UNNOBA
UNIVERSIDAD NACIONAL
NOROESTE | BUENOS AIRES

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO

DERIVADAS

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

La derivación es una de las operaciones que el Análisis matemático realiza con funciones; con su aplicación pueden resolverse problemas de Economía, Física, Astronomía, Geometría y otras disciplinas.

El estudio de las derivadas junto con las integrales constituye el Cálculo Infinitesimal.

Los primeros en investigar e introducir estos conceptos fueron Newton y Leibnitz, que se interesaron no solo por los cambios que ocurrían a sus alrededores sino también por la rapidez con que se producían dichos cambios. Esto los condujo al concepto de derivada.

Concepto

Sea A un conjunto incluido en R y ***f*** una función definida de A en R:

$A \subset \Re \quad f : A \to \Re$ puede definirse la derivada de la función : $y = f(x)$ para todo $\mathbf{x_o}$, siendo $\mathbf{x_o}$ un punto de acumulación de A.

Se designa con Δ**x** a un incremento (positivo o negativo) de la variable independiente de manera que $(\mathbf{x_o} + \Delta \mathbf{x}) \in \mathbf{A}$.

Se designa con Δ**y** al incremento de la función que se calcula: $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$

Se llama razón o cociente incremental a Δ**y**/Δ**x** que denota el incremento medio de la función.

Si existe el límite de este cociente incremental para Δ**x** tendiendo a **0**, tal límite se llama: derivada de la función f(x) en el punto $\mathbf{x_o}$ y se designa: $f'(x_o)$ o y_o' (Notación de Lagrange)

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Si se expresa a $\mathbf{x_o} + \Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}$ entonces $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x_o}$ **y** Δ**x** tiende a 0 cuando **x** tiende a $\mathbf{x_o}$**;** por consiguiente la derivada de una función en un punto $\mathbf{x_o}$ puede escribirse:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

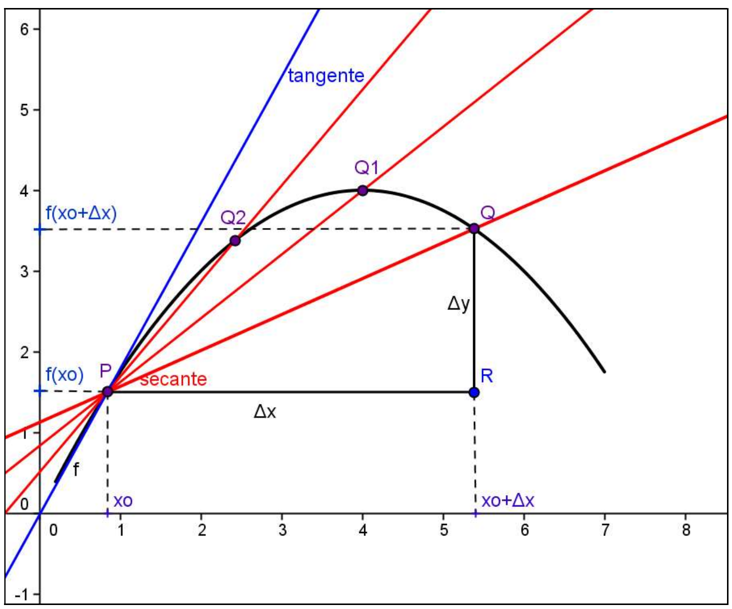
Otras notaciones para la derivada de una función:

$Df(x)$ o $D_x f$ (Cauchy) $\quad \frac{dy}{dx}$ o $\frac{df}{dx}$ (Leibnitz) $\quad \dot{y}$ o $\dot{f}$ (Newton)

Observaciones:

- Como Δ**x** tiende a 0 podrá tomar todos los valores comprendidos entre el inicial y 0.
- El límite del cociente incremental para $\mathbf{x_o}$ fijo, es el límite ordinario. En el caso de obtener dos límites diferentes por izquierda y por derecha, se hablará de derivada de ***f(x)*** por derecha de $\mathbf{x_o}$ o izquierda de $\mathbf{x_o}$. En general si no se aclara se entenderá que es la derivada en sentido ordinario.
- La definición de derivada no excluye que el límite mediante el cual se define pueda ser infinito.
- La función ***f(x)*** puede ser derivable en algunos puntos de A en que está definida. El conjunto de puntos de A en los cuales ***f(x)*** es derivable constituye el campo de definición de la función derivada de ***f(x).***

Gráfico de la curva de una función las rectas secantes y tangente



Interpretación geométrica.

