

基于SO(3)的多四旋翼无人机编队协同控制

马鸣宇^{1†}, 董朝阳¹, 马思迁¹, 王 青²

(1. 北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191; 2. 北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

摘要: 针对多四旋翼无人机系统的编队飞行问题, 提出了基于特殊正交群SO(3)的协同控制设计方法. 在给出编队空间队形和通信拓扑描述后, 建立了多四旋翼无人机系统SO(3)控制模型. 由于SO(3)与传统俯仰/偏航/滚转三通道模型具有不同的结构, 文中进一步研究了SO(3)中无人机之间相对误差的表示方法, 设计了适用于多飞行器的SO(3)控制器实现对编队和姿态的协同控制. 推力控制器用于调节无人机的位置与速度, 并在此基础上构造旋转矩阵形式的姿态协同指令. 文中相应设计了SO(3)姿态控制器用于实现指令跟踪, 最后从理论上对协同稳定性进行了分析. 提出的控制方法能够使得多四旋翼无人机形成期望的队形, 并且保持姿态一致进行稳定飞行. 仿真结果验证了本文方法的有效性.

关键词: 多四旋翼无人机系统; 飞行编队; 协同控制; SO(3)

引用格式: 马鸣宇, 董朝阳, 马思迁, 等. 基于SO(3)的多四旋翼无人机编队协同控制. 控制理论与应用, 2018, 35(9): 1229–1238

中图分类号: V249 **文献标识码:** A

Coordinated control of multiple quadrotors formation on SO(3)

MA Ming-yu^{1†}, DONG Chao-yang¹, MA Si-qian¹, WANG Qing²

(1. School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China;

2. School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: This paper is concerned with the formation control for multiple quadrotors, and a coordinated control strategy on SO(3) is proposed. Based on the descriptions of flight formation and communication topology, the control model of multiple quadrotors system on SO(3) is first presented. Because of the difference from the conventional model described by pitch/yaw/roll angles, this paper further studies the structure of relative error between quadrotors to formulate the thrust and attitude controllers on SO(3). The thrust controller is designed to coordinate position and velocity, and it is also employed to construct the coordinated attitude commands in the form of rotation matrix. Then, the SO(3) attitude controller is designed for command tracking, and the stability of the closed-loop system is analyzed by Lyapunov theory. It is proved that by applying the proposed control strategy, the multiple quadrotors could achieve the desired formation with stable attitude consensus. Simulation results show the effectiveness of our method.

Key words: multiple quadrotors; flight formation; coordinated control; SO(3)

Citation: MA Mingyu, DONG Chaoyang, MA Siqian, et al. Coordinated control of multiple quadrotors formation on SO(3). *Control Theory & Applications*, 2018, 35(9): 1229–1238

1 引言(Introduction)

无人机编队飞行即多个飞行器以一定的结构形式进行三维空间队形排列, 以整个机群的协同一致性, 共同执行复杂的飞行任务. 相比单个无人机, 多飞行器系统能够利用和共享单机资源, 在农林作业、航空拍摄、军事侦察、协同攻击等民用和军用领域均有更大的应用价值和优势^[1-2]. 四旋翼无人机由于结构简单、成本低、安全性好且具有很强的机动性, 其控制方法与编队飞行问题在近年来正逐步成为飞行控制领

域的研究热点^[3-4].

四旋翼无人机的姿态决定了其推力的方向, 推力值的大小由四片旋翼产生, 二者共同确定了无人机的飞行轨迹. 因此, 四旋翼无人机的运动控制通常通过对推力以及姿态调节来实现. 滑模控制方法^[5-6]、鲁棒跟踪控制^[7]、自适应控制^[8]等方法在四旋翼无人机中的应用已有一定的研究. 但是, 由于四旋翼无人机的动力学方程是非线性的, 姿态与轨迹运动存在较大的耦合. 同时, 四旋翼无人机运动灵活、机动性强, 其姿

收稿日期: 2017-09-12; 录用日期: 2018-03-19.

[†]通信作者. E-mail: mamingyu@buaa.edu.cn; Tel.: +86 10-82313287.

本文责任编辑: 宗群.

国家自然科学基金项目(61374012)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61374012).

态在飞行过程中可能存在较大的变化范围,姿态角甚至会出现大于 90° 的情况.在现有的主要方法^[5-7,9-11]中,四旋翼无人机的姿态均采用俯仰/偏航/滚转通道的角度表示,这种方式所建立的系统模型具有一定的局限性,在无人机以较大角度进行机动时,姿态方程可能出现奇异现象,造成控制精度下降甚至不稳定^[12-13].由于姿态描述了惯性坐标系和机体坐标系旋转关系,而坐标系之间的旋转矩阵构成了特殊正交群 $SO(3)$,因此可以考虑采用 $SO(3)$ 对姿态进行建模. $SO(3)$ 方法能够从整体的角度对姿态进行描述,相比传统区分通道分别设计的方法更为统一和准确,且不存在姿态奇异问题,更适用于四旋翼无人机的建模和控制.针对单个四旋翼无人机,已有文献对基于 $SO(3)$ 的控制方法展开了研究.Lee等^[14]提出了 $SO(3)$ 上四旋翼无人机的建模方法并给出了轨迹/姿态跟踪控制器设计.刘锦涛等^[15-16]研究了 $SO(3)$ 上四旋翼无人机的姿态控制模型,提出了滑模变结构姿态控制器方法.Kulumani等^[17]研究了存在约束的 $SO(3)$ 自适应姿态控制方法,并进行了实验验证.

以上方法均考虑的是个体四旋翼的控制问题.在多四旋翼无人机系统中,不仅需要考虑飞行器自身的控制,还需要对飞行器之间的交互行为进行设计,以体现多无人机系统的整体性^[18].因此,相比于单个无人机,其协同控制问题更为复杂^[19-20].“领航者-跟随者”模型是较为常见的一种编队方式^[21-23],Wang等^[24]采用此种结构通过对领航者跟踪实现编队飞行,同时生成姿态角指令并基于动态面完成控制.相比之下,无领航者编队减少了对领航者的依赖,更具一般性,但同时其理论分析也更有难度^[25].刘伟等^[26]基于一致性理论,引入编队误差向量将编队控制转换为系统镇定问题.类似的,薛瑞彬等^[27]基于多智能体一致性理论研究了编队飞行控制问题,Dong等^[28]在二阶多智能体理论的基础上,研究了多四旋翼无人机的时变编队.编队飞行的其他问题还包括基于事件驱动的协同控制^[29]、队形重构控制^[30]等.

值得注意的是,针对采用 $SO(3)$ 的编队飞行协同控制问题,目前的研究成果还比较有限.Weng等^[31]基于 $SO(3)$ 研究了多刚体的姿态同步算法,但是,其方法要求刚体之间使用双向通信,对拓扑的要求较高.在实际应用中,由于受到通信距离、环境干扰、内部故障等因素的影响,飞行器之间的通信拓扑很难保持双向和全连通.另外,针对单个飞行器的 $SO(3)$ 控制方法并不能直接适用于多飞行器系统,包括考虑有向拓扑时 $SO(3)$ 下的相对误差定义、指令生成与跟踪控制等问题都需要进一步研究.因此,本文受到单个无人机 $SO(3)$ 姿态控制方法的启发,针对多个四旋翼无人机,研究了基于 $SO(3)$ 的编队控制问题.考虑有向通信拓扑的情形,本文给出了无人机队形描述以及 $SO(3)$ 控

制模型.由于姿态采用 $SO(3)$ 统一描述,这使得基于 $SO(3)$ 的方法与传统姿态角三通道分离设计的方式有较大不同.指令和控制器的设计首先要满足 $SO(3)$ 的性质和条件,进一步在保持无人机自身的稳定的同时,结合拓扑结构和其他无人机的状态,使得协同控制目标得以实现.考虑到上述问题,本文研究了面向多四旋翼无人机的 $SO(3)$ 协同控制方法,保证无人机以给定的队形和一致的姿态稳定飞行.文中对包含五个四旋翼无人机组成的编队飞行系统进行了仿真,仿真结果验证了所提方法的有效性.

