1 - Incertidumbre y riesgo

1. $\star$ Jorge tiene preferencias sobre dos bienes tales que su función de utilidad es:

$$u(x) = x_1^{0.25} x_2^{0.5}$$

Su ingreso es M y los precios de ambos son iguales 1. Jorge está considerando participar en una lotería. Si acepta la lotería, su riqueza será M_1 y el precio del bien 1 será 1, pero el precio del bien 2 será 4 con probabilidad 0.5; y 1, con probabilidad 0.5. ¿Cuál es el nivel de M_1 que haría indiferente a Jorge entre tomar la lotería y no tomarla? (M_1 debe quedar en función de M).

<u>Solución</u>

La FIU sale del problema de maximización. Resolviendo:

$$V(p_1, p_2, M) = \left(\frac{M}{3p_1}\right)^{0.25} \left(\frac{2M}{3p_2}\right)^{0.5}$$

Jorge será indiferente entre tomar la lotería y no tomarla si:

$$V(1.1, M) = 0.5V(1.1, M_1) + 0.5V(1.4, M_1)$$
$$\left(\frac{M}{3}\right)^{0.25} \left(\frac{2M}{3}\right)^{0.5} = 0.5\left(\frac{M_1}{3}\right)^{0.25} \left(\frac{2M_1}{3}\right)^{0.5} + 0.5\left(\frac{M_1}{3}\right)^{0.25} \left(\frac{2M_1}{12}\right)^{0.5}$$

Simplificando obtenemos $M_1 = M(4/3)^{4/3}$.

2. $\star\star$ Dado el conjunto de premios $Z = \{0, 1, 2\}$, tenemos las siguientes loterías:

$$L_1 = (1/3, 1/3, 1/3) \qquad L_2 = (1/3, 2/3 - x, x)$$

$$L_3 = (0, 0, 1) \qquad L_4 = (0, 1, 0)$$

La relación de preferencias $\succsim$ de un determinado individuo cumple con los axiomas de racionalidad y continuidad, y $L_1 \prec L_2$ y $L_3 \succ L_4$. Encuentre el rango de valores que toma x para que se cumpla el axioma de independencia.

<u>Solución</u>

Por el axioma de independencia, tenemos que:

$$L_1 \prec L_2 \quad \longrightarrow \quad \alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \prec \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3 \tag{.1}$$

Pero como $L_3 \succ L_4$, entonces:

$$\alpha L_1 + (1-\alpha)L_4 \prec \alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \tag{.2}$$

De (5) y (6), tenemos que:

$$\alpha L_1 + (1-\alpha)L_4 \prec \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$$

Dado que $L_i \succ L_j \leftrightarrow U(L_i) > U(L_j)$, tenemos que:

$$U(\alpha L_1 + (1-\alpha)L_4) < U(\alpha L_2 + (1-\alpha)L_3)$$

Como elegiremos el valor de x que permitirá el cumplimiento del axioma de independencia, la función de utilidad de la relación de preferencias $\succsim$ admite su representación como una función de utilidad esperada. Por lo tanto, se puede llegar a:

$$\alpha\left(\frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2\right) + (1-\alpha)u_1 < \alpha\left(\frac{1}{3}u_0 + (2/3 - x)u_1 + xu_2\right) + (1-\alpha)u_2$$

Como $u_2 > u_1$ (pues $L_3 \succ L_4$), entonces:

$$\frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 \leq \frac{1}{3}u_0 + (2/3 - x)u_1 + xu_2$$

Como $2/3 - x \in [0, 1]$ y $L_1 \prec L_2$, entonces $x \in (1/3, 2/3]$.

3. ⋆⋆ Al individuo de la pregunta 2 se le ofrece el premio $z_1 = 0$ a cambio de la lotería 1, pero se muestra indiferente entre realizar el cambio o no. Proponga una función de utilidad esperada que represente las preferencias de ese individuo.

<u>Solución</u>

a) Lo descrito es equivalente a que una nueva lotería $L_5 = (1,0,0) \sim L_1$. Por lo tanto:

$$u_0 = \frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2$$
$$u_0 = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

Como $u_2 > u_1$, entonces $u_1 < u_0 < u_2$, o equivalentemente $L_3 \succ L_5 \succ L_4$. Si normalizamos $u_2 = 1$ y $u_1 = 0$, entonces $u_0 = 1/2$, por lo que se puede proponer la siguiente función de utilidad esperada:

$$U(L) = p_0u_0 + p_1u_1 + p_2u_2$$

$$U(L) = \frac{1}{2}p_0 + p_2$$

Utilizando dicha función de utilidad esperada se pueden recuperar las relaciones de preferencias entre las loterías de la pregunta 1.

4. $\star\star$ Suponga que una persona tiene preferencias tales que:

$$U(x_1,x_2) = \begin{cases} \text{mín}\{2x_1, x_2\} & \text{si } x_2 \geq 2x_1 & \cdots & (1) \\ \frac{2}{3}\{x_1 + x_2\} & \text{si } \frac{1}{2}x_1 \leq x_2 \leq 2x_1 & \cdots & (2) \\ \text{mín}\{x_1, 2x_2\} & \text{si } x_2 \leq \frac{1}{2}x_1 & \cdots & (3) \end{cases}$$

Grafique una curva de indiferencia, recta presupuestaria, y halle la FIU para el vector de precios $(p_1,p_2) = (4,2)$ e ingreso M. Luego, suponga que esta persona debe escoger entre loterías sobre su ingreso M, calculando su utilidad esperada de $V(4,2;M)$ (precios son fijos y solo M varía). ¿Es esta persona aversa, neutral, o amante al riesgo? Justifique su respuesta.

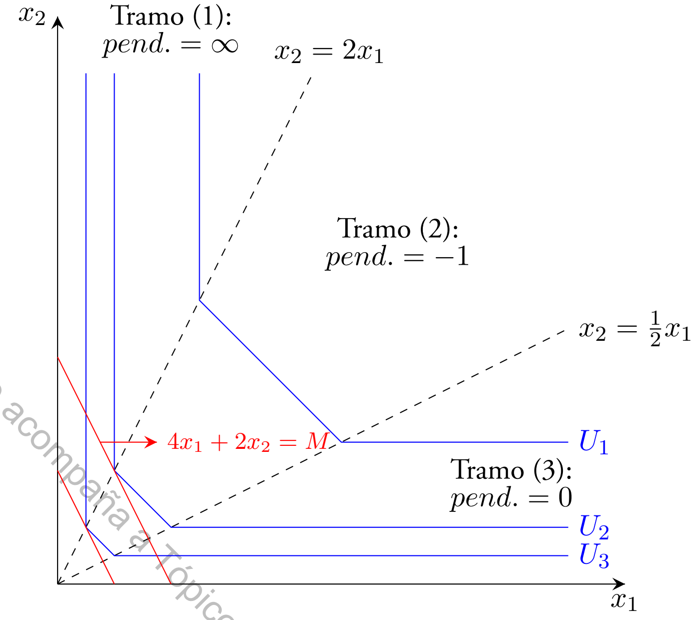
Solución

Estas preferencias resultan en curvas de indiferencia lineales, pero con tres distintas pendientes según los tramos dados en la función de utilidad descrita.

