11 - Bienes públicos

1. ⋆ José desea ir a un safari para cazar rinocerontes en áfrica. Su amigo Manuel intenta disuadirlo diciendo que dicha práctica genera la extinción de esos animales. Sin embargo, José argumenta que la caza legal contribuye a la conservación de las especies, pues genera que algunos negocios como los safaris (que se preocupan por la preservación de las especies) sean rentables. ¿Qué opina?

   Solución

   Si consideramos a los animales como bienes públicos, José tendría razón. Al existir los safaris y poseer dichos negocios los derechos de propiedad, se evita que exista una sobreexplotación del bien público. Note que si nadie tuviese el derecho de propiedad sobre las especies del áfrica cualquiera podría ir de caza sin pagar, lo que sí podría generar la extinción de algunas especies.

2. ⋆ Analice la veracidad del siguiente enunciado: "La existencia del "*free rider*" genera el problema de los bienes públicos".

   Solución

   El comentario es falso, pues es lo contrario. El problema de los bienes públicos se genera por sus características de no exclusión y no rivalidad, y a partir de dichas características tenemos incentivos a no aportar para la provisión privada del bien público y no revelar la verdadera valoración del bien(problema del *free rider*).

3. ⋆ Analice la veracidad del siguiente enunciado: "En ausencia de intervención gubernamental nunca se producirán bienes públicos en una economía de mercado".

   Solución

El enunciado es falso. Al respecto recordemos la sección 8.7.3 para notar que el aporte de cada agente i para la provisión del bien público (g_i) puede obtenerse mediante el equilibrio de Nash, de donde obtenemos que cada agente i aporta:

$$g_i^* = max\left\{D_i\left(w_i + \sum_{j\neq i} g_j^*\right) - \sum_{j\neq i} g_j^*, 0\right\}$$

Luego, si bien para algunos agentes $g_i^* = 0$, existirán agentes que aporten $g_j^* > 0$, típicamente los que más valoren el bien público[1]. En este sentido, existirá una subprovisión del bien público.

4. ⋆ En una economía, existen solo dos individuos, Lucho y Jaime, y la valoración marginal de ambos respecto de la décima unidad consumida de un bien público es 12 y 18 soles, respectivamente. Explique cuál debe ser la condición para que la producción óptima sea 10 unidades.

   Solución

   Para hallar la provisión óptima del bien público, usamos la regla de Samuelson. Por lo tanto, la suma de la tasa marginal de sustitución de cada individuo por la décima unidad (TMS_L^{10} y TMS_J^{10}) debe cumplir lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{2} TMS_i = CMg \quad \Rightarrow \quad 12 + 18 = 30$$

   Por lo tanto, la condición es que el CMg de la décima unidad sea 30.

5. ⋆ Sus vecinos se encuentran preocupados por el incremento del número de robos en su barrio. Existen 10 familias en su calle, que están dispuestas a pagar USD 2 cada una para tener más iluminación, independientemente del incremento en el número de focos de luz finalmente instalados. Si el costo de proveer "x" cantidad de focos de luz está dado por $c(x) = x^2$, ¿cuál es el número de focos de luz Pareto-eficiente que se debe proveer? Explique.

   Solución

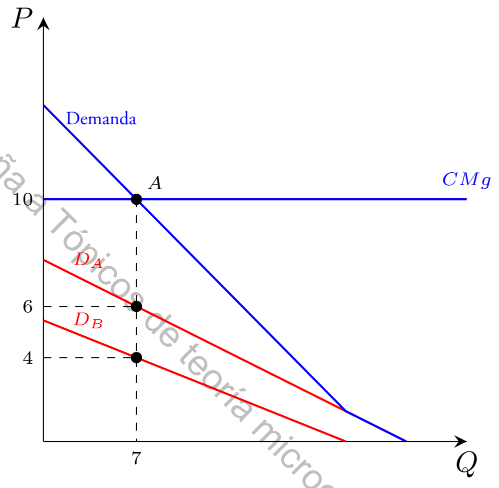
   La TMS_i = USD 2, y que el $CMg(x) = 2x$. Luego, la condición para proveer el nivel óptimo del servicio público es:

$$\sum_{i=1}^{10} TMS_i = CMg(x) \quad \Rightarrow \quad 20 = 2x$$

1 Notar que esto no necesariamente es cierto si la provisión del bien público es discreta (0 si no se provee y 1 si se provee).

