UNNOBA
Universidad Nacional
Noroeste | Buenos Aires

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO

INTEGRALES

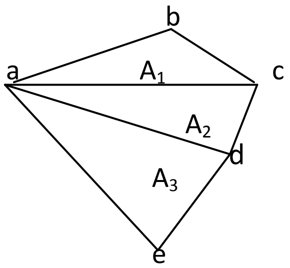
DEFINIDAS

Prof. Olga Ermini

Lic. Graciela Majluff

LA INTEGRAL DEFINIDA

El estudio de la integral definida se inició históricamente con la resolución del problema el cálculo de áreas de figuras planas. Si la figura es un polígono (irregular o no) se puede descomponer en triángulos y el área del polígono es igual a la suma de las áreas de todos esos triángulos.



El área del polígono es igual a la suma de las áreas de los triángulos en que se dividió la figura.

Si la figura está limitada por arcos de curva ya no es posible en la mayoría de los casos, calcular el área por fórmulas geométricas. En la antigüedad, los griegos trataron de resolver el problema de obtener el área de un círculo que llamaron “cuadratura del círculo”: frase que expresa que se deseaba encontrar un cuadrado o rectángulo cuya área fuera igual a la del círculo considerado.

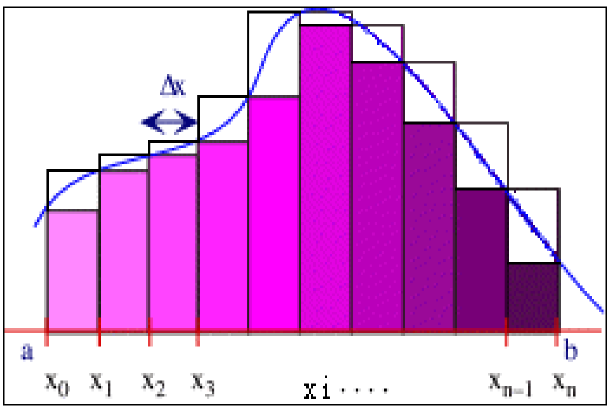
La resolución sistemática general del problema de cálculo de áreas dio origen al ***Cálculo Integral.***

La ***Integral definida*** se indica: $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$

En la cual ***f(x)*** es la función integrando; ***[a;b]*** el intervalo de integración; ***a*** el extremo inferior y ***b*** el superior.

LA INTEGRAL DE RIEMANN

Partición de un intervalo: Una partición P del intervalo cerrado [a, b] es un conjunto finito de puntos. $\mathbf{P = \{ x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}}$ tal que: $\mathbf{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b}$



Sumas inferior y superior

[X_0 ;X_1] , [X_1 ;X_2] , [X_2 ;X_3] , ...[X_{n-1} ;X_n] cuya longitud es Δ**x_i**

Para cada uno de los puntos que determina la partición se trazan paralelas al eje **y** y por la intersección de la grafica con estas se trazan paralelas al eje **x**. Quedan determinados los rectángulos **R_1 , R_2 , R_3 ,... R_n** . El área de cada rectángulo es:

Área R_i = f(x_i). Δx_i

Si sumamos las áreas de todos los rectángulos R_i resulta la expresión:

$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i}$ pero quedan zonas bajo la curva que no abarcan los rectángulos.

Si $\Delta x \to 0$ o $n \to \infty$ se construyen más cantidad de rectángulos de menor base y la suma de las áreas de los rectángulos se va acercando al área bajo la curva.

Tomando el máximo $\Delta x \to 0$ (pues los intervalos pueden tener diferente longitud) el área bajo la curva de la función entre a y b es:

$$\boxed{A = \lim_{\text{máx } \Delta xi \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i).\Delta x_i \leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i}$$

Definimos la ***Integral definida de f(x) sobre [a,b]*** según la partición:

a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\text{máx}\Delta xi \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(c_i)\Delta x_i}$$

en la que: Δ**x_i =** $long\,[x_{i-1}, x_i]$ y $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Entonces: ***Si existe este límite f(x) es integrable según Riemann. La suma se llama Suma de Riemann.***

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Este teorema establece una conexión entre las dos ramas del cálculo: *el cálculo diferencial y el cálculo integral.* El diferencial surgió del problema de la tangente y el integral con el problema del área. *Isaac Barrow* descubrió que estos problemas se relacionan. Se dio cuenta que eran procesos inversos. El teorema fundamental del cálculo proporciona la relación inversa entre la derivada y la integral.