Entonces, dada la pendiente de la $RP = -p_1/p_2 = -2$, la maximización de la utilidad se logra en el vértice nor-oeste de lla curva de indiferencia; es decir, cuando $x_2 = 2x_2$:

$$4x_1 + 2x_2 = M \quad \Rightarrow 4x_1 + 4x_2 = M$$

de donde $x_1^* = M/8$, $x_2^* = M/4$ y $V(2,4;M) = M/4$. Gráficamente tenemos:



Si la persona elige entre loterías sobre M, vemos que $V(2, 4; M) = M/4$, es lineal en M; de modo que la persona es neutral al riesgo ($v(M) = \alpha M$, con $\alpha = 0.25$).

5. ⋆ Defina, para una determinada función de utilidad U, el parámetro $S = -U''/U'$. Se sabe que la función de utilidad es estrictamente creciente. Luego, discuta la veracidad de la siguiente afirmación: "mientras más alto sea el valor de S, el individuo será cada vez más amante del riesgo".

   Solución

   Note que el parámetro S es el coeficiente de aversión absoluta al riesgo. Por otro lado, sabemos que $U' > 0$ dado que la utilidad es estrictamente creciente, por lo que el signo de S será el negativo del signo de U''.

   Por lo tanto, si $U'' > 0$ entonces el individuo es amante del riesgo (función convexa) y $S < 0$; por el contrario, si $U'' < 0$ entonces el individuo es averso al riesgo (función cóncava) y $S > 0$. Esto comprueba que el enunciado es falso, pues el valor de S es mayor en el segundo caso pero el individuo tiene mayor aversión al riesgo.

6. ⋆ Sea la función $u : Z \to \mathbb{R}$ definida por $u(z_i) = \frac{z_i^{1-\sigma}}{1-\sigma}$, con $\sigma \in [0, 1)$, una función de utilidad vNM. Halle:

   a) El coeficiente de aversión absoluta al riesgo (CAAR).

   b) El coeficiente de aversión relativa al riesgo (CARR).

c) Sea $\alpha \in [0,1]$. Halle el equivalente cierto de una lotería que ofrece 50 dólares con probabilidad α y 0 dólares con probabilidad $1-\alpha$.

Solución

Sea $u : Z \to \mathbb{R}$ definida por $u(z) = \frac{z^{1-\sigma}}{1-\sigma}$, con $\sigma \in [0,1]$. Luego,

$$u'(z) = z^{-\sigma}$$

$$u''(z) = -\sigma z^{-\sigma-1}$$

a) Por lo tanto:

$$CAAR = -\frac{u''(z)}{u'(z)} = \frac{\sigma z^{-\sigma-1}}{z^{-\sigma}} = \frac{\sigma}{z}$$

Que se reduce conforme aumenta la riqueza del individuo. Note que si $z = 0.5$, la aversión al riesgo es mucho mayor que cuando $z = 50$

b) Asimismo, tenemos:

$$CARR = z \times CAAR = z\frac{\sigma}{z} = \sigma$$

Que es independiente de la riqueza del individuo.

c) El equivalente cierto es la mínima cantidad cierta x que el individuo aceptaría por no tomar la lotería.

$$u(x) = E(u(z))$$
$$\frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma} = \alpha\frac{50^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

Por lo tanto, el equivalente cierto $x = 50\alpha^{1/(1-\sigma)}$.

7. ⋆⋆ Imagine que usted está evaluando la función de utilidad de un individuo, y tiene los siguientes datos: $U(2) = 5, U(c) = 15, U(5) = 12$. Se sabe además que esta función de utilidad es estrictamente creciente y su segunda derivada es constante. ¿Para qué valores del parámetro c el individuo será amante, neutral, o averso al riesgo?

Solución

Lo que se debe hacer es evaluar la convexidad de la función de utilidad. Dado que la función es estrictamente creciente, se sabe que $c > 5 > 2$. Además, se sabe que la pendiente que une los dos primeros puntos de esta función de utilidad es $m_1 = (12-5)/(5-2) = 7/3$. Además, la pendiente que une los dos últimos puntos es $m_2 = (15-12)/(c-5) = 3/(c-5)$. Luego, tenemos los siguientes casos:

a) Si $m_1 > m_2$ la pendiente es decreciente y la función es cóncava. Por lo tanto, el individuo sería averso al riesgo. Note que $m_1 > m_2$ implica lo siguiente:

$$\frac{3}{c-5} < \frac{7}{3} \quad \rightarrow \quad c > \frac{44}{7}$$

b) Por el contrario, si $m_1 < m_2$ la pendiente es creciente y la función es convexa. Por lo tanto, el individuo sería amante del riesgo. Note que $m_1 < m_2$ implica lo siguiente:

$$\frac{3}{c-5} > \frac{7}{3} \quad \rightarrow \quad c < \frac{44}{7}$$

c) Finalmente, si $m_1 = m_2$ la pendiente es constante y la función es lineal. Por lo tanto, el individuo sería neutral al riesgo. Note que $m_1 = m_2$ implica lo siguiente:

$$\frac{3}{c-5} = \frac{7}{3} \quad \rightarrow \quad c = \frac{44}{7}$$

8. ⋆⋆ Tex tiene la siguiente función de utilidad: $U(w) = w^{\gamma}$. El único activo que posee es su colección de tarjetas de baseball, que de ser robada tendría un costo de reposición de USD 20 000. La probabilidad de robo es de 5 %.

a) ¿Cuánto debe costar la póliza de seguro de Tex para cubrir la posible pérdida de su colección de tarjetas de baseball?

b) Dada su función de utilidad, ¿cuánto estará dispuesto a pagar Tex por un seguro que cubra completamente el posible robo (y pérdida) de su colección de tarjetas?

c) Señale para que valores de γ, Tex estaría dispuesto a adquirir el seguro de la parte a).