Por lo tanto, la cantidad óptima de focos de luz será 10.

6. ⋆⋆ Considere el caso de una comunidad compuesta por dos personas, A y B, que desea construir un dique (para darle más realismo, puede pensar en dos *tipos* de personas). Asuma que la cantidad del bien público se define por la altura del dique y que la curva de costo marginal del bien es constante, de manera tal que cada unidad (o metro de altura) del dique tiene un costo de construcción de S/. 10. A partir del siguiente gráfico, responda:



   a) ¿Se podría financiar el dique si cada individuo tiene que financiar el íntegro de su construcción?

   b) ¿En qué punto ocurrirá la provisión óptima del bien público?

   c) Si se le cobrara a cada individuo de acuerdo con el beneficio que le reporta el dique. ¿Cuánto pagaría cada tipo de individuo?

   d) ¿Cómo se compara la situación anterior con aquella en la cual todos los individuos pagan la misma cantidad por la provisión del bien?

   e) ¿Qué problema surge con la existencia de bienes públicos cuando existen 2 o más agentes?

<u>Solución</u>

   a) No sería posible porque la máxima disposición a pagar por el bien público de A y de B, reflejada en sus curvas de demandas, es inferior al costo mínimo de provisión del bien (que en este caso es el CMg igual a S/. 10).

b) Para determinar la provisión óptima del bien, se deben agregar las curvas de demandas individuales de manera individual. El punto de provisión óptima del bien público se encuentra en el punto en el cual la demanda social del bien público se cruza con la curva de costo marginal de su provisión (punto A).

c) A partir de las curvas de demanda, los pagos de los individuos A y B serían S/.6 y S/.4 respectivamente.

d) Bajo un esquema de pagos iguales, cada persona pagaría S/. 5. Si bien, es posible proveer la cantidad óptima del bien público, los individuos no necesariamente pagarían su valoración marginal del bien público, por lo que no es un esquema eficiente.

e) Cuando existen dos individuos o más, es muy probable que alguno(s) de ellos pensaran que les es posible "perderse en la masa" y evitar realizar el pago por el bien, y aún así recibirlo. De esta manera, se incrementa el riesgo de que existan free riders y, por lo tanto, se vuelve probable la subprovisión del bien público.

7. ⋆⋆ El sector privado de una provincia opera bajo competencia perfecta pero tiene pocos incentivos para participar en la ejecución de proyectos de agua y saneamiento en algunos centros poblados muy alejados debido al bajo precio (USD 30 por metro cúbico). En dichos lugares, el inversionista enfrenta un costo total igual a $C = 20Q + 2Q^2$.

   Sabemos que este tipo de proyectos generan una serie de efectos positivos, entre ellos la reducción de costos de asistencia médica al generar una menor probabilidad de contraer enfermedades diarréicas y otros episodios infecciosos. Esto ha sido corroborado por múltiples evaluaciones de impacto para este tipo de proyectos, de donde se concluye que las familias ahorran alrededor de USD 10 por cada metro cúbico de agua potable al que acceden.

   a) ¿Cuántos metros cúbicos de agua asignará el sector privado a los centros poblados?

   b) ¿Es económicamente eficiente esa cantidad de agua consumida? Comente.

   c) Usted ha sido contratado como asesor del Ministro de Salud. Dado que conoce la baja iniciativa privada para participar en proyectos de agua y saneamiento, ¿qué acciones implementará su ministerio?

   d) Si el Estado no pudiese intervenir, ¿existiría alguna otra solución?

   e) Si se pagara un subsidio que internalice la externalidad, ¿cuál sería el nuevo equilibrio?

