2.1. Regresión e interpolación (50 %)

1. (20 %) Los siguientes datos fueron obtenidos para determinar la relación entre la presión y temperatura de un volumen fijo de Nitrógeno (N). El volumen fijo es de $10m^3$

$T, ^\circ C$	-40	0	40	80	120	160
$p, N/m^2$	6900	8100	9350	10500	11700	12800

Emplee la ley de gases ideales, $pV = nRT$, donde p en N/m^2 es la presión, V el volumen en m^3, T en K para determinar la constante de gases R basado en los datos. Utilice $n = 10^3 g/28g/mol$

Atualmente o CODATA (2018) recomienda para o valor da constante R de um gás ideal, o seguinte valor:

$$R = 8,314\,462\,618\; J\; mol^{-1} K^{-1}$$

Se trabajó con los valores de temperatura en K.

$T, ^\circ K$	233.149999999999998	273.15	313.15	353.15	393.15	433.15

$\rho = \frac{nR}{V} T$ ecuación 1

La ecuación 1 es una ecuación lineal $y = mx + b$. Para obtener la recta se hace una regresión con los puntos datos, el resultado se presenta en la figura 1.

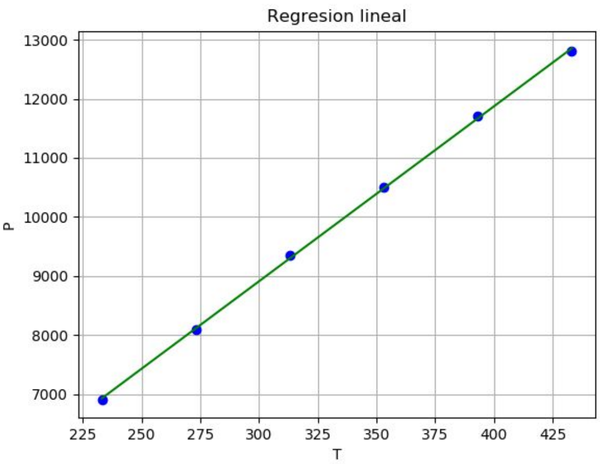

Figura 1: Regresión lineal

Entonces $R = \frac{m\,V}{n}$

Se encuentra la pendiente m de la regresión.

$$m = 29.60714285714302$$

Se multiplica por las constantes V, n y se encuentra que:

$R = 8.290000000000045\ J/(K * mol)$

2. (20 %) Se sabe que la caída de voltaje a través de un inductor sigue la ley de Faraday:

$$V_L = L\frac{di}{dt}$$

donde V_L es la cída de voltaje (en voltios), L es la inductancia (en henrys; $1H = 1V \cdot s/A$), e i es ña corriente (en amperes). Emplee los datos de la siguiente tabla para estimar L

$di/dt, A/s$	1	2	4	6	8	10
V_i, V	5.5	12.5	17.5	32	38	49

$V_L = L\frac{di}{dL}$ ecuación 2

La ecuación 2 con los datos suministrados en la tabla se puede modelar como una ecuación lineal $y = mx$, para hacer eso se aplica la regresión lineal, el resultado se presenta en la figura 2.

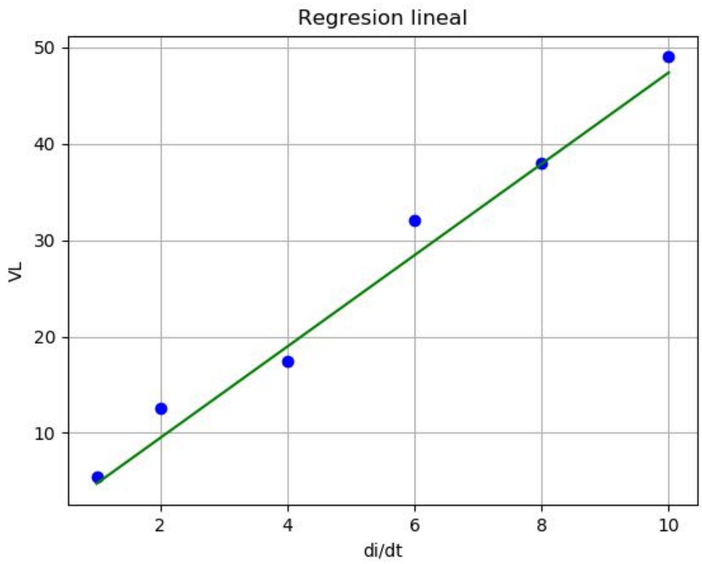

Figura 2: Regresión lineal

Entonces $L = m$

$L = 4.738356164383561$

3. (20 %) La viscosidad dinámica del agua $\mu(10^{-3}N \cdot s/m^2)$ se relaciona con la temperatura $T(°C)$ de la siguiente manera:

$T, ° C$	0	5	10	20	30	40
$\mu, N \cdot s/m^2$	1.787	1.519	1.307	1.002	0.7975	0.6529

(a) (10 %) Use interpolación para predecir μ con $T = 7.5°C$

Se utiliza el método de diferencias divididas y se encuentro el siguiente vector para la generación del el polinomio interpolador.

