Métodos numéricos **Profesor:** Eisinhower Rincón Vargas
Trabajo 1
Raíces de ecuaciones y sistemas lineales y no lineales
27/02/2020
Entrega: 13/03/2020

1. Introducción

La presente guía sugiere las orientaciones a tener en cuenta para la elaboración del **Trabajo 1** correspondientes a los temas de **Raíces de ecuaciones y sistemas lineales y no lineales**. Leer detenidamente cada una de las instrucciones.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo general

- Desarrollar e implementar los métodos de solución numérica para ecuaciones no lineales y sistemas de ecuaciones lineales.

1.1.2. Objetivos específicos

- Encontrar la solución de ecuaciones no lineales de una variable mediante métodos cerrados y abiertos.
- Encontrar la solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante métodos directos e iterativos.
- Escribir código en **Matlab/Octave o Pyhton** para encontrar la solución a los problemas propuestos.

1.2. Condiciones de entrega

- Conformar grupos de máximo dos (2) estudiantes. A través de la plataforma **Moodle** se conformarán los grupos de trabajo.
- Los grupos quedarán etiquetados en el orden que se conformen.
- Se debe entregar un informe con el desarrollo de cada uno de los problemas propuestos. No hay límite de páginas.
- El informe debe ser auto-contenido, por lo tanto todos los procedimientos y formulaciones deben quedar consignados allí.
- **IMPORTANTE:** Hacer uso del editor de ecuaciones de Word o LaTeX para entregar el informe. No se aceptan informes físicos ni escaneados hechos a mano.
- Cada grupo debe entregar un archivo comprimido nombrado como ***GrupoX__Trabajo 1*** con lo siguiente:
  - El informe en formato PDF nombrado únicamente como **Trabajo 1.pdf**.
  - En el informe deben quedar consignados los nombres y documentos de identidad de los integrantes de cada grupo.
  - Archivos *.txt*, *.py* o *.m* con la implementación computacional individual de cada uno de los métodos.

- Todos los códigos que se escriban deben ser estructurados de forma **modular** y deben estar nombrados de acuerdo con la función que realicen. *Se sugiere llevar un orden numerado.*
- Un solo código con la implementación individual para cada método y que reciba los mismos argumentos de entrada. Esto es, la implementación computacional del método de la Bisección (por ejemplo) debe funcionar igual para cualquier numeral.
- **NO** está permitido el uso de hojas de cálculo para la realización de los procedimientos.

- El trabajo debe subirse a la plataforma de **Moodle** en el enlace indicado para la Tarea 1.
- La fecha de entrega es: **13/03/2020** a la media noche. No se aceptan trabajos enviados posterior a dicha fecha y hora.
- Cualquier intento de copia o fraude será penado con la nota mínima (0.0).
- En caso de tener problemas con la plataforma, enviar el trabajo al correo `eisinhower.rincon@udea.edu.co` con el Asunto **Métodos2020 – Trabajo 1**

---

2. Problemas

En cada uno de los casos, a no ser que se diga lo contrario; realizar una implementación computacional del método pedido y presentar gráficamente el problema.

2.1. Métodos cerrados (20 %)

1. (20 %) Usando los métodos de la bisección y la regla falsa usando una $TOL = 10^{-5}$, determine:
   (a) (50 %) Las raíces máxima y mínima de $f(x) = -25182x - 90x^2 + 44x^3 - 8x^4 + 0.7x^5$
   (b) (50 %) La raíz real de $x^2|\cos(\sqrt{x})| = 5$

   Analice los resulados

2. (30 %) Como se muestra en la figura 1, la velocidad del agua, v (m/s) descargada por un tanque de forma cilindrica a través de un tubo largo está dada por:

$$v = \sqrt{2gH}\tanh\left(\sqrt{\frac{2gH}{2L}}t\right)$$

   donde $g = 9.81$ m/s^2, H es la cabeza inicial (m), L es la longitud del tubo (m) y t es el tiempo transcurrido (s). Escriba un código en **Matlab/Octave o Pyhton** que:
   (a) (50 %) Utilice el método de la bisección con las semillas $a = 0$ y $b = 4m$ para determinar la cabeza inicial requerida para alcanzar una velocidad de salida de $v = 5$m/s en $t = 2.5$s para un tubo de 4m de largo. Use $tol = 0.0000001$
   (b) (50 %) Repita el procedimiento anterior usando el método de la regla falsa. Analice los resultados

