10 - Externalidades

1. $\star$ Dado que una externalidad ocurre cuando las acciones de un agente afectan el bienestar de un consumidor o la función de producción de una empresa, el hecho de que una empresa contrate a un trabajador más en un poblado donde la oferta laboral es escasa y, por ende, imposibilite a otras de contratar a ese mismo trabajador y así incrementar su producción constituye una externalidad. Por ende, en estos casos, el óptimo social no coincide con el privado.

   Solución

   Falso. Debido a que existe un mercado y un sistema de precios que hace que cada empresa pague un salario, por lo que en ausencia de distorsiones (monopsonio o monopolio) se estaría pagando el valor social por cada unidad de trabajo contratado. Las demandas de la empresa salen de un proceso de optimización, lo que lleva finalmente a una interacción de oferta y demanda. Los precios reflejan la escasez dentro del mercado.

2. $\star\star$ Una universidad desea pintar sus instalaciones, por lo que va a comprar varios galones de pintura. Las funciones de demanda y oferta de la pintura están dada por:

   $$Q^d = 750 - 25p \quad \wedge \quad Q^s = 250 + 15p$$

   Donde Q representa a los galones de pintura en cientos. Sin embargo, los profesores de micro señalan que se generará una externalidad negativa a los vecinos, quienes tendrán que aguantar el olor a pintura por varios días.

   Halle el valor de esta externalidad si se sabe que es la única generada, y que el beneficio privado de la empresa que vende la pintura es mayor al beneficio social en S/. 4.

   Solución

Si no se tomasen en cuenta las externalidades, el mercado iguala oferta y demanda, obteniéndose que $P = 12.5$ y $Q = 437.5$. El beneficio de la empresa sería 5468.75 menos el costo privado de proveer el bien.

Si tomamos en cuenta la externalidad negativa, la función de oferta social sería $Q^s = 250 + 15p + e$, luego obtenemos que $P = 12.5 - 0.025e$ y $Q = 437.5 + 0.625e$. Note que e debe ser negativo, pues la función de oferta social debe estar por encima de la función de oferta privada, reflejando mayores costos (por ser una externalidad negativa).

Finalmente tomaremos en cuenta la información sobre la diferencia de beneficios:

$$5\,468.75 - CMg - (12.5 - 0.025e)(437.5 + 0.625e) - CMg - e = 4$$

$$0.015625e^2 + 4.125e + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad e = \begin{cases} \text{-0.9732} \\ \text{-263.02} \end{cases}$$

Donde se observa que ambos valores de e son válidos.

3. ⋆⋆ Considere una economía de intercambio, con dos bienes y dos agentes, Ana y Beto, cuyas preferencias están dadas por las siguientes funciones de utilidad:

$$u_A(x) = x_{A1}x_{A2} - x_{B1} \qquad\qquad u_B(x) = x_{B1}x_{B2}$$

Note que la utilidad de Beto es bastante estándar, pues depende directamente de su propio consumo. La utilidad de Ana, sin embargo, depende no solo de su propio consumo, sino también depende inversamente de la cantidad que Beto consume del bien 2.

a) Si la dotación inicial de Ana es $\omega_A = (2, 0)$ y la de Beto es $\omega_B = (0, 2)$, muestre cual es el equilibrio competitivo cuando no consideramos las externalidades.

b) Especifique la utilidad de cada consumidor si consideramos la presencia de la externalidad ¿Es este equilibrio eficiente en el sentido de Pareto?

<u>Solución</u>

a) En el equilibrio competitivo, Ana se enfrenta al siguiente problema de optimización:

$$\text{máx}\, u_A = x_{A1}x_{A2} - x_{B1} \quad \text{sujeto a:} \quad p_1x_{A1} + p_2x_{A2} = p_1\omega_{A1} + p_2\omega_{A2}$$

de donde obtenemos el Lagrangiano:

$$L = x_{A1}x_{A2} - x_{B1} + \lambda\left[2p_1 - p_1x_{A1} - p_2x_{A2}\right]$$

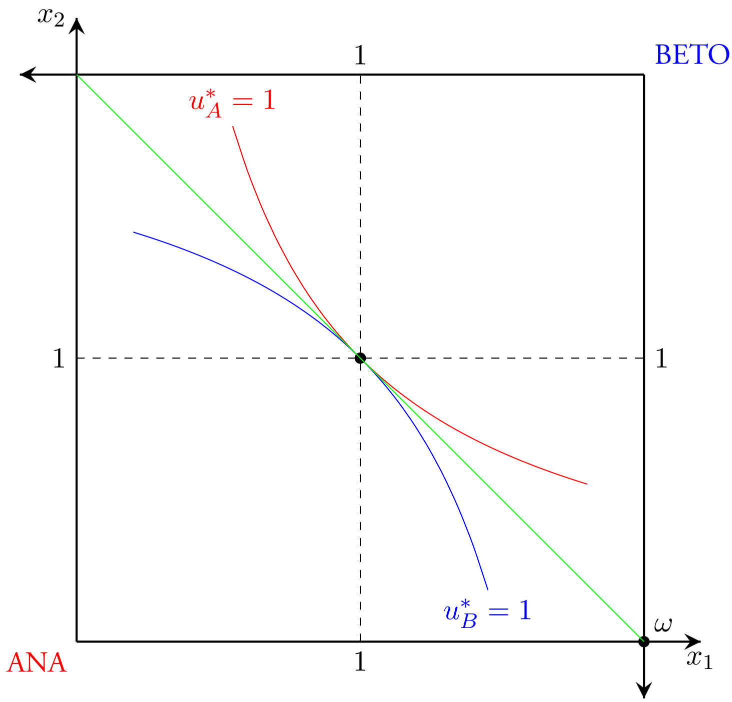
y de las condiciones de primer orden, obtenemos que $x_{A2} = \frac{p_1}{p_2} x_{A1}$. Luego, de la restricción presupuestaria:

$$2p_1 - p_1 x_{A1} - p_2 \frac{p_1}{p_2} x_{A1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{A1} = 1 \ , \ x_{A2} = \frac{p_1}{p_2}$$