2 多四旋翼无人机系统建模 (Modelling of multiple quadrotors)

2.1 $SO(3)$ 四旋翼无人机模型(Model of quadrotors on $SO(3)$)

本文研究的四旋翼无人机模型如图1所示. $\{x, y, z\}$ 分别为惯性坐标系下的3个分量, $\{b_1^i, b_2^i, b_3^i\}$ 构成了第 i 个无人机的机体坐标系. f_k^i ($k = 1, 2, 3, 4$)分别为4个旋翼产生的推力,与 b_3^i 方向相反.

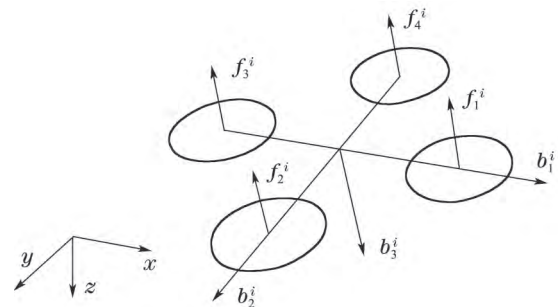


图1 四旋翼无人机模型及对应坐标系

Fig. 1 Model and coordinates of the quadrotor

在刚体的三维空间运动中,惯性系与机体坐标系之间的旋转变换可以用一个正交变换矩阵 R 来表示,所有的正交变换矩阵构成了 $SO(3)$ 群:

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | RR^T = I_3, \det R = 1\}, \quad (1)$$

$SO(3)$ 中的元素 R 对应了特定的飞行器姿态,即飞行器的姿态可以通过机体坐标系到惯性坐标系的转换矩阵 R 来表示.设 $\Omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$,定义运算

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

为hat映射.hat映射的逆运算称为vee映射并记为 \vee ,定义为将任意三维反对称阵映射为三维向量,即

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}^{\vee} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T. \quad (3)$$

根据 $R_i \in SO(3)$ 的定义, b_k^i 在惯性系的指向可以通过 $R_i e_k$ 来表示, $k = 1, 2, 3$.其中 $e_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$, $e_2 =$

$[0 \ 1 \ 0]^T$, $e_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$. 因此, 在惯性系中的推力就可以用 $-fR_e e_3 \in \mathbb{R}^3$ 来表示. 在多飞行器系统中第 i 个四旋翼无人机的模型可以表示为

$$\begin{cases} \dot{p}_i = v_i, \\ m_i \dot{v}_i = m_i g e_3 - f_i R_i e_3, \\ \dot{R}_i = R_i \hat{\Omega}_i, \\ J_i \dot{\Omega}_i + \hat{\Omega}_i J_i \Omega_i = M_i, \end{cases} \quad (4)$$

式中: $p_i, v_i \in \mathbb{R}^3$ 分别为无人机在惯性坐标系中的位置与速度矢量, $f_i = \sum_{k=1}^4 f_k^i \in \mathbb{R}$ 为总推力, $\Omega_i \in \mathbb{R}^3$ 为无人机的角速度, $M_i = [M_1^i \ M_2^i \ M_3^i]^T \in \mathbb{R}^3$ 为总控制力矩矢量.

总推力和力矩满足如下关系:

$$\begin{bmatrix} f_i \\ M_1^i \\ M_2^i \\ M_3^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -d^i & 0 & d^i \\ d^i & 0 & -d^i & 0 \\ -c_{\tau f}^i & c_{\tau f}^i & -c_{\tau f}^i & c_{\tau f}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^i \\ f_2^i \\ f_3^i \\ f_4^i \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式中: d^i 为 $b_1^i b_2^i$ 平面内无人机质心到旋翼中心的距离, $c_{\tau f}^i$ 为常数且 $(-1)^k c_{\tau f}^i f_k^i$ 为第 k 个旋翼产生的力矩. 由于在 $d^i, c_{\tau f}^i \neq 0$ 时上述矩阵是可逆的, 所以对于给定的 f 和 M , 可以根据上式反解出每个旋翼的推力 f_k^i . 因此, 在本文中采取将总推力 f_i 和力矩 M_i 作为控制输入进行设计.

2.2 多无人机通信拓扑与队形描述(Topology and formation descriptions of multiple quadrotors)

本文采用图论对多无人机间的通信关系进行描述. 设 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 表示一个加权有向图, 其中: \mathcal{V} 是图的顶点集, \mathcal{E} 是图的边集, $\mathcal{A} = (a_{ij})_{N \times N}$ 称为图的邻接矩阵. 在四旋翼编队飞行问题中, 将每一个无人机看作图的一个顶点, 那么飞行器之间的信息交互连接就可以用图 \mathcal{G} 相应的边来表示. 若 $a_{ij} > 0$, 则表示边 $(j, i) \in \mathcal{E}$, 也即第 i 个飞行器能够从第 j 个飞行器获得所需信息, 否则 $a_{ij} = 0$. 由此可以定义顶点 i 的邻居集为 $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} | (j, i) \in \mathcal{E}\}$. 图的度矩阵 $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$, 其中 $d_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}$. 图 \mathcal{G} 的 Laplacian 矩阵定义为 $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$.

无人机编队的空间队形可以通过飞行器之间的相对坐标来表示. 在惯性坐标系中, 设编队中心为点 O_r , $r_i(t)$ 和 $r_j(t)$ 分别表示无人机 i 和 j 到 O_r 的距离向量. $r_{ij} = r_i(t) - r_j(t)$ 表示飞行器之间相对位置, 如图2所示.

于是, 通过定义无人机之间的相对位置, 就可以对期望的队形进行表示. 若 N 个飞行器能形成给定的队形, 则有

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \|p_i - r_i - (p_j - r_j)\| = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \|v_i - v_j\| = 0. \end{cases} \quad (6)$$

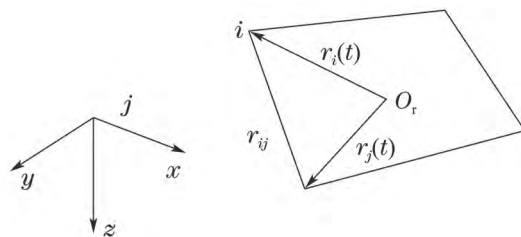


图2 无人机编队空间相对位置

Fig. 2 Relative positions of multiple quadrotors formation

3 基于SO(3)的编队位置/速度控制设计(Formation control of velocity/position on SO(3))

由于具有与欧式空间不同的结构, 因此传统的控制律形式在 $\text{SO}(3)$ 空间上不能直接适用. 本节提出了基于 $\text{SO}(3)$ 的编队控制设计方法, 并对编队协同的稳定性进行了分析证明. 定义 $s_i = [p_i^T \ v_i^T]^T$, 根据系统方程(4), 位置/速度控制回路的动力学方程就可以表示为

$$\dot{s}_i = A s_i + B u_i, \quad (7)$$

其中:

$$u_i = -\frac{f_i R_i e_3}{m_i} + g e_3, \quad (8)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_3 \\ I_3 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

考虑到系统的通信拓扑结构和期望队形, 对于每个飞行器设计如下形式的推力控制器 f_i :

$$f_i = (-m_i K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (s_j - s_i - \tilde{r}_{ij}) + m_i g e_3)^T R_i e_3, \quad (10)$$

其中: $\tilde{r}_{ij} = [r_{ij}^T \ 0_{1 \times 3}]^T \in \mathbb{R}^6$, $K \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ 为控制增益矩阵.