[6.52900000e-01, -1.44600000e-02, 2.99500000e-04, -6.76666667e-06, 1.39047619e-07 -4.40476190e-10]

Por el polinomio se define $P(x)$

$$P(x) = 6.52900000e-01 + -1.44600000e-02(x-1.787) + 2.99500000e-04\,(x-1.787)(x-1.519) + \\ -6.76666667e-06(x-1.787)(x-1.519)(x-1.307) + 1.39047619e-07(x-1.787)(x-1.519)(x-1.307) \\ (x-1.002) +- 4.40476190e-10\,(x-1.787)(x-1.519)(x-1.307)(x-0.7975)$$

La gráfica de los puntos de la tabla inicial y el polinomio se observan en la figura 3.

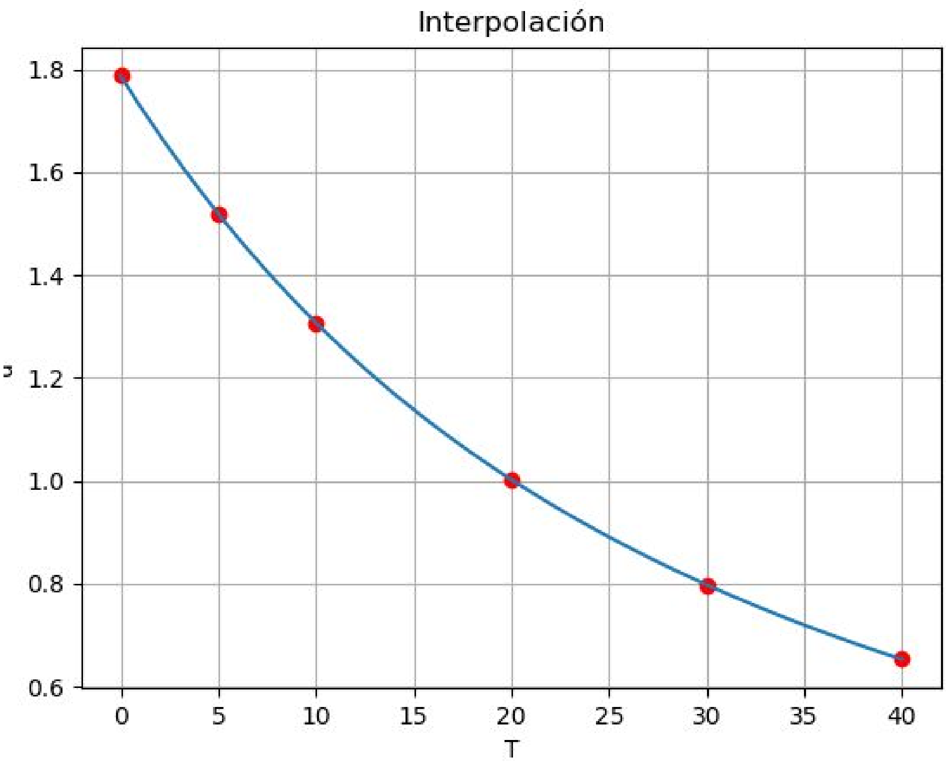

Figura 3: Interpolación

Se reemplaza la variable $T = 7.5$ en el polinomio $P(x)$

$P(7.5) = 1.4068632289341516$

(b) (10 %) Emplee regresión polinomial para ajustar una parábola a los datos a fin de hacer la misma predicción. Compare los resultados.

Se hace un regresión polinómica de grado 2.

$P(x) = ax^2 + bx + c$

Para los datos del problema se encuentro un vector que constituyen las contante a,b,c respectivamente.

[1.76724498e+00 -4.94933660e-02 5.48341661e-04]

$P(x) = 1.76724498e00x^2 - 4.94933660e - 02x + 5.48341661e - 04$

La grafica del polinomio y los datos iniciales se observan en la figura 4:

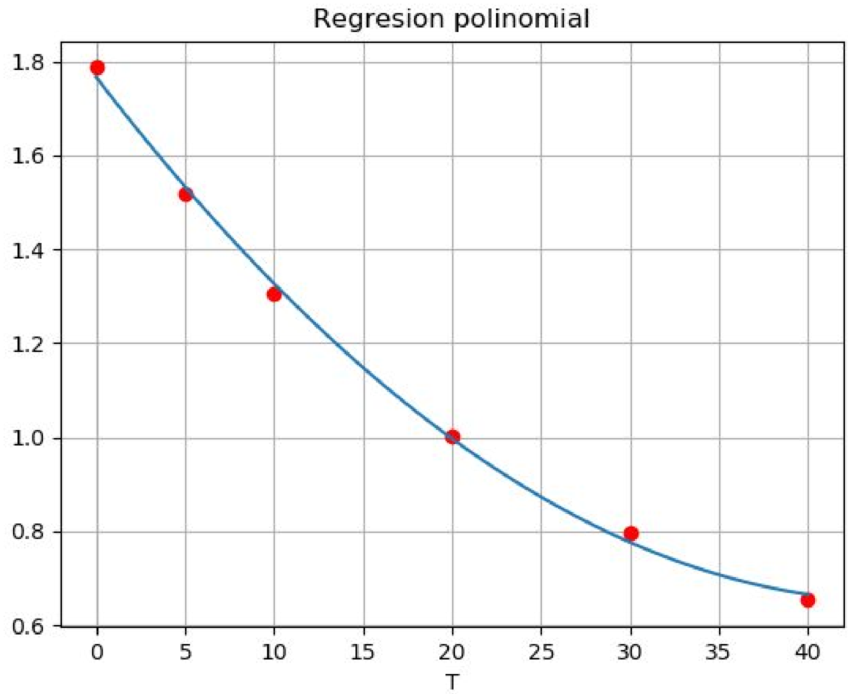

Figura 4: Regresión polinomial

$P(7.5) = 1.4268889576826982$

4. (20 %) La *Ley de Hooke*, que se cumple cuando un resorte no se estira más allá de cierto límite, significa que la extensión de este resorte y la fuerza que se le aplica están relacionadas linealmente. La proporcionalidad está parametrizada por la constante k del resorte. Un valor para dicho parámetro se establece de forma experimental con la colocación de pesos conocidos en el resorte y la medición de la compresión que resulta. Tales datos a parecen en la siguiente tabla: Si se grafican los datos,

x, m	0.10	0.17	0.27	0.35	0.39	0.42	0.43	0.44
$F, 10^4 N$	10	20	30	40	50	60	70	80

se puede observar que por encima de un peso de $40 \times 10^4 N$, la relación lineal entre la fuerza y el desplazamiento desaparece. Esta clase de comportamiento es común de lo que se denomina "resorte en deformación".

(a) (10 %) Emplee regresión lineal para determinar el valor de k para la parte lineal de este sistema.

Para la regresión lineal se tomó desde el valor 10 a el 40. Como se observa en la siguiente tabla

F	10	20	30	40
x	0.10	0.17	0.27	0.35

$F = kx$

Lo que cumple que sea una ecuación lineal $y = mx$

La constante k es igual a la pendiente m $(m = k)$

k es el valor de la pendiente 0.0085

(b) (10 %) Realice interpolación por segmentos en la parte no lineal y determine el desplazamiento para $F = 75 \times 10^4 N$.

Para la parte no lineal se trabaja con la siguiente tabla.

F	50	60	70	80
x	0.39	0.42	0.43	0.44

Se encuentro las constante a,b,c del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$

$constantes = [\ 1.11e-01\ \ 8.10e-03\ \ -5.00e-05]$

$P(x) = 1.11e-01x^2 + 8.10e-0x - 5.00e-05$

$P(75) = 0.437250000000002$

La gráfica de la figura 5 la aproximación de lineal y polinomial en los diferentes tramos del movimiento del resorte en deformación.