<u>Solución</u>

a) El valor esperado de contratar una póliza de seguro justa debe ser igual a cero. Por lo tanto, si definimos c como la prima cobrada por la empresa, debemos tener:

$$VE = 0.95(-c) + 0.5(20\,000 - c) = 0 \quad \rightarrow \quad c = 1\,000$$

b) Note que la máxima disposición a pagar de un agente es la resta del pago en el "escenario favorable" (20 000) menos el equivalente cierto (monto que hace indiferente al agente entre tomar el seguro y no tomarlo).

La utilidad de Tex si no tiene seguro es $UE = 0.95(20\,000^{\gamma})$, por lo que el equivalente cierto x es un monto tal que:

$$U(x) = x^{\gamma} = 0.95(20\,000^{\gamma}) \quad \rightarrow \quad x = 0.95^{\frac{1}{\gamma}} 20\,000$$

Finalmente la máxima disposición a pagar por el seguro es $M = 20\,000(1 - 0.95^{\gamma})$.

c) Tex adquirirá el seguro siempre que su prima esté por debajo de su máxima disposición a pagar:

$$20\,000(1 - 0.95^{\gamma}) < 1\,000 \quad \leftrightarrow \quad \gamma < 1$$

Lo cual implica que el agente tomará el seguro de la parte a) siempre que sea averso al riesgo (cuando $\gamma < 1$ la función de utilidad es cóncava).

9. ⋆⋆ En el país de la informalidad, Alex está evaluando si debería pagar sus impuestos o si le convendría más invertir ese capital en la campaña navideña. Si no paga impuestos y es descubierto por la SUNAT, debe pagar sus impuestos más una multa, pero si no es descubierto, se queda con todo su ingreso. Sabiendo que su ingreso bruto mensual es $I = 100$, el nivel de impuestos es $T = 20$, la multa es $M = 16$, la probabilidad de ser descubierto es $\pi = 0.2$ y que su función de utilidad se expresa como $U(w) = \sqrt{w}$, responda lo siguiente:

a) ¿Qué decisión tomará Alex? Grafique.

b) ¿Cómo se puede revertir el resultado de la parte a)?

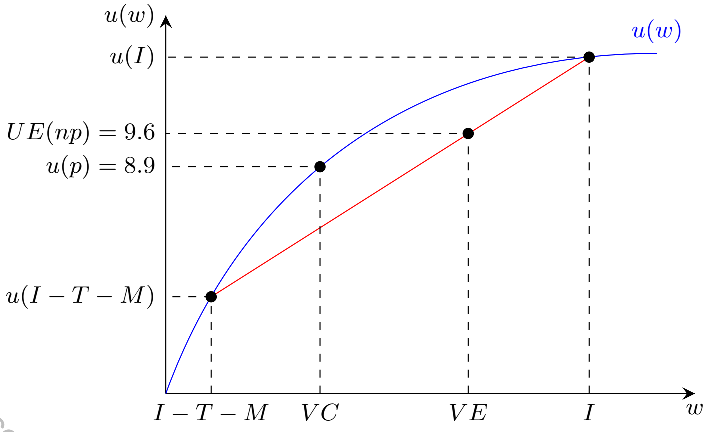
Solución

a) Pagar los impuestos genera un valor cierto $VC = I - T = 80$, mientras que no hacerlo tiene un valor esperado que depende de la probabilidad de ser descubierto $VE = \pi(I - T - M) + (1 - \pi)I = 92.8$.

Por otro lado, la utilidad de pagar $U(p)$ y de no hacerlo $U(np)$, vendrían dadas por:

$$U(p) = \sqrt{I - T} = 4\sqrt{5} \approx 8.9 \qquad U(np) = \pi\sqrt{I - T - M} + (1-\pi)\sqrt{I} = 9.6$$

Entonces, Alex preferirá no pagar sus impuestos. Gráficamente, tenemos lo siguiente:



b) El resultado anterior podría revertirse (i.e. hacer que el individuo prefiera pagar sus impuestos) de tres maneras: reduciendo el impuesto, T, aumentando la multa, M, o aumentando la probabilidad de descubrir la informalidad, π (o una agrupación de ellas):

- La reducción de T genera que el valor esperado de no pagar se incremente en menor proporción que el valor cierto de pagar, por lo que si dicha reducción es lo suficientemente grande, el monto de dinero que resta después de pagar el impuesto podría llegar a ser el equivalente cierto de la lotería descrita.
- El aumento de M genera que el valor esperado de no pagar el impuesto se reduzca, mientras que el valor de pagar se mantiene constante. Si dicho aumento es lo suficientemente grande, el valor de pagar el impuesto podría llegar a ser el equivalente cierto de la lotería descrita.

c) El aumento de π tiene un efecto similar que el aumento de M, sólo que la reducción del valor esperado de no pagar el impuesto se realiza dentro de la línea roja del gráfico de la sección a) (en el caso de M, existe también un desplazamiento de la línea roja).

10. $\star\star$ Considere un mercado laboral, en el cual las temporadas pueden ser "buenas" (estado 1) o "malas" (estado 2). En el estado 1, el salario de mercado es 60 Soles; y en el estado 2, es 40 Soles. Los trabajadores son maximizadores de su utilidad esperada, con su función de utilidad:

$$U(x) = p_1(300x_1 - 2x_1^2) + p_2(300x_2 - 2x_2^2)$$

a) ¿Son los trabajadores aversos, neutrales o amantes al riesgo? Justifique su respuesta, graficando el mapa de curvas de isoutilidad esperada, y hallando la expresión de su $TMgS_{x_2,x_1}$.

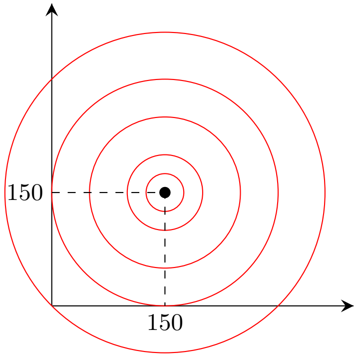
b) Ahora, considere 2 firmas. La firma A paga el salario de mercado a sus trabajadores, USD 40 en el estado 2 y USD 60 en el estado 1. La firma B les paga w, independientemente del estado que ocurra. Si la probabilidad del estado 2 es 0.25, ¿cuál es el mínimo nivel de salario, a partir del cual un trabajador escogerá trabajar para la firma B (llame a ese salario, $\underline{w}$)? ¿Si la firma B fuera neutral al riesgo, ganaría más o menos que pagando $\underline{w}$?