从式(10)中可以看出, 每个飞行器通过位置/速度状态 s_i 与其相邻飞行器 s_j 的相对值构成自身的推力控制器. 当 $(s_j - s_i - \tilde{r}_{ij}) \rightarrow 0$ 时, 多飞行器即形成了给定队形. 为了探究 $\text{SO}(3)$ 下的协同误差表示, 记

$$F_i = -m_i K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (s_j - s_i - \tilde{r}_{ij}) + m_i g e_3, \quad (11)$$

$$\Delta_i = \Delta_i(R_i, R_{di}) =$$

$$\frac{f_i}{e_3^T R_{di}^T R_i e_3} (R_{di} e_3 - (e_3^T R_{di}^T R_i e_3) R_i e_3), \quad (12)$$

式中: $R_{di} \in \text{SO}(3)$ 为待设计的姿态协同指令且满足 $F_i = \|F_i\| R_{di} e_3$, 详细的设计过程在第4.1节给出. 于是, 系统方程(7)就可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{s}_i = & A s_i - \frac{B}{m_i} \frac{f_i}{e_3^T R_{di}^T R_i e_3} R_{di} e_3 + \\ & B g e_3 + B \Delta_i / m_i. \end{aligned} \quad (13)$$

由于 $f_i = F_i^T R e_3 = (\|F_i\| R_{di} e_3)^T R_i e_3$, 所以

$$f_i R_i e_3 = \frac{f_i}{e_3^T R_{di}^T R_i e_3} R_{di} e_3 + \Delta_i = \frac{(\|F_i\| R_{di} e_3)^T R_i e_3}{e_3^T R_{di}^T R_i e_3} R_{di} e_3 + \Delta_i = F_i + \Delta_i. \quad (14)$$

将式(14)代入到式(8)中, 进一步得到第*i*个无人机的运动方程为

$$\dot{s}_i = A s_i + B K \sum_{j \in N_i} a_{ij} (s_j - s_i) + B \Delta_i / m_i. \quad (15)$$

再定义 $\varepsilon = [\varepsilon_2^T \ \varepsilon_3^T \cdots \varepsilon_N^T]^T$, $\tilde{\rho} = [\rho_2^T \ \rho_3^T \cdots \rho_N^T]^T$, 其中:

$$\varepsilon_i = \tilde{s}_i - \tilde{s}_1, \quad \tilde{s}_i = s_i - \tilde{r}_i,$$

$$\rho_i = B \Delta_i / m_i - B \Delta_1 / m_i, \quad i = 2, 3, \cdots, N.$$

那么, 多无人机协同误差系统可以表示为

$$\dot{\varepsilon} = (I_{N-1} \otimes A - L_1 \otimes B K) \varepsilon + \tilde{\rho}, \quad (16)$$

其中

$$L_1 = \begin{bmatrix} a_{12} + d_2 & a_{13} - a_{23} & \cdots & a_{1N} - a_{2N} \\ a_{12} - a_{32} & a_{13} - d_3 & \cdots & a_{1N} - a_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{12} - a_{N2} & a_{13} - a_{N3} & \cdots & a_{1N} + d_N \end{bmatrix}. \quad (17)$$

下面研究控制增益*K*的设计方法. 如果飞行器的拓扑图 \mathcal{G} 包含生成树, 那么 L_1 的特征值 $\lambda_i(L_1)$ 均具有正实部. 对于给定的一个正定矩阵*Q*, 记 $\lambda_0 = \min_{1 \leq i \leq N} \{\text{Re}(\lambda_i)\} > 0$, *P*为如下Riccati方程的解:

$$P A + A^T P - 2\lambda_0 P B B^T P + Q = 0. \quad (18)$$

进一步, 选取 $K = -k B^T P$, $k \geq 1$. 可以得到 $(A - \lambda_i(L_1) B K)$ 所有的特征根的实部均小于零. 由此可知 $(I_{N-1} \otimes A - L_1 \otimes B K)$ 也是稳定的, 且有

$$\varepsilon^T (I_{N-1} \otimes A - L_1 \otimes B K) \varepsilon \leq -\alpha_1 \|\varepsilon\|^2, \quad (19)$$

式中 $\alpha_1 > 0$ 为某个常数. 同时, 考虑到 $\Delta_i(R_i, R_{di})$ 与姿态跟踪误差相关, 且 $R_i = R_{di}$ 时有 $\Delta_i = 0$, $\tilde{\rho} = 0$. 通过式(16)可知, 若 $\tilde{\rho}$ 是不稳定的, 则位置/速度状态 ε 发散, 即轨迹控制回路的稳定性依赖于姿态控制系统的稳定性. 因此, 在分析系统整体的稳定性之前, 在接下来的部分中对SO(3)姿态控制系统的设计方法进行研究, 以保证姿态稳定.

4 基于SO(3)的姿态控制系统设计(Attitude control design on SO(3))

在本节中, 首先讨论了在SO(3)群中姿态指令的设计, 并且给出了多无人机系统姿态误差的表示方法, 在此基础上完成姿态控制系统设计.

4.1 姿态指令设计与误差描述(Attitude commands and errors)

由系统模型(4)可知, 推力大小和方向共同决定了

无人机的飞行轨迹. 同时, 推力在速度坐标系的投影为 $f_i R_i e_3$, 其方向与 $b_3^i = R_i e_3$ 共线. 无人机的期望姿态由 R_{di} 描述, $R_{di} = [b_{1d}^i \ b_{2d}^i \ b_{3d}^i]$. 下面分别研究 b_{1d}^i , b_{2d}^i , b_{3d}^i 的设计方法.

首先, 由上述讨论可知期望的推力方向由姿态 b_{3d}^i 决定, 因此在设计出推力大小 f_i 后, 本文考虑根据所需推力来确定期望的机体轴 b_{3d}^i 的方向, 即

$$b_{3d}^i = \frac{F_i}{\|F_i\|}. \quad (20)$$

由于 $R_{di} \in \text{SO}(3)$, 在 $R_{di} = [b_{1d}^i \ b_{2d}^i \ b_{3d}^i]$ 中给定任意两个列向量后, 可以通过正交性计算出第3个列向量并最终得到 R_{di} . 因此, 在确定 b_{3d}^i 后, 在 R_{di} 中仍有一个自由度可以设计, 即四旋翼飞行器的偏航方向 b_{2d}^i . 为了使多无人机系统姿态趋向一致, 设计如下的姿态指令信号:

$$b_{2d}^i = \frac{b_{3d}^i \times \sum_{j \in N_i} a_{ij} b_1^j}{\|b_{3d}^i \times \sum_{j \in N_i} a_{ij} b_1^j\|}, \quad (21)$$

$$b_{1d}^i = b_{2d}^i \times b_{3d}^i. \quad (22)$$

由此获得了完整的期望姿态 $R_{di} = [b_{1d}^i \ b_{2d}^i \ b_{3d}^i] \in \text{SO}(3)$. 进一步, 设计多飞行器之间SO(3)姿态相对误差模型为

$$e_{Ri} = \frac{1}{2} (R_{di}^T R_i - R_i^T R_{di})^\vee. \quad (23)$$

考虑到 \dot{R}_i 和 \dot{R}_{di} 并不能直接进行运算比较, 为此进行如下转换运算:

$$\begin{aligned} \dot{R}_i - \dot{R}_{di} (R_{di}^T R_i) &= R_i \hat{\Omega}_i - R_{di} \hat{\Omega}_{di} R_{di}^T R_i = \\ R_i (\Omega_i - R_i^T R_{di} \Omega_{di})^\wedge. \end{aligned} \quad (24)$$

角速度误差即定义为

$$e_{\Omega i} = \Omega_i - R_i^T R_{di} \Omega_{di}. \quad (25)$$

4.2 姿态控制器设计(Attitude controller design)

在获得编队协同控制指令后, 四旋翼无人机需要通过调节自身姿态来改变推力方向, 进而保证协同控制的实现. 对于无人机*i*, 考虑式(23)和式(25)定义的误差模型, 其姿态控制器设计为

$$\begin{aligned} M_i &= -k_{Ri} e_{Ri} - k_{\Omega i} e_{\Omega i} + \hat{\Omega}_i J_i \Omega_i - \\ &J_i (\hat{\Omega}_i R_i^T R_{di} \Omega_{di} - R_i^T R_{di} \hat{\Omega}_{di}). \end{aligned} \quad (26)$$

采用设计的控制器 M_i , 关于姿态控制系统的稳定性有如下定理成立.

定理 1 考虑由*N*个四旋翼无人机构成的多飞行器系统, 无人机的模型由式(4)给出. 那么, 采用设计的姿态控制器(26), 无人机系统能够实现指令跟踪, 保持姿态稳定.