De forma análoga, para Beto, tenemos que $x_{B1} = \frac{p_2}{p_1}$ y que $x_{B2} = 1$. Finalmente, tenemos que verificar que los mercados se encuentren en equilibrio (basta con 1 por la Ley de Walras):

$$x_{A1} + x_{B1} = \omega_{A1} + \omega_{B1} \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{p_2}{p_1} = 2$$

Por lo que el equilibrio competitivo será $EC = \{x_1^* = x_2^* = (1,1), p_1/p_2 = 1\}$. Si la externalidad no existiese, esta asignación sería eficiente en el sentido de Pareto y la utilidad de ambos agentes serían $u_1^* = u_2^* = 1$. Gráficamente tenemos:



b) Si consideramos que hay una externalidad negativa en el consumo (el consumo del bien 1 por parte de Beto reduce la utilidad de Ana), el bienestar social sería solo 1 (pues en este caso $u_A = 0$). Por lo tanto, la asignación EC ya no será eficiente en el sentido de Pareto.

Para comprobar esto, basta con notar que es posible incrementar la utilidad de Ana sin reducir la de Beto mediante el intercambio; si Beto le da 0.2 unidades del bien

1 a Ana y ella le retribuye con 0.25 unidades del bien 2), entonces la utilidad de Beto se mantiene en $u_B = 0.8(1.25) = 1$ y la utilidad de Ana aumenta de 0 a $u_A = 1.2(0.75) - 0.8 = 0.1$. De esta forma el bienestar social se incrementa de 1 a 1.5.

Al ser un equilibrio ineficiente en el sentido de Pareto, por lo menos un agente puede estar mejor sin perjudicar a otro. Sin embargo, ni Ana ni Beto pueden resolver este problema unilateralmente.

4. ⋆⋆ Comente sobre la veracidad del siguiente enunciado: Dos empresas están ubicadas a orillas de un río y tienen funciones de costos totales de: $c_1(y) = y^2/100$ y $c_2(x) = x^2/100 - y$. Suponga que cada empresa actúa competitivamente y que $p_x = 3$ y $p_y = 2$. El nivel de subsidio Pigouviano necesario para que la firma 1 produzca el nivel Pareto óptimo de y es igual a 1 unidad.

   Solución

   El enunciado es cierto. En un equilibrio competitivo (cada firma maximiza sus beneficios), por lo que $p_x = CMg_x$, $p_y = CMg_y$, luego $x^* = 150$ e $y^* = 100$.

   Una asignación Pareto óptima (Max beneficios conjuntos) implica que $p_x = CMg_x$, $p_y + 1 = CMg_y$, por lo que $x^{P.O.} = 150$ e $y^{P.O.} = 150$.

   Por lo tanto, para que la firma 2 produzca $y^{P.O.} = 150$, debe cumplirse que $(2 + s) = CMg_y = y^{P.O.}/50 = 3$, por lo que el subsidio necesita ser igual a 1.

5. ⋆⋆ Un apicultor tiene sus panales de miel cerca de un productor de peras. Sea P la cantidad producida de peras y M la de miel. La función de costos de la miel es:

$$C(M) = \frac{M^2}{100}$$

   Por un lado, las abejas polinizan las plantas de peras, pero por otro, sus residuos atraen insectos que reducen el contenido nutritivo de los perales. Con ello, la función de costos de los perales es $C(P) = (P^2/100) + kM$. Además $p_p = 3$ y $p_m = 2$ son los precios de las peras y la miel respectivamente.

   a) Se sabe que si las empresas se fusionaran, el número óptimo de unidades de miel sería un tercio del número óptimo de peras. Halle el valor de "k". ¿La externalidad es positiva o negativa?

   b) Use el valor de "k" hallado en la parte anterior. Si las empresas actuaran independientemente, halle el impuesto o el subsidio que conduciría a la solución hallada en la parte a).

   Solución

a) Maximizando beneficios de la empresa conjunta:

$$\max_{P,M} 3P - \frac{P^2}{100} - kM + 2M - \frac{M^2}{100}$$

De donde podemos obtener las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \pi_s}{\partial P} = 3 - \frac{2P}{100} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = 150$$

Dado que el número óptimo de unidades de miel es un tercio de las peras tenemos que $M = 50$. Luego,

$$\frac{\partial \pi_s}{\partial M} = 2 - k - \frac{2M}{100} = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 100 - 50k$$

De donde tenemos que $k = 1$. Por lo tanto, la externalidad neta es negativa (la producción de miel aumenta los costos de producción de pera).

b) En este caso, el productor de miel debería pagar un impuesta tal que decida limitar su producción hasta $M = 50$.

$$\pi_m = 2M - \frac{M^2}{100} - tM$$

De la CPO y del hecho que $M = 50$ tenemos que:

$$2 - \frac{2M}{100} - t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

Es posible notar que la tasa de impuestos por unidad de miel es exactamente igual a la externalidad generada por su producción.