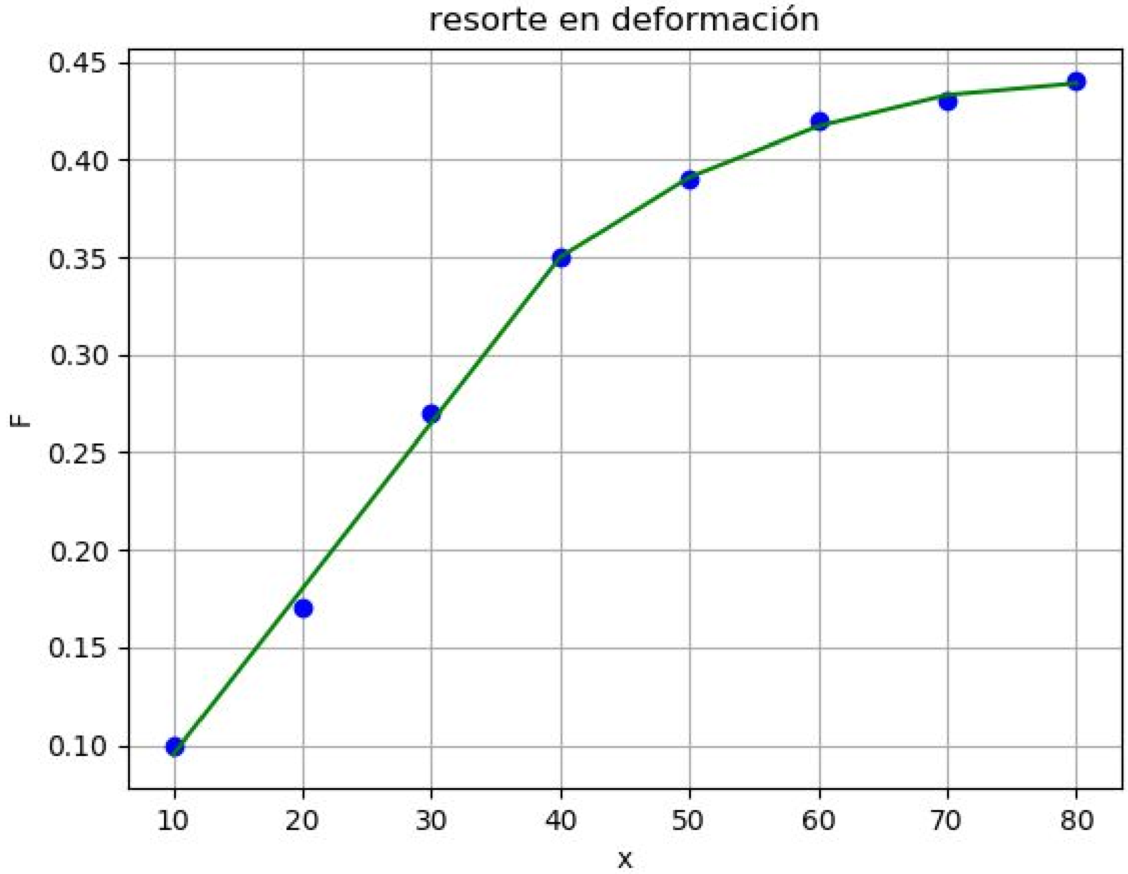

Figura 5: Resorte en deformación

5. (20 %) La ley de Ohm establece que la caída de voltaje V a través de un resistor ideal es linealmente proporcional a la corriente i que fluye a través del resistor, como $V = iR$, donde R es la resistencia. Sin embargo, los resistores reales no siempre obedecen la ley de Ohm. Suponga que usted lleva a cabo algunos experimentos muy precisos para medir la caída de voltaje y la corriente correspondiente para un resistor. Los resultados que se enlistan en la siguiente tabla, sugieren una relación curvilínea.

i	-2	-1	-0.5	0.5	1	2
V	-637	-96.5	-20.5	20.5	96.5	637

Debido al error en la medición, es común que la regresión sea el método preferido de ajuste de curvas para analizar dichos datos experimentales. Sin embargo, la suavidad de la relación, así como la precisión de los métodos experimentales, sugieren que quizá sería apropiada la interpolación.

(a) (10 %) Utilice interpolación de polinomios de Newton para ajustar los datos y calcular V para $i = 0.10$ ¿Cuál es el grado del polinomio que usó para generar los datos?

Se encuentra 4 constante en la interpolación de newton antes de llegar al 0

$v = [-637.0,\ 540.5,\ -259.0,\ 74.0,\ 0.0,\ 0.0]$

por lo tanto se trabajó con un polinomio de grado 3

Se obtuvo el polinomio

$P(x) \ =- 637.0 \ + 540.5 * (x + 2) \ - 259.0 * (x + 2) * (x1 + 1) \ + 74.0 * (x + 2) * (x + 1]) * (x)$

$P(0.1) = 2.3239999999998844$

La figura 6 describe la gráfica de la aproximación de los puntos con la interpolación de newton.

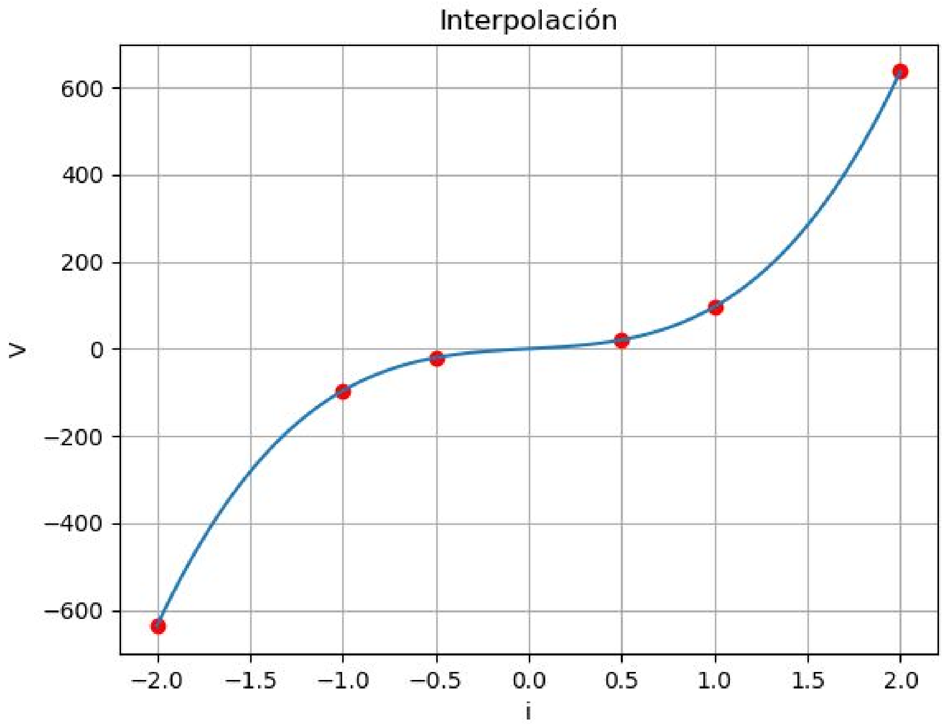

Figura 6: Interpolación de newton

(b) (10 %) Repita el procedimiento anterior usando regresión polinómica. ¿Qué polinomio se ajusta mejor?

