#1

1. 2차원 아핀 변환인 이동변환 $T(t_x, t_y)$, 크기변환 $S(s_x, s_y)$, 그리고 회전변환 $R(\theta)$에 대한 3행 3열 행렬들을 고려하자.

   (a) $R(\theta) \cdot S(-1, 1) = S(-1, 1) \cdot R(\alpha)$ 식을 만족시켜주는 α 값은 무엇인가?

   (b) $T(t_x, t_y) \cdot S(-1, 1) = S(-1, 1) \cdot T(\beta, \gamma)$ 식을 만족시켜주는 β와 γ 값은 무엇인가?

   (c) $R(\theta) \cdot T(t_x, t_y) = T(\delta, \epsilon) \cdot R(\theta)$ 식을 만족시켜주는 δ와 ϵ 값은 무엇인가?

(a)

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \cos\theta = \cos\alpha$ & $\sin\theta = -\sin\alpha$

$\therefore \alpha = -\theta$ //

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \beta = -t_x$ & $\gamma = t_y$ //

(c)

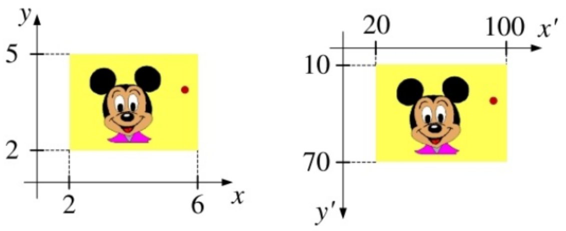
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x\cdot\cos\theta - t_y\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & t_x\cdot\sin\theta + t_y\cdot\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \delta \\ \sin\theta & \cos\theta & \epsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \delta = t_x\cdot\cos\theta - t_y\cdot\sin\theta$ & $\epsilon = t_x\cdot\sin\theta + t_y\cdot\cos\theta$

#2

1. 그림 1에 도시한 바와 같이 왼쪽의 윈도우의 내용을 오른쪽 윈도우 안으로 매핑을 해주는 2차원 아핀 변환에 대한 3행 3열 행렬 M을 이동 변환 $T(t_x, t_y)$, 크기 변환 $S(s_x, s_y)$, 그리고 회전 변환 $R(\theta)$ 등의 기본 아핀 변환의 합성을 통하여 구하라. (답안 작성 시 (i) 합성 과정을 반드시 기술한 후, (ii) 최종 결과 행렬을 기술할 것)



(a) 변환 전 (b) 변환 후

Figure 1: 2차원 윈도우 매핑

(i)

(a) 그림의 (2, 2) 꼭짓점을 원점으로 옮기기 위해서 $T(-2, -2)$

(a) 그림을 (b) 그림처럼 크기변환 하기 위해 $S(20, -20)$

해당하는 위치로 옮기기 위해서 $T(20, 70)$

$\therefore T(20, 70) \cdot S(20, -20) \cdot T(2, -2)$ //

ii)

$$\begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & -40 \\ 0 & -20 & 40 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 70 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 0 & -40 \\ 0 & -20 & 40 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & -20 \\ 0 & -20 & 110 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 20 & 0 & -20 \\ 0 & -20 & 110 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ //

3

5. 다음은 두 프레임간의 변환에 관한 문제이다.

(a) 그림 4의 A 소는 점 $(0, 0, -2)$를 원점으로 하는 자신의 프레임을 기준으로 세상 좌표계에 존재하고 있는데, 이 프레임의 각 축의 방향이 축 옆에 기술되어 있다. 이때 이 프레임을 (0, 0, -1) 방향과 (0, 1, 0) 방향이 각각 세상 좌표계의 x_w축과 y_w 방향과 일치하는 방식으로 세상 좌표계와 일치시켜주려한다. 이때 필요한 4행 4열 행렬 M_a의 내용을 기술하라.

(b) 한편 B 소는 점 $(0, 0, 2)$를 중심으로 하는 프레임을 기준으로 세상 좌표계에 존재하고 있는데, A 소의 각 꼭지점들을 B 소의 대응되는 점으로 매핑해주는 4행 4열 행렬

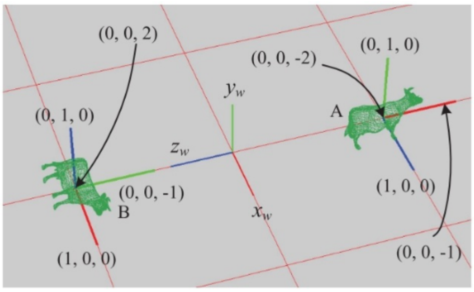


Figure 4: 두 프레임간의 변환

M_b를 $M_b = T_2 \cdot R \cdot T_1$와 같이 두 개의 이동 변환 행렬 T_1, T_2와 한 개의 회전변환 행렬 R의 곱으로 표현하라(반드시 이 세 개의 4행 4열 행렬의 내용을 정확히 기술할 것).