Newton y Leibniz aprovecharon esta relación y la emplearon para convertir el cálculo en un método matemático sistemático. El teorema permitía calcular áreas e integrales con suma facilidad sin tener que emplear límites de sumas.

Si **f(x)** es continua en [a;b] y **F(x)** es primitiva de **f(x)**

1) $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$ **Regla de Barrow**

2) a) $\boxed{Si\ g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad con\ a \le x \le b \rightarrow g'(x) = f(x)}$

Demostración:

$$Si\ g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \rightarrow g(x) = F(t)\Big|_a^x = F(x) - F(a)\ aplicando\ regla\ de\ Barrow$$
$$entonces:\ g'(x) = [F(x) - F(a)]' = F'(x) - 0\ (por\ ser\ la\ derivada\ de\ una\ constante) \rightarrow$$
$$g'(x) = F'(x) = f(x)\ (\ por\ definición\ \ de\ \ primitiva)$$
$$\therefore g'(x) = f(x)$$

b) $\boxed{Si\ g(x) = \int_a^{h(x)} f(t)dt \quad con\ a \le x \le b \rightarrow g'(x) = f(h(x))h'(x)}$

Demostración:

$$Si\ g(x) = \int_a^{h(x)} f(t)dt \quad \rightarrow g(x) = F(t)\Big|_a^{h(x)} = F(h(x)) - F(a)$$
$$entonces:\ g'(x) = [F(h(x)) - F(a)]' = F'(h(x))h'(x) - 0 \rightarrow$$
$$g'(x) = F'(h(x))h'(x) = f(h(x))h'(x)$$
$$\therefore g'(x) = f(h(x))h'(x)$$

Ejemplos:

Aplicar el teorema fundamental del cálculo integral para calcular g´(x)

a) $g(x)=\int_{1}^{x}(t^3-5)^6\,dt \quad \rightarrow g´(x)=(x^3-5)^6$

b) $g(x)=\int_{1}^{1/x}\cos^4 t\,dt \quad \rightarrow g´(x)=\left(\cos^4\frac{1}{x}\right).\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

Calcular:

$$\int_{0}^{2} x.dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{2}=2-0=2$$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1. La integral definida de una constante por una función es igual a ala constante por la integral definida de la función

$$\int_{a}^{b} k.f(x)dx=k.\int_{a}^{b} f(x)dx$$

2. La integral definida de la suma algebraica de un número finito de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales definidas de cada una de las funciones.

$$\int_{a}^{b}\left[f(x)+g(x)-h(x)\right]dx=\int_{a}^{b} f(x)dx+\int_{a}^{b} g(x)dx-\int_{a}^{b} h(x)dx$$

3. Si c es un punto del intervalo [a;b], a < c < b se verifica:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx=\int_{a}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{b} f(x)dx$$

Demostración:

Según el Teorema del cálculo Integral:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=F(x)\Big|_{a}^{b}=F(b)-F(a)$$

$$\int_a^c f(x)dx = F(x)\Big|_a^c = F(c) - F(a)$$

$$\int_c^b f(x)dx = F(x)\Big|_c^b = F(b) - F(c)$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Luego: $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. Si los extremos de integración son coincidentes, la integral definida es igual a cero.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Demostración:

Según el Teorema del cálculo Integral:

$$\int_a^a f(x)dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

Luego: $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

5. Si se permutan los extremos de integración el resultado es el número opuesto.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Demostración:

Según el Teorema del cálculo Integral:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)dx$$