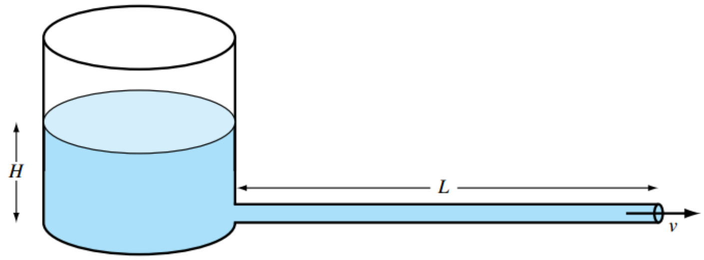

Figura 1: Tanque cilíndrico con tubo de salida largo

3. (20 %) La figura 2a muestra una viga uniforme sujeta a una carga distribuida que incrementa linealmente con la distancia. La ecuación de la curva elástica resultante en la figura 2b es:

$$y = \frac{\omega_0}{120EIL}(-x^5 + 2L^2x^3 - L^4x)$$

donde $L = 600\text{cm}$, $E = 50000\text{kN/cm}^2$, $I = 30000\text{cm}^4$ y $\omega_0 = 2.5$ kN/cm y $TOL = 10^{-6}$

(a) (75 %) Use el método de la bisección para determinar el punto de máxima deflexión.

(b) (15 %) Determine el valor de la deflexión máxima.

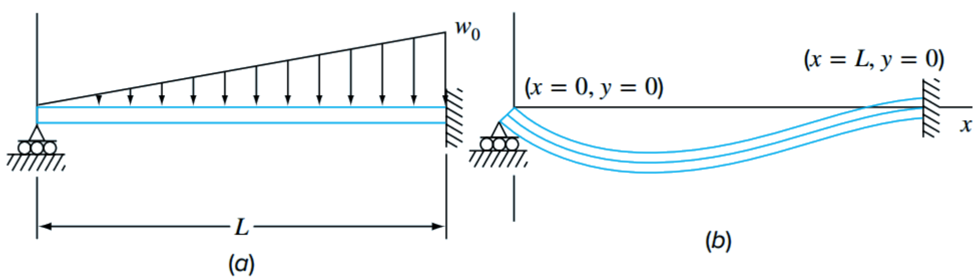

Figura 2: Viga deflactada por carga distribuida

4. (30 %) La resistividad ρ del silicio dopado está basada en la carga q sobre el electrón, la densidad n del electrón y la movilidad del electrón μ. La densidad el electrón es dada en términos de la densidad dopada N y la densidad intrínseca del portador n_i. La movilidad del electrón es descrita por la temperatura T, la temperatura de referencia T_0 y la movilidad de referencia μ_0. Las ecuaciones requeridas para calcular la resistividad son:

$$\rho = \frac{1}{qn\mu}$$

donde,

$$n = \frac{1}{2}\left(N + \sqrt{N^2 + 4n_i^2}\right) \quad \text{y} \quad \mu = \mu_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{-2.42}$$

Determine N dado $T_0 = 300K$, $T = 1000K$, $\mu_0 = 1360cm^2(Vs)^{-1}$, $q = 1.7 \times 10^{-19}C$, $n_i = 6.21 \times 10^9cm^{-3}$ y un deseado $\rho = 6.5 \times 10^6 Vscm/C$. Suponga valores iniciales de $N = 0$ y $N = 2.5 \times 10^{10}$ con $TOL = 10^{-6}$

(a) (50 %) Utilice el método de la bisección

(b) (50 %) Utilice el método de la regla falsa y compare resultados

2.2. Métodos abiertos (20 %)

1. (25 %) Para los ejercicios, escriba un código en **Matlab/Octave o Pyhton** que grafique en el intervalo pedido y que aplique la técnica SOR automáticamente. En todos los casos use $tol = 10^{-5}$
   (a) (33.3 %) Escriba la ecuación $x^3 + 3x - 6 = 0$ de 4 formas distintas y aplique la técnica SOR para determinar la raíz existente en el intervalo $[1, 2]$
   (b) (33.3 %) Escriba la ecuación $10e^{-x} \sin(x) - 1 = 0$ de 3 formas distintas y encuentre la solución en el intervalo $[0, 1]$
   (c) (33.3 %) Escriba la ecuación $\tan(2 - x) - x = 0$ de 3 formas distintas y encuentre la raíz en el intervalo $[1.1, 5]$

2. (25 %) Una catenaria es un cable que está colgado entre dos puntos que no están en la misma línea vertical. Como se observa en la figura 3a, este no está sujeto a otra carga que su mismo peso.