(c) 위 문제의 R 행렬은 임의의 점을 $(-1, n_y, n_z)$ 벡터가 가리키는 직선 둘레로 α도만큼 회전시켜주는 회전변환에 해당한다. 이때 n_y와 n_z, 그리고 α 값을 기술하라. (참고: 그림 5에 주어진 회전변환 행렬을 참조하고, 각도는 0도와 180도 사이의 각으로 기술할 것)

$$R(\alpha, n_x, n_y, n_z) = \begin{bmatrix} \bar{n}_x^2(1-c)+c & \bar{n}_x\bar{n}_y(1-c)-\bar{n}_z s & \bar{n}_z\bar{n}_x(1-c)+\bar{n}_y s & 0 \\ \bar{n}_x\bar{n}_y(1-c)+\bar{n}_z s & \bar{n}_y^2(1-c)+c & \bar{n}_y\bar{n}_z(1-c)-\bar{n}_x s & 0 \\ \bar{n}_z\bar{n}_x(1-c)-\bar{n}_y s & \bar{n}_y\bar{n}_z(1-c)+\bar{n}_x s & \bar{n}_z^2(1-c)+c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figure 5: 회전 변환 행렬

(a)

$$M_a = R(-\tfrac{\pi}{2}, 0, 1, 0) \cdot T(0, 0, 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ //

(b)

A소 원점으로 이동 : $T(0, 0, 2)$

세상좌표계와 일치 : $R(-\frac{\pi}{2}, 0, 1, 0)$

B소 좌표계처럼 회전: $R(-\frac{\pi}{2}, 1, 0, 0)$

B소 위치로 이동: $T(0, 0, 2)$

$$T(0,0,2) \cdot R(-\tfrac{\pi}{2}, 0, 1, 0) \cdot R(-\tfrac{\pi}{2}, 1, 0, 0) \cdot T(0, 0, 2)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_1}$$ //

(c)

$$(\bar{n}_x^2 + \bar{n}_y^2 + \bar{n}_z^2)(1-c) + 3c = 0$$

$$\bar{n}_x^2 + \bar{n}_y^2 + \bar{n}_z^2 = 1$$

$$\therefore 1 + 2c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2} \qquad \therefore \alpha = \frac{2}{3}\pi$$ //

$$\begin{cases} 2 \cdot \bar{n}_x \cdot \bar{n}_y (1-c) = 1 \\ 2 \cdot \bar{n}_y \cdot \bar{n}_z (1-c) = -1 \\ 2 \cdot \bar{n}_z \cdot \bar{n}_x (1-c) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{n}_x \cdot \bar{n}_y = \frac{1}{3} \\ \bar{n}_y \cdot \bar{n}_z = -\frac{1}{3} \\ \bar{n}_z \cdot \bar{n}_x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$\alpha \cdot \beta = \frac{1}{3}$

$\beta \cdot \gamma = -\frac{1}{3}$

$\gamma \cdot \alpha = -\frac{1}{3}$

$\gamma = -\frac{1}{3\alpha}$

$\alpha \cdot \beta = \frac{1}{3}$

$\frac{\beta}{3\alpha} = \frac{1}{3}$

$\therefore \alpha = \beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\therefore n_y = -1, n_z = 1$$ //

4

10. 다음은 직교 투영 변환과 관련한 문제이다. 그림 12에서와 같이 3차원 공간의 두 점 $(1, 1, 1)$과 $(6, 6, 11)$에 의해 정의되는 직육면체의 내용을 다른 두 점 $(-1, -1, -1)$과 $(1, 1, 1)$에 의해 정의되는 정육면체의 영역으로 매핑해주는 4행 4열 아핀 변환 행렬 M_{ortho}를 기술하라. (주의: 변환 후 z축의 방향이 반대가 되도록 네 모서리를 맞춰주어야 함)

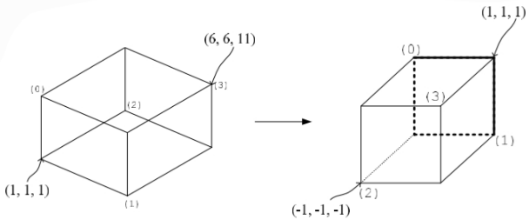


Figure 12: 직교 투영 변환

$T(-1, -1, -1)$로 원점 이동

$S(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$로 크기변환 & 뒤집음

$T(-1, -1, 1)$로 해당 위치 이동

$$\therefore M_{ortho} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & 0 & -\frac{7}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} //$$