6. ⋆⋆ La compañía de cervezas Tomalotodo usa agua del Río Blanco para su producción. Recientemente, la empresa Químicas Unidas abrió una fábrica río arriba de Tomalotodo. Químicas Unidas contamina el agua del río en una cantidad x (en galones de contaminantes) cada día. Como resultado de eso, el beneficio de Tomalotodo se reduce en x^2 Soles cada día (ese es el costo en que Tomalotodo incurre para limpiar de contaminantes el agua que usa). El nivel de operación que maximiza el beneficio de Químicas Unidas implica que arroje 30 galones de sustancias contaminantes al río diariamente y alterar sus operaciones para arrojar una menor cantidad de sustancias contaminantes reduce el beneficio de Químicas Unidas. Concretamente, su beneficio diario se reduce en $0.5(30 - x)^2$ si arroja x galones de contaminantes. No hay leyes que restrinjan la cantidad de contaminantes que puede arrojar al agua, ni leyes que obliguen a Químicas Unidas a compensar a Tomalotodo por los costos que la origina al contaminar.

   El argumento de Coase es que las dos empresas llegarán a un acuerdo, en el cual se echará al río la cantidad Pareto eficiente de contaminantes. Determine el nivel eficiente de contaminantes. Si $x < 30$, determine el rango de valores que Tomalotodo estaría dispuesta a pagar a Químicas Unidas para que solo eche el río x galones por día. (Pista: Para resolver, asuma que K_Q es el beneficio de Químicas Unidas cuando $x = 30$ y que K_T es el beneficio de Tomalotodo cuando $x = 0$).

Solución

El beneficio de las empresas son:

$$\pi_Q(x) = K_Q - 0.5(30 - x)^2 \qquad\qquad \pi_T(x) = K_T - x^2$$

El nivel P.O. de x se logra maximizando $(\pi_Q(x)+\pi_T(x))$, lo cual sucede cuando $x = 10$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \pi_Q(10) = K_Q - 0.5(30 - 10)^2 = K_Q - 200 \\ \pi_Q(30) = K_Q - 0.5(30 - 30)^2 = K_Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_T(10) = K_T - 10^2 = K_T - 100 \\ \pi_T(30) = K_T - 30^2 = K_T - 900 \end{aligned}$$

Si t es el monto que Tomalotodo paga a Químicas Unidas, entonces:

$$\begin{aligned} t \geq \pi_Q(30) - \pi_Q(10) = 200 \\ t \leq \pi_T(30) - \pi_T(10) = 800 \end{aligned}$$

7. ⋆⋆ En un mercado existen dos empresas que producen el mismo bien y cuyas funciones de costos son las siguientes:

$$C_1 = 2Q_1^2 + 20Q_1 - 2Q_1Q_2$$

$$C_2 = 3Q_2^2 + 60Q_2$$

a) Determine el nivel óptimo de producción de cada empresa bajo el supuesto de que cada uno iguale su CMg privado a un precio de mercado igual a 240. Muestre los beneficios para cada empresa.

b) Determine el nivel de producción de cada empresa en el supuesto de que cada uno iguala su CMg Social al precio de mercado. Muestre los beneficios para cada empresa.

c) Determine los impuestos o subsidios que llevarían a las empresas a su punto óptimo de Pareto, pero manteniendo sus beneficios iguales. ¿Cuál sería el monto total de la transferencia que se les tendría que hacer?

Solución

a) La solución privada ocurre cuando $P = CMg$:

$$CMg_1 = 4Q_1 + 20 - 2Q_2 = 240 \quad \Rightarrow \quad Q_1^P = 70$$

$$CMg_2 = 6Q_2 + 60 = 240 \quad \Rightarrow \quad Q_2^P = 30$$

Por lo tanto, los beneficios de cada empresa son:

$$\pi_1^p = 240(70) - 2(70)^2 - 20(70) + 2(70)(30) = 9\,800$$

$$\pi_2^p = 240(30) - 3(30)^2 - 60(30) = 2\,700$$

b) La solución social debe internalizar la externalidad:

$$\textit{Costo Social} = 2Q_1^2 + 20Q_1 - 2Q_1Q_2 + 3Q_2^2 + 60Q_2$$

$$\frac{\partial CS}{\partial Q_1} = 4Q_1 + 20 - 2Q_2 = 240$$
$$\frac{\partial CS}{\partial Q_2} = -2Q_1 + 6Q_2 + 60 = 240$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos $Q_1 = 84$ y $Q_2 = 58$ (cantidades mayores que las privadas). Los nuevos beneficios serán

$$\pi_1^s = 240(84) - 2(84)^2 - 20(84) + 2(84)(58) = 14\,112$$

$$\pi_2^s = 240(58) - 3(58)^2 - 60(58) = 348$$

c) Consideremos las nuevas funciones de costo con subsidios, s_1 y s_2 (pues estamos lidiando con una externalidad positiva):

$$C_1 = 2Q_1^2 + 20Q_1 - 2Q_1Q_2 - s_1Q_1$$

$$C_2 = 3Q_2^2 + 60Q_2 - s_2Q_2$$

Por lo tanto los nuevos costos marginales estarían dados por:

$$CMg_1 = 4Q_1 + 20 - 2Q_2 - s_1 = 240$$

$$CMg_2 = 6Q_2 + 60 - s_2 = 240$$

Para obtener los resultados $Q_1 = 84$ y $Q_2 = 58$, se requiere que $s_1 = 0$ y que $s_2 = 168$; es decir, que se debe realizar un subsidio variable a la empresa 2 que dependa de su cantidad producida.