Luego: $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

6. La integral definida de una función constante es igual a la constante por la longitud del intervalo de integración.

$$\int_a^b kdx = k.(b-a)$$

$$Si\ k > 0\ y\ a < b\ el\ área\ es: A = k.(b-a)$$

Demostración:

$$\int_a^b kdx = k\int_a^b dx = k.x\Big|_a^b = k.(b-a)$$

Ejemplos

a)

$$\int_0^2 5x.dx = 5\int_0^2 xdx = 5.\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 5.(2-0) = 10$$

b)

$$\int_0^1 (x^2+3).dx = \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 3dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + 3x\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 + 3 - 0 = \frac{10}{3}$$

c)

$$\int_0^2 e^x.dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 e^x dx = e^x\Big|_0^1 + e^x\Big|_1^2 = e - 1 + e^2 - e = e^2 - 1$$

d)

$$\int_3^3 x.dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_3^3 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0$$

e)

$$\int_1^2 6.dx = 6x\Big|_1^2 = 6.(2-1) = 6 \qquad \int_2^1 6.dx = 6x\Big|_2^1 = 6.(1-2) = -6$$

LA INTEGRAL DEFINIDA COMO ÁREA DE UNA REGIÓN

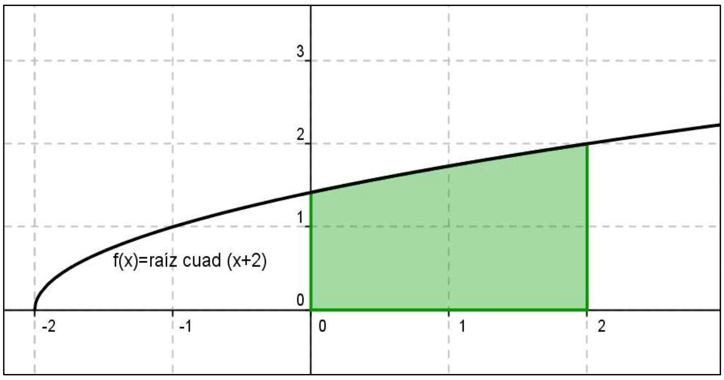
Si la función ***f(x)*** es continua y no negativa en el intervalo cerrado **[a,b]** entonces el área de la región limitada por la curva de la función, el eje **x** y las rectas **x = a, x = b** está dada por:

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx}$$

Ejemplo:

El área bajo la curva de la función: $f(x) = \sqrt{x+2}$ en el intervalo [0,2] se calcula:

$$A = \int_0^2 \sqrt{x+2}dx = \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{16}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} \approx 3{,}447\ u.\text{sup}$$



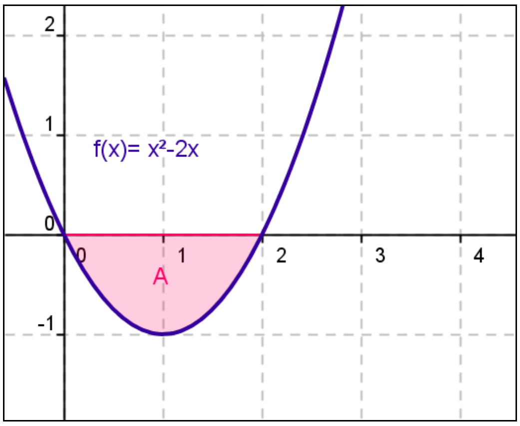
Si **f(x) < 0** en el intervalo [a,b] (la curva de la función por debajo del eje x) la integral definida resulta negativa.

Para calcular el área bajo la curva debe considerarse el valor absoluto de la integral definida o el valor opuesto del resultado de la integral.

Ejemplo: f(x)= x^2-2x [0,2]

$$\int_0^2 (x^2 - 2x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3} - 4 - 0 = -\frac{4}{3}$$

$$A = \left| \int_0^2 (x^2 - 2x)dx \right| = \frac{4}{3} \quad o \quad A = -\int_0^2 (x^2 - 2x)dx = -\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}\, u.\text{sup}$$

