UNNOBA
Universidad Nacional
Noroeste | Buenos Aires

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO

CONTINUIDAD

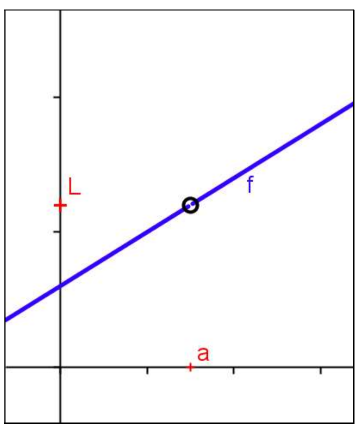
CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Los fenómenos físicos suelen ser continuos .Ejemplo: el desplazamiento o la velocidad de un vehículo varían en forma continua con el tiempo. Sin embargo en la corriente eléctrica no se presenta una continuidad.

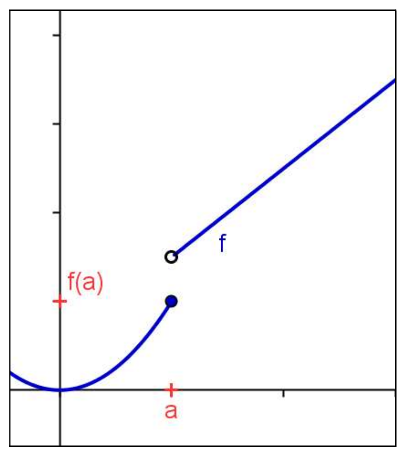
El término continuo tiene el mismo sentido en Matemática que en el lenguaje cotidiano.

Decir que una función es continua significa que su gráfico no sufre interrupción en $x = a$ que no tiene saltos, ni huecos y que no se rompe.

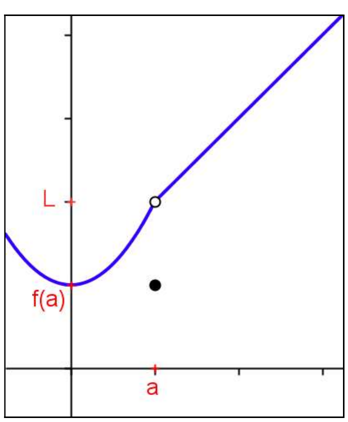
a) $f(a)$ *no está definida*
$\lim_{x \to a} f(x)$ *existe*



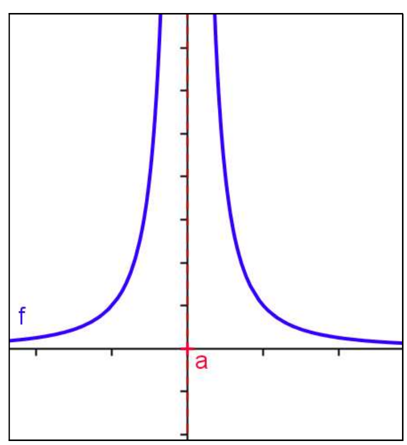
b) $\lim_{x \to a} f(x)$ *no existe*
$f(a)$ *está definida*



c) $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe*
$f(a)$ *está definida pero*
$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$



d) $\lim_{x \to a} f(x)$ *no existe*
$f(a)$ *no está definida*



<u>Definición de Función Continua en un número</u>

Una función f es **continua en un número** $x = a$ si:

1.- $f(a)$ está definida (es decir, a está en el dominio de f)

2.- $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe*

3.- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Es decir que una función es continua en un punto, cuando la función está definida en el punto, tiene límite para x tendiendo a dicho punto y coincide con el valor de la función en dicho punto.

Otra forma de expresar que una función es continua en $x = a$ **es:**

$$f(x) \text{ es continua en } x = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Si una o más de estas tres condiciones no se cumplen en $x = a$ se dice que la función f <u>no es continua en $x = a$ o que f presenta una discontinuidad en $x = a$</u> como ocurre en los gráficos anteriores.

