varphi)$ と書く

Thm 5.1「1の分割」の存在.

$\mathcal{A}$を$\mathbb{R}^n$開集合の族とし,

$A := \bigcup \mathcal{A}$と定め, この時, 以下の

7条件を満たす連続写像の列

$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が

存在する.

(1) $\forall x \in \mathbb{R}^n ; \varphi_i(x) \geq 0$

(2) $\mathcal{S}(\varphi_i) \subseteq A$

(3) $\forall x \in A ; \exists U \in \mathcal{U}_x ;$

Uと交わる$\mathcal{S}(\varphi_i)$が有限個しか存在しない.

(4) $\forall x \in A ; \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) = 1$

(5) φ_iがC^∞級函数

(6) $S(\varphi_i)$ がコンパクト.

(7) $S(\varphi_i)$ が $\mathcal{A}$ のある元に含まれる.

<u>proof</u>

Lem 5.2 を適用し, A を Lem 5.2 の条件を満たす長方体列 $Q_1, \dots$ に分解する. 各長方体に Lem 5.1 を適用すれば, (4) 以外の条件をすべてを満たす $\varphi_1, \dots$, $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の列が取れる.

$\lambda(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)$ とし,

長方体Q_iに対し,

$\varphi_i(x) := \dfrac{\chi_i(x)}{\lambda(x)}$ とすれば

良い.

Thm 5.2

Aを$\mathbb{R}^n$上の開集合とする.
$f: A \to \mathbb{R}$を連続函数、$\{\varphi_i\}$を
A上 1の分割とする. この時.

(1) $\int_A f$が存在する

$$\iff \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_A \varphi_i \cdot |f| \right] \text{が収束}$$

(2) $$\int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_A \varphi_i f \right]$$

<u>proof</u>

Step 1. fが非負函数と仮定する

(a) $\sum \int_A \varphi_i |f|$ が収束することを仮定して、

$\int_A f$ の存在を示す:

DをAのコンパクトな体積確定集合とする。この時、あるMが存在し、

$i > M$に対し、φ_iがD上0を取る。

(これはコンパクト性に従う)

$$\int_D f = \sum_{i=1}^{M} \left[\int_D \varphi_i f \right]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{M} \left[\int_A \varphi_i f \right]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_A \varphi_i f \right] \quad \cdots\cdots ①$$

f の積分可能性が $\int_D |f|$ の有界性に従う。

(b) $\int_A f$ が存在すると仮定して,

$\sum \left[\int_A \varphi_i f\right]$ の収束を示す:

任意の N に対し,

$D := \bigcup_{i=1}^{N} S(\varphi_i)$ とし,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_A \varphi_i f = \sum_{i=1}^{N} \int_D \varphi_i f$$

$$\leq \int_D f$$

$$\leq \int_A f$$

step 2

fが一般な連続函数の時,

$f = f_+ - f_-$ について

step 1を適用すれば良い!

#この先の内容は完全に観賞用となっている.数学科以外の方はそれを無視してもよい!

多変数函数 変数変換の原理流れ.

1. 単変数置換積分
2. 可微分写像で測度0集合の像が測度0.
3. 可微分写像の分解
4. 変数変換.

定理1.

$I := [a,b]$, $g: I \to \mathbb{R}$ をC^1級写像とする.

(a,b)において, $g'(x) \neq 0$ とする. この時,

$g(I)$が$g(a)$, $g(b)$を端点とする閉区間Jで,

$f: J \to \mathbb{R}$が連続ならば,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) g'$$

同値な書き換えとして,

$$\int_J f = \int_I (f \circ g) |g'|$$

proof :

g' の連続性より、g が単射かつ単調的に変化。
$g(I)$ が $g(a)$, $g(b)$ を端点に持つ閉区間 J であることが明らか。(全射の部分は中間値の定理に従う)

$J := [c, d]$ とし、

$F(y) := \int_c^y f$ とする。f が連続なので、
微積分学の基本定理より、$F'(y) = f(y)$ で、

$h(x) := F(g(x))$ とすれば、

$$h'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\begin{aligned}\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\, g'(x) &:= h(b) - h(a) \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \int_c^{g(b)} f - \int_c^{g(a)} f\end{aligned}$$

c を $g(b)$ または $g(a)$ のどれかにすると、問題完了。
$g' > 0$ の時、$|g'| = g$ で $J := [g(a), g(b)]$, $c = g(a)$ とすればよい
$g' < 0$ の時、$|g'| = -g$ で、$J := [g(b), g(a)]$ $c = g(b)$ とすればよい

□

定理2.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$（開集合）, $g: A \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級函数とする. $E \subseteq A$ が測度0ならば, $g(E)$ も測度0である.

proof

Step1. 任意の測度0の集合 S に対し, 任意の ε, δ に対し, ある各辺が δ 以下の立方体列が S を被覆し, 長方体列の総体積が ε 以下.