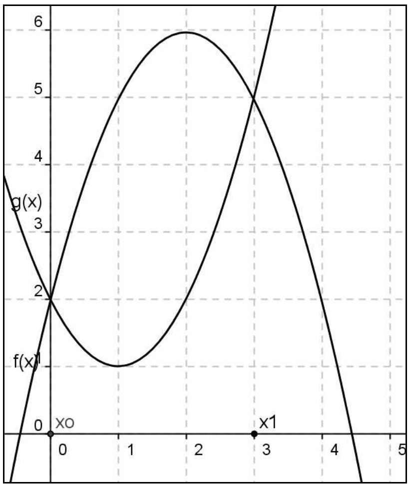


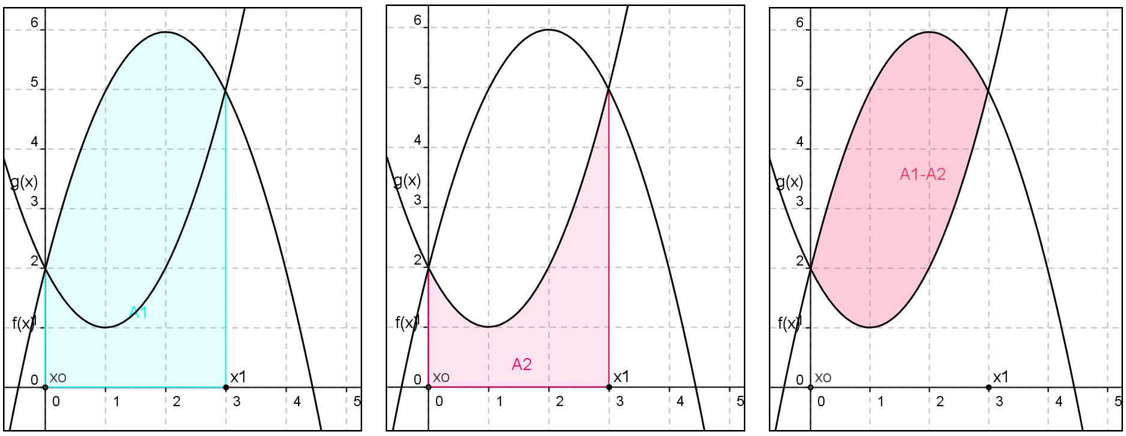
Es conveniente construir el gráfico si se desea calcular el área bajo la curva para evitar resultados erróneos.

ÁREA ENTRE CURVAS

Sea calcular el área de una zona limitada por las curvas que representan las funciones **f(x) y g(x)** ambas positivas

Los puntos de intersección entre las dos curvas tienen abscisas $\mathbf{x_0}$ y $\mathbf{x_1}$ con $\mathbf{x_0} < \mathbf{x_1}$ y **f(x) > g(x)**





$$A_1 = \int_{x0}^{x1} f(x)dx \qquad A_2 = \int_{x0}^{x1} g(x)dx \qquad A = A_1 - A_2 = \int_{x0}^{x1} [f(x) - g(x)]dx$$

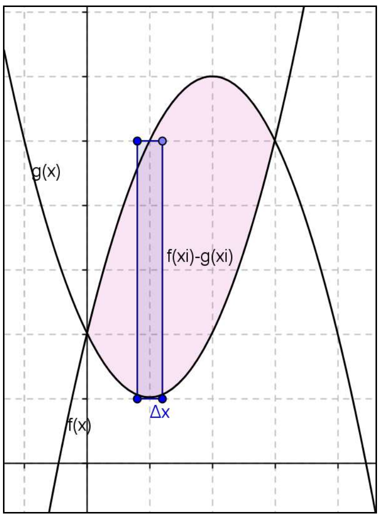
Justificación:

Se parte al $[x_0, x_1]$ en n subintervalos de longitud igual a Δx. Se forma un rectángulo representativo de ancho Δx y altura *f(x*$_i$*) – g(x*$_i$*) (con f(x) >g(x))* siendo un punto del i-ésimo subintervalo. El área del rectángulo representativo es: $A_i = [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x$

Sumando las áreas de los n rectángulos y tomando el límite cuando $\Delta x \to 0 \Rightarrow n \to \infty$ se obtiene: $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x$ como f y g son continuas en $[x_0, x_1]$, $f - g$ también es continua. Luego el límite existe.