<u>Discontinuidades</u>

Existen dos tipos de discontinuidades; <u>*evitables y esenciales*</u>

<u>Discontinuidades evitables</u>

Una discontinuidad se dice que es evitable cuando:

a) Existe el límite de la función en un punto y la función está definida en dicho punto, pero no coinciden. (no se cumple el ítem 3 de la definición)

En símbolos:

$$f(a) \text{ está definida} \wedge \exists \lim_{x \to a} f(x) \text{ pero } f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$$

Ejemplo: gráfico c)

b) Existe el límite de la función en un punto y la función no está definida en dicho punto. (no se cumple el ítem 1 de la definición)

En símbolos:

$$f(a) \text{ no está definida} \wedge \exists \lim_{x \to a} f(x)$$

Ejemplo: gráfico a)

Para las discontinuidades evitables se redefine la función en el punto de discontinuidad asignándole como verdadero valor de la función el valor del límite, transformándola así en continua

Discontinuidades esenciales

Una discontinuidad se dice que es esencial o no evitable cuando no existe el límite de la función en un punto. (no se cumple el ítem 2 de la definición)

En símbolos:

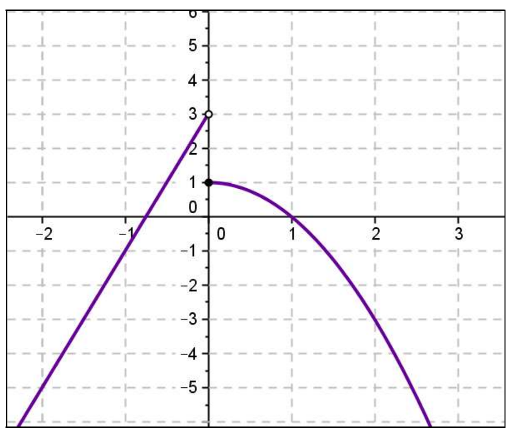
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a^+} \neq \lim\limits_{x \to a^-} \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \end{array}\right\} no\ existe\ \lim\limits_{x \to a} f(x)$$

Ejemplos:

1. $$f(x) = \begin{cases} 4x+3 & si\ x < 0 \\ 1-x^2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

i) $f(0) = 1$

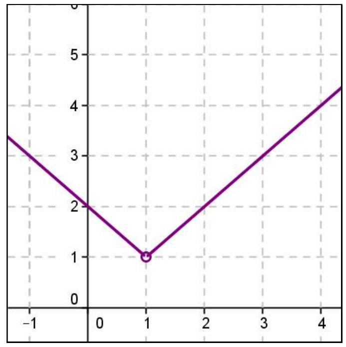
ii) $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 3 \quad \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1 \to \lim\limits_{x \to 0} f(x)\ no\ existe$ por lo cual la función *f(x)* presenta una discontinuidad esencial en $x = 0$



2. $f(x) = |x-1| + 1 \quad si\ x \neq 1$

i) $f(1)\ no\ existe$

ii) $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 1 \quad \lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 1 \to \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ por lo cual la función *f(x)* presenta una discontinuidad evitable en $x = 1$



Puede redefinirse la función para transformarla en continua asignándole a $f(1)$ el valor 1 correspondiente al límite.

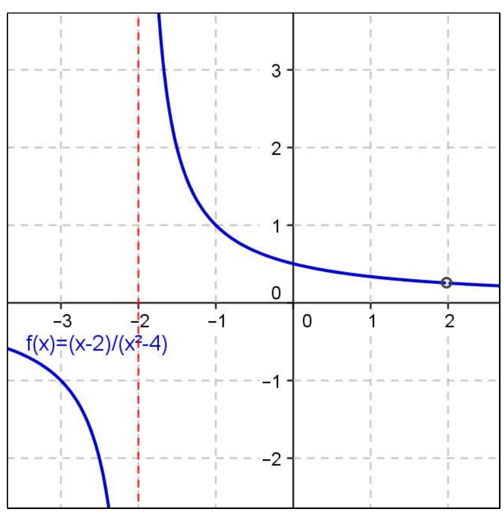
3. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ Presenta dos valores de x para analizar: 2 y -2

   i) $f(2)\ no\ existe$

   ii) $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)=\dfrac{1}{4}$ $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=\dfrac{1}{4} \to \lim\limits_{x\to 2} f(x)=\dfrac{1}{4}$ por lo cual la función *f(x)* presenta una discontinuidad evitable en $x = 2$

   i) $f(-2)\ no\ existe$

   ii) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\infty \to no\ existe$ por lo cual la función *f(x)* presenta una discontinuidad esencial en $x = -2$



<u>Continuidad en un intervalo abierto</u>

Una función f se dice continua en un intervalo abierto (a,b) si lo es en todos los puntos de ese intervalo.