これを示すには, 任意の長方体 $Q = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ が有限個の長さが δ 以下, 総体積が $2v(Q)$ 以下の立方体列で覆えることを示せば良い.

$v(Q_\lambda) < 2v(Q)$ となるように,

$Q_\lambda := \prod_{i=1}^{n} [a_i - \lambda, b_i + \lambda]$ を定め,

$1/N < \min\{\lambda, \delta\}$ を満たす自然数 N を取り, $C: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ を

$C(m) = m/N$ とする. 任意の i に対し,

c_i を $C(\mathbb{Z})$ 中 a_i の最大値とし, d_i を b_i 以上の最小値とする.

$Q' := \prod_{i=1}^{n} [c_i, d_i]$ とすれば.

Q' の成分区間を $1/N$ の長さで分割すれば

$Q \subseteq Q' \subseteq Q_\lambda$ が成立し, かつ,

Q'によって決定される立方体は総体積$2v(Q)$以下.

Step 2　$C \subseteq A$を閉立方体とし,

$\forall x \in C ; |Dg(x)| \leq M$ かつ, Cの辺の長さがwならば,

$g(C)$が辺の長さが　Mw以下の立方体に含まれる.

aをCの中心とする, この時, $C_{w/2} := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| < \frac{w}{2} \} \subseteq C$

が成立, 平均値の定理より. aとxの線分上一点c_jが存在し,

$$g_j(x) - g_j(a) = Dg_j(c_j)(x-a)$$

$$|g_j(x) - g_j(a)| = |Dg_j(c_j)| \, |x-a| \leq M(w/2)$$

Step 3　本番: Aが開, Eが測度0である, $g \in C^1$. $\Rightarrow g(E)$測度0

$C_i \subset \mathrm{Int}\, C_{i+1}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = A$となるコンパクト集合列$C_i$

を取る. $E_k = C_k \cap E$とする.

以下$g(E_k)$が測度0であることを示せば十分.

C_kがコンパクトであるから, $C_k \subseteq \bigcup_{x \in C_k} B_{\sup}(x, \delta)$

$\subseteq \mathrm{Int}\, C_{k+1}$となる$\delta$-長方体列が取れる. この$\delta$を

固定する. またC_{k+1}において, $|Dg(x)|$の上界Mを

取る.

$\varepsilon' = \varepsilon/(M)^n$ とし,

step1 より, E_k を各辺 δ 以下の立方体列 $(D_i)_{i\in N}$ で覆えて,

総体積が ε' 以下となる.

step2 より, $E_k \cap D_i \neq \phi$ となる D_i に対し,

$$v(g(D_i)) \leq M^n v(D_i)$$

$$\sum v(g(D_i)) \leq M^n \cdot \varepsilon' = \varepsilon.$$

$\bigcup g(D_i) \supseteq g(E)$ が成立.

定理3.

$g: A \to B$ を同相写像, $g, g^{-1} \in C^r$, A, B ともに $\mathbb{R}^n$ の開集合とする. この時, A のコンパクト部分集合 D に対し,

(a) $\begin{cases} g(\mathrm{Int}\,D) = \mathrm{Int}(g(D)) \\ g(\mathrm{Bd}\,D) = \mathrm{Bd}\,g(D) \end{cases}$

(b) D が体積確定なら, $g(D)$ も.

(a) は同相写像の性質に従う.

(b) は定理2に従う.

Def

$f: A \to B$ が C^r 級微分同相とは，f が同相写像で，f, f^{-1} がともに C^r 級写像である．

特に，$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ に対し，

$f_i(x) = x_i$ が成立するような i が存在する時，

f が原始微分同相(primitive diffeomorphism)と呼ぶ．

特に指定がなければ，微分同相を $r \geq 1$ の C^r 級写像と指すことにする．

定理4:

$g: A \to B$ が n 次元内開集合 A, B の微分同相写像とする。$(n \geq 2)$. 任意の $a \in A$ に対し、ある a の開近傍 $U_0 \subseteq A$ が存在し、ある $\mathbb{R}^n$ 内の開集合列と原始微分同相列が存在し、

$$\begin{tikzcd}
U_0 \arrow[r, "h_1"] \arrow[rrr, bend right, "g|U_0"'] & U_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "h_k"] & U_k
\end{tikzcd}$$