c) La firma B está considerando ofrecer un contrato de seguro a sus empleados, que los asegura contra el riesgo de que reciban el salario de mercado. La firma B se acerca a los trabajadores de la firma A y les ofrece este contrato de seguro, que les pagará w, en cualquier estado de la naturaleza, y ellos le pagarán a la firma B USD 60 en el estado 1, y USD 40 en el estado 2. Si la firma B es neutral al riesgo, ¿para qué valores de w este contrato hará que tanto la firma B como los trabajadores estén mejor que sin contrato de seguro?

d) Suponga que usted está postulando para un trabajo y tiene la opción de tomar un examen que proveerá información acerca de cuán calificado está para el trabajo. La nota en el examen va de 0 a 100 y la nota promedio de los que toman el examen es 50, de modo que si usted no toma el examen, le pagarán un salario basado en la productividad promedio, que es 50. Suponga un mercado competitivo, donde cada trabajador recibe un salario igual a su productividad. Si z es el puntaje que usted recibe en el examen, y su función de utilidad sobre el dinero es $U(z) = z^{\beta}$, con $\beta \in (0, 1)$, y usted sabe que es igualmente probable que tenga una nota de 36, 50, ó 64 (de modo que su promedio es 50), calcule su utilidad esperada si toma el examen y $\beta = 0.5$. ¿Tomará el examen o no? ¿Cuál es el β que hace que usted sea indiferente entre tomar el examen o no tomarlo?

Solución

a) Los trabajadores son aversos al riesgo. Basta con ver que la segunda derivada es menor a 0. Las curvas de indiferencia tienen pendiente negativa, igual a $\frac{p_1(300-4x_1)}{p_2(300-4x_2)}$ y decreciente en x_1. Note que el gráfico de las funciones de indiferencia corresponde a la ecuación de una elipse con centro en $(150, 150)$ (punto de saciedad); y si $p_1 = p_2$, la ecuación descrita es la de una circunferencia con el mismo centro.



b) La utilidad esperada de trabajar por la firma A es:

$$0.75\left[300(60) - 2(60^2)\right] + 0.25\left[300(40) - 2(40^2)\right] = 10\ 300$$

La utilidad esperada de trabajar por la firma B es:

$$300w - 2w^2$$

Se escogerá la firma B en lugar de la A siempre que:

$$\begin{aligned} 300w - 2w^2 \ &\geq\ 10\ 300 \\ 5(15 - \sqrt{19}) \ \leq\ w \ &\leq\ 5(15 + \sqrt{19}) \\ 53.206 \ \leq\ w \ &\leq\ 96.794 \end{aligned}$$

Si la firma paga el salario esperado (neutral al riesgo), gastaría USD 55, que es más que $\underline{w} = 53.2$.

c) Como se ha calculado en la parte b), este contrato hace que los trabajadores estén mejor siempre que:

$$53.206 \leq w \leq 96.794$$

d) Con $\beta = 0.5$, tomar el examen es participar en una lotería (Z), con utilidad esperada de:

$$EU[Z] = \frac{1}{3}\sqrt{36} + \frac{1}{3}\sqrt{50} + \frac{1}{3}\sqrt{64} = 7.02$$

No tomar el examen (N) es participar en una lotería que siempre da 50, con EU de:

$$EU[N] = \sqrt{50} = 7.07$$

Por tanto, no es conveniente tomar el examen. Si $\beta = 0.50168$, soy indiferente entre tomar y no tomar el examen, pues $EU[Z] = EU[N] = 7.07$:

$$\frac{1}{3}(36)^\beta + \frac{1}{3}(36)^\beta + \frac{1}{3}(36)^\beta = 7.07$$

11. ⋆⋆ Tomás se encuentra trabajando en una empresa de telefonía móvil. Dada la competitividad del mercado, Tomás tiene miedo de perder su empleo debido a su baja productividad. él estima que existe una probabilidad 0.5 de que lo despidan en el siguiente mes. De esta forma, una aseguradora le ofrece un seguro mensual de desempleo, el cual cubre un monto igual al salario que percibe en la empresa (5 000 soles). Asimismo, Tomás presenta las siguientes características:

- Función de utilidad estrictamente creciente y cóncava.
- La utilidad de Tomás en el tiempo t depende únicamente del cambio en su riqueza en ese mismo periodo.
- Factor de descuento subjetivo igual a δ
- El seguro se paga por adelantado, es decir, un mes antes de poder ejecutarlo.
- Recibe un ingreso no salarial igual a 5 000 cada mes.
- Tomás tiene un consumo mensual constante igual a 2 000, el cual paga con su salario del mes actual.

a) Tomando en cuenta el momento de decisión de tomar el seguro, halle la prima máxima que se le puede cobrar a Tomás bajo los siguientes supuestos: i) $U(w) = w^{1/2}$ y ii) $\delta = 2/3$.

b) Tomás, cansado de la incertidumbre de su empleo, decide comprar activos financieros para aumentar su riqueza. Entonces, después de revisar durante una hora, encuentra la siguiente información de los dos activos disponibles: Bonos (B) y Acciones (A):

- El bono ofrece un retorno de 10 % sobre su valor invertido.
- La acción ofrece dos posibles retornos: Con una probabilidad p, el retorno de la acción es 30 %. Asimismo, en el otro caso, el retorno de la acción es -15 %.

Asumiendo la misma función de utilidad del individuo y que Tomás invierte 5 000 soles en activos, halle la probabilidad del mejor escenario (p) mínima necesaria para que Tomás invierta en acciones en lugar de bonos. Grafique detalladamente (resuelva a dos decimales).

Solución

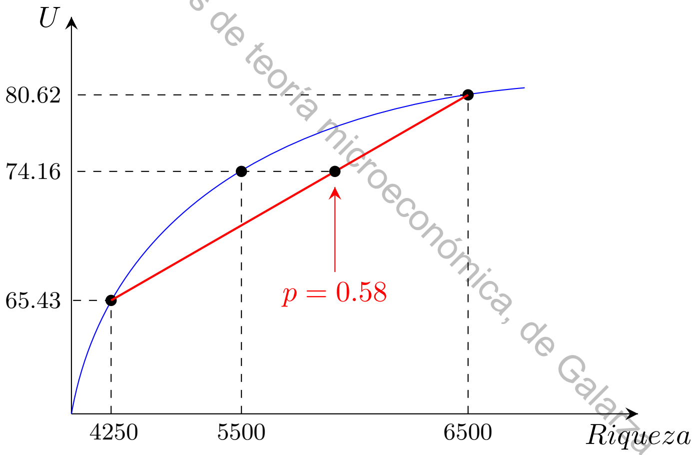
a) El seguro se paga un mes antes de poder ser ejecutado, así que se asumirá que en el periodo que pagó el seguro no fue despedido. Al plantear el problema de decisión se debe tomar en cuenta ese hecho.