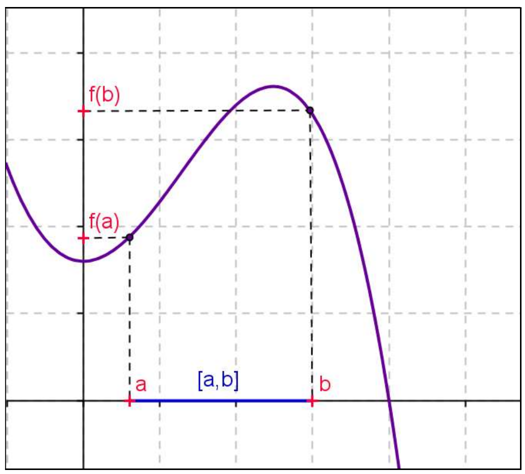
$$f(x) \; es \; continua \; en \; (a,b) \Leftrightarrow f(x) \; es \; continua \; en \; x_0 \;\; \forall x_0 \in (a,b)$$

<u>Continuidad en un intervalo cerrado</u>

Una función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ si es continua en el intervalo abierto (a,b) y además :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

<u>La función f se dice que es continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.</u>



Las extensiones de estos conceptos a intervalos como (a,∞); $(-\infty,b)$; $(-\infty,+\infty)$; $(a,b]$;$[a,b)$;$(-\infty,b]$;$[a,+\infty)$ se cumplen con definiciones análogas.

Ejemplo:

Analizar la continuidad de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $\qquad Dom\ f = [-1,1]$

$$\forall x_0 \in (-1,1) \; se \; cumple: \exists f(x_0) = \sqrt{1-x_0{}^2}$$
$$\exists \lim_{x \to x_0} = \sqrt{1-x_x{}^2} \qquad \therefore \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Luego, $f(x)$ es continua en (-1,1)

Además se verifica:

$\lim\limits_{x \to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(-1)$ $\quad f(x)$ *es continua en* $x = -1$ *por la derecha*

$\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(1)$ $\quad f(x)$ *es continua en* $x = 1$ *por la izquierda*

f(x) es continua en [-1,1]

Continuidad en un punto terminal de un intervalo

Analizamos la continuidad de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 0$

$$Dom\ f = [0;+\infty)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0)$$

f(x) es continua por derecha en $x = 0$

Continuidad de una suma, un producto y un cociente

Si $f\ y\ g$ son continuas en $x = a\ y\ x = c$ es una constante, entonces las siguientes funciones son también continuas en $x = a$

1. $f + g$
2. $f - g$
3. $c.f$
4. $f.g$
5. $\dfrac{f}{g}\quad si\ g(a) \neq 0$

Demostración inciso 1

Dado que $f\ y\ g$ son continuas en $x = a$:

$\exists\, f(a) \wedge \exists\, g(a)$ y se cumple: $f(a) + g(a) = (f+g)(a)$

Además: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$

Entonces:

$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] =$$

$$= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) =$$

$$= f(a) + g(a) =$$

$$= \underline{(f+g)(a)}$$

Esto demuestra que $f+g$ es continua en $x=a$

Demostración inciso 4

Dado que $f\ y\ g$ son continuas en $x=a$:

$\exists\, f(a) \wedge \exists\, g(a)$ y se cumple: $f(a)\,.\,g(a)=(f.g)(a)$

Además: $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)=g(a)$

Entonces:

$$\lim_{x \to a}(f.\,g)(x)=\lim_{x \to a}\left[f(x).\,g(x)\right]=$$

$$=\lim_{x \to a} f(x)\,.\,\lim_{x \to a} g(x)=$$

$$=f(a)\,.\,g(a)=$$

$$=\underline{(f.\,g)(a)}$$

Esto demuestra que $f\,.\,g$ es continua en $x=a$

Demostración inciso 5

Dado que $f\ y\ g$ son continuas en $x=a$:

$\exists\, f(a) \wedge \exists\, g(a)$ y se cumple: $\dfrac{f(a)}{g(a)}=\dfrac{f}{g}(a) \quad con\ g(a)\neq 0$

Además: $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)=g(a)$

Siendo $g(a)\neq 0$

$$\lim_{x \to a}\left[\frac{f}{g}\right](x)=\lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}=$$

$$=\underline{\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{f}{g}(a)}$$

Esto demuestra que $\dfrac{f}{g}$ es continua en $x=a$

Consecuencias:

a).- Cualquier función polinomial es continua en todo su dominio, es decir es continua sobre $\Re = (-\infty;+\infty)$

b).- Cualquier función racional es continua siempre que esté definida; es decir es continua en su dominio

Continuidad de una función compuesta

Si la función g es continua en a y la función f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ es continua en a

Demostración:

Sabemos que g es continua en a, entonces

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Si x se acerca a a, $g(x)$ se acerca a $g(a)$ y como la función f es continua en $g(a)$, si $g(x)$ se acerca a $g(a)$, entonces $f(g(x))$ se acerca a $f(g(a))$

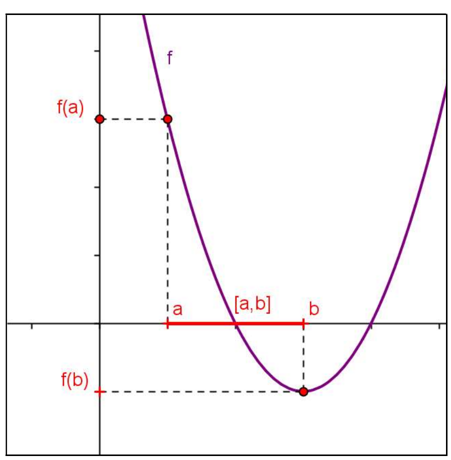
Entonces: $\lim_{x \to a} f(g(x)) = \lim_{a \to a} (f \circ g) = f(g(a)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$

Lo cual demuestra que $\underline{f(g(x)) = f \circ g}$ es continua en $\underline{x = a}$

Teorema de los Ceros o Teorema de Bolzano

Bolzano (1781-1848) matemático y filósofo. Estudió entre otras cosas las propiedades de las funciones continuas.

Si una función es continua en un intervalo y toma valores de signo contrario en los extremos del mismo, existe, por lo menos un punto interior del intervalo en que la función toma el valor cero



En símbolos:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ es\ continua\ en\ [a;b] \\ signo\ de\ f(a) \neq signo\ de\ f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c\ tal\ que\ a < c < b \wedge f(c) = 0$$

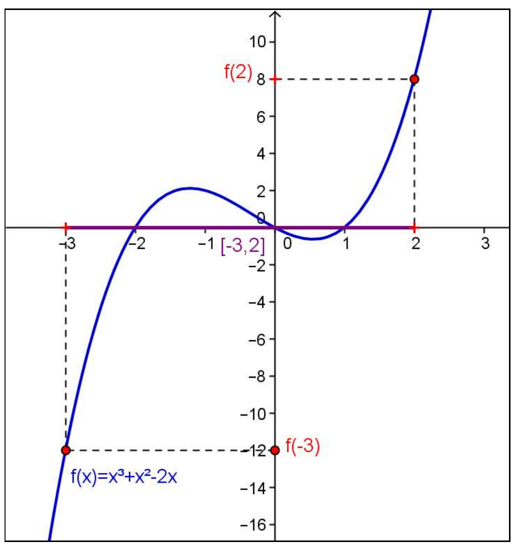
El teorema expresa que por lo menos existe un valor interior del intervalo en el que se anula la función, pero puede existir más de un valor que cumpla con las condiciones del teorema. Siempre un número impar.