Se hace una aproximación polinómica de grado 3 donde se encuentra el siguiente polinomio:

$P(x) \ = 7.40000000e + 01x^3 + 4.86534751e - 15x^2 + \ 2.25000000e + 01x - 4.55507918e - 15$

$P(0.1) = 2.323999999999996$

la gráfica que se observa en la figura 7

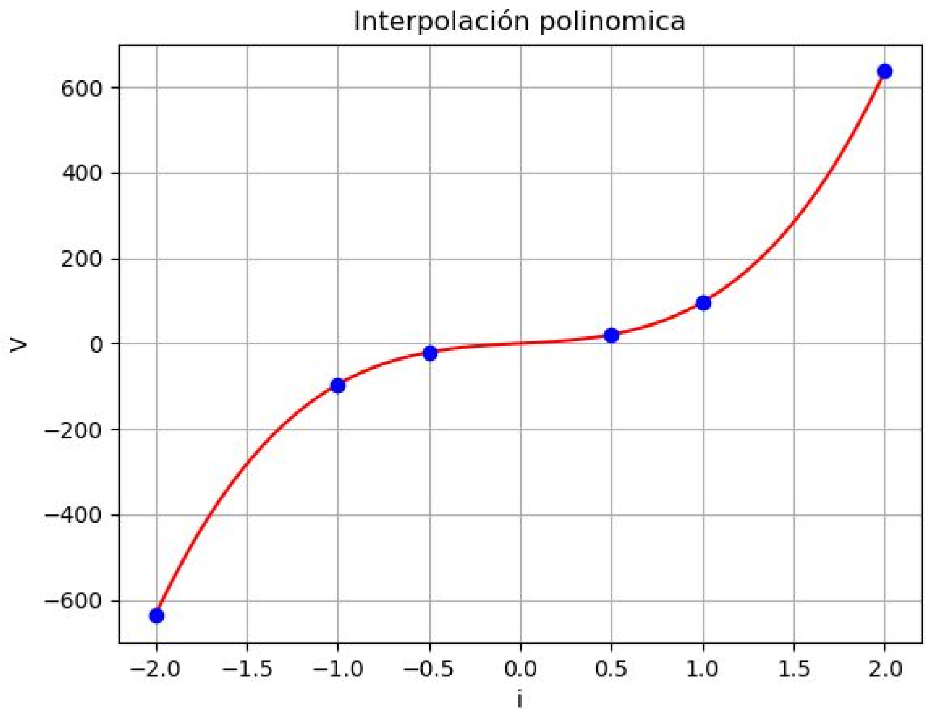

Figura 6 : Interpolación polinómica.

Ambas curvas se aproximan de igual forma a los puntos.

2.2. Diferenciación e integración (50 %)

1. (20 %) La función de distribución de probabilidad acumulada normal es una fórmula muy importante en el estudio de la estadística y está dada por:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2} dx$$

donde $x = (y - \overline{y})/s_y$ es llamada desviación estándar normalizada. Esta ecuación representa la probabilidad de que un evento dentro de un espacio muestral sea menor que x. Encuentre la probabilidad asociada al valor de $x = 1$. Para ello realice utilice la siguiente aproximación de la integral impropia:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-A} f(x)dx + \int_{-A}^{b} f(x)dx$$

donde A es un número negativo suficientemente grande para que la función comience a acercarse asintóticamente a cero por lo menos tan rápido como $1/x^2$. Implemente un código en **Matlab/Octave o Pyhton** del método del punto medio para solucionar la parte impropia e integración de Romberg para la segunda parte. en ambos casos con $n = 20$.

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{-2} e^{\frac{-x^2}{2}} dx + \int_{-2}^{1} e^{\frac{-x^2}{2}} dx\right)$$

Se toma la primera integral.

$$\int_{-\infty}^{-2} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \int_{\frac{-1}{2}}^{0} \frac{1}{t^2} e^{\frac{-1}{2t^2}} dt$$

Por integración de punto medio se obtiene:

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{0} \frac{1}{t^2} e^{\frac{-1}{2t^2}} dt = 0.4146764991385116$$

Se toma la segunda integral y se resuelve por el método de Romberg.

$$\int_{-2}^{1} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \ = \ 2.0519124050288178$$

$$N(x) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(0.4146764991385116 + \ 2.0519124050288178)$$

$$N(x) = 0.9840266023155576$$

La gráfica de la función se observa en la figura 7

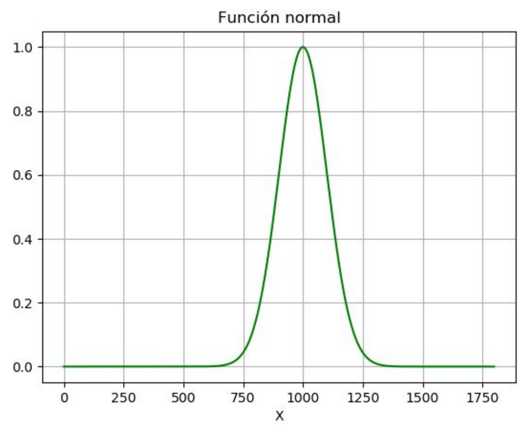

Figura 7: Función normal

2. (20 %) Las profundidades de un río H se miden a distancias espaciadas iguales a través de un canal como se muestra en la siguiente tabla:

x, m	0	2	4	6	8	10	12	14	16
H, m	0	1.9	2	2	2.4	2.6	2.25	1.12	0

El área de dicha sección transversal se determina por integración mediante la siguiente ecuación:

$$A_c = \int_0^x H(x)dx$$

Emplee integración de Romberg para llevar a cabo la integración.

Se muestra cada una de las salidas en las interacciones del método de Romberg.