Sin embargo, para que mantengan el beneficio inicial, debemos otorgarle a la empresa 1 un impuesto fijo y a la empresa 2 un subsidio que contenga una parte fija y una parte variable que dependa de Q_2 (s_2). Estos montos se muestran a continuación:

$$T_1 = \pi_1^s - \pi_1^p = 4\,312$$

$$S_2 = \pi_2^p - \pi_1^s + s_2 Q_2 = 2\,352 + 168Q_2$$

8. ⋆⋆ En la ciudad de Lima, hay N personas, cada una de las cuales es dueña de un auto. Su utilidad depende de cuánto manejan su auto y de la cantidad de tomates que pueden consumir. La utilidad de los limeños sigue la siguiente función:

$$u_i(x_i, y_i) = y_i + v(x_i) - a_i H$$

donde y_i es la cantidad consumida de tomates por el agente i, x_i son los kilómetros que este agente maneja, y H denota el grado de contaminación en el aire de Lima. Cada persona tiene una dotación inicial de y_{0i} tomates. En la economía verde, autosostenible y ecoamigable de Lima, los autos usan tomates como combustible. Cada kilómetro recorrido usa c tomates, y coloca b unidades de contaminación en el aire. Es decir $H = bX$, donde $X = \sum x_i$. Considere solamente el caso en el que tanto x_i como y_i son estrictamente positivos.

a) Asuma que el planificador central maximiza la suma de utilidades individuales. Encuentre una expresión el óptimo social de contaminación e interprételo.

b) Asuma que cada agente toma las decisiones de los otros como fijas. Encuentre una expresión para el óptimo privado de contaminación e interprételo. Proponga un impuesto que lleve al óptimo social.

Solución

a) Aquí la clave es que escriban bien el lagrangiano.

$$L = \sum y_i + \sum v_i(x_i) - H \sum a_i + \lambda \left(\sum y_{0i} - \sum y_i - c \sum x_i \right)$$

De las condiciones de primer orden tenemos:

$$\begin{aligned} y: &\quad 1 = \lambda \\ x: &\quad v_i'(x) - bA - \lambda c = 0 \end{aligned}$$

Incorporando la primera ecuación de la segunda, tenemos que $v_i'(x) = Ab + c$. El beneficio marginal de un km más es igual al costo social del km (el número de tomates más el costo en contaminación de toda la sociedad).

b) El lagrangiano es:

$$L = y_i + v_i(x_i) - Ha_i + \lambda(y_{0i} - y_i - cx_i)$$

De ahí, obtenemos las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} y: &\quad 1 = \lambda \\ x: &\quad v_i'(x) - ba_i - \lambda c = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $v_i'(x) = a_i b + c$. El beneficio marginal de un km más es igual al costo privado del km (el número de tomates más el costo en contaminación para el individuo i). El impuesto es $t_i = \sum_{j \neq i} a_j$ por kilómetro manejado.

9. $\star$ Analice la veracidad del siguiente enunciado: “Según Coase, no importa a quien se asigne el derecho de propiedad pues finalmente será la persona que genera la externalidad negativa quien realice el gasto para eliminar dicha externalidad. Por otro lado, el nivel de utilidad final que alcancen los individuos dependerá sólo de la magnitud de los costos de transacción”.

   Solución

   El enunciado es falso. Si bien la solución de las externalidades no dependen de la asignación de los derechos de propiedad, la distribución de los recursos sí lo hace. En este sentido, la responsabilidad sobre los pagos, así como la utilidad final de los agentes, dependerán de cómo se asignen estos derechos.

10. $\star$ Smith puede instalar un filtro en la chimenea de su empresa para producir. De no hacerlo, el daño que causa el humo a Jones sería muy grande. El cuadro adjunto muestra las ganancias y las pérdidas semanales de los dos individuos.

	Con filtro	Sin filtro
Ganancias de Smith	200	245
Daños a Jones	35	85

a) Si a Smith se le otorga la propiedad de la calidad del aire y no hay costos de transacción, ¿se instalará el filtro? Explique su respuesta.

b) ¿Cómo cambia su respuesta si la propiedad de la calidad del aire se le otorga a Jones? Explique su respuesta.

Solución

a) Dado que Smith tiene la propiedad de la calidad del aire, el puede decidir contaminar todo lo que quiera. Por ello, si Jones quiere que Smith contamine menos debe compensar a Smith por las menores ganancias que obtendría como producto de la instalación del filtro.

El pago mínimo que se requiere para que Smith sea indiferente entre instalar el filtro y no hacerlo es de USD 45, mientras que el pago máximo que estará dispuesto a realizar Jones para ser indiferente entre la situación con filtro o sin él es de USD 50.