证 由于 $R_d^T R_d = I_3$, 等式两边同时对时间*t*求导

得到

$$\frac{d}{dt}(R_d^T R_d) = \dot{R}_d^T R_d + R_d^T \dot{R}_d = 0. \quad (27)$$

进一步, 对等式(27)右乘 R_d^T 可得

$$\dot{R}_d^T R_d R_d^T + R_d^T \dot{R}_d R_d^T = \dot{R}_d^T + R_d^T \dot{R}_d R_d^T = 0. \quad (28)$$

通过式(28)可知 $\dot{R}_d^T = -R_d^T \dot{R}_d R_d^T$. 进而有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(R_{di}^T R_i) &= R_{di}^T \dot{R}_i + \dot{R}_{di}^T R_i = \\ R_{di}^T (\dot{R}_i - \dot{R}_{di} (R_{di}^T R_i)) &= \\ R_{di}^T R_i (\Omega_i - R_i^T R_{di} \Omega_{di})^\wedge &= \\ (R_{di}^T R_i) \hat{e}_{\Omega i}. \end{aligned} \quad (29)$$

根据以上分析, 求出角速度相对误差方程为

$$\begin{aligned} J_i \dot{e}_{\Omega i} &= \\ J_i \dot{\Omega}_i - J_i \left(\frac{d}{dt} (R_i^T R_{di}) \Omega_{di} + R_i^T R_{di} \dot{\Omega}_{di} \right) &= \\ J_i \dot{\Omega}_i - J_i ((\Omega_{di}^T R_{di}^T R_i \hat{e}_{\Omega i})^T + R_i^T R_{di} \dot{\Omega}_{di}) &= \\ J_i \dot{\Omega}_{di} - J_i ((\Omega_{di}^T R_{di}^T R_i (\Omega_i - R_i^T R_{di} \Omega_{di})^\wedge)^T + R_i^T R_{di} \dot{\Omega}_{di}) &= \\ J_i \dot{\Omega}_i - J_i ((\Omega_{di}^T R_{di}^T (R_i \hat{\Omega}_i - R_{di} \hat{\Omega}_{di} R_{di}^T R_i))^T + R_i^T R_{di} \dot{\Omega}_{di}) &= \\ J_i \dot{\Omega}_i - J_i ((\Omega_{di}^T R_{di}^T R_i \hat{\Omega}_i - \Omega_{di}^T \hat{\Omega}_{di} R_{di}^T R_i)^T + R_i^T R_{di} \dot{\Omega}_{di}). \end{aligned} \quad (30)$$

注意到 $\hat{\Omega}_i = -\hat{\Omega}_i^T$, $\Omega_{di}^T \hat{\Omega}_{di} = 0$, 则有

$$J_i \dot{e}_{\Omega i} = J_i \dot{\Omega}_i + J_i (\hat{\Omega}_i R_i^T R_{di} \Omega_{di} - R_i^T R_{di} \dot{\Omega}_{di}), \quad (31)$$

于是, 选取Lyapunov函数为

$$V_{1i} = \frac{1}{2} e_{\Omega i}^T J_i e_{\Omega i} + k_{Ri} \Psi(R_i, R_{di}) + c_i e_{Ri}^T e_{\Omega i}, \quad (32)$$

式中:

$$\begin{aligned} \Psi(R_i, R_{di}) &= \frac{1}{2} \text{tr}[I_3 - R_{di}^T R_i], \\ c_i &< \min \{ k_{\Omega i}, \sqrt{2\lambda_{\min}(J_i)k_{Ri}}, \\ &\quad \frac{4k_{Ri}k_{\Omega i}\lambda_{\min}(J_i^{-1})}{4k_{Ri}\lambda_{\min}(J_i^{-1}) + c_i k_{\Omega i}^2 \lambda_{\max}^2(J_i^{-1})} \}. \end{aligned}$$

首先证明 V_{1i} 的正定性. 易知

$$\Psi(R_i, R_{di}) \geq \frac{1}{2} \|e_{Ri}\|^2, \quad (33)$$

$$e_{\Omega i}^T J_i e_{\Omega i} \geq \lambda_{\min}(J_i) \|e_{\Omega i}\|^2. \quad (34)$$

记 $z_i = [\|e_{Ri}\| \quad \|e_{\Omega i}\|]^T$, 根据定理条件 $c_i < \sqrt{2\lambda_{\min}(J_i)k_{Ri}}$ 和式(33)–(34)可得

$$V_{1i} \geq \frac{1}{2} z_i^T \begin{bmatrix} k_{Ri} & c_i \\ c_i & 2\lambda_{\min}(J_i) \end{bmatrix} z_i > 0, \quad (35)$$

即证明了 V_{1i} 是正定的. 下面, 考虑 V_{1i} 中第3项的导数

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e_{Ri}^T e_{\Omega i}) &= \dot{e}_{Ri}^T e_{\Omega i} + e_{Ri}^T \dot{e}_{\Omega i} = \\ C(R_{di}^T R_i) e_{\Omega i}^T e_{\Omega i} - k_{Ri} e_{Ri}^T J_i^{-1} e_{Ri} - \\ k_{\Omega i} e_{Ri}^T J_i^{-1} e_{\Omega i}, \end{aligned} \quad (36)$$

式中:

$$C(R_{di}^T R_i) = \frac{1}{2} (\text{tr}[R_{di}^T R_i] I_3 - R_i^T R_{di}),$$

且有 $\|C(R_{di}^T R_i)\| \leq 1$. 进而, 对 V_{1i} 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1i} &= \\ e_{\Omega i}^T J_i \dot{e}_{\Omega i} + k_{Ri} \frac{d}{dt} \Psi(R_i, R_{di}) + c_i \frac{d}{dt} (e_{Ri}^T e_{\Omega i}) &= \\ e_{\Omega i}^T J_i \dot{e}_{\Omega i} + k_{Ri} \text{tr}[R_{di}^T R_i \hat{e}_{\Omega i}] + c_i \frac{d}{dt} (e_{Ri}^T e_{\Omega i}) &= \\ e_{\Omega i}^T J_i \dot{e}_{\Omega i} + \frac{1}{2} k_{Ri} \text{tr}[\hat{e}_{\Omega i} (R_{di}^T R_i - R_d R_i^T)] - \\ c_i k_{Ri} e_{Ri}^T J_i^{-1} e_{Ri} + c_i C(R_{di}^T R_i) e_{\Omega i}^T e_{\Omega i} - \\ c_i k_{\Omega i} e_{Ri}^T J_i^{-1} e_{\Omega i} &\leq \\ e_{\Omega i}^T J_i \dot{e}_{\Omega i} + k_{Ri} \frac{1}{2} \text{tr}[\hat{e}_{\Omega i} \hat{e}_{Ri}] - \\ c_i k_{Ri} e_{Ri}^T J_i^{-1} e_{Ri} + c_i e_{\Omega i}^T e_{\Omega i} - c_i k_{\Omega i} e_{Ri}^T J_i^{-1} e_{\Omega i} &\leq \\ e_{\Omega i}^T (-k_{Ri} e_{Ri} - k_{\Omega i} e_{\Omega i}) + k_{Ri} e_{Ri}^T e_{\Omega i} - \\ c_i k_{Ri} \lambda_{\min}(J_i^{-1}) \|e_{Ri}\|^2 + \\ c_i k_{\Omega i} \|e_{Ri}\| \|e_{\Omega i}\| - c_i k_{\Omega i} \lambda_{\min}(J_i^{-1}) \|e_{\Omega i}\|^2 &\leq \\ -z_i^T W_i z_i, \end{aligned} \quad (37)$$

式中

$$W_i = \begin{bmatrix} c_i k_{Ri} \lambda_{\min}(J_i^{-1}) & -c_i k_{\Omega i} \lambda_{\max}(J_i^{-1}) \\ -c_i k_{\Omega i} \lambda_{\max}(J_i^{-1}) & k_{\Omega i} - c_i \end{bmatrix} > 0. \quad (38)$$

式(37)表明设计的控制器能够实现对姿态指令的稳定跟踪. 证毕.