La pendiente de la recta secante que une los puntos P y Q es:

$$m = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La curva pasa de P a Q a través de los incrementos Δ**x** **y** Δ**y.**

Cuando Δ**x** tiende a 0 el punto Q se aproxima a P, ocupando las posiciones intermedias Q_1, Q_2, Q_3 … y el cociente incremental nos da las sucesivas secantes que unen P con Q_1 ,Q_2 ….

La posición límite de esta recta secante cuando Δx tiende a 0 es la recta tangente a la curva en P.

La pendiente de esta recta tangente es:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

La derivada de una función en un punto puede interpretarse geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la curva representativa de la función en ese punto.

Ejemplo:

Cálculo de la derivada de la función: $f(x) = x^2$ aplicando la definición de derivada e interpretación gráfica.

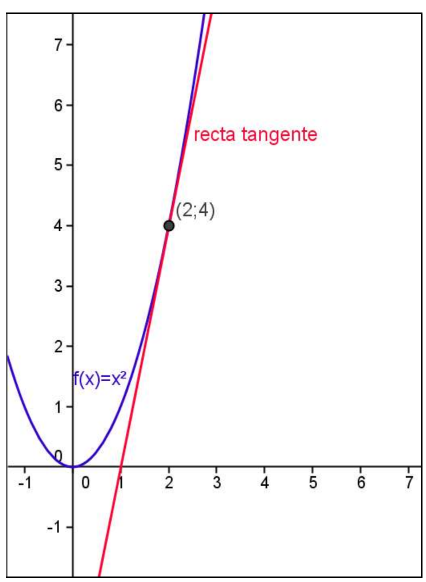
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x.(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$$\boxed{f(x) = x^2 \to f'(x) = 2x}$$

La derivada de la función: $f(x) = x^2$ en $\mathbf{x_0 = 2}$ es igual a **4.** La pendiente de la recta tangente a la curva de la función en el punto de abscisa $\mathbf{x_0 = 2}$ es igual a **4.**

<u>Gráfico de la función cuadrática y recta tangente en el punto (2;4)</u>



REGLAS DE DERIVACIÓN.

Derivada de la función constante.

f(x) = k

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{k-k}{\Delta x}=0 \qquad \boxed{D(k)=0}$$

La derivada de una función constante es cero.

Este resultado se verifica geométricamente, ya que la gráfica de la función constante es una recta horizontal con pendiente nula.

Derivada de la función identidad.

f(x) = x

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1 \qquad \boxed{D(x)=1}$$

La derivada de una función Identidad es uno.

Este resultado se verifica geométricamente, ya que la gráfica de la función Identidad es una recta inclinada a 45º con pendiente 1.

Derivada de la función potencia.

$f(x)=x^n$ con n entero positivo

La expresión: $x^n-a^n=x^{n-1}+x^{n-2}.a+x^{n-3}a^2.......+x.a^{n-2}+a^{n-1}$

Aplicando la segunda expresión de la derivada de una función resulta:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(x^{n-1}+x^{n-2}.a+......+x.a^{n-2}+a^{n-1}\right)=$$

$$=a^{n-1}+a^{n-2}.a+.......+a.a^{n-2}+a^{n-1}=a^{n-1}+a^{n-1}+......+a^{n-1}+a^{n-1}=na^{n-1}$$

Como $f'(a)=na^{n-1}\to f'(x)=n.x^{n-1}$ $\qquad \boxed{D(x^n)=n.x^{n-1}}$

Ejemplo: $f(x)=x^8\to f'(x)=8x^7$

Derivada del producto de una constante por una función.

g(x)= k.f(x)

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k.f(x+\Delta x) - kf(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k.[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} = k.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = k.f'(x)$$

$$\boxed{D(k.f(x)) = k.Df(x) = k.f'(x)}$$

La derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

Gráficamente se observa que cuando una función se multiplica por una constante, se produce un estiramiento (o compresión) vertical, y las pendientes quedan también multiplicadas por dicha constante.

Derivada de una suma o resta de funciones.

$f(x) = g(x) \pm h(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[g(x+\Delta x) \pm h(x+\Delta x)] - [g(x) \pm h(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[g(x+\Delta x) - g(x)] \pm [h(x+\Delta x) - h(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = g'(x) \pm h'(x)$$

$$\boxed{D[g(x) \pm h)(x)] = Dg(x) \pm D.h(x) = g'(x) \pm h'(x)}$$

La derivada de una suma (o resta) de funciones es igual a la suma (o resta) de las derivadas de las funciones.

Ejemplo:

$f(x) = x^5 + 4x^3 - 5x \rightarrow f'(x) = 5x^4 + 12x^2 - 5$

Derivada de un producto de funciones.