Para que Tomás decida comprar el seguro:

$$(8\ 000 - S)^{0.5} + \frac{1}{1.5}(8\ 000)^{0.5} \geq (8\ 000)^{0.5} + \frac{1}{1.5}(0.5)(8\ 000)^{0.5} + \frac{1}{1.5}(0.5)(3\ 000)^{0.5}$$
$$(8\ 000 - S)^{0.5} \geq \frac{2}{3}(8\ 000)^{0.5} + \frac{1}{3}(3\ 000)^{0.5}$$
$$(8\ 000 - S)^{0.5} \geq 77.886$$
$$1933.787 \geq S$$

b) Se compara la utilidad generada por el rendimiento seguro de los bonos contra la utilidad esperada generada por el rendimiento de las acciones en cada caso.

$$p(6\ 500)^{0.5} + (1-p)(4\ 250)^{0.5} \geq 5\ 500^{0.5}$$
$$p(80.62) + (1-p)(65.19) \geq 74.16$$
$$65.19 + 15.43p \geq 74.16$$
$$p \geq 0.58$$



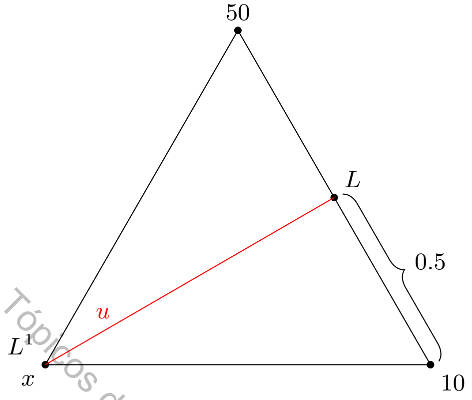
12. ⋆⋆⋆ Sea el espacio de premios $Z = \{10, 50, x\}$, donde x es el equivalente cierto de una lotería $L = (1/2, 1/2, 0)$.

   a) Grafique la lotería que ofrece el equivalente cierto con probabilidad 1 y las curvas de indiferencia del individuo en el simplex (revise la sección 1.7. para familiarizarse con el método).

   b) Sea intuitivo: ¿qué pasa en el simplex especificado en la parte a) con las curvas de indiferencia si la función de utilidad $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del individuo se vuelve más cóncava?

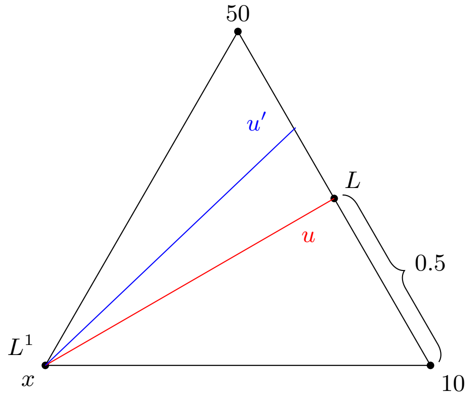
Solución

a) Dado que el equivalente cierto de una lotería reporta la misma utilidad esperada que ella, $L = (1/2, 1/2, 0)$ y $L^1 = (0, 0, 1)$ deben pertenecer a la misma curva de indiferencia; y, como vimos en la sección 1.7., las curvas de indiferencia son líneas rectas, graficadas en el simplex.



b) Si $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se vuelve más cóncava, por lo que el nuevo equivalente cierto de la lotería L, y, debe ser menor que x, pues el individuo estará dispuesto a sacrificar un poco más de dinero con tal de obtener un pago cierto.

Como el individuo es indiferente entre jugar L y recibir y, entonces las nuevas curvas de indiferencia deben graficarse de forma tal que la lotería L^1 genere una utilidad mayor que la lotería L, pues L^1 otorga un pago cierto de x, que es mayor al pago cierto que genera la misma utilidad que L. Por lo tanto, las curvas de indiferencia serán más empinadas (pues el pago mayor está arriba). Gráficamente, tenemos:



13. $\star\star\star$ Dominancia estocástica (DE): Sean $F(.)$ y $G(.)$ unas loterías definidas sobre un monto de dinero x y sea $U : \mathscr{L} \to \mathbb{R}$ la función de utilidad esperada vNM con una función de utilidad $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no decreciente.

    a) Muestre que si $G(x) \geq F(x)\ \forall x$, entonces $U(F) \geq U(G)$ (DEPO).

    b) Si además la función de utilidad es estrictamente cóncava y las loterías ofrecen el mismo pago esperado, muestre que si $\int_0^x G(t)dt \geq \int_0^x F(t)dt\ \forall x$, entonces $U(F) \geq U(G)$ (DESO).

<u>Solucionario</u>

Dado que $U : \mathscr{L} \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad vNM, entonces tenemos:

$$U(F) = \int u(x)dF(x) \quad \wedge \quad U(G) = \int u(x)dG(x)$$

a) Para que la lotería F sea preferible a G debe cumplirse que:

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x)$$

$$\int u(x)d[F(x) - dG(x)] \geq 0$$

Integrando por partes ($\int udv = uv - \int vdu$):

$$\int u(x)d[F(x) - G(x)] = [u(x)(F(x) - G(x))]_{-\infty}^{+\infty} - \int u'(x)[F(x) - G(x)]dx$$

Como los pagos son no negativos y tienen un valor máximo, entonces $F(x) - G(x)$ es 0 para valores muy altos y muy bajos de x. Finalmente:

$$\int u(x)d[F(x) - G(x)] = \int u'(x)[G(x) - F(x)]dx \geq 0 \tag{.3}$$

Como $u(.)$ es creciente, $u'(x)$ es positivo. Por lo tanto, si $G(x) \geq F(x)\ \forall x$ se logra verificar la desigualdad.

b) Para esta parte (DESO), partimos desde (.3) e integramos por partes, identificando a $u'(x)$ como u y a $[G(x) - F(x)]dx$ como dv:

$$\int u'(x)[G(x) - F(x)]dx = u'(x) \int [G(x) - F(x)]dx + \int -u''(x) \int_0^x [G(t) - F(t)]dtdx$$

La primera parte de la desigualdad es cero pues ambas loterías dan pagos esperados iguales. Además, gracias a que la $u(x)$ es estrictamente cóncava, el valor de $-u''(x)$ es positivo y está acotado. Por lo tanto, si $\int_0^x G(t)dt \geq \int_0^x F(t)dt \ \forall x$ se logra verificar la desigualdad.

14. ⋆⋆ Presente un ejemplo de la Paradoja de Ellsberg (1961). Muestre que las preferencias asociadas con esta paradoja son inconsistentes con la maximización de la utilidad esperada. Explique cuáles de los supuestos del Teorema de vNM son incumplidos.