5 协同稳定性分析 (Stability analysis of formation and attitude consensus)

在姿态控制系统稳定的条件下, 对于飞行器来说通常其姿态控制回路(内环)的收敛速度大于轨迹控制回路(外环), 并且轨迹回路的误差量级要远大于姿态误差. 由于 $\Delta_i(R_i, R_{di})$ 是一个与姿态跟踪误差有关的变量, 且 $\Delta_i(R_{di}, R_{di}) = 0$, ε 表示了编队飞行误差, 因此, 结合式(12)(16), 本文考虑飞行器满足如下假设:

假设 1 $\|\Delta_i\| \leq \alpha_2 \|\varepsilon_i\|$, $\alpha_2 > 0$ 为某常数.

综上所述, 针对所设计的推力控制器 f_i 和姿态控制器 M_i , 本节给出如下的协同控制稳定性定理.

定理 2 考虑由式(4)描述的 N 个四旋翼无人机构成的多飞行器系统, 期望的队形由 r_{ij} 描述. 若 \mathcal{G} 包含生成树, 则采用推力控制器(10)和姿态控制器(26), 多个飞行器能够实现按照给定的队形稳定飞行, 同时

保持姿态稳定且一致.

证 根据式(16)中 ε 的定义, 若 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varepsilon\| = 0$, 则表示无人机形成了给定队形. 针对 ε 选取Lyapunov函数为 $V_2 = \frac{1}{2} \varepsilon^T \varepsilon$, 结合式(16)可以得到

$$\dot{V}_2 = \varepsilon^T (I_{N-1} \otimes A - L_1 \otimes BK) \varepsilon + \varepsilon^T \tilde{\rho}. \quad (39)$$

根据假设1有

$$\|\rho_i\| = \|B\Delta_i/m_i - B\Delta_1/m_1\| \leq \bar{\alpha}_2 \|\varepsilon_i\|,$$

$$\|\tilde{\rho}\| \leq \bar{\alpha}_2 \|\varepsilon\|,$$

其中: $\bar{\alpha}_2 = 2\alpha_2 \|B\|/m_{\min}$, $m_{\min} = \min\{m_i\}$. 结合式(19), \dot{V}_2 可表示为

$$\dot{V}_2 \leq -(\alpha_1 - \bar{\alpha}_2) \|\varepsilon\|^2. \quad (40)$$

于是, 通过式(18)选取适当的 K 可以配置 α_1 使得 $\alpha_1 - \bar{\alpha}_2 > 0$, 保证 \dot{V}_2 的负定性. 从而证明了飞行器能够实现给定的队形, 并进行稳定飞行. 进一步, 在姿态控制系统稳定的条件下, 需要证明在式(20)–(22)中设计的 R_{di} 能够实现姿态的一致性.

由定理1可知无人机能够实现对姿态指令的跟踪, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b_{3d}^i = \lim_{t \rightarrow \infty} b_{3d}^j, \quad (41)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b_2^i = \frac{\sum_{j \in N_i} a_{ij} (b_3^j \times b_1^j)}{\|\sum_{j \in N_i} a_{ij} (b_3^j \times b_1^j)\|} = \sum_{j \in N_i} a_{ij} b_2^j. \quad (42)$$

式(42)可以采用矩阵形式表示为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \sigma_1 d_1 b_2^1 \\ \sigma_2 d_2 b_2^2 \\ \vdots \\ \sigma_N d_N b_2^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2^1 \\ b_2^2 \\ \vdots \\ b_2^N \end{bmatrix}. \quad (43)$$

下面采用反证法证明 $\sigma_i \rightarrow 1$. 由于 $\|b_3^i\| = 1$, 所以 $\sigma_i \leq \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N_i} a_{ij} \|b_3^j\| = 1$. 若 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_i > 1$, 则根据 $\sigma_i b_3^i - \sum_{j \in N_i} \frac{a_{ij}}{d_i} b_3^j = \mathbf{0}_{3 \times 1}$ 可知, 存在某个 b_3^j 的元素的模大于1, 与 $\|b_3^i\| = 1$ 矛盾, 于是 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_i = 1$. 记 $\eta = [(b_2^1)^T (b_2^2)^T \cdots (b_2^N)^T]^T$, 如果能够证明 $b_2^1 = b_2^2 = \cdots = b_2^N$,

即 $\eta = \mathbf{1}_N \otimes k_\eta$, $k_\eta \in \mathbb{R}^3$ 为某个常数, 则可以根据上述分析, 得到无人机姿态趋向一致的结论. 式(43)可变换成如下形式:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathcal{L} \otimes I_3) \eta = \mathbf{0}_{3 \times 1}. \quad (44)$$

若飞行器拓扑包含生成树, 则根据图论相关理论可得 \mathcal{L} 有且只有一个0特征值, 且0特征值对应的特征向量为 $\mathbf{1}_{N \times 1}$, 即有 $\mathcal{L} \mathbf{1}_{N \times 1} = \mathbf{0}_{N \times 1}$. 那么, 根据矩阵直积的性质, $\mathcal{L} \otimes I_n$ 含有 n 个0特征值, 几何重数为 n . 注意到 $(\mathcal{L} \otimes I_n)(\mathbf{1}_{N \times 1} \otimes I_n) = \mathbf{0}_{nN \times 1}$, $\mathbf{1}_{N \times 1} \otimes I_n$ 中的 n 个列向量是线性无关的. 由矩阵理论可知, 这 n 个列向量构成了0特征值的特征向量空间. 在式(44)中有 $n = 3$, 并且 η 作为0特征值的特征向量就可以表示为 $\eta = (\mathbf{1}_{N \times 1} \otimes I_3) k_\eta = \mathbf{1}_{N \times 1} \otimes k_\eta$, 即所有 b_2^i 都趋向于一个相同值. 同理对于 b_1^i, b_3^i 也可以推导出相同的结论, 达到了姿态的一致性. 证毕.

注1 采用SO(3)方法进行姿态描述时, 建模和控制设计会更为清晰直观. 机体系下的各坐标轴直接由 b_1^i, b_2^i 和 b_3^i 确定. 同时, 由于 b_1^i, b_2^i 在 b_3^i 的法向平面内, 因此无人机的偏航方向和推力方向是独立的, 推力方向确定后 R_{di} 中仍有一个自由度可以用来确定 b_1^i, b_2^i . 另外, 如果只要求位置/速度进行协同, 则只需根据推力选定 b_3^i 的方向即可, b_2^i 可以单独给定. 相比姿态角描述的方法, 使用 b_1^i, b_2^i 和 b_3^i 确定无人机姿态更为直接、设计更为明确.

注2 在设计姿态协同指令 R_{di} 过程中, 需要满足 $R_{di} \in \text{SO}(3)$, 即 $R_{di}^T R_{di} = I_3$. 因此本文提出了式(21)形式的 b_2^i , 由相邻无人机的朝向 b_1^j 得到无人机 i 期望的偏航方向, 并将其投影到 b_3^i 的法向平面进行归一化; b_1^i 由 b_2^i 和 b_3^i 的向量积得到, 保证三者相互正交. 这是实现无人机姿态协同的关键步骤.

6 四旋翼无人机编队飞行算例(Simulation of quadrotors formation)

在本算例中, 考虑包含5个四旋翼无人机的编队飞行系统, 通过仿真验证所提控制方法的有效性. 各无人机的参数为

$$m_i = 3 \text{ kg}, J_i = \text{diag}\{0.004, 0.004, 0.008\} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$i = 1, 2, \dots, 5.$$

初始条件在表1中列出.