Por lo tanto el área de la región limitada superior e inferiormente por las curvas es:

$$\boxed{A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x = \int_{x_0}^{x_1} [f(x) - g(x)]dx}$$



Cálculo del área encerrada entre dos curvas:

- Calcular los puntos de intersección de las curvas resolviendo el sistema:
  f(x) = g(x)
- En la diferencia ***f(x) – g(x)*** la función minuendo es la correspondiente a la curva que limita superiormente a la zona a calcular.

Luego resolver la integral definida: $\boxed{A = \int_{x_0}^{x_1} [f(x) - g(x)]dx}$

Ejemplo1:

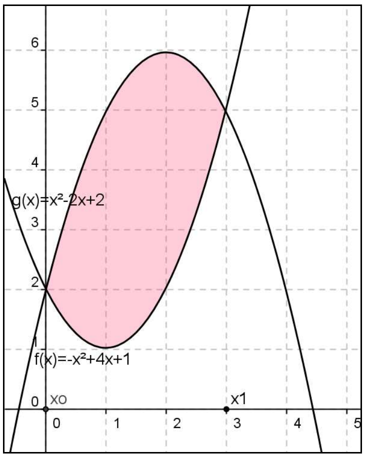
Área encerrada entre las curvas de las funciones:

$f(x) = -x^2 + 4x + 2$

$g(x) = x^2 - 2x + 2$

Puntos de intersección: (0;2) (3;5)

$$A = \int_0^3 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^3 [-x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2]dx = \int_0^3 [-2x^2 + 6x]dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right)\Bigg|_0^3 = 9u.s.$$



En general:

Si ***f y g*** son funciones continuas en un intervalo ***[a,b]*** *y* ***f(x)*** > ***g(x)*** $\forall x \in [a,b]$, el área de la región limitada por las curvas correspondientes a ***f y g*** entre las rectas verticales

x = ***a y x***= ***b*** es: $\boxed{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}$

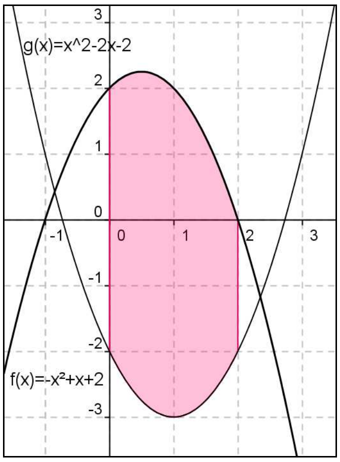
Ejemplo 2:

Área encerrada entre las curvas de las funciones:

$f(x) = -x^2 + x + 2$
$g(x) = x^2 - 2x - 2$
y las ordenadas $x = 0$, $x = 2$

$$A = \int_0^2 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^2 [-x^2 + x + 2 - x^2 + 2x + 2]dx = \int_0^2 [-2x^2 + 3x + 4]dx =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x \right)\Big|_0^2 = \frac{26}{3} u.s$$



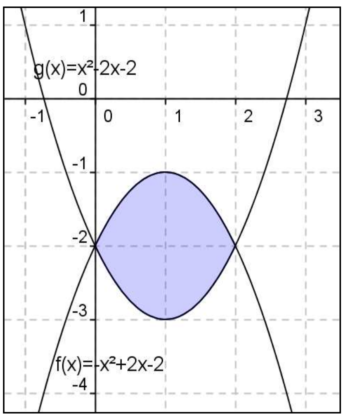
La expresión se aplica aún cuando las curvas están por debajo del eje **x**, pero es necesario que ***f(x)*** > ***g(x)***

Ejemplo 3:

Área encerrada entre las curvas de las funciones:

$f(x) = -x^2 + 2x - 2$
$g(x) = x^2 - 2x - 2$
Puntos de intersección: (0;-2) (2;-2)

$$A = \int_0^2 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^2 [-x^2 + 2x - 2 - x^2 + 2x + 2]dx = \int_0^2 [-2x^2 + 4x]dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3} u.s$$



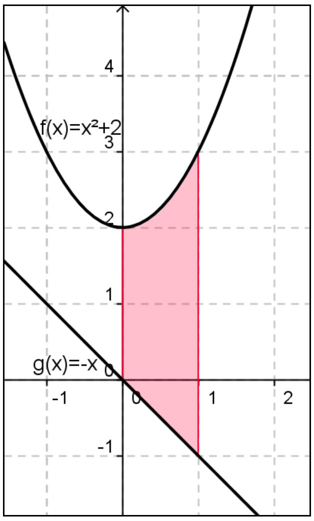
La expresión se aplica aún cuando las curvas de las funciones no tienen puntos de intersección.