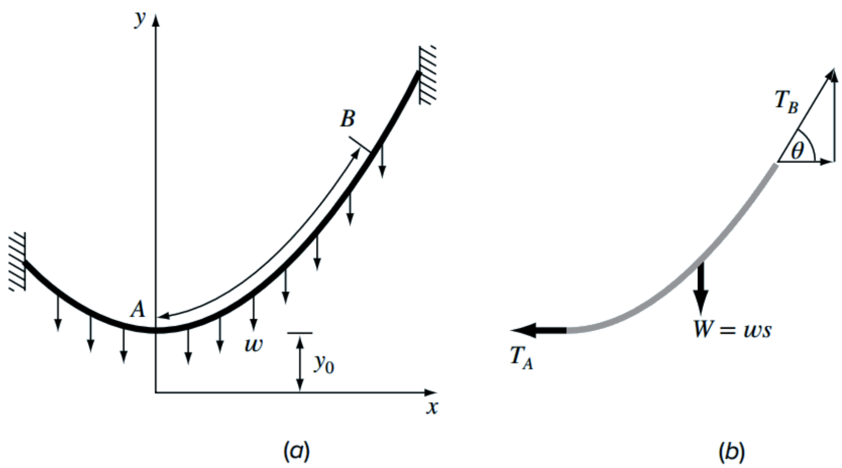

Figura 3: Esquema de catenaria y diagrama de cuerpo libre

Además, el peso actúa como una carga uniforme y distribuida por unidad de longitud a lo largo del cable ω (N/m). Un diagrama de cuerpo libre para el cable se ve en la figura 3b, donde T_A y T_B son las fuerzas de tensión al final. Basado en un balance de fuerzas horizontal y vertical, se puede derivar el siguiente modelo diferencial de la situación:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega}{T_A}\sqrt{1 + \frac{dy}{dx}}$$

Solucionando esta ecuación se obtiene que la altura del cable en función de la distancia es:

$$y = \frac{T_A}{\omega}\cosh\left(\frac{\omega}{T_A}x\right) + y_0 - \frac{T_A}{\omega}$$

   (a) (50 %) Utilice el método de Newton-Raphson para calcular el valor del parámetro T_A cuando $\omega = 10$ y $y_0 = 5$. Suponga que el cable tiene una altura de 15m y una distancia de 50m con $TOL = 10^{-6}$
   (b) (50 %) Repita el procedimiento anterior con el método de la secante y analice los resultados.

3. (25 %) La ecuación de Manning se puede escribir para un canal rectangular de la siguiente forma:

$$Q = \frac{\sqrt{S}(BH)^{5/3}}{n(B + 2H)^{2/3}}$$

donde Q es el caudal en m^3/s, S es la pendiente en m/m, H es la profundidad del canal en m y n es el coeficiente de rugosidad de Manning. Plos valores de $Q = 5$, $S = 0.0002$, $B = 20$ y $n = 0.03$:

(a) (50 %) Desarrolle un esquema de iteración de punto fijo para encontrar H hasta que $tol < 0.05\,\%$

(b) (50 %) Repita el procedimiento anterior con el método de la secante y el de Newton. Analice los resultados.

