Métodos numéricos **Profesor:** Eisinhower Rincón Va
Trabajo 2
Aproximación, interpolación, diferenciación e integración numérica
2020/03/31
Entrega: 2020/04/14

1. Introducción

La presente guía sugiere las orientaciones a tener en cuenta para la elaboración del **Trabajo 2** correspondientes a los temas de **Aproximación, interpolación, diferenciación e integración numérica**. Leer detenidamente cada una de las instrucciones.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo general

- Desarrollar e implementar los métodos de aproximación, integración y diferenciación numérica

1.1.2. Obejtivos específicos

- Realizar ajuste de curvas por métodos de regresión lineal.
- Realizar ajustes de curvas mediante métodos de interpolación polinómica e interpolación polinómica segmentaria.
- Desarrollar esquemas de diferenciación e integración numéricas.
- Desarrollar algoritmos modulares

1.2. Condiciones de entrega

- Conformar grupos de máximo dos (2) estudiantes. A través de la plataforma **Moodle** se conformarán los grupos de trabajo.
- Los grupos quedarán etiquetados en el orden que se conformen.
- Se debe entregar un informe con el desarrollo de cada uno de los problemas propuestos. No hay límite de páginas.
- El informe debe ser auto-contenido, por lo tanto todos los procedimientos y formulaciones deben quedar consignados allí.
- **IMPORTANTE:** Hacer uso del editor de ecuaciones de Word o LaTeX para entregar el informe. No se aceptan informes físicos ni escaneados hechos a mano.
- Cada grupo debe entregar un archivo comprimido nombrado como ***GrupoX__Trabajo 2*** con lo siguiente:
  - El informe en formato PDF nombrado únicamente como **Trabajo 2.pdf**.
  - En el informe deben quedar consignados los nombres y documentos de identidad de los integrantes de cada grupo.
  - Archivos *.txt*, *.py* o *.m* con la implementación computacional individual de cada uno de los métodos.

- Todos los códigos que se escriban deben ser estructurados de forma **modular** y deben estar nombrados de acuerdo con la función que realicen. *Se sugiere llevar un orden numerado.*
- Un solo código con la implementación individual para cada método y que reciba los mismos argumentos de entrada.
- **NO** está permitido el uso de hojas de cálculo para la realización de los procedimientos.

- El trabajo debe subirse a la plataforma de **Moodle** en el enlace indicado para la Tarea 1.
- La fecha de entrega es: **2020/04/14** a la media noche. No se aceptan trabajos enviados posterior a dicha fecha y hora.
- Cualquier intento de copia o fraude será penado con la nota mínima (0.0).
- En caso de tener problemas con la plataforma, enviar el trabajo al correo `eisinhower.rincon@udea.edu.co` con el Asunto **Métodos2019 – Trabajo 2**

---

2. Problemas

En cada uno de los casos, a no ser que se diga lo contrario; realizar una implementación computacional del método pedido y presentar gráficamente el problema.

2.1. Regresión e interpolación (50 %)

1. (20 %) Los siguientes datos fueron obtenidos para determinar la relación entre la presión y temperatura de un volumen fijo de Nitrógeno (N). El volumen fijo es de 10m^3

$T, ^\circ C$	-40	0	40	80	120	160
$p, N/m^2$	6900	8100	9350	10500	11700	12800

Emplee la ley de gases ideales, $pV = nRT$, donde p en N/m^2 es la presión, V el volumen en m^3, T en K para determinar la constante de gases R basado en los datos. Utilice $n = 10^3 g/28g/mol$

2. (20 %) Se sabe que la caída de voltaje a través de un inductor sigue la ley de Faraday:

$$V_L = L\frac{di}{dt}$$

donde V_L es la cída de voltaje (en voltios), L es la inductancia (en henrys; $1H = 1V \cdot s/A$), e i es ña corriente (en amperes). Emplee los datos de la siguiente tabla para estimar L

$di/dt, A/s$	1	2	4	6	8	10
V_i, V	5.5	12.5	17.5	32	38	49

3. (20 %) La viscosidad dinámica del agua $\mu(10^{-3} N \cdot s/m^2)$ se relaciona con la temperatura $T(^\circ C)$ de la siguiente manera:

$T, ^\circ C$	0	5	10	20	30	40
$\mu, N \cdot s/m^2$	1.787	1.519	1.307	1.002	0.7975	0.6529

(a) (10 %) Use interpolación para predecir μ con $T = 7.5°C$

(b) (10 %) Emplee regresión polinomial para ajustar una parábola a los datos a fin de hacer la misma predicción. Compare los resultados.

4. (20 %) La *Ley de Hooke*, que se cumple cuando un resorte no se estira más allá de cierto límite, significa que la extensión de este resorte y la fuerza que se le aplica están relacionadas linealmente. La proporcionalidad está parametrizada por la constante k del resorte. Un valor para dicho parámetro se establece de forma experimental con la colocación de pesos conocidos en el resorte y la medición de la compresión que resulta. Tales datos a parecen en la siguiente tabla: Si se grafican los datos,

x, m	0.10	0.17	0.27	0.35	0.39	0.42	0.43	0.44
$F, 10^4 N$	10	20	30	40	50	60	70	80

se puede observar que por encima de un peso de $40 \times 10^4 N$, la relación lineal entre la fuerza y el desplazamiento desaparece. Esta clase de comportamiento es común de lo que se denomina "resorte en deformación".