Ejemplo 4:

Área encerrada entre las curvas de las funciones:

$$f(x) = x^2 + 2 \qquad g(x) = -x$$ y las ordenadas $x = 0$, $x = 1$

$$A = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 [x^2 + 2 + x]dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x + \frac{x^2}{2} \right)\Big|_0^1 = \frac{17}{6} u.s$$



Si las curvas se cortan en más de un punto:

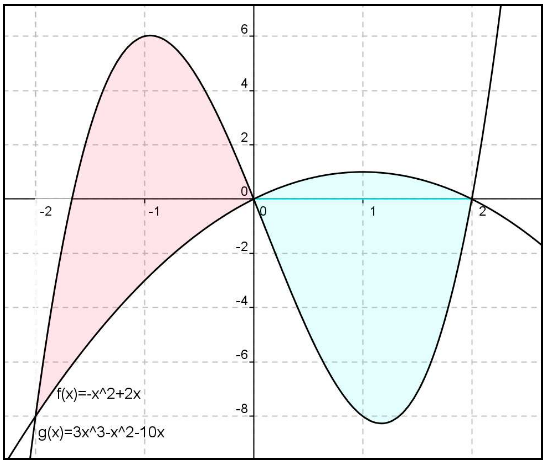
- Calcular todos los puntos de intersección entre las curvas.
- En cada intervalo identificar que curva limita superiormente al área correspondiente.
- Calcular cada área por separado.
- Sumar las áreas calculadas.

Ejemplo:

Calcular el área encerrada por las curvas de las funciones:

$f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ $\qquad$ $g(x) = -x^2 + 2x$

Resolviendo el sistema: f(x) = g(x) se encuentran los puntos de intersección entre las curvas: (0;0) (-2;-8) (2; 0)



$$A_1 = \int_{-2}^{0} [g(x) - f(x)]dx = \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)dx = 12$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} [f(x) - g(x)]dx = \int_{0}^{2} (12x - 3x^3)dx = 12$$

$$A_t = A_1 + A_2 = 24$$

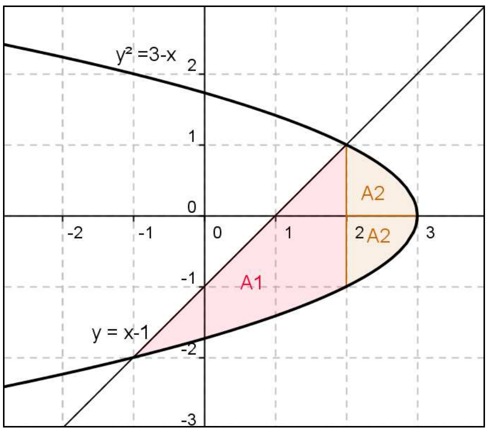
En algunos casos resulta más simple integrar respecto de y.

Ejemplo:

Calcular el área limitada por las curvas:

$y^2 = 3 - x$ y $y = x-1$

Resolviendo el sistema se encuentran los puntos de intersección entre las curvas:
(-1;-2) (2; 1)



$$Integración \quad respecto \quad de \quad y \quad A=\int_{-2}^{1}(-y^2-y+2)dy=-\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}+2y\Big|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}\,u.\sup$$

$$Integración \quad respecto \quad de \quad x \quad A=A_1+2A_2=\int_{-1}^{2}(x-1-\sqrt{3-x})dx+2\int_{2}^{3}\sqrt{3-x}dx=\frac{19}{6}+2.\frac{2}{3}=\frac{9}{2}u.\sup$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