表1 无人机的初始条件

Table 1 Initial conditions of the quadrotors

飞行器	1	2	3	4	5
位置/m	(2, -2, 0)	(-2, 2, 3.1)	(-2, -2, 2)	(2, 2, 3)	(0, 0, 1)
速度/(m·s ⁻¹)	(1, -1, 1)	(0, 1.1, 1)	(-1, -1, -1)	(-1, 0, -1)	(1, -1, 0.1)
俯仰角/(°)	5	1.5	0	0.5	-1
偏航角/(°)	30	10	-10	-8	0
滚转角/(°)	1	2	4	1	2

对应的 R 阵初始值分别为

$$\begin{aligned} R_1 &= \begin{bmatrix} 0.86 & -0.50 & 0.08 \\ 0.50 & 0.87 & 0.03 \\ -0.09 & 0.02 & 1.00 \end{bmatrix}, \\ R_2 &= \begin{bmatrix} 0.98 & -0.17 & 0.03 \\ 0.17 & 0.98 & -0.03 \\ -0.03 & 0.03 & 1.00 \end{bmatrix}, \\ R_3 &= \begin{bmatrix} 0.98 & 0.17 & -0.01 \\ -0.17 & 0.98 & -0.07 \\ 0.00 & 0.07 & 1.00 \end{bmatrix}, \\ R_4 &= \begin{bmatrix} 0.99 & 0.14 & 0.01 \\ -0.14 & 0.99 & -0.02 \\ -0.01 & 0.02 & 1.00 \end{bmatrix}, \\ R_5 &= \begin{bmatrix} 0.99 & 0 & -0.02 \\ 0 & 0.99 & -0.03 \\ 0.02 & 0.03 & 0.99 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

无人机之间的通信拓扑如图3所示.

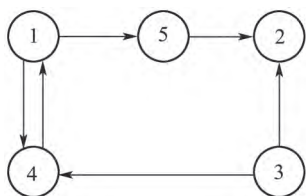


图3 多无人机之间的通信拓扑

Fig. 3 Topology of the quadrotors

图3中: 对应边的权重为: $a_{14} = 0.58$, $a_{23} = 0.33$, $a_{35} = 0.25$, $a_{41} = 0.21$, $a_{43} = 0.4$, $a_{51} = 0.37$. 期望形成的无人机队形如图4所示.

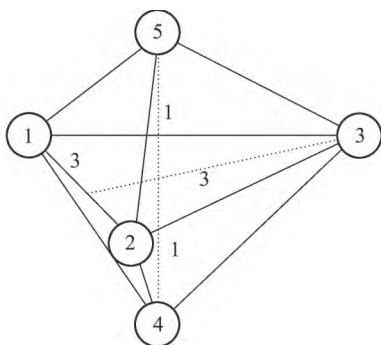


图4 无人机期望队形

Fig. 4 The desired formation of the quadrotors

用相对位置表示即为

$$\begin{aligned} r_{14} &= (1, 1.5, -1)^T, r_{23} = (2, -15, 0)^T, \\ r_{35} &= (-2, 0, 1)^T, r_{41} = (-1, -1.5, 1)^T, \\ r_{43} &= (2, 0, 1)^T, r_{53} = (2, 0, -1)^T. \end{aligned}$$

根据给出的拓扑结构, 可以通过式(18)求解得到

推力控制器增益. 在本算例中:

$$K = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -5.6 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

在姿态控制器中, 选取 $k_{Ri} = 0.4$, $k_{\Omega i} = 0.8$. 由此, 对多四旋翼无人机系统进行仿真, 图5至图7给出了无人机的飞行轨迹. 从图中可以看出, 5个无人机能够以较快速度形成了图4给定的队形, 并保持稳定飞行.

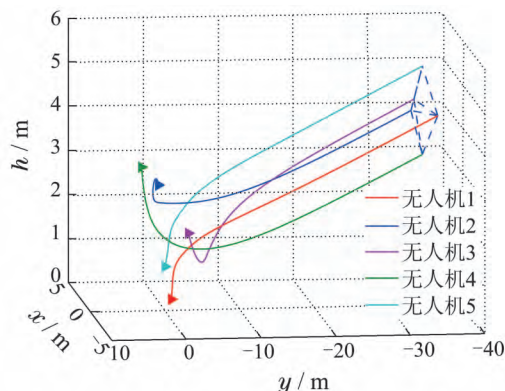


图5 无人机编队飞行空间轨迹

Fig. 5 Three-dimensional trajectories of the quadrotors

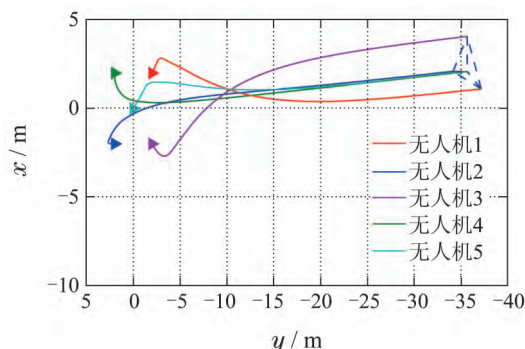


图6 无人机编队飞行空间轨迹俯视图

Fig. 6 Trajectories of the quadrotors from top view

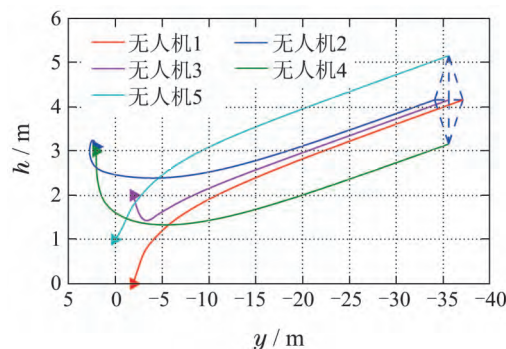


图7 无人机编队飞行空间轨迹侧视图

Fig. 7 Trajectories of the quadrotors from side view

在控制系统设计和仿真中, 均直接使用 $R \in \text{SO}(3)$ 进行姿态建模和控制器构造, 避免了传统的俯仰、偏

航和滚转3个通道分离的设计方法. 但是, 为了更加直观地展示控制效果, 文中在得到仿真结果后对 R 矩阵进行变换, 得到 R 对应的姿态角度, 如图8至图10所示. 从仿真曲线中可以看出, 各无人机姿态初始值之间存在较大差异, 在仿真开始初期姿态角能够较快和较平滑地变化收敛, 最终趋向一致.

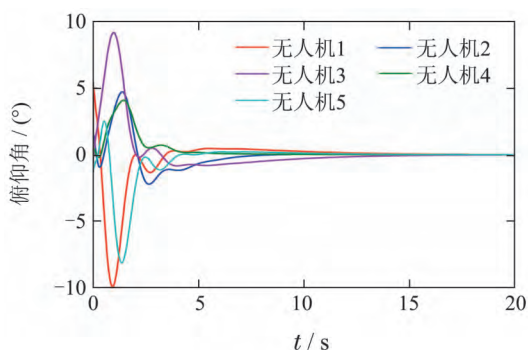


图8 俯仰角变化曲线

Fig. 8 Illustration of the pitch angles

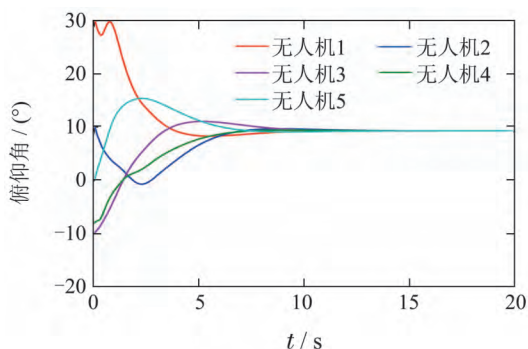


图9 偏航角变化曲线

Fig. 9 Illustration of the yaw angles

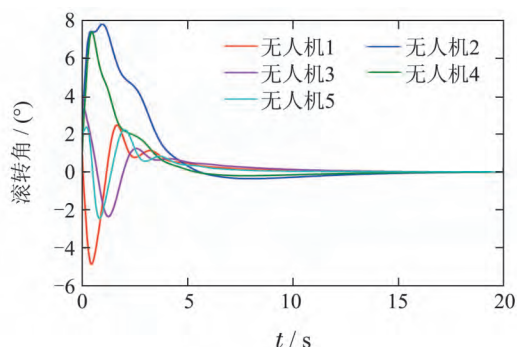


图10 滚转角变化曲线

Fig. 10 Illustration of the roll angles

图11给出了各个无人机推力的变化曲线, 图12以无人机1为例, 给出了其控制力矩的变化情况, 其他无人机与之相似. 图11和图12表明, 所设计的推力控制器和姿态控制器能够实现稳定控制, 满足设计要求.