が可換になる。つまり、$g|U_0 = h_k \circ \cdots \circ h_1$

proof

step1. 線形写像の時，初等行列積に分解することができ，行交換を次のように変換すれば問題の主張を満たす．

	行 i	行 j
初期ベクトル	a	b
i行目からj行目を引く	$a-b$	b
j行目をaにする	$a-b$	a
i行目からj行目を引く	$-b$	a
i行目を-1倍にする	b	a

以上より，行交換を原始微分同相な写像の合成で書ける．

step2: gが平行移動の時，つまり，

$g(x) = x + c$ ならば，

$$t_1(x) = x + (0, c_2, \dots, c_n)$$

$$t_2(x) = x + (c_1, 0, \dots, 0)$$

の合成で書ける． OK．

step3：

$a=0,\ g(0)=0,\ Dg(0)=I_n$ の時について考える.

$g(x)=(g_1(x),\cdots,g_n(x))=(g_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,g_n(x_1,\cdots,x_n))$

とする.

$h: A\to\mathbb{R}^n$ を

$h(x):=(g_1(x),\cdots,g_{n-1}(x),x_n)$ と定義する.

$h(0)=0$ で, $Dh(0)=I_n$ が成立する.

逆函数の定理より. 0のある開近傍 V_0 が存在し,

$h|V_0 : V_0\to \underset{V_1}{\underset{\shortparallel}{h(V_0)}}$ が $\underset{原点}{}$微分同相写像.

$k: V_1\to\mathbb{R}^n$ を

$k(y):=(y_1,\cdots,y_{n-1},g_n(h^{-1}(y)))$ とする.

$Dk(y)=\left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{D(g_n\circ h^{-1})(y)}\end{array}\right]$, chain rule より.