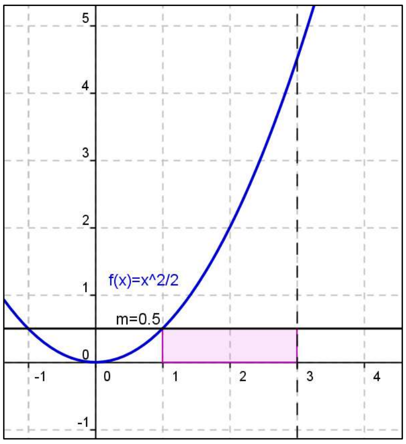
Si f es continua en el intervalo cerrado [a;b], existe un número c en [a;b] tal que:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)}$$

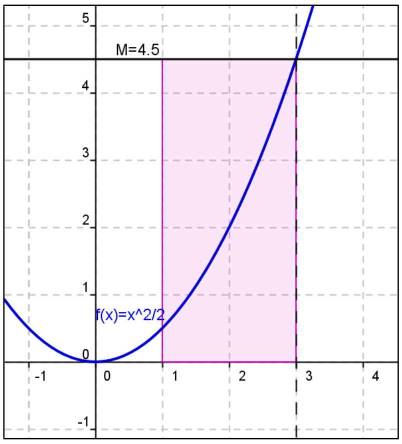
El valor de f(c) se llama ***Valor medio de f(x) en el intervalo [a;b].***

El punto c puede no ser único. El teorema garantiza la existencia de por lo menos uno que cumple con esa propiedad.
El cálculo del valor medio f(c) y el de c supone el cálculo de la integral definida de la función en el intervalo [a;b].

Demostración
Caso 1: Si f es constante en el intervalo [a;b], el teorema es evidentemente cierto ya que se puede tomar como c cualquier punto de [a;b]
Caso 2: Si f no es constante en [a;b], por las propiedades de la integral definida y de las funciones continuas en intervalos cerrados existen **m** y **M** como los valores **mínimo y máximo de f en [a;b].**



Rectángulo inscripto.



Rectángulo circunscripto

Área menor que la de f(x). *Área mayor que la de f(x)*

Al ser **m ≤ f(x) ≤ M** para todo x en [a;b] podemos aplicar la integral a la desigualdad y escribir:

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$m.(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M.(b-a) \quad dividiendo \quad por \quad (b-a) \quad resulta:$$

$$m \quad \le \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad \le \quad M$$

El segundo miembro de esta desigualdad se encuentra comprendido entre m y M. Por el teorema del valor intermedio existe un c perteneciente al intervalo [a,b] que verifica:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \; = f(c) \quad \to \int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$$

(La función es continua en [a,b] y como f(a) = m < f(b) = M la función debe tomar todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b) es decir entre m y M)

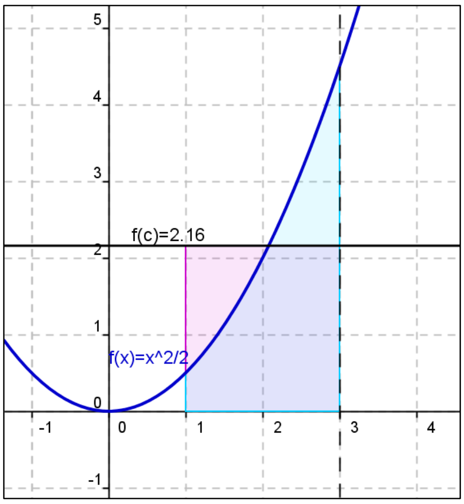
Interpretación Geométrica.

El producto ***f(c) .(b-a)*** corresponde al área de un rectángulo que tiene por base la amplitud del intervalo **[a,b]** y por altura el valor que toma la función para **x = c.**
Si f(x) >0 el área bajo la curva de la función es equivalente al rectángulo de lados **f (c) y (b-a)**

Ejemplo: Para la función $f(x) = \frac{x^2}{2}$ en el intervalo [1,3]

$$f(c) = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{x^2}{2}.dx = \frac{1}{2}\left.\frac{x^3}{6}\right|_1^3 = \frac{27}{12} - \frac{1}{12} = \frac{13}{6} = 2{,}1\overline{6}$$

El área bajo la curva comprendida en el intervalo [1,3] es equivalente al área del rectángulo de base 2 y altura 2,1666... A = 4,3333..