Por lo tanto, bastará con que Jones compense a Smith con un monto $x \in (45, 50)$, para asegurar la instalación del filtro.

b) Dado que la calidad del aire es propiedad de Jones, Smith debe compensar a Jones si desea contaminar. La compensación máxima que Smith estaría dispuesto a dar a Jones es USD 45, mientras que el pago mínimo que Jones espera recibir para dejar que contaminen es USD 50. Por lo tanto, Smith comprará el filtro.

Note que en ambos casos se llega a la cantidad óptima de contaminación (producción con filtro); sin embargo, la distribución final de los recursos varía dependiendo de a quién se le otorgue el derecho de propiedad sobre la calidad del aire.

11. $\star$ Identifique cuáles son las diferencias más importantes entre la solución de Pigou y la de Coase a las externalidades.

Solución

Las diferencias más importantes entre las soluciones de Pigou y de Coase son:

- Pigou es una solución pública, es decir, implica la intervención del gobierno a través de la aplicación de un impuesto o un subsidio. Mientras que Coase propone mas bien una solución privada, a través de la negociación de las partes cuando los costos de transacción son bajos.
- Pigou propone una solución unilateral (se castiga o incentiva a quien genera la externalidad), mientras que Coase habla de la naturaleza recíproca de la externalidad, con lo cual participan ambas partes.

12. ⋆ La Ley Antitabaco impide fumar en lugares públicos. De acuerdo con el teorema de Coase, se podría alcanzar una asignación eficiente en el sentido de Pareto a través del intercambio libre aún en presencia de una externalidad ("fumadores pasivos") e independientemente de la asignación inicial de los derechos de propiedad (ej. si la ley permite fumar en lugares públicos). ¿Cómo explica que los fumadores en lugar de pagar por derechos para fumar (a modo de compensación) a no fumadores, prefieran salir a fumar fuera de los lugares públicos?

    Solución

    En primer lugar queda claro que la asginación inicial de derechos está a favor de los no fumadores, dado que se les prohíbe a los fumadores fumar en lugares públicos. Sin importar esta asignación inicial, Coase señala que ante costos de transacción cercanos a cero y correcta asignación de derechos de propiedad se podría llegar a una solución privada. En el marco del teorema de Coase y asumiendo que se cumplen sus supuestos, es posible que la solución privada a la que se haya llegado sea al hecho de que los fumadores salen fuera de los lugares públicos. Ello debido a que es más costoso para los no fumadores la externalidad generada (fumadores pasivos podrían contraer graves enfermedades) que para los fumadores evitar fumar en un lugar y tener que salir a otro a fumar.

13. ⋆ La creación de un mercado de derechos de contaminación llegaría siempre al mismo resultado que el sugerido por Coase, tanto en términos de eficiencia como de equidad.

    Solución

    Falso. Si bien se asignan derechos de propiedad y por tanto se cumple el primer supuesto de tener derechos definidos, no hay certeza de que se esté cumpliendo el segundo supuesto: costos de transacción cercanos a cero. Es decir, en tanto sea sencillo negociar la comercialización de derechos de contaminación, se estaría llegando a la solución de Coase.

    Por otro lado, si hubiesen costos de transacción iguales a cero los resultados serían eficientes, pero la distribución de la riqueza va a depender de a quién se le asigne inicialmente los derechos de propiedad.

14. ⋆⋆⋆ Considere una economía con dos individuos $i = 1, 2$ con la siguiente función de utilidad:

    $$u_i(s^i, w^i) = v^i(s^i) + \alpha w^i,$$

    Donde s^i denota la velocidad a la cual el individuo i maneja su carro, w^i es la riqueza del individuo i y $\alpha > 0$. La utilidad que el individuo i obtiene por manejar rápido es $v^i(s^i)$ y la primera derivada es positiva y la segunda es negativa. Sin embargo, manejar rápido incrementa la probabilidad de sufrir un accidente de carro. Esta probabilidad es

$\gamma(s^i, s^j)$. Esta probabilidad es creciente en la velocidad del individuo i y en la velocidad del individuo j, donde $j \neq i$. Así, la velocidad del otro individuo es una externalidad negativa sobre el conductor i porque aumenta su probabilidad de sufrir un accidente. Si el individuo i sufre un accidente, incurre en un costo de $c^i > 0$ utiles.

a) Calcule el nivel de velocidad que el agente i elegiría para maximizar su utilidad esperada y llámela $\hat{s}^i$. Interprete la condición de primer orden.

b) Encuentre el óptimo de Pareto. Denote la solución como $\bar{s}^i$. Interprete la condición de primer orden.

c) Si $\hat{s}^i > \bar{s}^i$, entonces eres una persona que maneja más rápido de lo socialmente óptimo. Entonces, si te aplicáramos una multa m^i por manejar muy rápido, ¿cuál es el valor de la multa para internalizar por completo la externalidad generada?