(a) (10 %) Emplee regresión lineal para determinar el valor de k para la parte lineal de este sistema.

(b) (10 %) Realice interpolación por segmentos en la parte no lineal y determine el desplazamiento para $F = 75 \times 10^4 N$.

5. (20 %) La ley de Ohm establece que la caída de voltaje V a través de un resistor ideal es linealmente proporcional a la corriente i que fluye a través del resistor, como $V = iR$, donde R es la resistencia. Sin embargo, los resistores reales no siempre obedecen la ley de Ohm. Suponga que usted lleva a cabo algunos experimentos muy precisos para medir la caída de voltaje y la corriente correspondiente para un resistor. Los resultados que se enlistan en la siguiente tabla, sugieren una relación curvilínea.

i	-2	-1	-0.5	0.5	1	2
V	-637	-96.5	-20.5	20.5	96.5	637

Debido al error en la medición, es común que la regresión sea el método preferido de ajuste de curvas para analizar dichos datos experimentales. Sin embargo, la suavidad de la relación, así como la precisión de los métodos experimentales, sugieren que quizá sería apropiada la interpolación.

(a) (10 %) Utilice interpolación de polinomios de Newton para ajustar los datos y calcular V para $i = 0.10$ ¿Cuál es el grado del polinomio que usó para generar los datos?

(b) (10 %) Repita el procedimiento anterior usando regresión polinómica. ¿Qué polinomio se ajusta mejor?

2.2. Diferenciación e integración (50 %)

1. (20 %) La función de distribución de probabilidad acumulada normal es una fórmula muy importante en el estudio de la estadística y está dada por:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2} dx$$

donde $x = (y - \overline{y})/s_y$ es llamada desviación estándar normalizada. Esta ecuación representa la probabilidad de que un evento dentro de un espacio muestral sea menor que x. Encuentre la probabilidad asociada al valor de $x = 1$. Para ello realice utilice la siguiente aproximación de la integral impropia:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-A} f(x)dx + \int_{-A}^{b} f(x)dx$$

donde A es un número negativo suficientemente grande para que la función comience a acercarse asintóticamente a cero por lo menos tan rápido como $1/x^2$. Implemente un código en **Matlab/Octave o Pyhton** del método del punto medio para solucionar la parte impropia e integración de Romberg para la segunda parte. en ambos casos con $n = 20$.

2. (20 %) Las profundidades de un río H se miden a distancias espaciadas iguales a través de un canal como se muestra en la siguiente tabla:

x, m	0	2	4	6	8	10	12	14	16
H, m	0	1.9	2	2	2.4	2.6	2.25	1.12	0

El área de dicha sección transversal se determina por integración mediante la siguiente ecuación:

$$A_c = \int_0^x H(x)dx$$

Emplee integración de Romberg para llevar a cabo la integración.

3. (20 %) Es frecuente que las reacciones químicas sigan este modelo:

$$\frac{dc}{dt} = -kc^n$$

donde c es la concentración, t es el tiempo, k es la tasa de reacción y n el orden de dicha reacción. Es posible evaluar valores dados de c y dc/dt, k y n por medio de regresión lineal del logaritmo de la siguiente ecuación:

$$\ln\left(-\frac{dc}{dt}\right) = \ln k + n \ln c$$

Use este enfoque y los datos que siguen para estimar los valores de k y n usando las fórmulas de aproximación más precisas:

t	10	20	30	40	50	60
c	3.52	2.48	1.75	1.23	0.87	0.61

4. (20 %) Un flujo desarrollado por completo que pasa a través de un tubo de 40 cm de diámetro tiene el perfil de velocidad siguiente:

r, cm	0	2.5	5.0	7.5	10.0	12.5	15.0	17.5	20.0
$v, m/s$	0.914	0.890	0.847	0.795	0.719	0.543	0.427	0.204	0

Encuentre la tasa de flujo volumétrico, Q, con la relación $Q = \int_0^R 2\pi rvdr$, donde r es el eje radial del tubo, R es el radio del tubo y v es la velocidad. Resuelva el problema con dos enfoques diferentes:

(a) (10 %) Realice un ajuste polinomial de grado 2 e integrela de forma analítica.

(b) (10 %) Utilice la regla compuesta de Simpson para evaluar la integral numéricamente. Compare ambos resultados.

5. (20 %) La tasa de enfriamiento de un cuerpo se expresa como:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

donde T es la temperatura del cuerpo ($^\circ C$), T_a es la temperatura del medio circundante ($^\circ C$) y k la constante de proporcionalidad (min^{-1}). Así, esta ecuación, (denominada *ley de Newton para el enfriamiento*) específica que la tasa de enfriamiento es proporcional a la diferencia de temperaturas del cuerpo y del medio circundante. Si una bola de metal calentada a 80° se sumerge en agua que se mantiene a $T_a = 20^\circ C$ constante, la temperatura de la bola cambia así:

t, min	0	5	10	15	20	25
$T,^\circ$	80	44.5	30.0	24.1	21.7	20.7

Utilice diferenciación numérica para determinar dT/dt en cada valor del tiempo. Grafique dT/dt contra $T - T_a$ y emplee regresión lineal para evaluar k. Emplee la fórmula de aproximación más precisa.