Solución

a) El inversionista maximiza sin considerar la externalidad positiva que está generando en la sociedad:

$$\max_{Q} 10Q - 2Q^2$$

Por lo que la asignación privada es $Q = 2.5$.

b) No lo es. La producción de Q genera beneficios que no son considerados, por lo que socialmente es mejor que se produzca más.

c) Si el estado tuviera la información disponible podría subsidiar a las empresas privadas para que internalicen el valor social del proyecto (es decir, que incluyan la externalidad). Así, tendría que utilizar un subsidio pigouviano igual al valor de la externalidad para que se desarrollen el número óptimo de proyectos de este tipo.

d) En caso el Estado no pueda intervenir, podría pasar que haya un acuerdo privado entre los consumidores y el inversionista. Los usuarios tendrían que pagar un monto mayor para propiciar a que el inversionista produzca más. No obstante, son tantos usuarios que llegar a un acuerdo se hace muy complicado por los altos costos de transacción.

e) Se modificaría la función de beneficios de forma que el problema de la empresa sería:

$$\max_{Q} 20Q - 2Q^2$$

Por lo que la nueva producción sería $Q = 5$, el doble que en la situación inicial.

8. ⋆⋆ En una economía con dos bienes, uno privado (X) y uno público (Y). Además existen n personas, donde cada individuo i tiene la siguiente función de utilidad:

$$U_i = X_i + v_i(Y), \text{ donde } v_i(Y) = \ln Y^i$$

a) Calcule el nivel óptimo de producción del bien público (asuma que $P_x = P_y = 1$).

b) Si cada individuo debe pagar en función de su valoración del bien público, ¿cuál será el porcentaje pagado por el individuo i de cada unidad del bien público?

c) ¿Qué ocurrirá con la cuota total pagada por cada individuo conforme n se incremente?

<u>Solución</u>

a) La condición es que la suma de las tasas marginales de sustitución de cada individuo sea 1. Entonces:

$$\frac{1}{Y}+\frac{2}{Y}+\frac{3}{Y}+...+\frac{n}{Y}=1 \quad \Rightarrow \quad Y=\frac{n(n+1)}{2}$$

Este es el nivel óptimo de provisión del bien público. Note que es único y que es independiente de la dotación inicial. Esto se debe a la forma de la función de utilidad (cuasilineal).

b) El individuo i maximiza:

$$L = X_i + i\ln Y + \lambda(I_i - X_i - t_i Y)$$

Se deriva respecto a X_i e Y, y obtenemos el precio $t_i = i/Y$. Note que Y es la provisión total del bien público, por lo que el pago de cada individuo i/Y es también el porcentaje aportado. Esta es una característica adicional que obtenemos con las funciones de utilidad cuasilineales.

c) Dado que $Y = (n)(n+1)/2$, el pago de cada individuo es:

$$t_i = \frac{2i}{n(n+1)}$$

Por lo tanto, es posible notar que conforme $n \to \infty$, $t_i \to 0$; sin embargo, note que T_i (la recaudación total) se mantiene constante.

9. ⋆⋆ Supongan la Sra. Alfaro y el Sr. Beteta acaban de terminar una relación matrimonial. Ellos acordaron que el Sr. Beteta criará al único hijo de la relación. Ambos padres están en armonía luego de la relación y están involucrados en el bienestar del pequeño. Sus preferencias están dadas por las funciones:

$$U_i(x,y) = x^{\alpha_i} y_i$$

donde y_i denota la cantidad de Soles "consumida", en un año, directamente por los respectivos padres y x denota los soles consumidos al año por el hijo. El consumo del niño es simplemente la suma de contribuciones de ambos padres; las mismas que son voluntarias. Asuma que $\alpha_A = 1/4$ y $\alpha_B = 1/3$.

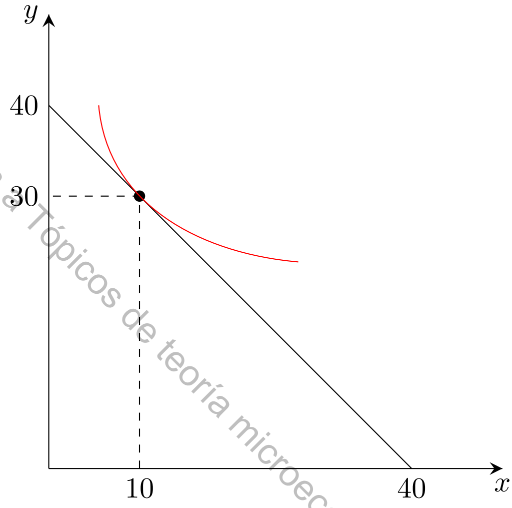
a) Suponga que la mamá no puede contribuir al consumo del niño; de modo que el Sr. Beteta debe usar sus 40 mil soles anuales para pagar su propio consumo (y_B) y el de su hijo (x). ¿Qué niveles de x e y_B escogerá?