$f(x) = g(x).h(x)$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[g(x+\Delta x).h(x+\Delta x)]-[g(x).h(x)]}{\Delta x}=$$

sumar y restar en el numerador $g(x).h(x+\Delta x)$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x).h(x+\Delta x)-g(x).h(x)+g(x).h(x+\Delta x)-g(x).h(x+\Delta x)}{\Delta x}=$$

asociar primer y cuarto término y segundo y tercero:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[g(x+\Delta x).h(x+\Delta x)-g(x).h(x+\Delta x)]+g(x).h(x+\Delta x)-g(x).h(x)}{\Delta x}=$$

extraer factor común: $h(x+\Delta x)$ *en los dos primeros y* $g(x)$ *en los segundos y calcular límite:*

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}.h(x+\Delta x)\pm\lim_{\Delta x\to 0}g(x)\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}=g'(x).h(x)+g(x).h'(x)$$

$$\boxed{D[g(x).h(x)]=D[g(x)].h(x)+g(x).D[h(x)]=g'(x).h(x)+g(x).h'(x)}$$

$$\boxed{Si\ g(x)=u\ \ y\ \ h(x)=v\to D(u.v)=Du.v+u.Dv=u'.v+u.v'}$$

La derivada de un producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda función más la primera función por la derivada de la segunda.

Derivada de un cociente de funciones.

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}\quad con\ h(x)\neq 0$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{g(x+\Delta x)}{h(x+\Delta x)}-\dfrac{g(x)}{h(x)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{g(x+\Delta x).h(x)-g(x).h(x+\Delta x)}{h(x+\Delta x).h(x)}}{\Delta x}=\qquad sumar\ y\ restar\ en\ el\ numerador\ g(x).h(x)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{g(x+\Delta x).h(x)-g(x).h(x)+g(x).h(x)-g(x).h(x+\Delta x)}{h(x+\Delta x).h(x)}}{\Delta x}=$$

Asociar los dos primeros términos y extraer factor común: $h(x)$ *y* $g(x)$ *en los segundos, distribuir el denominador y calcular límite:*

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x.}.\frac{h(x)}{h(x+\Delta x).h(x)}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[h(x+\Delta x)-h(x)]}{\Delta x}\frac{g(x)}{h(x+\Delta x).h(x)}=$$

$$=\frac{g'(x).h(x)-g(x).h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$\boxed{D\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{D[g(x)].h(x)-g(x).D[h(x)]}{[h(x)]^2}=\frac{g'(x).h(x)-g(x).h'(x)}{[h(x)]^2}}$$

$$\boxed{Si\ g(x)=u\quad y\quad h(x)=v\rightarrow D\frac{u}{v}=\frac{Du.v-u.Dv}{v^2}=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}}$$

La derivada de un cociente de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador menos el numerador por la derivada del denominador y toda esta expresión se divide por el denominador al cuadrado.

Ejemplo:

$$f(x)=\frac{x^2-6x}{x+5}\rightarrow f'(x)=\frac{(2x-6).(x+5)-(x^2-6x).1}{(x+5)^2}=\frac{2x^2+4x-30-x^2+6x}{(x+5)^2}=$$

$$=\frac{x^2+10x-30}{(x+5)^2}$$

Esta regla puede utilizarse para el caso de las potencias de exponente entero negativo.

$f(x)=x^{-n}\quad con\ n\ entero\ positivo$

$$f(x)=\frac{1}{x^n}\ aplicando\,la\,regla\,del\,cociente\rightarrow f'(x)=\frac{0.x^n-1.nx^{n-1}}{(x^n)^2}=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1}$$

$$\boxed{f(x)=x^{-n}\quad con\ n\ entero\ positivo\rightarrow f'(x)=-n.x^{-n-1}}$$

Ejemplo:

$f(x)=x^{-4}\quad\rightarrow f'(x)=-4.x^{-5}$

Generalización de la regla de la potencia.

Esta regla es aplicable para todo n Real.

$$\boxed{D(x^n)=n.x^{n-1}\quad\forall n\in\Re}$$

Ejemplo:

$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ La derivada de la función $f(x)=\sqrt{x}$ también puede obtenerse aplicando la definición de derivada.

$f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}\quad\rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}.x^{-\frac{2}{3}}$

Derivada de funciones compuestas.

Sea $y = f(u)$ con $u = g(x)$ de manera que u esté definida en un cierto intervalo [a,b] de variabilidad x y sea derivable en él y que $y = f(u)$ esté definida para los valores de u que corresponden a los valores de x.