$D(g_n\circ h^{-1})(0)=Dg_n(0)[Dh(0)]^{-1}$

$=[0\ 0\ \cdots 0\ 1]$

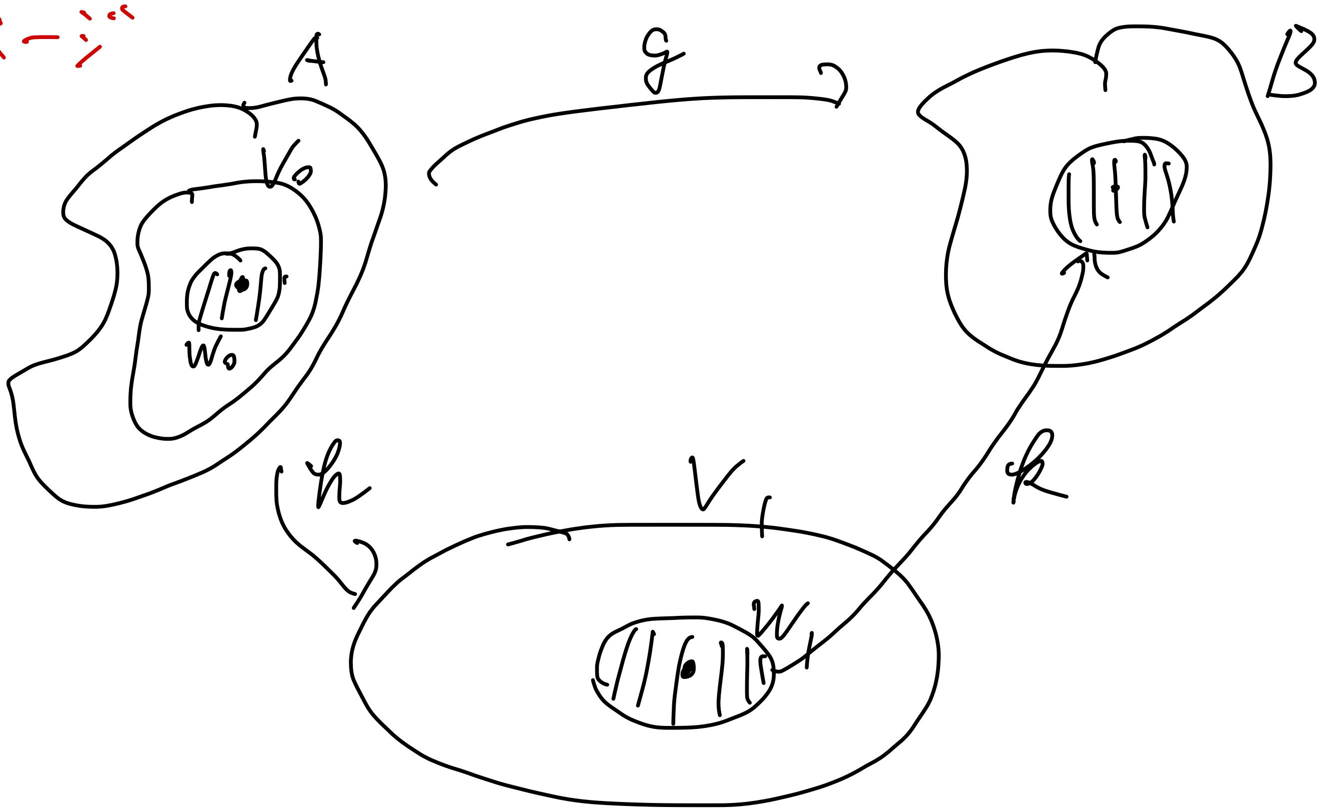
$Dk(0)=I_n$

これより. k は 0 の開近傍 W_1 を $\mathbb{R}^n$ の開集合への

原始微分同相写像し．$W_0 = h^{-1}(W_1)$として．

$$g|W_0 = k\circ h|W_0$$ が成立する．

イメージ



<u>step 4</u>：

$g : A \to B$，$a \in A$，$C = Dg(a)$とする．

$t_1, t_2, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$を

$$t_1(x) = x + a$$

$$t_2(x) = x - g(a)$$

$$T(x) = C^{-1}x$$

$\tilde{g} = T \circ t_2 \circ g \circ t_1$ とする.

$\tilde{g}$ が $t_1^{-1}(A)$ と $T(t_2(B))$ 間の微分同相写像

$\tilde{g}(0) = 0$, $D\tilde{g}(0) = C^{-1} \circ C = I_n$

step3 より開集合 $W_0 \subseteq t_1^{-1}(A)$, に対し,

$\tilde{g}|_{W_0}$ が $W_0 \to \tilde{g}(W_0)$ 間の同相写像

$$A_0 \xrightarrow{t_1^{-1}} W_0 \xrightarrow{\tilde{g}} \tilde{g}(W_0) \xrightarrow{T^{-1}} T^{-1}(\tilde{g}(W_0)) \xrightarrow{t_1^{-1}} B_0$$

を考えると, t_1^{-1}, $\tilde{g}$, T^{-1}, t_2^{-1} が原始同相写像の合成に分解できる.

□

定理5.

$g: A \to B$ を $\mathbb{R}^n$ 内の開集合間の微分同相写像.

任意の連続写像 $f: B \to \mathbb{R}$ に対し,

$\int_B f$ と $\int_A (f \circ g)|\det Dg|$ が存在し,

$$\int_B f = \int_A (f \circ g)|\det Dg|$$

Rem

証明の前に流れを説明しておく.

g の A 上 1 の分割に対し, g を原始微分同相写像合成に分解,

次元に関する帰納法用いる.

step1

$g: U \to V$, $h: V \to W$ を $\mathbb{R}^n$ 内の開集合間の微分同相とする.

定理が g, h について成立するならば, $h \circ g$ に対しても成立することを示す:

$f: W \to \mathbb{R}$ を連続写像. かつ W 上積分可能.

$$\int_W f = \int_V (f \circ h)|\det Dh| = \int_U (f \circ h \circ g)|\det Dh \circ g| \cdot |\det Dg|$$

$$= \int_U (f \circ (h \circ g))|\det D(h \circ g)|$$

step2

任意の $x \in A$ に対し, A に含まれる x の開近傍 U_x が存在し,

微分同相 $g|_U: U_x \to V := g(U_x)$ と $S(f)$ が V のコンパクトな部分集合となるような連続写像 $f: V \to \mathbb{R}$ に対し, 定理が成立するならば,

微分同相 $g: A \to B$ に対し. 定理が成立することを示す:

仮定を満たす A の部分集合族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を取る.

この族で生成される開集合族 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を $V_\alpha = g(U_\alpha)$ として定める. $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = B$ が明らかで. この族における1の分割 $\{\varphi_i\}$ を取る. 以下. $\{\varphi_i \circ g\}$ が A 上の1の分割であることを示す:

(1) $(\varphi_i \circ g)(x) = \varphi_i(g(x)) \geq 0 \quad (x \in A)$ が明らか!