<u>Solución</u>

a) Con probabilidad $\gamma(s^i, s^j)$ la utilidad obtenida es $v^i(s^i) + \alpha w^i{}^\smile c^i$. Con probabilidad $1 - \gamma(s^i, s^j)$, la utilidad es $v^i(s^i) + \alpha w^i$. De sumar ambas utilidades ponderadas por sus probabilidades, tenemos la utilidad esperada:

$$v^i(s^i) + \alpha w^i{}^\smile c^i - \gamma(s^i, s^j)c^i$$

De derivar la utilidad esperada respecto de s^i e igualar a 0, obtenemos la condición de primer orden que nos da el nivel óptimo de $\hat{s}^i$ elegido:

$$\frac{\partial v^i(\hat{s}^i)}{\partial s^i} = \frac{\partial \gamma(\hat{s}^i, \hat{s}^j)}{\partial s^i} c^i$$

Esto nos dice que el agente i aumenta su velocidad s^i hasta que la utilidad marginal de la velocidad se iguale con el costo esperado para él de aumentar dicha velocidad (es decir, el costo de sufrir un accidente por la probabilidad de tener un accidente).

b) Un planificador social maximizaría la utilidad esperada de ambos agentes en conjunto:

$$\max\, v^1(s^1) + \alpha w^1 + v^2(s^2) + \alpha w^2{}^\smile c^i - \gamma(s^1, s^2)(c^1 + c^2)$$

De derivar la utilidad esperada respecto de cualquier s^i (ya sea s^1 o s^2) e igualar a 0, obtenemos la condición de primer orden que nos da el nivel óptimo de $\bar{s}^i$ elegido por el planificador social:

$$\frac{\partial v^i(\bar{s}^i)}{\partial s^i} = \frac{\partial \bar{(}\hat{s}^i, \bar{s}^j)}{\partial s^i}(c^i + c^j)$$

En este óptimo de Pareto, cada conductor i aumentará su velocidad s^i hasta que su utilidad marginal de la velocidad se iguale con el costo social esperado de esa velocidad (es decir, el costo de ambos conductores juntos al tener un accidente por la probabilidad de tener el accidente).

c) Comparando los resultados de ambos apartados, si imponemos una multa $m^i = c^j$ al problema individual, su condición de primer orden coincidiría con la del óptimo de Pareto. Así, la multa haría que el conductor i internalice la externalidad negativa de su velocidad sobre el conductor j, pues pagaría el costo de accidente del agente j.

15. ⋆⋆⋆ En una economía hay 2 empresas que producen un mismo bien. La empresa 1 tiene costos $c_1(q_1, q_2) = 2q_1^2+5q_1+q_2$ y la empresa 2 tiene costos $c_2(q_2, q_1) = q_2^2+3q_2$˘$4q_1$. Como se puede ver, los costos de cada empresa dependen de su producción propia y también de la producción de la otra empresa. La demanda del mercado es $p(Q) = 34-Q$, donde $Q = q_1 + q_2$.

   a) Cada empresa elige su nivel de producción al mismo tiempo y de forma independiente. Determine las producciones q_i de cada uno. Calcule los beneficios de cada uno. Calcule el excedente de consumidor, y el bienestar social.

   b) Ahora asuma que el gobierno nota la externalidad que la producción de uno genera en los costos del otro. Así, le permite a ambas empresas fusionarse. Determine los niveles de q_i elegidos por ambos y evalúe si las empresas decidirán fusionarse.

   c) Compare el bienestar social en ambos casos. ¿La fusión soluciona la externalidad negativa que la empresa 2 genera?

<u>Solución</u>

a) Podemos observar que la producción de la empresa 2 aumenta los costos de la empresa 1 (externalidad negativa) y la producción de la empresa 1 reduce los costos de la empresa 2 (externalidad positiva). Cada empresa maximiza por separado. La empresa 1 maximizará:

$$\max Pq_1 - c_1 = (34 - q_1 - q_2)q_1 - (2q_1^2 + 5q_1 + q_2),$$

lo que tras tomar condición de primer orden respecto de q_1 da un nivel óptimo $q_1 = \frac{29-q_2}{6}$. La empresa 2 maximizará:

$$\max Pq_2 - c_2 = (34 - q_1 - q_2)q_2 - (q_2^2 + 3q_2 - 4q_1),$$

lo que tras tomar condición de primer orden respecto de q_2 da un nivel óptimo $q_2 = \frac{31-q_1}{4}$. De resolver simultáneamente ambas cantidades halladas, obtenemos $q_1 = 3.69$ y $q_2 = 6.82$. Entonces, la cantidad total será $Q = 10.52$ y el precio (de resolverlo de la demanda) es 23.47.

Los beneficios serán $\pi_1 = 34.14$ y $\pi_2 = 107.97$ y los beneficios totales serían 142.11. Por otro lado, el excedente del consumidor es el triángulo debajo de la demanda y arriba del precio de equilibrio:

$$EC = 0.5(34 - 23.47) \cdot 10.52 = 55.39$$

Si definimos el bienestar social como la suma del EC y los beneficios, este sería $BS = 55.39 + 142.11 = 197.5$.

b) Si se fusionan, maximizarán su beneficio conjunto:

$$\max PQ - c_1 - c_2 = (34 - q_1 - q_2)(q_1 + q_2)\breve{}\,(2q_1^2 + 5q_1 + q_2)\breve{}\,(q_2^2 + 3q_2 - 4q_1)$$