Entonces existe la derivada de $y = f(u) = f[g(x)]$ y es $\boxed{y' = f'[g(x)].g'(x)}$

Demostración:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta x} \quad multiplicar\ y\ dividir\ por\ \Delta u\ (con\ \Delta u \neq 0)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta x} . \frac{\Delta u}{\Delta u} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u+\Delta u)}{\Delta u} . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u+\Delta u)}{\Delta u} . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \quad (\Delta u \to 0\ cuando\ \Delta x \to 0\ porque\ g\ es\ continua)$$

$$El\ primer\ factor\ es\ f'(u)\ y\ el\ segundo\ es\ u'$$

$$y' = f'(u).u' \quad como \quad u = g(x)$$

$$y' = f'[g(x)].g'(x)$$

$$(Si\ \Delta u = 0\ resulta\ \frac{\Delta u}{\Delta x} = 0 \quad y \quad \Delta y = f(u+0) - f(u) = 0 \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0)$$

La derivada de una función compuesta es igual a la derivada de la función exterior evaluada en la función interior multiplicada por la derivada de la función interior.

Esta derivada se conoce con el nombre de **Regla de la cadena** y se aplica cada vez que una función está expresada como composición de funciones. $\boldsymbol{y = f \circ g}$

Ejemplo:

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 2} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 2)^{-\frac{1}{2}}.3x^2 = \frac{3}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^3 - 2}}$$

Derivada de la función logaritmo.

a. Logaritmo Natural. $\boxed{f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}}$

b. Logaritmo en base a $\boxed{f(x) = \log_a(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x.\ln a}}$

$$f(x)=\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln a} \quad \textit{por cambio de base a a logaritmo natural}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.\ln a-\ln(x).0}{\ln^2 a} \quad \textit{como } \ln a \textit{ es una constante, su derivada es cero.}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x.\ln a}$$

<u>Derivada de las funciones trigonométricas.</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x)=sen(x)\rightarrow f'(x)=\cos(x) \\ f(x)=\cos(x)\rightarrow f'(x)=-sen(x) \\ f(x)=tg(x)\rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)} \end{array}}$$

La función $f(x)=tg(x)$ puede derivarse aplicando la regla del cociente de dos funciones, a partir de la identidad trigonométrica:

$$f(x)=tg(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)}$$

$$f'(x)=\frac{\cos(x).\cos(x)-sen(x).(-sen(x))}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+sen^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$\textit{El numerador es la Identidad fundamental}: \cos^2(x)+sen^2(x)=1$$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

Con un razonamiento similar puede obtenerse la derivada de la función: $f(x)=\cot g(x)$

Ejemplos:

a) $f(x)=\ln(x^3+1) \quad \rightarrow f'(x)=\dfrac{3x^2}{x^3+1}$

b) $f(x)=sen(\sqrt{x}) \quad \rightarrow f'(x)=\cos(\sqrt{x}).\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $f(x)=\cos(6x^2-x) \quad \rightarrow f'(x)=-sen(6x^2-x).(12x-1)$

<u>Derivada de la función exponencial</u>

$f(x)=a^x$ con a >0

Para calcular la derivada de la función exponencial puede aplicarse el método Derivación logarítmica. Los pasos son los siguientes:

1) Aplicar logaritmo natural en ambos miembros de la expresión $y = f(x)$.
2) Derivar ambos miembros respecto de x.
3) Despejar y' de la expresión resultante.

Si $f(x)$ <0 para algunos valores de x , el lny no está definido, pero puede escribirse: $|y|=|f(x)|$ y continuar con el procedimiento.

$$y = a^x \quad \textit{se aplica logaritmo natural}$$
$$\ln y = \ln(a)^x \quad \textit{por propiedad de logaritmos}$$
$$\ln y = x.\ln a \quad \textit{se derivan ambos miembros}$$
$$\boxed{D(a^x) = a^x.\ln a}$$
$$\frac{1}{y}.y' = 1.\ln a \quad \textit{se despeja } y'$$
$$y' = y.\ln a = a^x.\ln a$$

Como caso particular si $a = e$ $\boxed{f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x.\ln e}$ $\boxed{D(e^x) = e^x}$

Derivada de una función potencial exponencial.

$y = [f(x)]^{g(x)}$

Para calcular la derivada de esta función se aplica derivación logarítmica.