进一步, 为了说明队形形成的准确程度与姿态协同控制效果, 定义队形误差函数

$$Q_p = w_p \sum_{i=2}^5 \|\varepsilon_i\| \quad (46)$$

来表示多无人机编队与期望队形之间的差异. 同时定义姿态误差函数

$$Q_a = w_a \sum_{i=2}^5 \|\varepsilon_{ai}\|, \quad (47)$$

式中: $\varepsilon_{ai} = s_{ai} - s_{a1}$, $s_{ai} = [\phi \ \theta \ \psi]^T$, ϕ , θ 和 ψ 分别为飞行器的滚转角、偏航角和俯仰角, w_p 和 w_a 为权重系数. 于是, 可以通过 Q_p 和 Q_a 值的变化来反映控制方法的性能. 考虑到队形误差与姿态误差之间的量级关系, 仿真中取 $w_p = \frac{1}{5}$, $w_a = \frac{\pi}{180}$. 同时, 文中在相同无人机参数和初始条件下, 对不同方法进行了对比仿真, 仿真结果在图13和图14中给出. 其中, 方法1为本文所提方法, 方法2采用文献[7]中给出的姿态角模型方法, 文献[10]记为方法3.

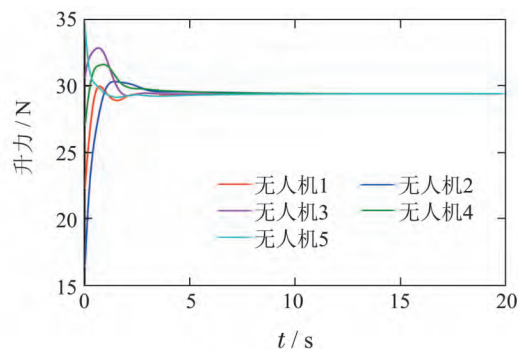


图11 推力变化曲线

Fig. 11 Thrusts of the quadrotors

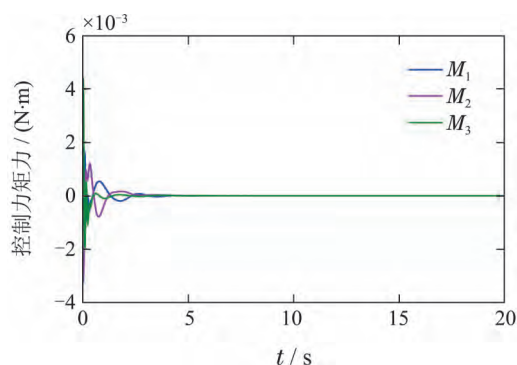


图12 无人机1控制力矩变化曲线

Fig. 12 Moments of the 1st quadrotor

在图13中, 各个方法的 Q_p 收敛到0.5所需的时间分别为10.29 s, 12.85 s, 14.96 s, 由此可以看出本文方法能够更为快速地形成给定队形. 方法1和方法3的 Q_a 收敛到0.003的时间分别为17.04 s和18.79 s. 同时, 从姿态误差收敛情况可以看出, 基于滑模控制的方法3虽然能够在仿真开始初期较快收敛, 但由于采用的是姿态角区分通道的控制方法, 忽略了姿态角之间实际的耦合关系, 使得姿态误差出现了较大振荡. 方法2采用姿态角模型存在同样的问题. 图14为方法2和

3的滚转角变化曲线, 同图10方法1相比也可以发现两种方法的超调和振荡相对较大, 与图13中 Q_a 的变化趋势一致. 对比图13, 图10和图14, 本文提出的基于SO(3)的方法能够通过 R 对整体姿态进行协同控制, 收敛更为平滑快速. 综合 Q_p 和 Q_a 可以得出, 文中方法能够实现多四旋翼无人机按照给定队形以一致的姿态稳定飞行, 与理论分析相符.

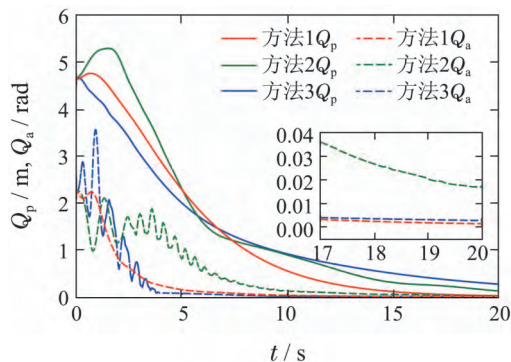


图13 不同方法 Q_p 与 Q_a 对比曲线

Fig. 13 Comparison of Q_p and Q_a with different methods

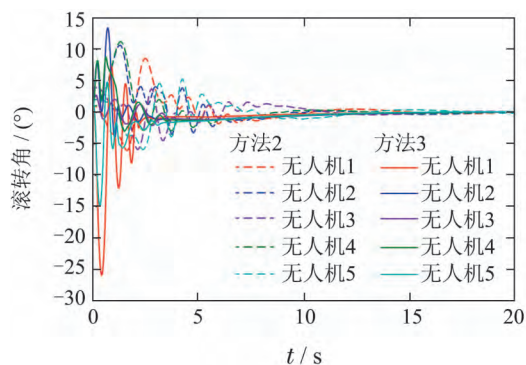


图14 方法2和方法3滚转角对比曲线

Fig. 14 Comparison of roll angles with Methods 2 & 3

7 结论(Conclusions)

本文研究了基于SO(3)的多四旋翼无人机协同控制问题. 文中建立的SO(3)模型能够对飞行器姿态进行统一描述, 从整体的角度完成控制系统设计. 进一步, 设计了满足SO(3)条件的姿态协同指令, 以此形成无人机之间SO(3)形式的相对误差, 并基于SO(3)提出了适用于多无人机的推力和姿态控制器设计方法, 从理论上分析了闭环系统的协同稳定性. 对比仿真结果表明, 与传统区分俯仰/偏航/滚转通道的方法相比, 本文方法能够使得多无人机更为平滑快速实现给定队形和姿态协同. 此外, 对于其他类型的飞行器, 在通过SO(3)建模的基础上, 文中提出的协同控制方法也可以推广应用于不同飞行器的编队之中.

参考文献(References):

[1] FAN Qiongjian, YANG Zhong, FANG Ting, et al. Research status of coordinated formation flight control for multi-UAVs [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2009, 30(4): 683 – 691.

(樊琼剑, 杨忠, 方挺, 等. 多无人机协同编队飞行控制的研究现状 [J]. *航空学报*, 2009, 30(4): 683 – 691.)