De tomar condiciones de primer orden respecto de q_1 y q_2 y resolver las ecuaciones simultáneas, tenemos $q_1 = 3.6$ y $q_2 = 5.7$. Comparando, la empresa 2 (la que genera externalidad negativa) ahora produce menos, y lo opuesto sucede con la 1. Con estas nuevas producciones, ahora $Q = 9.3$ y el precio aumenta a 24.7. Los beneficios serán $\pi_1 = 39.3$ y $\pi_2 = 105.6$. Por lo tanto, $\pi = 144.9$ que es mayor que en el apartado anterior, por lo que las empresas preferirán fusionarse. Aunque π_2 ahora es menor, como el agregado es mayor, se pueden fusionar y la empresa 1 puede compensarle a la 2 e igual aumentan sus beneficios ambas.

c) Ahora, el excedente del consumidor sería:

$$EC = 0.5(34 - 24.7) \cdot 9.3 = 43.24$$

Por lo que el bienestar social sería 188.14. Con esto, la fusión aumenta los beneficios conjuntos y solucionan el problema de la externalidad. Sin embargo, reduce la producción, lo cual aumenta el precio y reduce el excedente del consumidor y bienestar total. Entonces, aunque la fusión internaliza las externalidades, el poder monopólico reduce bienestar.

16. $\star\star\star$ Una fábrica produce unidades de producción que contaminan. Su función de beneficios viene dada por $\pi = 10q - q^2$. La contaminación que genera un daño dado por la función $d = 3q^2$. El gobierno no conoce la función de beneficios de la fábrica, pero sí puede observar el daño hacia los consumidores generado por la misma. Además, el gobierno cree que los beneficios marginales de la fábrica son:

$$\frac{\partial \pi(q, a)}{\partial q} = 10 - 2aq,$$

donde el parámetro a puede ser igual a 1 o a 0.5, ambos con probabilidad de 0.5. Sin embargo, la fábrica sabe que $a = 1$ siempre (como se puede deducir de la función de beneficios conocida por la fábrica).

a) Halla la cantidad de contaminación de equilibrio q^E sin regulación del gobierno ni negociación con los consumidores.

b) Halla la mejor cuota $\hat{q}$ que el gobierno puede ponerle a la fábrica para maximizar el valor esperado del bienestar social

c) ¿Cómo es le pérdida de eficiencia social con la cuota?

<u>Solución</u>

a) La fábrica maximiza beneficios. Su condición de primer orden es $10 - 2q^E = 0$, por lo que $q^E = 5$.

b) El gobierno maximiza el bienestar social, es decir:

$$\max \pi(q, a) - d(q) = 0.5(10 - 2 \cdot 1 \cdot q) + 0.5(10 - 2 \cdot 0.5 \cdot q)\breve{}3q^2$$

De tomar condición de primer orden, obtenemos $\hat{q} = 4/3$.

c) Primero, hallemos la cantidad socialmente óptima que proviene de maximizar $\pi - d$ o $10 - 2q - 3q^2$. De la condición de primer orden obtenemos $q^* = 5/4$

El beneficio marginal real de imponer una cuota de $\hat{q} = 4/3$ es $10 - 2\hat{q} = 22/3$. Sin embargo, el beneficio marginal esperado por el gobierno es

$$0.5(10 - 2 \cdot 1 \cdot 4/3) + 0.5(10 - 2 \cdot 0.5 \cdot 4/3) = 8 < 22/3$$

La pérdida de eficiencia social es el área triangular delimitado por el cruce del daño marginal con el beneficio marginal real, el cruce del daño marginal con el beneficio marginal esperado por el gobierno y el valor del beneficio marginal real para la cantidad de este último cruce. Entonces, la PES es:

$$PES = 0.5(\hat{q} - q^*)(8 - 22/3) = 0.5(4/3 - 5/4)(8 - 22/3) = 1/36$$

17. ⋆⋆ En una economía hay 2 personas $i = 1, 2$ y dos bienes (x, y). El primero obtiene utilidad de consumir ambos bienes: $u_1 = u_1(x_1, y_1)$. El segundo obtiene utilidad por consumir y y del consumo de x del primer individuo: $u_2 = u_2(x_1, y_2)$. Las dotaciones de dinero para cada uno son Y_1 y Y_2.

a) Plantee las condiciones de primer orden de la maximización de utilidad del agente 1.

b) Halle las condiciones para que la canasta de consumo del agente 1 sea Pareto óptima y explique por qué la hallada en la sección anterior no es eficiente.

c) Identifique qué condiciones debería tener un impuesto τ al consumo de x_1 para que se alcance un resultado eficiente y explique si este impuesto mejoraría o empeoraría al agente 1.

<u>Solución</u>

a) El agente 1 maximiza su utilidad sujeto a su restricción presupuestaria:

$$L = u_1(x_1, y_1) + \lambda(Y_1 - x_1 - y_1)$$

De las CPO llegamos a:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{y_1}$$

La solución viene dada por esa ecuación y por la restricción presupuestaria: $Y_1 = x_1 + y_1$.

b) Estas asignaciones las obtenemos de añadir una restricción adicional para obtener un nivel mínimo de utilidad para el segundo agente:

$$L = u_1(x_1, y_1) + \lambda_1(Y_1 - x_1 - y_1) + \lambda_2(\bar{u_2} - u_2(x_1, y_2))$$

La solución nos lleva a:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{y_1}\left(1 + \lambda_2 \frac{\partial u_2/\partial x_1}{\partial u_1/\partial u_1/\partial y_1}\right)$$