    Solución

    Recordemos que, a diferencia de la Paradoja de Allais, que considera un entorno de riesgo, la Paradoja de Ellsberg involucra un entorno de incertidumbre. Suponga que una caja contiene 20 bolillas rojas y 40 bolillas que pueden ser de color azul o verde. Usted no sabe cuántas bolillas de color azul ni cuántas de color verde hay en la caja. Si usted enfrenta las siguientes decisiones entre 2 loterías:

    a) p_1 = recibir S/. 100 si se extrae una bolilla roja.
    p_1' = recibir S/. 100 si se extrae una bolilla azul.

    b) p_2 = recibir S/. 100 si se extrae una bolilla roja o una verde.
    p_2' = recibir S/. 100 si se extrae una bolilla azul o una verde.

    La Paradoja de Ellsberg surge cuando alguien establece las siguientes preferencias: $p_1 > p_1'$ y $p_2' > p_2$.

    Dado esto, si usted considera que R, A y V son, respectivamente, las probabilidades de extraer una bolilla roja, azul o verde, si sus preferencias se pueden representar por una función de utilidad esperada, y asumiendo que $u(100) > u(0)$ (usted prefiere ganar 100 Soles a no ganar nada), la maximización de la utilidad esperada requiere:

    $p_1 > p_1'$, luego $Ru(100) + (1-R)u(0) > Au(100) + (1-A)u(0)$ si y solo si $R > A$

    $p_2' > p_2$, luego $(A+V)u(100) + Ru(0) > (R+V)u(100) + Au(0)$, si y solo si $A > R$, lo cual es una contradicción.

    Note que este ejemplo viola el supuesto del Teorema de vNM de que el individuo toma como dada la probabilidad de que una bolilla no roja es verde, contra la probabilidad de que una bolilla no roja es azul, y calcula la utilidad esperada de las loterías. No obstante, para el caso de las loterías p_1' y p_2, las probabilidades exactas de ganar no son conocidas.

15. ⋆ Omar tiene problemas con el cigarro, por lo que quiere adquirir un seguro de salud. Cuando la salud de Omar está en óptimas condiciones, él puede trabajar árduamente y ganar un salario igual a S_0, pero si enfermara, ya no podría trabajar tanto y sólo ganaría un salario igual a $S_0 - M$. Si la probabilidad de enfermarse es π, ¿cuál es la prima

actuarialmente justa y la prima por riesgo que debería cobrarle la prestadora de servicios de salud?

Solución

La prima actuarialmente justa es la pérdida esperada del individuo, por lo que sería πM. Por otro lado, la prima por riesgo sería la diferencia entre la esperanza de la lotería y el equivalente cierto.

Si Omar fuese averso al riesgo y $x \in (S_0 - M, S_0 - \pi M)$ es el monto de dinero que hace que Omar sea indiferente entre tomar el seguro y no hacerlo (equivalente cierto), entonces la prima adicional por riesgo que le puede cobrar la empresa es $\rho = S_0 - \pi M - x$.

16. ⋆⋆ Un proyecto requiere una inversión de USD 100 000 y ofrece ingresos de USD 300 000 o de USD 0 con la misma probabilidad. Existen dos tipos de empresarios: (1) empresario rico, el cual posee una riqueza de USD 1 millón y (2) empresario pobre, el cual posee una riqueza de USD 0. Ambos empresarios son neutrales al riesgo.

El empresario rico (por problemas legales) no puede utilizar su riqueza para este proyecto en particular. Asimismo, se sabe que existe un banco que presta dinero a una tasa de π. Ello quiere decir que si el empresario pide un préstamo por USD 100 000, deberá devolver al término del proyecto USD 100 000(1+π), en caso tenga dicho monto. En caso tenga una cantidad menor, tendrá que pagar todo lo que tenga.

El orden de los eventos es el siguiente:

- El banco fija π.
- El empresario decide pedir un préstamo por los USD 100 000 para invertir.
- Se resuelve el problema de incertidumbre.

Se pide lo siguiente:

a) Asuma que el tipo del empresario es observable. Determine el interés máximo que el banco puede fijar a cada tipo de empresario.

b) Asuma que el tipo del empresario no es observable; pero que el banco sabe que la probabilidad de que el empresario sea rico es de $1/4$. Determine los nuevos niveles de interés máximo.

Solución

a) El empresario rico siempre pagará el préstamo en su totalidad, por lo que el retorno de la inversión asciende a:

$$0.5(300\,000) - (1 + \pi_R)100\,000$$

Dado que el empresario invertirá si dicho monto es no negativo, la máxima tasa de interés que el banco cobrará será $\pi_R = 0.5$. Por otro lado, el empresario pobre únicamente pagará si es que el negocio es exitoso, por lo que su pago esperado es:

$$0.5(300\,000 - (1 + \pi_P)100\,000)$$

Dado que el empresario invertirá si dicho monto es no negativo, la máxima tasa de interés que el banco cobrará será $\pi_P = 2$.

b) Como el banco no es capaz de observar el tipo del empresario, deberá cobrar una tasa de interés única π. Si ambos empresarios toman el préstamo, el beneficio esperado del banco, BE, está dada por la siguiente función:

$$BE(\pi) = \frac{1}{4}(1+\pi)100\,000 + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}(1+\pi)100\,000\right] - 100\,000 = \left(\frac{5}{8}\pi - \frac{3}{8}\right)100\,000$$

Que depende positiva y linealmente de la tasa de interés π. Al respecto, note que si el banco desea que ambos tipos de empresarios tomen el crédito, entonces debe cobrar la tasa $\pi = \pi_R = 0.5$. Sin embargo, el beneficio esperado con esta tasa es negativo, $BE(0.5) = -6\,250$. Por el contrario, si el banco quisiera cobrar una tasa $\pi > \pi_P$, entonces ningún empresario tomaría el préstamo, por lo que el beneficio esperado será cero, $BE(2) = 0$.

Si sólo el empresario pobre toma el préstamo, el beneficio esperado del banco está dado por la siguiente función:

$$BE(\pi) = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}(1+\pi)100\,000 - 100\,000\right] = \frac{3}{8}(\pi - 1)100\,000$$

Que depende positiva y linealmente de π. Por lo tanto, la tasa que maximiza el beneficio del banco será $\pi = \pi_P$ y sólo los empresarios pobres tomarán el préstamo. La empresa obtiene el beneficio esperado $BE(2) = 37\,500$.