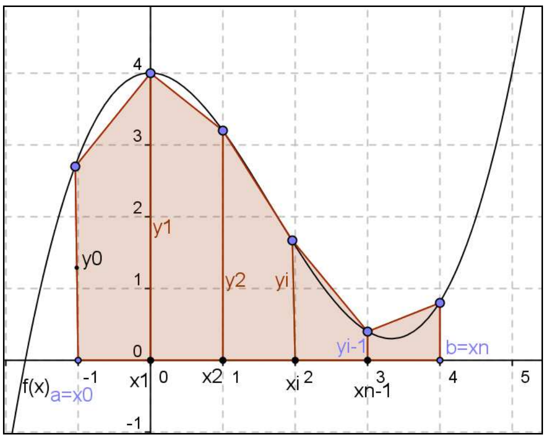
INTEGRACIÓN NUMÉRICA. MÉTODO DE LOS TRAPECIOS

Sea **f** una función continua en el intervalo cerrado [a;b] y **P** una partición del intervalo cerrado [a, b] en subintervalos iguales de longitud Δx_i

$$P = \{ x_0, x_1, x_2, ..., x_n \} \quad \text{tal que:} \qquad a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

Para cada subintervalo se traza la secante que une los puntos correspondientes a $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$.

En cada sector aparece un trapecio de área A_i. $A_i = \dfrac{(B+b).h}{2}$



$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + A_3 + ...A_n$$

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\frac{y_0 + y_1}{2}\right)\Delta x + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)\Delta x + \ldots\ldots\left(\frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right)\Delta x = \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + \ldots y_n\right) =$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots\ldots + 2y_{n-1} + y_n\right) = \Delta x\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots\ldots y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) =$$

$$= \Delta x\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

Luego: $$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \Delta x.\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)}$$

Ejemplo:

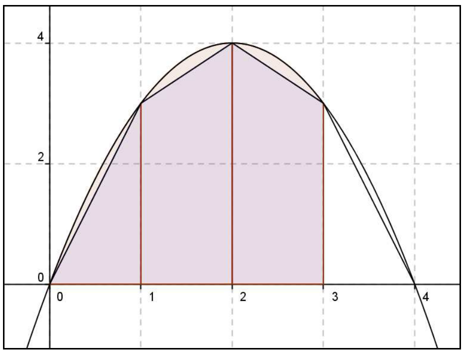
Calcular por el método de los trapecios la $\int_0^3 (-x^2 + 4x).dx$

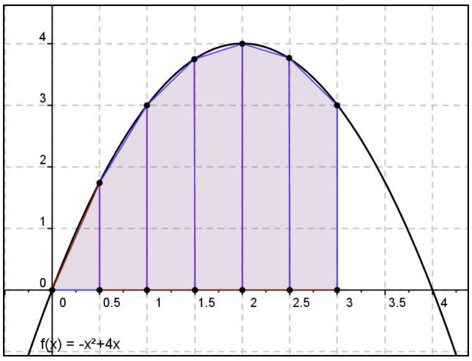
Considerando $\Delta x = 1$ $y_0 = 0$ $y_3 = 3$

$$\int_0^3 (-x^2 + 4x).dx = 1.\left(\frac{0+3}{2} + 3 + 4\right) = 1.8{,}5 = 8{,}5\, u.\text{sup}$$

Considerando $\Delta x = 0{,}5$ $y_0 = 0$ $y_3 = 3$

$$\int_0^3 (-x^2 + 4x).dx = 0{,}5.\left(\frac{0+3}{2} + 1{,}75 + 3 + 3{,}75 + 4 + 3{,}75\right) = 0{,}5.17{,}75 = 8{,}875\, u.\text{sup}.$$





Al considerar subintervalos de longitud menor la integral es más aproximada. Su valor es:

$$\int_0^3 (-x^2 + 4x).dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_0^3 = -9 + 18 - 0 = 9\, u.\text{sup}.$$