Esta solución es diferente por el componente adicional que aparece en la mano derecha. Esta solución es eficiente porque internaliza la externalidad dada por $\partial u_2/\partial x_1 \neq 0$. Si esta fuera 0, entonces no existiría externalidad y la utilidad del segundo agente sería simplemente $u_2 = u_2(y_2)$ y la solución privada sería eficiente.

c) Ahora, la CPO de la solución privada sería

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{y_1}(1 - \tau)$$

Para que esta sea igual a la solución eficiente, necesitamos fijar:

$$-\lambda_2 \frac{\partial u_2/\partial x_1}{\partial u_1/\partial u_1/\partial y_1}$$

Si la externalidad es negativa ($\partial u_2/\partial x_1 < 0$), el impuesto sería positivo y el agente 1 estaría peor (pues consumiría menos, para dañar menos al agente 2). Si la externalidad es positiva ($\partial u_2/\partial x_1 > 0$), el impuesto sería negativo (un subsidio) y el agente 1 estaría mejor (pues consumiría más, para beneficiar más al agente 2).

18. ⋆⋆ Para ir de la ciudad 1 a la 2 se debe tomar un bus. La demanda q por tickets de bus depende de las horas h que toma este viaje. Esta relación de dependencia se da con la ecuación $h = 20 - 0.0005q$. La empresa de bus tiene ingresos $20q - 0.001q^2$ y costos $2q + 0.002q^2$.

    a) ¿Cuál es el número óptimo de viajes?

    b) A diferencia de los costos privados, el costo marginal social de los viajes es $20 + 0.002q$. ¿Qué impuesto se debería aplicar a la empresa de bus para llegar al óptimo social?

    <u>Solución</u>

    a) Maximizando beneficios (ingresos menos costos) llegamos a $q = 3000$.

    b) El impuesto debería ser igual al costo marginal social menos el costo medio de la empresa:

    $$\tau = 20 + 0.002 \cdot 3000^{\smile}(2 + 0.002 \cdot 3000) = 18$$

19. ⋆⋆ Hay dos firmas que fabrican metales, pero que contaminan el ambiente a la hora de producir. Sin embargo, ambas pueden implementar mejoras tecnológicas en sus procesos productivos para reducir la contaminación. La firma 1 puede reducir q_1 unidades de contaminación con un costo $c_1 = 1.5q_1^2$. La firma 2 hace lo mismo con un costo $c_2 = 0.75q_2^2$.

    a) Halle el nivel óptimo de reducción de contaminación para cada firma.

    b) Halle el nivel socialmente óptimo de reducción para cada firma: q_1 y q_2.

    c) Del resultado anterior podemos notar que $q_1 + q_2 = 1$. Usando eso, diga si sería eficiente exigir que cada firma reduzca $q_i = 0.5$.

    <u>Solución</u>

    a) El valor no negativo que minimiza los costos, en ambos casos, es $q_i = 0$. Esto tiene sentido: si nadie les obliga a reducir la contaminación, las firmas no querrán gastar innecesariamente en eso.

    b) El planificador social querrá maximizar $q_1 + q_2 - c_1(q_1) - c_2(q_2)$. De tomar condición de primer orden respecto de q_1 obtenemos $q_1 = 1/3$ y de tomar condición de primer orden respecto de q_2 obtenemos $q_2 = 2/3$.

c) No sería eficiente poner la cuota mencionada porque, dado el resultado socialmente óptimo, la firma 1 estaría reduciendo más que lo óptimo y la 2 estaría reduciendo menos que lo óptimo. Sería mejor permitir que uno le venda el derecho de contaminación al otro para llegar a la reducción de contaminación total deseada por el gobierno.

20. ⋆ Hay dos firmas idénticas. El costo de producción para la firma $i = 1, 2$ es $c(q_i) = 4q_i$. La producción total es $Q = q_1 + q_2$. La curva de demanda inversa del mercado es $P = 10 - Q$.

   a) Halle la cantidad de equilibrio producida por cada empresa y el precio del mercado.

   b) Ahora asuma que el proceso de producción de la industria contamina el ambiente y genera un costo marginal social de $CMgS = 2Q$. Calcule la pérdida de eficiencia social generada por el equilibrio hallado en la sección anterior.

<u>Solución</u>

   a) La firma 1 maximiza $\pi_1 = Pq_1 - c(q_1) = (10 - q_1 - q_2)q_1 - 4q_1$. La CPO nos da $q_1 = 3 - 0.5q_2$. Por simetría de costos, $q_1 = q_2$. De reemplazar eso en la expresión anterior llegamos a la solución $q_1 = q_2 = 2$. Por lo tanto, el precio de mercado es $P = 10 - 2 \cdot 2 = 6$.

   b) El costo marginal privado es 4, mientras el costo marginal social es $2Q$. Por lo tanto, el precio óptimo debería incorporar ambos costos: $P = 4 + 2Q$. Por lo tanto, $10 - Q = 4 + 2Q$. Esto nos da la cantidad socialmente óptima $Q^* = 2$ y el precio $P^* = 8$. Sin embargo, en la cantidad de equilibrio privado ($Q = 4$), el costo marginal social es $4 + 2 \cdot 4 = 12$ y el beneficio marginal social es la altura de la curva de demanda ($10 - 2 \cdot 4 = 6$). Entonces, la PES está dada por el triángulo:

$$PES = 0.5(4 - Q^*)(12 - 6) = 6$$

Referencias