Sea $u = f(x)$ y $v = g(x)$

$$y = u^v \quad \textit{se aplica logaritmo natural}$$
$$\ln y = \ln(u)^v \quad \textit{por propiedad de logaritmos}$$
$$\ln y = v.\ln u \quad \textit{se derivan ambos miembros}$$
$$\boxed{D(u^v) = u^v.\left(v'.\ln u + v.\frac{u'}{u}\right)}$$
$$\frac{1}{y}.y' = v'.\ln u + v.\frac{1}{u}.u' \quad \textit{se despeja } y'$$
$$y' = y.(v'.\ln u + v.\frac{u'}{u}) = u^v.\left(v'.\ln u + v.\frac{u'}{u}\right)$$

Derivadas de funciones trigonométricas inversas.

Para trabajar con las funciones trigonométricas inversas se limita el campo de variabilidad (campo donde la función es derivable), para obtener funciones siempre crecientes o decrecientes.

$f(x)= arcsen(x)$ con $f(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$Si \quad y = arcsen(x) \to x = sen(y) \ se\ derivan\ ambos\ miembros$$

$$1 = \cos(y).y' \to y' = \frac{1}{\cos(y)}$$

$$se\ reemplaza\ \cos(y)\ por\ la\ \exp resión\ obtenida\ de\ la\ relación\ fundamental:$$

$$sen^2(y) + \cos^2(y) = 1 \quad \to \cos(y) = \sqrt{1 - sen^2(y)}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2(y)}} \quad se\ sustituye\ sen(y)\ por\ x$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \forall x \in (-1,1)$$

Se considera el signo positivo de la raíz cuadrada pues el *cos(y)* es positivo en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\boxed{D[arcsen(x)] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Con un razonamiento similar se llega a la derivada de la función *f(x)= arccos(x)* con $f(x) \in [0, \pi]$

$$Si \quad y = \arccos(x) \to x = \cos(y) \ se\ derivan\ ambos\ miembros$$

$$1 = -sen(y).y' \to y' = -\frac{1}{sen(y)}$$

$$se\ reemplaza\ sen(y)\ por\ la\ \exp resión\ obtenida\ de\ la\ relación\ fundamental:$$

$$sen^2(y) + \cos^2(y) = 1 \quad \to sen(y) = \sqrt{1 - \cos^2(y)}$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(y)}} \quad se\ sustituye\ \cos(y)\ por\ x$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\boxed{D[\arccos(x)] = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Para la función *f(x) = arctg(x)* con $f(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la derivada se obtiene:

$$Si \quad y = arctg(x) \to x = tg(y) \ se\ derivan\ ambos\ miembros$$

$$1 = \frac{1}{\cos^2(y)}.y' \to y' = \cos^2 y$$

$$se\ reemplaza\ \cos^2(y)\ por\ la\ \exp resión\ obtenida\ de\ la\ identidad: tg\ y = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 y}}{\cos y} \to \cos^2 y = \frac{1}{1 + tg^2(y)}$$

$$y' = \frac{1}{1 + tg^2(y)} \quad se\ sustituye\ tg(y)\ por\ x$$

$$y' = \frac{1}{1 + x^2} \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\boxed{D[arctg(x)] = \frac{1}{1+x^2}}$$

Ejemplos:

$$f(x) = arcsen(\sqrt{x}) \quad \to f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$$f(x) = \arccos(x^3) \quad \to f'(x) = -\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$$

$$f(x) = arctg(x+1) \quad \to f'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} = \frac{1}{2+2x+x^2}$$

<u>Relación entre continuidad y derivabilidad de una función.</u>

Si una función es derivable en un punto es continua en ese punto.

$Si \quad \exists f'(a) \to f(x)\ es\ continua\ en\ x = a$

Demostración

Para demostrar que *f(x)* es continua en a se debe probar que el límite de la función cuando x tiende a a coincide con el valor de la función en x = a.

En símbolos: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

1. Mostrar que la diferencia *f(x) - f(a)* tiende a 0

   Esta diferencia se puede escribir como:

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.(x-a) \qquad cuando\ x \neq a$$

$$\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\lim_{x \to a}(x-a) = f'(a).0 = 0$$

$$luego: \lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = 0$$

$$Además\ se\ cumple:$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}[f(a) + f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} f(a) + \lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = f(a) + 0 = f(a)$$

$$\boxed{luego: \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \ \to f(x) \quad es\ continua\ en\ x = a}$$

<u>La expresión recíproca es falsa.</u>

<u>Existen funciones que son continuas en un punto y no son derivables en ese punto.</u>

<u>Ejemplos:</u>

$$f(x) = |x| \quad \rightarrow \quad |x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x\ si\ x < 0 \end{cases} \quad es\ continua\ en\ x = 0 \quad \exists f(0) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \to 0} |x| = f(0) = 0$$