0.00000000
19.20000000 25.60000000
26.60000000 29.06666667 29.29777778
28.54000000 29.18666667 29.19466667 29.19302998
28.54000000 28.54000000 28.49688889 28.48581305 28.48303965
28.54000000 28.54000000 28.54000000 28.54068430 28.54089948 28.54095604
28.54000000 28.54000000 28.54000000 28.54000000 28.53999732 28.53999643 28.53999620
28.54000000 28.54000000 28.54000000 28.54000000 28.54000000 28.54000000 28.54000000 28.54000000

El resultado de la integral es **28.54000000** u^2

La gráfica de la función se observa en la figura 8:

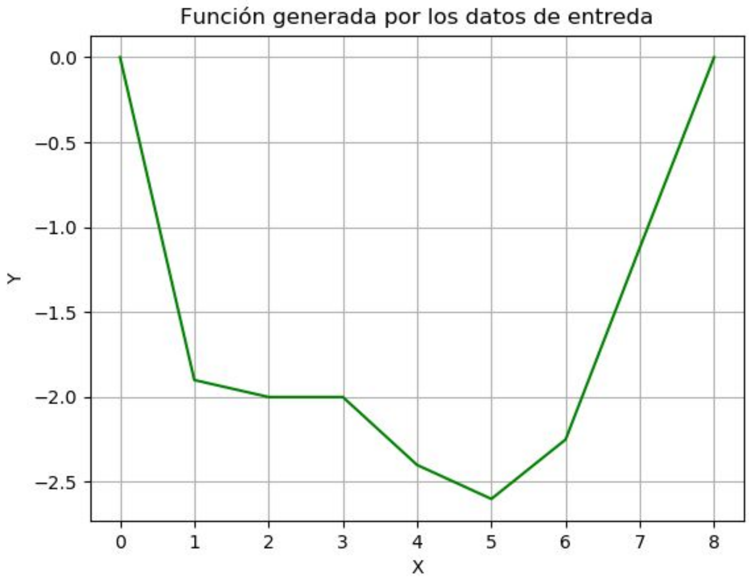

Figura 8: Función de la tabla en entrada.

3. (20 %) Es frecuente que las reacciones químicas sigan este modelo:

$$\frac{dc}{dt} = -kc^n$$

donde c es la concentración, t es el tiempo, k es la tasa de reacción y n el orden de dicha reacción. Es posible evaluar valores dados de c y dc/dt, k y n por medio de regresión lineal del logaritmo de la siguiente ecuación:

$$\ln\left(-\frac{dc}{dt}\right) = \ln k + n \ln c$$

Use este enfoque y los datos que siguen para estimar los valores de k y n usando las fórmulas de aproximación más precisas:

t	10	20	30	40	50	60
c	3.52	2.48	1.75	1.23	0.87	0.61

Se utilizó el valor de la m, b de la recta y =mx+b de la regresión, esta recta se observa en la figura 9.

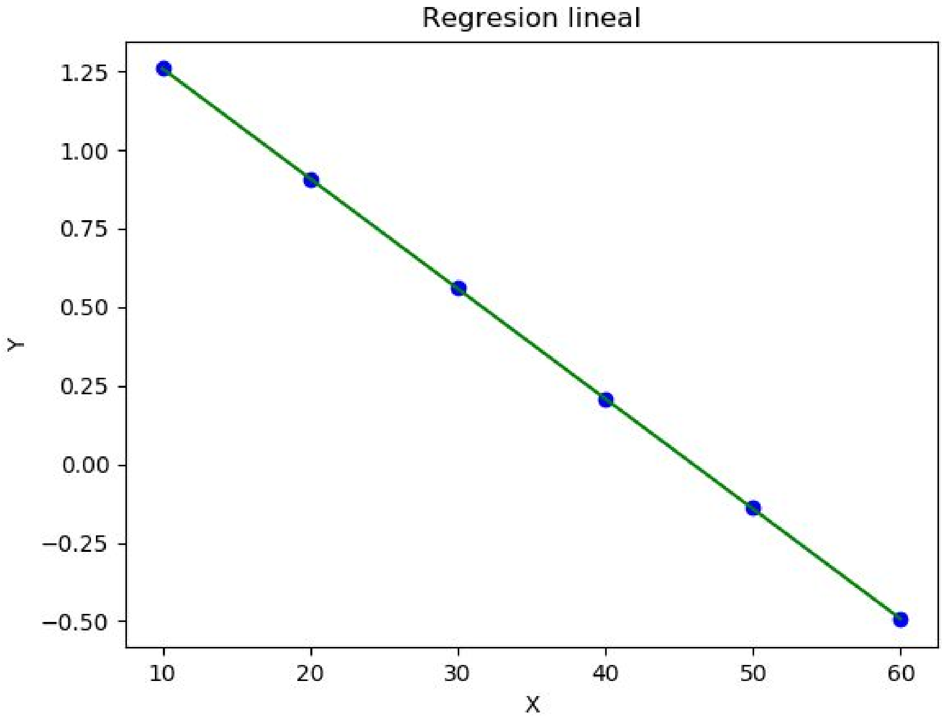

Figura 9: Regresión lineal

El valor de n es: -0.03502557159487492 y el valor de ln(k)= 1.6091935254803484

$ln(k) = 1.6091935254803484$

$k = e^{1.6091935254803484}$

$k = 4.998778214531535$

4. (20 %) Un flujo desarrollado por completo que pasa a través de un tubo de 40 cm de diámetro tiene el perfil de velocidad siguiente:

r, cm	0	2.5	5.0	7.5	10.0	12.5	15.0	17.5	20.0
$v, m/s$	0.914	0.890	0.847	0.795	0.719	0.543	0.427	0.204	0

Encuentre la tasa de flujo volumétrico, Q, con la relación $Q = \int_0^R 2\pi r v dr$, donde r es el eje radial del tubo, R es el radio del tubo y v es la velocidad. Resuelva el problema con dos enfoques diferentes:

(a) (10 %) Realice un ajuste polinomial de grado 2 e integrela de forma analítica.