b) Si, ahora, la Sra. Alfaro sí va a contribuir al consumo de su hijo; pero, primero, quiere observar cuánto contribuye el Sr. Beteta (denote ese monto por s_A). Suponga que el Sr. Beteta hace lo mismo; es decir, ambos padres toman la contribución del otro como dada. Si el Sr. Beteta tiene un ingreso anual de 40 mil soles y la Sra. Alfaro tiene un ingreso anual de 48 mil soles, ¿cuánto serán sus contribuciones de ambos padres en equilibrio?¿Cuán felices son los padres en ese equilibrio?

c) Muestre que la asignación hallada en la parte b) es ineficiente, indicando una asignación de los ingresos de los padres que mejora ambas utilidades.

<u>Solución</u>

a) De la condición de primer orden tenemos que $TMgS^{B}_{y,x} = y_B/(3x)$, y como $CMg = 1$. Igualando ambas expresiones y reemplazando eso en la R.P. $x + y_B = x + 3x = 40$, obtenemos que $x = 10$, $y_B = 30$.



b) Tenemos:

- $TMgS^{B}_{y,x} = (1/3)(40 - s_B)/(s_A + s_B) = 1$, luego: $3s_A + 4s_B = 40$ (Función de reacción).
- $TMgS^{A}_{y,x} = (1/4)(48 - s_A)/(s_A + s_B) = 1$, luego: $5s_A + 4s_B = 48$ (Función de reacción)

Resolviendo, obtenemos que $s_A = 4$,$s_B = 7$,$x = 11$,$y_A = 44$,$y_B = 33$. Por lo que $U_A(11, 44) = 80.13$ y $U_B(11, 33) = 73.39$

c) Una posibilidad es que ambos aumenten en 1 la contribución al consumo del hijo; de forma que $x = 13$, $y_A = 43$, $y_B = 32$, con lo cual $u_A(13, 43) = 81.65 > u_A(11, 44) = 80.13$ y $u_B(13, 32) = 75.24 > u_A(11, 33) = 73.39$.

10. ⋆⋆ Un municipio tiene 83 habitantes cuya función de utilidad es $U_j(x, y) = xy^j$, para $j = 1, ..., 83$, que se deriva del consumo de un bien público "x" y de un bien privado "y". Además, lo precios unitarios de x e y son USD 100 y USD 20, respectivamente.

Por otro lado, cada habitante genera un ingreso de USD 200, que debe pagar íntegramente al municipio en forma de impuestos, quien utiliza la recaudación tributaria para comprar x e y, y así asignarlo equitativamente entre todos los habitantes.

a) Halle la provisión socialmente eficiente de x. *Hint:* $\sum_{j=1}^{83} j^{-1} \approx 5$.

b) Si la migración causa que el distrito albergue 83 nuevos habitantes, ¿la provisión óptima de bienes públicos se duplicaría?

Solución

a) La provisión óptima del bien público se obtiene a partir de la siguiente condición:

$$\sum_{j=1}^{83} \frac{y}{jx_j} = \frac{100}{20}$$

Como el municipio entregaría los bienes en cantidades iguales, entonces $x_i = x_{-i} = X$, por lo que tenemos:

$$\frac{y}{x}\sum_{j=1}^{83} \frac{1}{j} = \frac{100}{20} \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Luego, de la RP $100x + 20y = 16\,600$, tenemos que $x = y \approx 138.3$. Por lo tanto, la utilidad de cada individuo será $U_j = (138.3)^{j+1}$.

b) Note que la sumatoria de la serie armónica $1/j$ aumentará aproximadamente a 5.7. Por lo que la combinación óptima de x e y ya no será tal que $x = y$ (ahora será $y = w0.88x$), por lo que el aumento del presupuesto en el doble no generará que y se duplique. De hecho, es posible obtener que el nuevo valor será $y \approx 248.43$.