Ejemplo:

$f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ en el intervalo [-3,2]

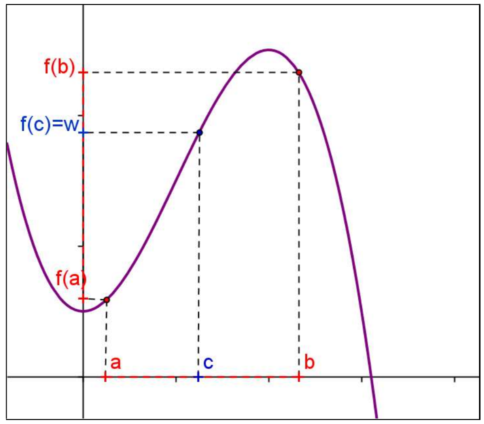
f(x) es continua por ser una función polinómica y además: $f(-3) = -12 \quad \wedge \quad f(2) = 8$

Luego: $f(x) = x^3 + x^2 - 2x = 0 \rightarrow x_1 = -2 \;\; x_2 = 0 \;\; x_3 = 1$



<u>Teorema del Valor Intermedio o Teorema de Cauchy</u>

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a;b]$ y si $f(a) \neq f(b)$, entonces para cada valor $\boldsymbol{w}$ entre $f(a)\ y\ f(b)$ existe un número $\boldsymbol{c}$ entre $\boldsymbol{a}$ ***y*** $\boldsymbol{b}$ tal que $f(c) = w$



En símbolos:
$$\left.\begin{array}{c} f(x)\ es\ continua\ en\ [a;b] \\ f(a)\neq f(b)\wedge w\in\Re / w\in[f(a),f(b)] \end{array}\right\}\Rightarrow \exists\ c\in[a,b]/\ f(c)=w$$

Teorema del Valor Extremo o Teorema de Weirestrass

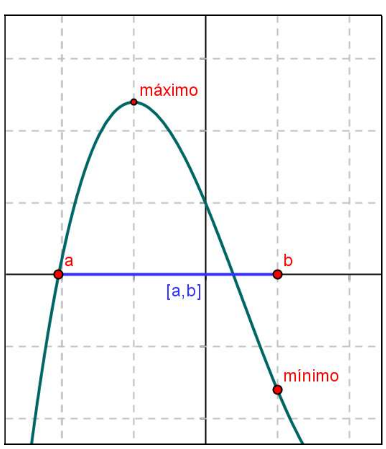
a) Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a;b]$, es acotada en $[a;b]$.

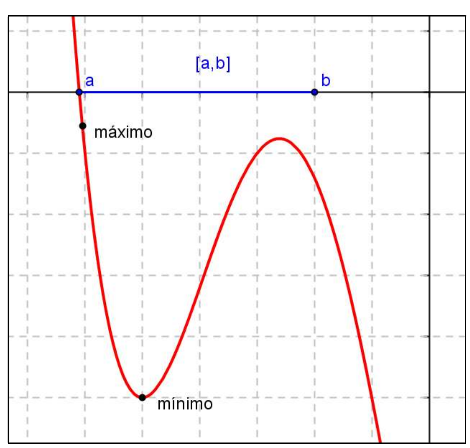
$$f(x)\ es\ continua\ en\ [a:b]\Rightarrow \exists\ M>0/\left|f(x)\right|\leq M\ \ \forall x\in[a,b]$$

b) Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a;b]$ alcanza en el mismo máximo y mínimo absolutos.

En símbolos:

$$f(x)\ es\ continua\ en\ [a:b]\Rightarrow\begin{cases}\exists\ número\ M=f(x_0)/M\geq f(x) & \forall x\in[a;b] \\ \exists\ número\ m=f(x_1)/m\leq f(x) & \forall x\in[a;b]\end{cases}$$





1- El máximo y el mínimo absoluto de una función en un intervalo, o uno de ellos; pueden ser positivos, negativos o nulos.

2.- Si la función es constante, toma valores iguales en todos los puntos del intervalo, en ese caso el máximo y mínimo absoluto, se consideran coincidentes con el valor de la función.

El teorema del valor extremo al igual que el del valor intermedio es un teorema de existencia ya que aseguran que existen valores máximos y mínimos pero no dice cómo hallarlos.

Bibliografía.

- L. LEITHOLD: *El Cálculo,* Volumen I, Oxford University Press. 1999.

- L. LEITHOLD: *Cálculo con geometría analítica.* Oxford University Press 1998.

- STEWART James: Cálculo de una Variable trascendentes tempranas, International Thomson editores 1998

- LARSON/HOSTETLER/EDWARDS *Cálculo* Volumen 1. ED.PIRÁMIDE. 2002