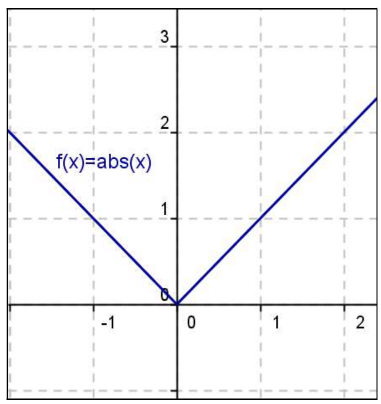
$$f_-'(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$f_+'(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1$$

Las derivadas laterales son valores diferentes; luego ***f(x)*** **= |*x*| no es derivable en x = 0**

(Las derivadas laterales pueden calcularse también aplicando las reglas de derivación)

Geométricamente se verifica que la gráfica de esta función no tiene recta tangente en el punto **(0;0)**



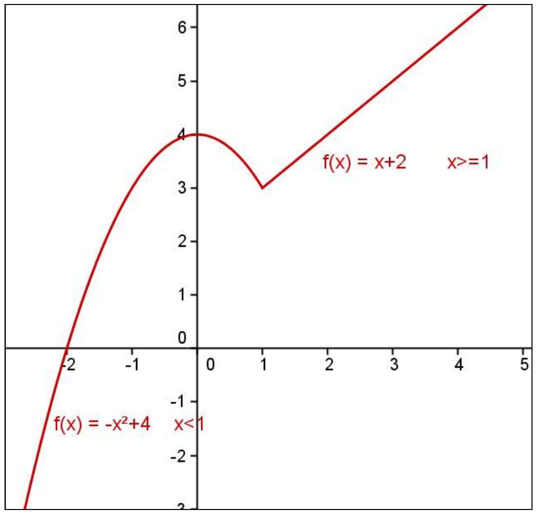
$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & si\ x \geq 1 \\ -x^2 + 4\ si\ x < 1 \end{cases} \quad es\ continua\ en\ x = 1 \quad \exists f(1) = 3 \quad \wedge \quad \lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

$$f_-'(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{-x^2 + 4 - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{(1 - x).(1 + x)}{x - 1} = -2$$

$$f_+'(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 0+} \frac{x + 2 - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

Las derivadas laterales son valores diferentes; luego ***f(x)*** **no es derivable en x =1**

Geométricamente se verifica que la gráfica de esta función no tiene recta tangente en el punto **(1;3)**

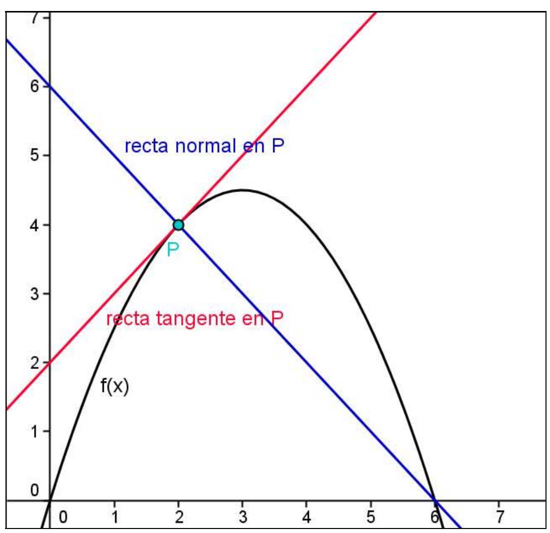


Ecuaciones de las rectas tangente y normal a una curva en un punto.

La ecuación de una recta de pendiente ***m*** que pasa por un punto **P** de coordenadas **(x_0;y_0)** es:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=m \qquad o \qquad y-y_0=m.(x-x_0) \qquad o \qquad y=m.(x-x_0)+y_0 \quad ec.\,\text{expl}\acute{\imath}cita$$

Dada una función *f(x)* derivable se desea determinar la ecuación de la recta tangente a la curva en **P**: **(x_0;y_0)**



La pendiente m de la recta tangente a la curva en P está dada por la derivada de la función *f(x)* en **x_0:** $\boxed{m=f'(x_0)}$

Entonces la **ecuación de la recta tangente a la curva en P** es:

$$\boxed{\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x_0) \quad \rightarrow \quad y=f'(x_0).(x-x_0)+y_0 \qquad ec.\ explícita\ de\ la\ recta\ tangente}$$

Se llama **recta normal a la curva** en P, a la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

La pendiente de la normal en P es $\boxed{n=-\dfrac{1}{f'(x_0)}}$ por ser la normal perpendicular a la recta tangente.