(2) g^{-1} の連続性より $g^{-1}(S(\varphi_i))$ がコンパクト集合で.

$x \notin g^{-1}(S(\varphi_i))$ に対し, $(\varphi_i \circ g)(x) = 0$ より. $S(\varphi_i \circ g) \subseteq g^{-1}(S(\varphi_i))$ が成立し, support が閉集合なので, $S(\varphi_i \circ g)$ がコンパクト.

(3) $x\in A$ に対し，$\{U_\alpha\}$ の有限個としか交わらない x の開近傍 M_x の存在は，$g(x)$ に対し $\{\varphi_i\}$ の性質で特定した $M_{g(x)}$ を g^{-1} で戻すことによって保証されている．

(4) 總和が1であることが自明．

残りの条件が自明．

よって，$\{\varphi_i\circ g\}$ が A 上の1の分割である．

$$\int_B f=\sum\int_B\varphi_i f$$

各 i に対し，$\mathcal{S}(\varphi_i)\subset V_\alpha$ となる V_α を取り

$$\int_B\varphi_i f=\int_{\mathcal{S}(\varphi_i)}\varphi_i f=\int_{V_\alpha}\varphi_i f$$

仮定より，$\displaystyle\int_{V_\alpha}\varphi_i f=\int_{U_\alpha}(\varphi_i\circ g)(f\circ g)|\det Dg|$

$$\int_B f=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_A(\varphi_i\circ g)(f\circ g)|\det Dg|\right)$$

$\int_B f$ の存在より，$\int_B|f|$ が存在し，f を $|f|$ に置き換えても上式が成立し，級数が収束

Thm 5.2 より，$(f\circ g)|\det Dg|$ が A上積分可能となり，$\int_B f = \int_A (f\circ g)|\det Dg|$

となる．

step3 $n=1$ の時（次元が1）

定理1に従う．

step4

$n>1$ とする．定理が原始微分同相に対して成立するならば，定理が任意微分同相に対し成立する．

定理4とstep1, 2を組み合わせると良い

step5 定理が $n-1$ 次元に対して成立すると仮定し，n 次元についても成立することを示す：step4より $g: A\to B$ の代わりに原始微分同相写像 $h: U\to V$ について議論すれば良い．

便宜上，h は x の x_n 成分を保つとする．

$p \in U$ に対し, $q := h(p)$ とする.

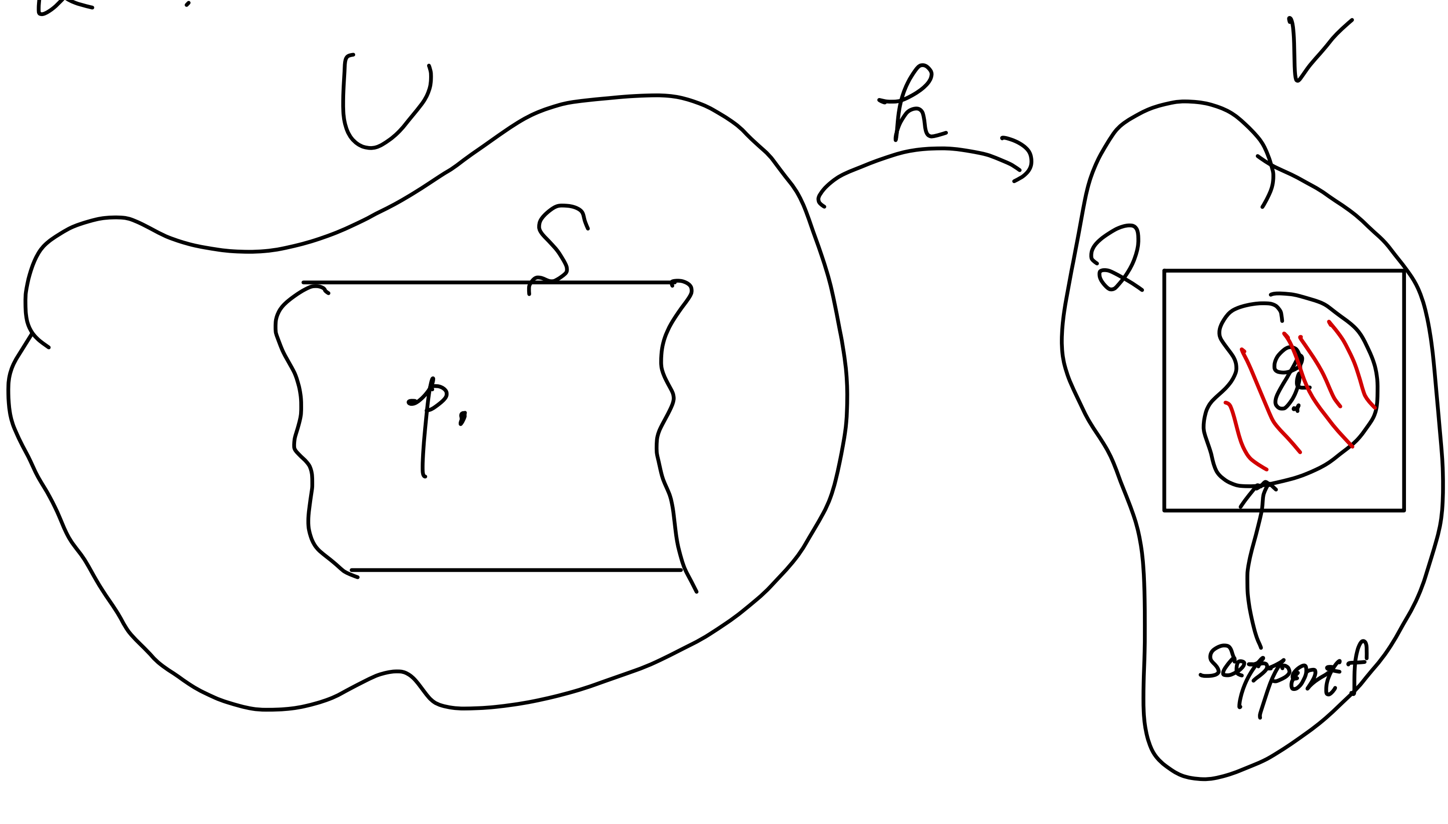
長方体 $Q \subseteq V$ を $q \in \mathrm{Int}Q$ を満たすように取る. $h^{-1}(Q) =: S$ とし, p を任意に取ったから, step2より.