17. ⋆⋆ Dada la alta probabilidad de crisis mundial, un inversionista ha decidido acumular su riqueza comprando obras de arte y manteniéndolas en su casa. Su colección de obras de arte está valorizada en v; sin embargo, al acumular riqueza de esta manera, el inversionista enfrenta una probabilidad de robo π, que, de ocurrir, reduciría el valor de su colección en p, donde $p \leq v$.

    Ante este problema, un amigo suyo le ha recomendado contratar un seguro contra robos. Dicho seguro reduce la pérdida neta del robo a p' ($p > p' > 0$). Este seguro cuesta $c > 0$, pero el inversionista debe pagar un monto adicional a la prima, d, como deducible, en caso ocurra el robo. El inversionista tiene un función de utilidad $U(v) = \sqrt{v}$, donde v representa su riqueza.

a) Defina las expresiones de la utilidad esperada del individuo tanto si decide tomar el seguro como si decide no hacerlo.

b) Pruebe que si el individuo fuera neutral al riesgo, decidiría tomar el seguro solo si $\pi(p - p' - d) \geq c$

Solución

a) Si el inversionista no toma el seguro, su utilidad esperada sera:

$$UE = \pi\sqrt{v - p} + (1 - \pi)\sqrt{v}$$

Mientras que, si lo hace su utilidad esperada será

$$UE = \pi\sqrt{v - p' - c - d} + (1 - \pi)\sqrt{v - c}$$

b) Si el inversionista es neutral al riesgo basará sus preferencias en términos de valor esperado. Luego, el valor esperado de tomar el seguro sería:

$$VE_s = \pi(v - p' - c - d) + (1 - \pi)(v - c)$$

Mientras que el valor esperado de no tomar el seguro es:

$$VE_{ns} = \pi(v - p) + (1 - \pi)(v)$$

Por lo que si el individuo fuese neutral al riesgo, tomaría el seguro sólo si:

$$VE_s \geq VE_{ns} \quad \leftrightarrow \quad \pi(p - p' - d) \geq c$$

18. ⋆⋆ Tomás es un alumno de la UP que maneja a velocidades muy altas, por lo que la probabilidad de tener un accidente es 2/3. La función de utilidad de Tomás es $U(w) = w^{0.5}$, su riqueza inicial es USD 100, y, de sufrir un accidente, incurre en una pérdida de USD 51.

a) Calcule la utilidad esperada de Tomás si no toma el seguro.

b) Ahora asuma que existe una compañía de seguros que le ofrece a Tomás un seguro completo. Si la compañía es neutral al riesgo, ¿cuál sería la prima π que cobrarían?

c) Calcule la utilidad esperada de Tomás si adquiere el seguro. ¿Decidirá tomar el seguro?

d) Si la función de utilidad de Tomás fuese $U(w) = w^2$, ¿cómo cambia la respuesta de la pregunta c)?

Solución

a) Si no toma el seguro, la utilidad esperada de Tomás es:

$$UE = \frac{2}{3}(100 - 51)^{0.5} + \frac{1}{3}(100)^{0.5} = 8$$

b) Si la firma es neutral al riesgo y el mercado es competitivo, entonces cobrará la prima actuarialmente justa; es decir, $\pi = (2/3)51 = 34$.

c) La utilidad esperada de Tomás cuando toma el seguro sería:

$$UE = \frac{2}{3}(100 - 34 - 51 + 51)^{0.5} + \frac{1}{3}(100 - 34)^{0.5} = (100 - 34)^{0.5} \approx 8.1$$

Que es mayor a la utilidad de no tomar el seguro, por lo que Tomás preferirá asegurarse.

d) Con la nueva función de utilidad, la utilidad esperada de no tomar el seguro será:

$$UE = \frac{2}{3}(100 - 51)^2 + \frac{1}{3}(100)^2 = 4\,934$$

Mientras que la utilidad esperada de tomarlo será:

$$UE = \frac{2}{3}(100 - 34 - 51 + 51)^2 + \frac{1}{3}(100 - 34)^2 = (100 - 34)^2 = 4\,356$$

Por lo que Tomás no se querrá asegurar. Este cambio se debe a que la nueva función de utilidad de Tomás lo identifica como un amante al riesgo, por lo que nunca querrá un seguro cuya prima sea actuarialmente justa (inicialmente el agente era averso al riesgo).

19. ⋆⋆ Consideremos una persona que tiene una riqueza de USD 100 000 y la perspectiva de perder, como consecuencia de un robo, su automóvil valorizado en USD 20 000 con una probabilidad de 25 %. Además, se sabe que su función de utilidad está dada por $u(w) = \ln w$.[1]

a) Calcule la utilidad esperada de la persona con seguro y sin él. Considere la prima justa.

b) Determine el monto máximo que esta persona estaría dispuesta a pagar para cubrir el valor esperado de la pérdida. Grafique.

c) Si en el mercado existen dos grupos de dueños de autos: aquellos que manejan de forma arriesgada (A) y aquellos que manejan de forma prudente (B). El primer grupo tiene un alto riesgo de chocar ($p_A = 0.25$), mientras que el segundo tiene un bajo riesgo de chocar ($p_B = 0.15$). Si la empresa de seguros conoce quién es A y quién es B, ¿cuáles serían las primas actuarialmente justas que les debería cobrar a los conductores?

1 Ejemplo 18.2 del libro "*Microeconomic theory: basic principles and extensions*" (Nicholson, 2005).

Solución

a) La utilidad esperada de la persona sin seguro es:

$$UE = 0.25 \ln(80\,000) + 0.75 \ln(100\,000) = 11.4571$$

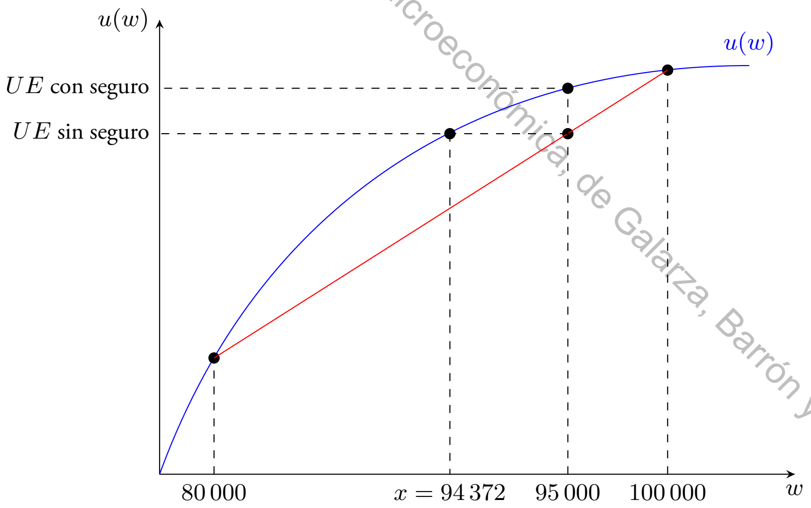
Para hallar la utilidad esperada de la persona con seguro, primero debemos calcular la prima a pagar. Dado que debemos considerar la prima actuarialmente justa, $\pi = 0.25(20\,000) = 5\,000$. Por lo tanto, la utilidad esperada es (recuerde que en un mercado competitivo, la prima justa se paga por la cobertura completa):