Entonces la **ecuación de la recta normal a la curva en P** es:

$$\boxed{\frac{y-y_0}{x-x_0}=-\frac{1}{f'(x_0)} \quad \rightarrow \quad y=-\frac{1}{f'(x_0)}.(x-x_0)+y_0 \qquad ec.\ explícita\ de\ la\ recta\ normal}$$

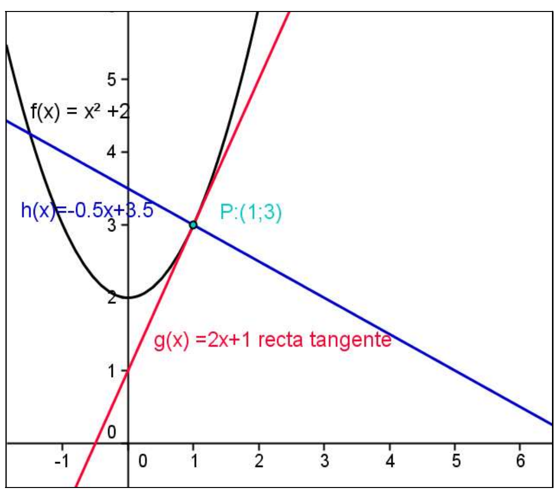
Ejemplo:

Ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva de la función: *f(x)* = x² +2 en P: (1;3)

$$f'(x)=2x \rightarrow f'(1)=2$$

$$Ec.\ de\ la\ recta\ tangente: y=2.(x-1)+3 \rightarrow y=2x+1$$

$$Ec.\ de\ la\ recta\ normal: y=-\frac{1}{2}(x-1)+3 \rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$



Derivadas de funciones implícitas

La expresión ***y = f(x)*** es una ecuación escrita en forma explícita.

Ejemplos: $y = x^2 +1$ $\quad y = 2^x$ $\quad y = 1/x$ $\quad y = 4x-5$

Estas funciones pueden expresarse en forma implícita:

$y - x^2 - 1 = 0 \quad y - 2 = 0 \quad x.y = 1 \quad 4x - y - 5 = 0$

En estos casos para calcular las derivadas correspondientes se las expresa en forma explícita y se aplican las reglas de derivación.

En algunas funciones no es posible despejar la variable dependiente **y**; en estos casos se aplica la **derivación implícita.**

Ejemplo: $\mathbf{x^2 - 2y^3 + xy = -1}$

Es un procedimiento que presupone que **y** es función derivable de **x**. La derivación se realiza respecto de **x.**

En los términos en los que aparezca **y** deberá aplicarse la regla de la cadena, pues se supone que **y** está definida implícitamente como una función de **x**.

Para el ejemplo anterior la derivación es:

$$x^2 - 2y^3 + xy = 1 \quad \textit{derivar los términos aplicando las reglas de derivación}$$

$$2x - 6y.y' + y + xy' = 0 \quad \textit{seleccionar los términos con } y' \textit{ en un miembro}$$

$$-6yy' + xy' = -2x - y \quad \textit{extraer factor común } y'$$

$$y'(x - 6y) = -2x - y \quad \textit{despejar } y'$$

$$y' = \frac{-2x - y}{x - 6y} \rightarrow y' = \frac{2x + y}{6y - x}$$

Puede calcularse el valor de la derivada en cualquier punto de la curva.

Por ejemplo: en el punto (0;1) la derivada vale 1/6

Derivadas sucesivas.

Además de la derivada primera de una función, es posible calcular las derivadas sucesivas, derivadas segunda, tercera, cuarta etc.

La derivada segunda es la derivada de la derivada primera; la tercera es la derivada de la segunda etc.

Notaciones de derivadas sucesivas:

Lagrange: $f'(x), f''(x), f'''(x)... \quad o \quad y', y'', y'''...$

Cauchy: $Df, D^2 f, D^3 f, ...$

Leibnitz: $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}, ...$

Newton: $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}, ...$

Observaciones:

Si ***f(x)*** es una función polinómica de grado ***n***, la derivada número ***n+1*** se anula

Ejemplo:

$$y = x^3 - 2x^2 + 5 \quad \textit{función polinómica de grado } 3$$
$$y' = 3x^2 - 4x$$
$$y'' = 6x - 4$$
$$y''' = 6$$
$$y^{iv} = 0 \qquad \textit{la derivada 4ta se anula}$$

Otras funciones no se anulan en ninguna derivada sucesiva.

Ejemplo: funciones logarítmicas, exponenciales, trigonométricas.

Diferencial de una función.