11. ⋆⋆ Considere una economía con tres consumidores (A, B y C) y dos bienes, uno privado (X) y otro público (Y), con las preferencias de los individuos representadas por las siguientes funciones de utilidad:

$$U_A = X_A + \frac{3}{5}\ln Y$$

$$U_B = X_B + \frac{1}{6}\ln Y$$

$$U_C = X_C + \frac{2}{3}\ln Y$$

Se sabe, además, que todos los agentes cuentan con un ingreso de 20 unidades monetarias y que la valoración de los bienes en el intercambio es $p_y = p_x = 1$.

a) Halle la solución competitiva e interprete los resultados.

b) Determine la condición que garantiza el óptimo social y halle la cantidad consumida del bien público en dicho óptimo.

c) Si se desea que los individuos paguen de acuerdo con su valoración del bien, ¿qué porcentaje de cada unidad del bien público debe ser pagada por cada individuo y cuál será la cantidad consumida del bien privado por cada uno de ellos? Esta solución es la conocida como la tarificación (precios) Lindahl.

<u>Solución</u>

a) Para la solución competitiva, cada jugador enfrentará el siguiente problema de optimización:

$$\max_{X_i, Y} X_i + a_i \ln Y \quad \textit{s.a.} \quad X_i + Y = 20$$

Planteamos el lagrangiano y obtenemos las condiciones de primer orden:

$$L = X_i + a_i \ln Y + \lambda(20 - X_i - Y)$$

$\partial L/\partial X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \lambda = 0$
$\partial L/\partial Y = 0 \quad \Rightarrow \quad a_i/Y - \lambda = 0$
$\partial L/\partial \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 20 - X_i - Y = 0$

Donde a_i es igual a $3/5$, $1/6$ o $2/3$ dependiendo si i es A, B o C. De las CPO obtenemos que $Y = a_i$ y $X_i = 20 - a_i$.

Podemos ver que esta solución no es óptima, porque el consumo del bien público de los tres agentes no es el mismo.

b) Para obtener la cantidad del bien público socialmente óptima se debe cumplir lo siguiente:

$$TMgS^A_{Y,X} + TMgS^B_{Y,X} + TMgS^C_{Y,X} = \frac{p_y}{p_x} = 1$$

De donde tenemos que:

$$\frac{3}{5Y} + \frac{1}{6Y} + \frac{2}{3Y} = 1 \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{43}{30}$$

Por lo que la única cantidad socialmente óptima del bien público es $43/30$.

c) En este caso, el problema de optimización del agente i cambia al siguiente:

$$\max_{X_i, Y} X_i + a_i \ln Y \quad \textit{s.a.} \quad X_i + t_i Y = 20$$

Planteamos el lagrangiano y obtenemos las condiciones de primer orden:

$$L = X_i + a_i \ln Y + \lambda(20 - X_i - t_i Y)$$

$\partial L/\partial X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \lambda = 0$
$\partial L/\partial Y = 0 \quad \Rightarrow \quad a_i/Y - t_i\lambda = 0$
$\partial L/\partial \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 20 - X_i - t_i Y = 0$
De donde obtenemos que $t_i = a_i/Y$. Por lo tanto, si cada individuo paga de acuerdo a su valoración marginal tenemos:

$$\frac{3}{5Y} + \frac{1}{6Y} + \frac{2}{3Y} = p_y = 1$$

De donde obtenemos que $Y = 43/30$, la provisión óptima. Note que $t_i = a_i/Y$ es al mismo tiempo el porcentaje del bien público que pagará el agente i. Finalmente, note que el consumo privado sigue estando definido por $X_i = 20 - a_i$, por lo que el consumo será el mismo que fue definido en la parte a).

12. ⋆⋆ Dos amigos artistas deciden compartir un departamento. Ellos obtienen utilidad de los cuadros colgados en la pared (C) y de las copas de vino que toman (V). La función de utilidad está dada por:

$$U_i = C^{1/3} V_i^{2/3}$$

Para $i = 1, 2$. Si cada individuo tiene USD 300 para gastar y los precios de cuadros y vinos son $p_c = 100$ y el $p_v = 0.20$.

Halle el nivel eficiente de compra de cuadros y determine la utilidad de cada uno si deciden repartirse por igual el costo de los cuadros y utilizar el resto para comprar vino. ¿Qué pasaría si cada uno no revelase su verdadera valoración por los cuadros?