4. (25 %) Describir el movimiento de fluidos a través de tuberías es una tarea muy relevante en diferentes área de ingeniería. Aplicaciones típicas de este problema incluyen sistemas de distribución de agua o sistemas de refrigeración. En la naturaleza, procesos como el flujo de nutrientes en las plantas o el flujo de sangre al interior de las venas se pueden modelar usando esta aproximación. La resistencia a fluir en tales conductos se puede parametrizar mediante un número adimensional llamado *factor de fricción*. Para flujo turbulento, la ecuación de Colebrook sugiere que:

$$0 = \frac{1}{\sqrt{f}} + 2.0 \log\left(\frac{\epsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}}\right)$$

donde ϵ es la rugosidad (m), D el diámetro de la tubería (m) y Re es el número de Reynolds que se calcula como:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

donde ρ es la densidad del fluído ($\mathrm{kg/m^3}$), V es la velocidad (m/s) y μ es la viscosidad dinámica ($\mathrm{N \cdot s/m^2}$). Se dice que el flujo es Turbulento si $Re > 4000$.
Usando los valores de $\rho = 1.23kg/m^3$, $\mu = 1.79 \times 10^{-5} N \cdot s/m^2, D = 0.005m, V = 40m/s$, $\epsilon = 0.0015mm$ y $TOL = 10^{-5}$, determine el factor de fricción f mediante:

(a) (20 %) El método de Newton - Raphson

(b) (20 %) El método de la secante

(c) (30 %) Un esquema de iteración de punto fijo.

(d) (30 %) Compare y analice los resultados obtenidos con el factor f calculado mediante la aproximación explícita de Swamee - Jain dada por:

$$f = \frac{1.325}{\left[\ln\left(\frac{\epsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}}\right)\right]^2}$$

2.3. Eliminación Gaussiana (20 %)

1. (10 %) Cinco reactores conectados mediante tubos se muestran en la figra 4

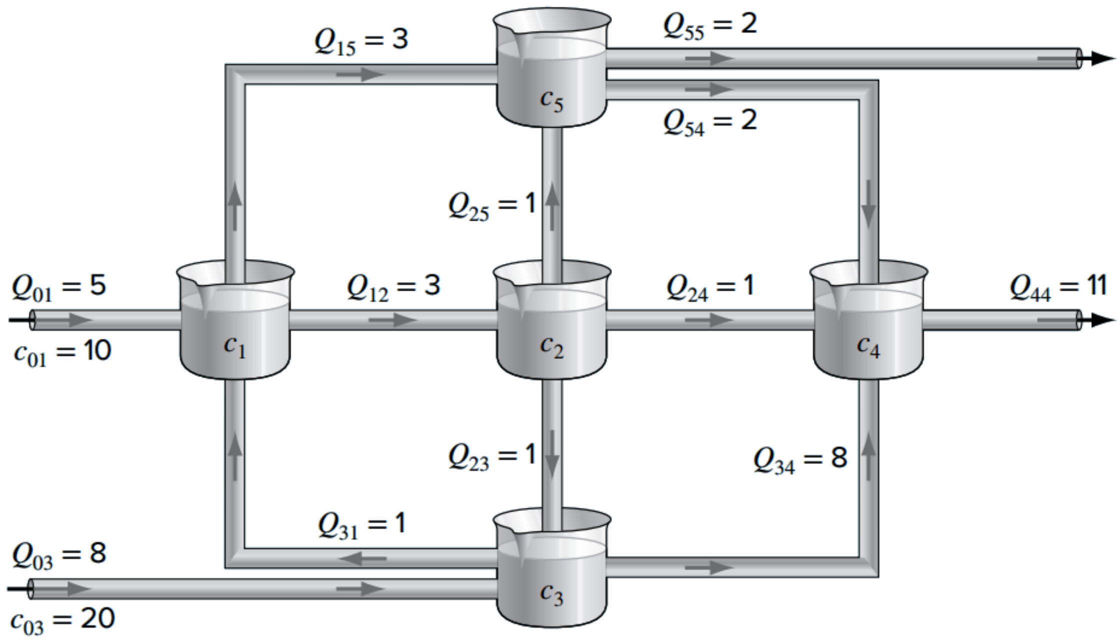

Figura 4: Sistema de reactores interconectados

El flujo másico a través de cada tubo se calcula como el producto del caudal (Q) y la concentración (c) de constituyente. En estado estacionario, el flujo másico de entrada y salida de cada reactor debe ser igual. Por ejemplo, para el primer reactor se tiene que el balance de masa se puede escribir como:

$$Q_{01}c_{01} + Q_{31}c_3 = Q_{15}c_1 + Q_{12}c_1$$

Escriba las ecuaciones para cada reactor y use las funciones de **Matlab/Octave o Pyhton** para resolver el sistema.