$h : \mathrm{Int}S \to \mathrm{Int}Q$ と supportが

$\mathrm{Int}Q$ のコンパクトな部分集合となるような連続写像

$f : \mathrm{Int}Q \to \mathbb{R}$ について成立することを示せば

良い.



$(f\circ h)|\det Dh|$ が $\mathrm{Int}\,S$ のコンパクトな部分集合以外0を取るから、

$$\int_{\mathrm{Int}\,S}(f\circ h)|\det Dh| \text{ が存在し、}$$

$$\int_{\mathrm{Int}\,Q} f = \int_{\mathrm{Int}\,S}(f\circ h)|\det Dh|$$

を示せばよい。

f の定義域を $\mathbb{R}^n$ へ拡張し、$(\mathrm{Int}\,Q)^c$ において0を取るように。

$F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を $(f\circ h)|\det Dh|$ の拡張とし、$(\mathrm{Int}\,S)^c$ において0を取るように定める。

$$\int_Q f = \int_S F \text{ を示せば十分。}$$

$Q := D\times I$、D が $\mathbb{R}^{n-1}$ の長方体とする。

Sがコンパクトであるから，$\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$への射影もコンパクトである．しかも，$\mathbb{R}^{n-1}$の長方体$E$からなる集合$E\times\{0\}$に含まれる．$h$が$x_n$成分を保つから，$S$が$E\times I$に含まれる．よって，

$$\int_Q f = \int_{E\times I} F \quad \text{を示せば良い}$$

Fubiniの定理より，

$$\int_{t\in I}\int_{y\in D} f(y,t) = \int_{t\in I}\int_{x\in E} F(x,t)$$

を示すことと同値である．

われわれは

$$\int_{y\in D} f(y,t) = \int_{x\in E} F(x,t)$$ を示す.

$h: U \to V$ が

$h(x,t) = (k(x,t), t)$ として,

k が $U \to \mathbb{R}^{n-1}$ の形となる

U, V と $\mathbb{R}^{n-1}\times\{t\}$ の共通部分を

$U_t \times \{t\}$, $V_t \times \{t\}$ とすれば,

U_t, V_t も開集合で, k が U_t, V_t

間の微分同相写像で.

次元に関する仮定より.

$$\int_{y\in V_t} f(y,t) = \int_{x\in U_t} f(k(x,t),t)\,\left|\det \frac{\partial k}{\partial x}\right|$$

右辺が $\int_{x \in U_t} f(h(x,t))|\det Dh| =$

$\int_{x \in U_t} F(x,t)$ そのものである.