- [2] DONG X, ZHOU Y, REN Z, et al. Time-varying formation tracking for second-order multi-agent systems subjected to switching topologies with application to quadrotor formation flying [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 64(6): 5014 – 5024.
- [3] LUO Delin, ZHANG Haiyang, XIE Rongzeng, et al. Unmanned aerial vehicles swarm conflict based on multi-agent system [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(11): 1498 – 1504.
(罗德林, 张海阳, 谢荣增, 等. 基于多agent系统的大规模无人机集群对抗 [J]. *控制理论与应用*, 2015, 32(11): 1498 – 1504.)
- [4] ZONG Qun, WANG Dandan, SHAO Shikai, et al. Research status and development of multi UAV coordinated formation flight control [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2017, 49(3): 1 – 13.
(宗群, 王丹丹, 邵士凯, 等. 多无人机协同编队飞行控制研究现状及发展 [J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2017, 49(3): 1 – 13.)
- [5] WU Chen, SU Jianbo. Trajectory tracking of quadrotor based on disturbance rejection control [J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(11): 1422 – 1430.
(吴琛, 苏剑波. 四旋翼飞行器的轨迹跟踪抗干扰控制 [J]. *控制理论与应用*, 2016, 33(11): 1422 – 1430.)
- [6] DU H, ZHU W, WEN G, et al. Finite-time formation control for a group of quadrotor aircraft [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2017, 69: 609 – 616.
- [7] SUN Miaoping, LIU Jingjing, NIAN Xiaohong, et al. Robust tracking control of a quad-rotor unmanned aerial vehicle via interval matrix [J]. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(2): 168 – 178.
(孙妙平, 刘静静, 年晓红, 等. 基于区间矩阵的四旋翼无人机鲁棒跟踪控制 [J]. *控制理论与应用*, 2017, 34(2): 168 – 178.)
- [8] WANG R, LIU J. Adaptive formation control of quadrotor unmanned aerial vehicles with bounded control thrust [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2017, 30(2): 807 – 817.
- [9] GARCIA-DELGADO L, DZUL A, SANTIBANEZ V, et al. Quadrotors formation based on potential functions with obstacle avoidance [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2012, 6(12): 1787 – 1802.
- [10] MA Siqian, DONG Chaoyang, MA Mingyu, et al. Formation reconfiguration control of quadrotor UAVs based on adaptive switching topology [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2018, 44(4): 841 – 850.
(马思迁, 董朝阳, 马鸣宇, 等. 基于自适应通讯拓扑四旋翼编队重构控制 [J]. *北京航空航天大学学报*, 2018, 44(4): 841 – 850.)
- [11] WANG Ning, WANG Yong, ER Meng-joo. Adaptive dynamic surface trajectory tracking control of a quadrotor unmanned aerial vehicle [J]. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(9): 1185 – 1194.
(王宁, 王永, 余明裕. 四旋翼飞行器自适应动态面轨迹跟踪控制 [J]. *控制理论与应用*, 2017, 34(9): 1185 – 1194.)
- [12] LIU Chao, TANG Shengjing, GUO Jie, et al. Design and application of intrinsic sliding-mode observer on SO(3) [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2017, 39(3): 606 – 611.
(刘超, 唐胜景, 郭杰, 等. SO(3)上的内蕴滑模观测器设计与应用 [J]. *系统工程与电子技术*, 2017, 39(3): 606 – 611.)
- [13] ZHENG Zhong, SONG Shenmin. Rotation matrix based passive attitude tracking control of spacecraft without angular velocity measurements [J]. *Control and Decision*, 2014, 29(9): 1628 – 1632.
(郑重, 宋申民. 基于旋转矩阵描述的航天器无角速度测量姿态跟踪无源控制 [J]. *控制与决策*, 2014, 29(9): 1628 – 1632.)
- [14] LEE T, LEOKY M, MCCLAMROCH N H. Geometric tracking control of a quadrotor UAV on SE(3) [C] // *The 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Atlanta, GA, USA: IEEE, 2010: 5420 – 5425.
- [15] LIU Jintao, WU Wenhui, LI Jing, et al. Sliding mode variable structure attitude controller design of quadrotor UAVs on SO(3) [J]. *Control and Decision*, 2016, 31(6): 1057 – 1064.

- (刘锦涛, 吴文海, 李静, 等. 四旋翼无人机SO(3)滑模变结构姿态控制器设计 [J]. 控制与决策, 2016, 31(6): 1057 – 1064.)
- [16] LIU Jintao, WU Wenhai, LI Jing, et al. Trajectory controller design for quadrotor UAVs on wind field disturbance [J]. *Flight Dynamics*, 2016, 34(2): 47 – 54.
(刘锦涛, 吴文海, 李静, 等. 四旋翼无人机风场扰动轨迹控制器设计 [J]. 飞行力学, 2016, 34(2): 47 – 54.)
- [17] KULUMANI S, POOLE C, LEE T, et al. Geometric adaptive control of attitude dynamics on SO(3) with state inequality constraints [C] // *2016 American Control Conference (ACC)*. Boston, MA, USA: IEEE, 2016: 4936 – 4941.
- [18] OH K K, PARK M C, AHN H S. A survey of multi-agent formation control [J]. *Automatica*, 2015, 53: 424 – 440.
- [19] ZHU Xu, ZHANG Xunxun, YOU Jinyu, et al. Swarm control of UAV close formation based on information consensus [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2015, 36(12): 3919 – 3929.
(朱旭, 张逊逊, 尤谨语, 等. 基于信息一致性的无人机紧密编队集结控制 [J]. 航空学报, 2015, 36(12): 3919 – 3929.)
- [20] GENG Zhiyong. Finite time formation control for multiple vehicles based on pontryagin's minimum principle [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(1): 40 – 59.
(耿志勇. 基于庞特里亚金极小值原理的多运载体有限时间编队控制 [J]. 自动化学报, 2017, 43(1): 40 – 59.)
- [21] PEREIRA P O, CUNHA R, CABECINHAS D, et al. Leader following trajectory planning: A trailer-like approach [J]. *Automatica*, 2017, 75: 77 – 87.
- [22] RAN D, CHEN X, MISRA A K. Finite time coordinated formation control for spacecraft formation flying under directed communication topology [J]. *Acta Astronautica*, 2017, 136: 125 – 136.
- [23] QIU Huaxin, DUAN Haibin, FAN Yanming. Multiple unmanned aerial vehicle autonomous formation based on the behavior mechanism in pigeon flocks [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(10): 1298 – 1304.
(邱华鑫, 段海滨, 范彦铭. 基于鸽群行为机制的多无人机自主编队 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(10): 1298 – 1304.)
- [24] WANG Y, WU Q, WANG Y. Distributed cooperative control for multiple quadrotor systems via dynamic surface control [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 75(3): 513 – 527.
- [25] QIN J, YU C, ANDERSON B D O. On leaderless and leader-following consensus for interacting clusters of second-order multi-agent systems [J]. *Automatica*, 2016, 74: 214 – 221.
- [26] LIU Wei, ZHOU Shaolei, QI Yahui, et al. Distributed formation control for multiple unmanned aerial vehicles with directed switching communication topologies [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(10): 1422 – 1427.
(刘伟, 周绍磊, 祁亚辉, 等. 有向切换通信拓扑下多无人机分布式编队控制 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(10): 1422 – 1427.)
- [27] XUE Ruibin, SONG Jianmei, ZHANG Minqiang. Research on distributed multi-vehicle coordinated formation flight control with coupling time-delay and jointly-connected topologies [J]. *Acta Armamentarii*, 2015, 36(3): 492 – 502.
(薛瑞彬, 宋建梅, 张民强. 具有时延及联合连通拓扑的多飞行器分布式协同编队飞行控制研究 [J]. 兵工学报, 2015, 36(3): 492 – 502.)
- [28] DONG X, YU B, SHI Z, et al. Time-varying formation control for unmanned aerial vehicles: Theories and applications [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2015, 23(1): 340 – 348.
- [29] LIU W, HUANG J. Event-triggered cooperative robust practical output regulation for a class of linear multi-agent systems [J]. *Automatica*, 2017, 85: 158 – 164.
- [30] ZHOU Shaolei, KANG Yuhang, SHI Xianjun, et al. Autonomous reconfiguration control method for multi-UAVs formation based on RQPSO-DMPC [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2017, 43(10): 1960 – 1971.
(周绍磊, 康宇航, 史贤俊, 等. 基于RQPSO-DMPC的多无人机编队自主重构控制方法 [J]. 北京航空航天大学学报, 2017, 43(10): 1960 – 1971.)
- [31] WENG S X, DONG Y, YANG T C. Coordinated attitude motion control of multiple rigid bodies on manifold SO(3) [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2013, 7(16): 1984 – 1991.

作者简介:

马鸣宇 (1990–), 男, 博士研究生, 研究方向为飞行器协同控制、多智能体系统理论, E-mail: mamingyu@buaa.edu.cn;

董朝阳 (1966–), 男, 博士, 教授, 研究方向为飞行器设计、导航制导与控制, E-mail: dongchaoyang@buaa.edu.cn;

马思迁 (1993–), 男, 硕士研究生, 研究方向为飞行器编队控制, E-mail: masiqian1993@buaa.edu.cn;

王青 (1968–), 女, 博士, 教授, 研究方向为航天器制导与控制、网络控制系统, E-mail: bhwangqing@126.com.