Sea $y = f(x)$ una función derivable en un campo A se cumple:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Entonces: $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \varepsilon \quad siendo \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0$

$$\varepsilon \text{ es un infinitésimo con } \Delta x \text{ y es función de } \Delta x$$
$$luego \quad \Delta y = (f'(x) + \varepsilon).\Delta x = f'(x).\Delta x + \varepsilon.\Delta x = f'(x).\Delta x + \alpha$$
$$\alpha \text{ es un infinitésimo de orden superior con respecto a } \Delta x$$

Se expresó a Δ**y** como la suma de una parte principal $f'(x).\Delta x$ (la cual si $f'(x) \neq 0$ tiene el mismo orden que Δ**x**) y un infinitésimo de orden superior α.

La parte principal se llama **diferencial de *f*** o ***dy***. Por lo tanto:

La diferencial de una función *f(x)* es el producto de la derivada de la función por el incremento de la variable independiente.

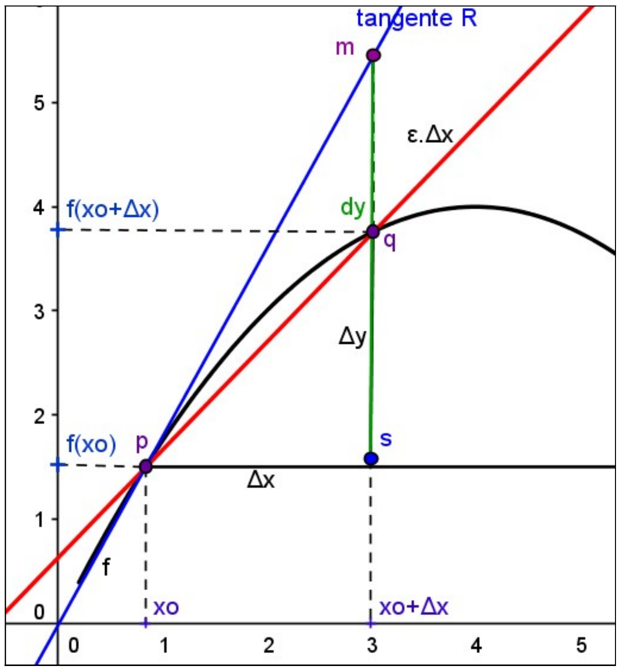
En particular si la función ***f(x)*** es la variable independiente ***x***: $dx = 1.\Delta x = \Delta x$

Por lo tanto:

$$\boxed{dy = df = f'(x).dx \quad \to f'(x) = \frac{dy}{dx}}$$

Interpretación geométrica.

Sea ***y = f(x)*** una función derivable en [a,b]; **p** un punto de la curva de abscisa **x**; **R** la recta tangente a al curva en **p** y **S** la recta secante que tiende a **R** cuando **q** tiende a **p.**



$$dy = f'(x).\Delta x$$

$$dy = tg\alpha.\Delta x = \frac{\overline{ms}}{\overline{ps}}.\overline{ps} = \overline{ms} \rightarrow dy = \overline{ms}$$

y $\overline{mq}$ *es el valor absoluto de la diferencia entre dy y* Δy*. Segmento comprendido entre la curva y la recta* tan *gente*

En el gráfico anterior puede observarse que**:** $dy > \Delta y$ pues la curva presenta concavidad hacia abajo. Si la curva es cóncava hacia arriba se observará: $dy < \Delta y$

Ejemplo:

Sea $f(x)= x^2+2$

$dy = 2x.dx$

En $x_0 =2$ *y* $\Delta x = 0,1$ *resulta:*

$dy= 2.2.0,1=0,4$ *y* $\Delta y = f(x_0+ \Delta x)- f(x_0) = (4,41+2) - 6 = 0,41$

BIBLIOGRAFÍA

Larson/Hostetler/Edwards. (2006), *Cálculo* I. Mc Graw-Hill Interamericana. 8va Edición. Disponible en la biblioteca de la UNNOBA

Apostol, T. (2007), *Calculus I, Calculo con funciones de una variable, con una introducción al Algebra Lineal,* Ed. REVERTE. Disponible en la biblioteca de la UNNOBA

Stewart, J. (2001), *Cálculo de una Variable trascendentes tempranas*, International Thomson editores 4ta Edición. Disponible en la biblioteca de la UNNOBA

Stewart, J. (2010), *Cálculo de una Variable conceptos y contextos.* México. Cengage learning. 4ta. Edición. Disponible en la biblioteca de la UNNOBA

Leithold, L. (1999), *El Cálculo,* Volumen I, Oxford University Press. Disponible en la biblioteca de la UNNOBA