$$UE = 0.25 \ln(100\,000 - 5\,000 - 20\,000 + 20\,000) + 0.75 \ln(100\,000 - 5\,000) = 11.4616$$

b) Para hallar la máxima disposición a pagar de la persona debemos hallar el equivalente cierto x. La utilidad de tener x con certeza debe ser igual a la utilidad esperada de no asegurarse:

$$\ln x = 0.25 \ln(80\,000) + 0.75 \ln(100\,000) = 11.4571$$

De donde $x = 94\,372$, por lo que la máxima disposición a pagar de la persona es 100 000 – 94 372 = 5 628. Dado que el valor esperado de no tomar el seguro es 95 000, gráficamente tenemos:



c) La prima actuarialmente justa que debe cobrarse a cada tipo de conductor depende de su probabilidad de accidentarse. Así, la prima es $\pi_B = 0.15(20\,000) = 3\,000$ para los conductores tipo B, mientras que es $\pi_A = 0.25(20\,000) = 5\,000$ para los conductores del tipo A.

20. $\star\star$ Albert es el dueño de un salón de belleza, que le produce ingresos por USD 4 000 al mes. Sin embargo, pese a su talento incuestionable, a veces se distrae durante el trabajo, y existe un 10 % de probabilidad de que dañe a algún cliente cada mes (piense en un pequeño corte en el cuero cabelludo, por ejemplo), en cuyo caso el cliente lo demandará y perderá todo su ingreso de ese mes. Dado que Albert es averso al riesgo, está pensando en comprar un seguro. Si su utilidad está dada por: $U(x) = \ln(x)$:

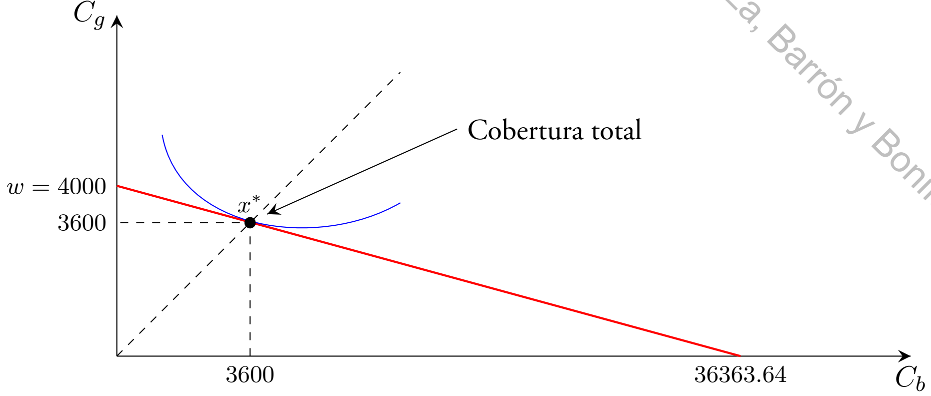
   a) ¿Cuál sería la prima de un seguro actuarialmente justo? Plantee la restricción presupuestaria de Albert si él pudiera comprar ese seguro, y coloque su consumo si no es demandado en el eje vertical; y su consumo si es demandado, en el eje horizontal. Calcule por cuánto se aseguraría Albert e indique la utilidad esperada que obtiene luego de asegurarse.

   b) Si ahora la prima cuesta USD 0.15 por unidad asegurada, grafique la nueva recta presupuestaria que enfrenta, calcule sus niveles de consumo en equilibrio, y su utilidad alcanzada. Plantee la ecuación que deben cumplir los niveles de consumo para que, bajo la nueva recta presupuestaria, Albert alcance su utilidad de la parte a).

<ins>Solución</ins>

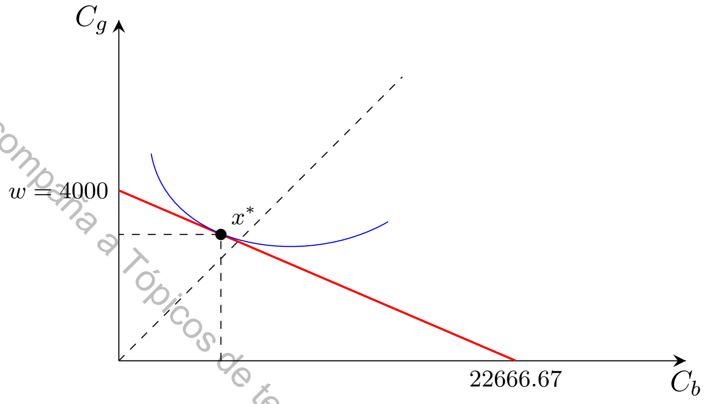
a) La PAJ es $0.1(4\ 000) = 40$. La restricción presupuestaria sería $E[W] = p_b * C_b + p_g * C_g$, con pendiente $(p_g/p_b) = -0.11$ (con $p_b = 0.1, p_b = 0.9$). Note que C_g es el consumo de Albert si no es demandado, mientras que C_b es su consumo si es demandado.

Dado que es un PAJ, el seguro es "completo" si $C_g* = C_b* = 3,600$ y $EU_0 = 8.19$.



b) La nueva restricción presupuestaria (RP_1) es más empinada pues el nuevo precio de la prima hace que la pendiente sea $-0.15/0.85 \approx -0.18$, por lo que la RP_1 cruza el eje horizontal en USD 22 667.

El $C_g = 3\ 400$ y $C_b = 3,333$ (que resulta de usar al nueva pendiente $C_b = 600/0.18$). La nueva $EU_1 = 0.1 \ln(3\ 333) + 0.9 \ln(3\ 400) = 8.13 < EU_0 = 8.19$. Por lo tanto, bajo la nueva RP_1, Albert puede alcanzar la utilidad EU_0 si $0.15U(\tilde{C}_g) + 0.85U(\tilde{C}_b)$



Referencias

Ellsberg, D. (1961). Risk, ambiguity, and the savage axioms. *The quarterly journal of economics*, 75(4):643–669.

Nicholson, W. (2005). *Microeconomic theory: basic principles and extensions*. South Western.