kandi työotsikkko

Topias Karjalainen

10. maaliskuuta 2020

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Luku 2

Yleisiä tuloksia

2.1 Perusmääritelmiä

Määritellään ensiksi todennäköisyys.

Määritelmä 2.1. *σ-algebra.* Olkoot Ω mielivaltainen epätyhjä joukko. Sigma-algebra perusjoukolla Ω on sen osajoukkojen joukkoperhe $\mathcal{F}$, joka toteuttaa ehdot:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. jos $A \in \mathcal{F},\ niin\ A^c \in \mathcal{F}$
3. jos jos $A_k \in \mathcal{F},\ kaikilla\ k \in K$, missä K on numeroituva joukko, niin $\bigcup_{k \in K} A_k \in \mathcal{F}$

Määritelmä 2.2. Kuvaus $\mathbf{P}$ liittää kuhunkin tapahtumaan A *todennäköisyyden*, joka on luku suljetulla välillä [0,1] ja sille pätee:

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
2. Jos A on tapahtuma, niin sen komplementtitapahtuman A^c todennäköisyys on $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$
3. Jos $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ovat erillisiä tapahtumia, niin

$$\mathbf{P}(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(A_k)$$

Määritelmä 2.3. Kolmikkoa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ kutsutaan *todennäköisyysavaruudeksi.*

Määritelmä 2.4. *Satunnaismuuttuja* X on (lähes) mielivaltainen kuvaus $X : \Omega \to S$, jossa S on *tilajoukko.*

2.2 Markovin ketjut

Määritelmä 2.5. Jono $(X_n : n = 1, 2, 3, ...)$ satunnaismuuttujia on diskreettiaikainen *stokastinen prosessi.*

Määritelmä 2.6. Stokastinen prosessi (X_n) on *Markovin ketju*, jos kaikilla alkuhetkillä m, n ja tiloilla $i, j \in S$ on voimassa

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) \\ &= \mathbf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \end{aligned} \tag{2.7}$$

ja *siirtymätodennäköisyyksille* on voimassa

$$p_{ij} = \mathbf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \mathbf{P}(X_{m+1} = j | X_m = i) \tag{2.8}$$

Yhtälöä 2.7 kutsutaan *Markovin-ehdoksi* ja yhtälöä 2.8 taas kutsutaan *stationarisuusehdoksi*, mikä tarkoittaa, että siirtymätodennäköisyys tilojen i ja j välillä ei riipu ajasta m ja n, vaan pelkästään tiloista i ja j.

Määritelmä 2.9. Satunnaismuuttujan X_0 jakaumaa kutsutaan *alkujakaumaksi.*

Lause 2.10. *Ajanhetkellä $n \geq 1$ polun $(i_0, ...i_n)$ todennäköisyys on*

$$\boldsymbol{P}(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n) = p_{i_0} p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} ... p_{i_{n-1},i_n} \tag{2.11}$$

Todistus. Käyttäen ehdollisen todennäköisyyden kaavaa, saadaan 2:lle tapahtumalle

$$\mathbf{P}(A_0, A_1) = \mathbf{P}(A_0)\mathbf{P}(A_1 | A_0)$$

Jos tapahtumia on kolme, saadaan

$$\mathbf{P}(A_0, A_1, A_2) = \mathbf{P}(A_0)\mathbf{P}(A_1 | A_0)\mathbf{P}(A_2 | A_1, A_0)$$

neljä

$$\mathbf{P}(A_0, A_1, A_2, A_3) = \mathbf{P}(A_0)\mathbf{P}(A_1 | A_0)\mathbf{P}(A_2 | A_1, A_0)\mathbf{P}(A_3 | A_2, A_1, A_0)$$

ja n

$$\mathbf{P}(A_0, ..., A_n) = \mathbf{P}(A_0)\mathbf{P}(A_1 | A_0) ... \mathbf{P}(A_n | A_{n-1}, ... A_0) \tag{2.12}$$

Tämä on yleinen ehdollinen todennäköisyys. Merkataan $A_n \coloneqq (X_i = i_n)$. Koska käsittelemme Markovin ketjua, niin yhtälö 2.7 pätee, jolloin yhtälöstä 2.12 saadaan

$$\mathbf{P}(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n) = \mathbf{P}(X_0 = i_0)\mathbf{P}(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) ... \mathbf{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1})$$

jossa $\forall n = 0, 1, 2, ..., n : \mathbf{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1})$ on siirtymätödennäköisyys p_{i_{n-1},i_n} jolloin tulos seuraa substituoimalla termit. $\square$

Luku 3

Metropolis–Hastings algoritmi

Kirjallisuutta