Se obtuvo el siguiente polinomio de grado 2.

$v = (-6.93539091r^2 + 1.4136665505882284r + 0.005317673869110251)$

$$Q = \int_{0}^{0.2} (-6.935390906213385r^2 + 1.4136665505882284r + 0.005317673869110251)(2\pi r)dr$$

$$Q = 2\pi \int_{0}^{0.2} (-6.935390906213385r^3 + 1.4136665505882284r^2 + 0.005317673869110251r)dr$$

$$Q = 2\pi[(\frac{-6.935390906213385(0.2)^4}{4} + \frac{1.4136665505882284(0.2)^3}{3} + \frac{0.005317673869110251(0.2)^2}{2})$$
$$-(\frac{-6.935390906213385(0)^4}{4} + \frac{1.4136665505882284(0)^3}{3} + \frac{0.005317673869110251(0)^2}{2})$$
$$Q = 0.00692391$$

El gráfico de la regresión se observa en la figura 10

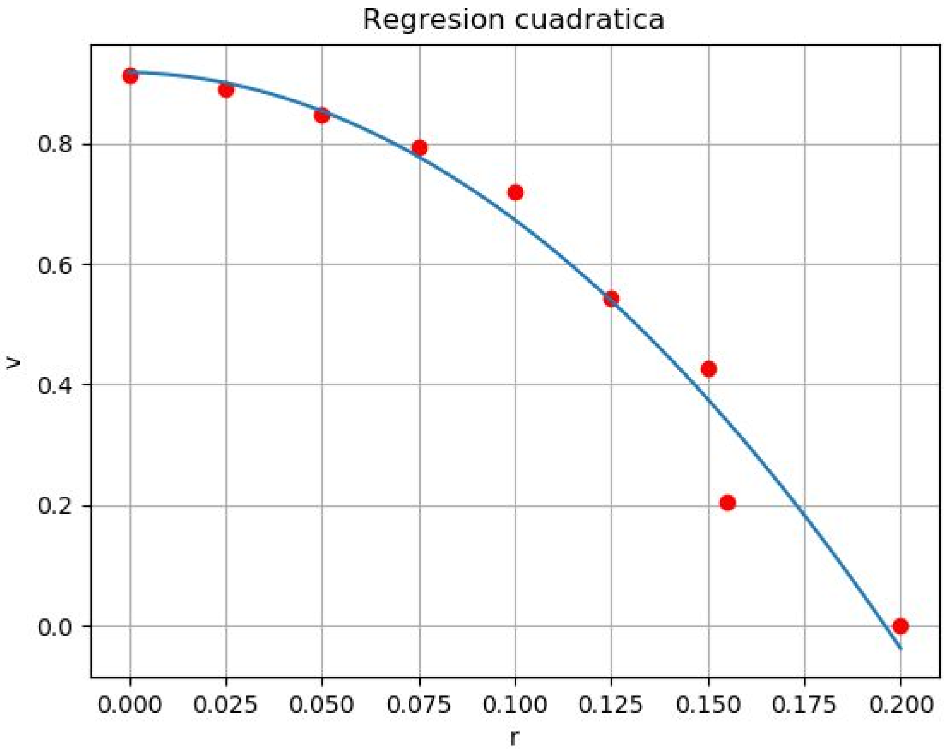

Figura 10: Regresión cuadrática

(b) (10 %) Utilice la regla compuesta de Simpson para evaluar la integral numéricamente. Compare ambos resultados.

Con el método se simpsons se obtiene:

Método de Simpson : 0.0036069333333333333

La gráfica del método del metodo de simpsons se observa en la figura 11 :

