수치해석 과제

과제번호: HW02

과제제목: Proof of the Hermite Interpolation

자가 채점: 2

1점: 풀이
2점: + 풀이가 정확

제 출 날 짜: 25 09 23
학 과: 소프트웨어 학부
학 번: 2020203090
이 름: 한용옥

k, j 는 0 이상 n 이하 정수라 하자

라그랑주 계수함수의 정의에 의해

$$L_{n,j}(x_k) = \begin{cases} 1 & (k=j) \\ 0 & (k \neq j) \end{cases} \quad \text{— (식(1))}$$

$$H_{n,j}(x) = (1-2(x-x_j)L'_{n,j}(x_j))L^2_{n,j}(x)$$

식 (1) 에 의해 아래 두 방정식이 성립한다

$$H_{n,j}(x_j) = (1-2(x_j-x_j)L'_{n,j}(x_j))L^2_{n,j}(x_j) = L^2_{n,j}(x_j) = 1$$

$k \neq j$ 인 k에 대해

$$H_{n,j}(x_k) = (1-2(x_k-x_j)L'_{n,j}(x_j))L^2_{n,j}(x_k) = 0$$

종합하여

$$H_{n,j}(x_k) = \begin{cases} 1 & (k=j) \\ 0 & (k \neq j) \end{cases} \quad \text{— (식(2))}$$

$$\hat{H}_{n,j}(x) = (x-x_j)L^2_{n,j}(x)$$

식 (1)에 의해 아래 두 방정식이 성립한다

$$\hat{H}_{n,j}(x_j) = (x_j-x_j)L^2_{n,j}(x_j) = 0$$

$k \neq j$ 인 k에 대해

$$\hat{H}_{n,j}(x_k) = (x_k-x_j)L^2_{n,j}(x_k) = 0$$

종합하여

$$\hat{H}_{n,j}(x_k) = 0 \quad \text{— (식(3))}$$

$$H_{2n+1}(x_k) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x_k) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x_k)$$

시그마를 풀고 식 (2), (3)의 결과 대입시

$$= f(x_0) H_{n,0}(x_k) + \cdots + f(x_k) H_{n,k}(x_k) + \cdots + f(x_n) H_{n,n}(x_k) = f(x_k)$$

$$H_{n,j}(x) = (1 - 2(x - x_j) L'_{n,j}(x_j)) L^2_{n,j}(x)$$

$$H'_{n,j}(x) = (-2L'_{n,j}(x_j)) L^2_{n,j}(x) + (1 - 2(x - x_j) L'_{n,j}(x_j))(2L_{n,j}(x) L'_{n,j}(x))$$

식 (1)에 의해 아래 두 방정식이 성립.

$$H'_{n,j}(x_j) = (-2L'_{n,j}(x_j)) L^2_{n,j}(x_j) + (1 - 2(x_j - x_j) L'_{n,j}(x_j))(2L_{n,j}(x_j) L'_{n,j}(x_j))$$

$$= -2L'_{n,j}(x_j) + 2L_{n,j}(x_j) = 0$$

$k \neq j$ 인 k에 대해

$$H'_{n,j}(x_k) = (-2L'_{n,j}(x_j)) L^2_{n,j}(x_k) + (1 - 2(x_k - x_j) L'_{n,j}(x_j))(2L_{n,j}(x_k) L'_{n,j}(x_k))$$

$$= 0 + 0 = 0$$

종합하여 $H'_{n,j}(x_k) = 0$ – (식 (4))

$$\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j) L^2_{n,j}(x)$$

$$\hat{H}'_{n,j}(x) = L^2_{n,j}(x) + (x - x_j) 2L_{n,j}(x) L'_{n,j}(x)$$

식 (1)에 의해 아래 두 방정식이 성립.

$$\hat{H}'_{n,j}(x_j) = L^2_{n,j}(x_j) + (x_j - x_j) 2L_{n,j}(x_j) L'_{n,j}(x_j) = 1 + 0 = 1$$

$k \neq j$ 인 k에 대해

$$\hat{H}'_{n,j}(x_k) = L^2_{n,j}(x_k) + (x_k - x_j)2L_{n,j}(x_k)L'_{n,j}(x_k) = 0$$

종합하여 $$\hat{H}'_{n,j}(x_k) = \begin{cases} 1 & (k=j) \\ 0 & (k \neq j) \end{cases} \quad -(식(5))$$

$$H_{2n+1}(x_k) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)H_{n,j}(x_k) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j)\hat{H}_{n,j}(x_k)$$

미분법칙에 의해

$$H'_{2n+1}(x_k) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)H'_{n,j}(x_k) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j)\hat{H}'_{n,j}(x_k)$$

시그마를 풀고 식 (4),(5)의 결과 대입시

$$= f'(x_0)\hat{H}_{n,0}(x_k) + \cdots + f'(x_k)\hat{H}_{n,k}(x_k) + \cdots + f'(x_n)\hat{H}_{n,n}(x_k) = f'(x_k)$$

따라서 0이상 n이하 정수 k에 대해

$$H_{2n+1}(x_k) = f(x_k), \quad H'_{2n+1}(x_k) = f'(x_k)$$