2. (90 %) Siguiendo el mismo principio que los reactores anteriores, plantee las ecuaciones de balance para los reactores mostrados en la figura 5 y solucionelas usando eliminación Gaussiana.

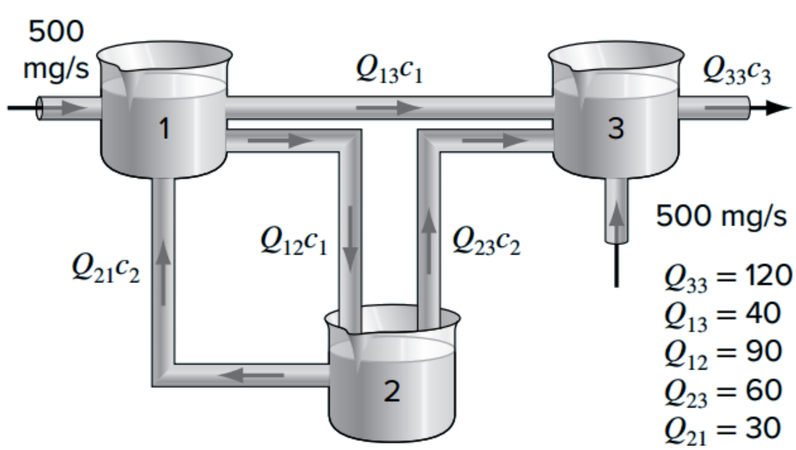

Figura 5: Tres reactores conectados por tuberias.

2.4. Descomposición matricial (20 %)

1. (50 %) Tome los reactores de la figura 5 y solucionelo usando factorización LU.

2. (50 %) La parte baja del río colorado consiste en una serie de cuatro almacenamientos conectados como se ilustra en la figura 6.

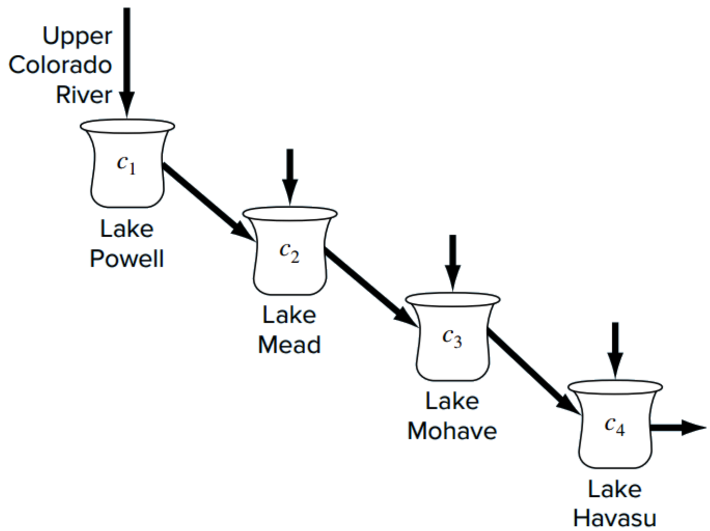

Figura 6: Parte baja del río colorado interconectada con varios lagos

Las ecuaciones de balance para cada reservorio, para unas condiciones específicas están dadas por el siguiente sistema tridiagonal:

$$\begin{bmatrix} 13.422 & 0 & 0 & 0 \\ -13.422 & 12.252 & 0 & 0 \\ 0 & -12.252 & 12.377 & 0 \\ 0 & 0 & -12.377 & 11.797 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 750.5 \\ 300 \\ 102 \\ 30 \end{bmatrix}$$

donde la parte derecha representa la carga de cloro descargada en cada lago y c_i la concentración en cada lago. Con esto en mente:

(a) (25 %) Solucione el sistema tridiagonal mediante un código implementado en **Matlab/Octave o Pyhton** para encontrar la concentración en cada lago.

(b) (25 %) ¿Cuánto se debe reducir la carga de cloro en el Lago Powell de modo quue la concentración en el Lago Havasu sea de 75?

2.5. Métodos iterativos (20 %)

1. (100 %) Solucione los problemas de las figuras 4 y 5 usando los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel. Compare y analice los resultados.