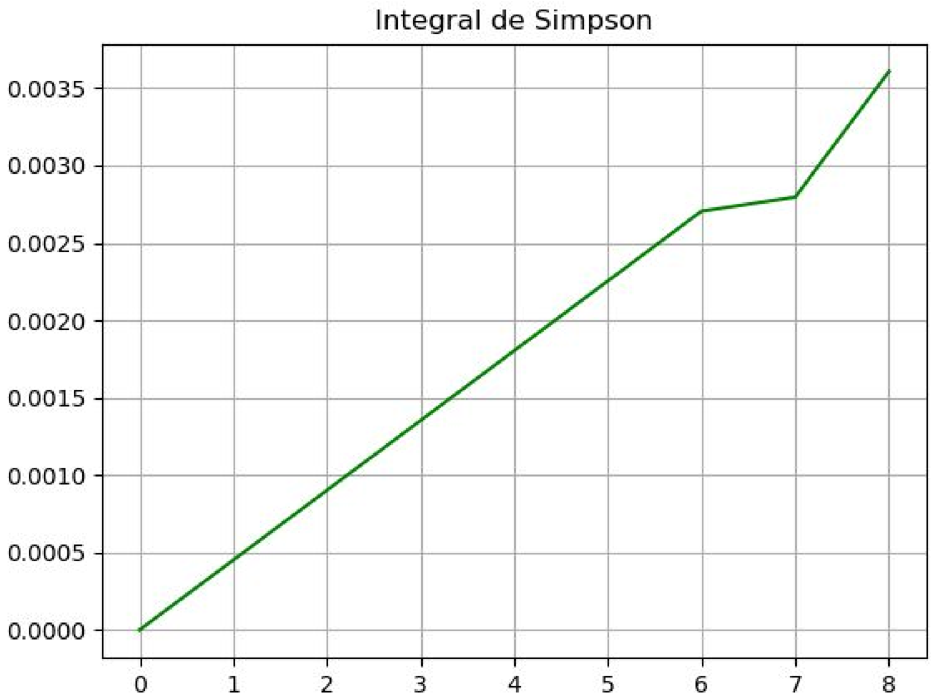

Figura 11: Método de simpson

5. (20 %) La tasa de enfriamiento de un cuerpo se expresa como:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

donde T es la temperatura del cuerpo (°C), T_a es la temperatura del medio circundante (°C) y k la constante de proporcionalidad (min^{-1}). Así, esta ecuación, (denominada *ley de Newton para el enfriamiento*) específica que la tasa de enfriamiento es proporcional a la diferencia de temperaturas del cuerpo y del medio circundante. Si una bola de metal calentada a 80° se sumerge en agua que se mantiene a $T_a = 20°C$ constante, la temperatura de la bola cambia así:

t, min	0	5	10	15	20	25
$T,°$	80	44.5	30.0	24.1	21.7	20.7

Utilice diferenciación numérica para determinar dT/dt en cada valor del tiempo. Grafique dT/dt contra $T - T_a$ y emplee regresión lineal para evaluar k. Emplee la fórmula de aproximación más precisa.

En la figura 12 se ilustra la gráfica pedida.

El valor de K es: -2.1188571428571428 min ^-1

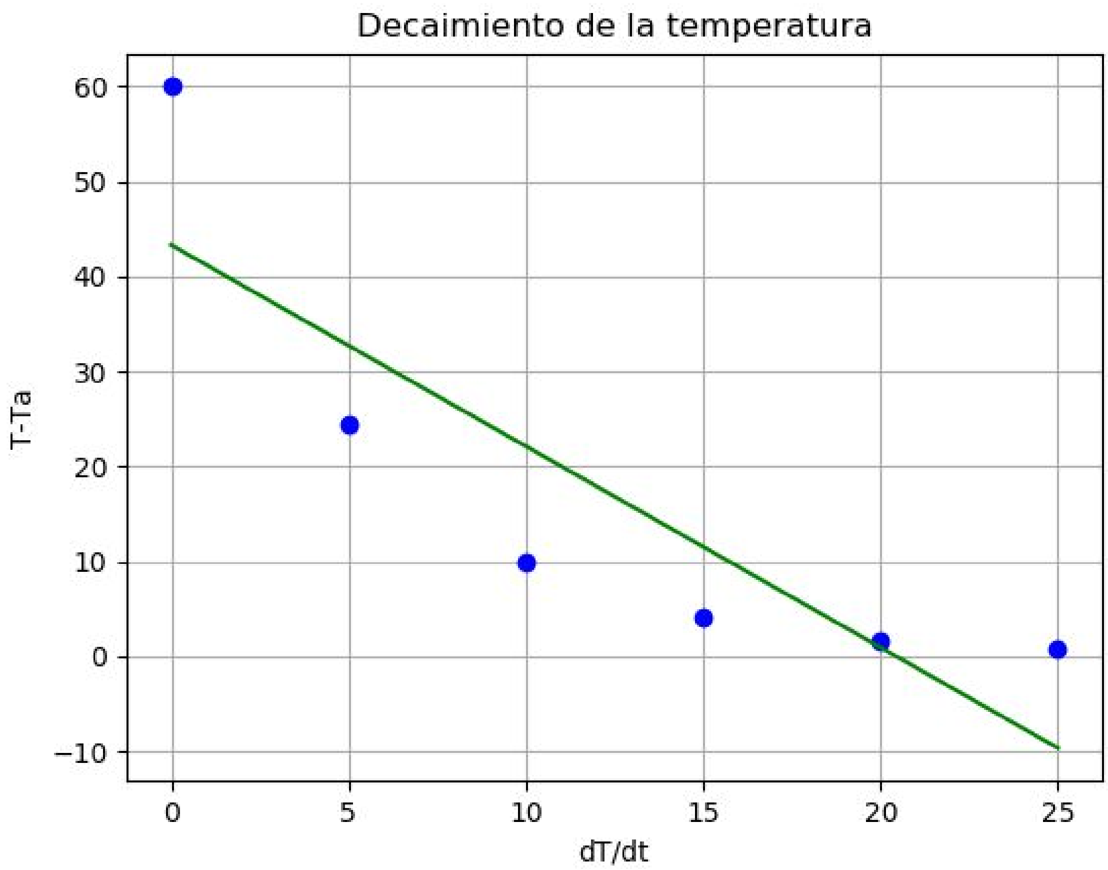

Figura 12: Decaimiento de la temperatura