Solución

Recordemos que el nivel óptimo del bien público se obtiene de $\sum_i TMgS^i_{v,c} = p_c/p_v$. Por otro lado, note que $TMgS^i_{v,c} = V_i/2C$, por lo que tenemos:

$$\frac{V_1 + V_2}{2C} = \frac{100}{0.2} \quad \Rightarrow \quad V_1 + V_2 = 1\,000C$$

Luego, de la restricción presupuestaria conjunta $100C + 0.2(V_1 + V_2) = 600$, obtenemos que $C = 2$ y $V_i = 1\,000$. Luego, la utilidad de cada individuo es $U_i = (2)^{1/3}(1\,000)^{2/3} \approx 126$.

Si los jugadores no revelasen su verdadera valoración, se podría llegar a una provisión del bien público (cuadros) mucho menor que la óptima, o incluso podría no proveerse el bien público. Por ejemplo, si la suma de valoraciones de cada uno de ellos es exactamente igual al costo marginal de obtener el primer cuadro, y uno muestra una valoración menor, no se compraría ningún cuadro.

13. $\star\star\star$ Varios vecinos $i = 1, 2, \ldots, I$ en un pueblo intentan acordar cuánto reciclaje r_i debe hacer cada uno. Sea r_{-i} la suma de los gastos de todos los vecinos sin incluir al vecino i y sean a, b constantes tal que $a > b > 0$. El beneficio neto π_i que cada vecino recibe por su gasto y el de los demás vecinos es el siguiente:

$$\pi_i(r_i, r_{-i}) = \left(a - r_i + \frac{r_{-i}}{I}\right) - br_i$$

a) Halle el nivel de reciclaje de cada vecino en equilibrio, r^*.

b) Halle el nivel de reciclaje de cada vecino en el óptimo de Pareto, r^O. Compare ambos equilibrios.

<u>Solución</u>

a) El vecino i maximiza la función de beneficios del enunciado y su CPO nos indica:

$$r_i^* = \frac{a-b}{2} + \frac{r_{-i}}{2I}$$

Como la función de beneficios es la misma para todos los vecinos, entonces $r_i^* = r_j^* = r^*$. Como este óptimo es el mismo para cada vecino, la suma de reciclajes de los demás es simplemente $r_{-i}^* = (I-1)r^*$. Reemplazando en la expresión anterior tenemos:

$$r^* = \frac{I}{I+1}(a-b)$$

b) El planificador social maximiza la suma de todos los beneficios (el beneficio de uno y el beneficio de todos los demás) y elige todas las cantidades de reciclaje. Su problema sería maximizar:

$$\left(a - r_i + \frac{r_{-i}}{I}\right) r_i {}^{\smile} br_i + \sum_{j \neq i} \left[\left(a - r_j + \frac{r_{-j}}{I}\right) r_j {}^{\smile} br_j\right]$$

El planificador maximiza todos los reciclajes. El reciclaje del vecino i sale de la CPO:

$$-r_i + \left(a - r_i + \frac{r_{-i}}{I}\right) {}^{\smile} b + \sum_{j \neq i} \frac{r_j}{I} = 0$$

Imponiendo simetría nuevamente, tenemos $r_i^O = r_j^O = r^O$. Por lo tanto, $r_{-i}^O = (I-1)r^O$. De reemplazar esto en la expresión anterior, llegamos a:

$$r^O = \frac{I}{2}(a-b)$$

Podemos ver que siempre que haya más de un vecino, el óptimo de Pareto será mayor que el equilibrio privado ($r^O > r^*$).

14. $\star\star\star$ Considere un recurso de uso común operado por una firma por dos períodos, extrayendo x_i unidades en el primer período y q_i unidades en el segundo. La función de costos en el primer período es x_i^2/θ y en el segundo es $\frac{q_i^2}{\theta-(1-\beta)x_i}$. El parámetro θ refleja la abundancia inicial del stock (si hay bastante del recurso, los costos de extracción son menores). El parámetro β es la tasa de regeneración del recurso. Podemos ver que si la regeneración es total ($\beta = 1$), entonces los costos en ambos períodos serían iguales. El precio de venta de cada unidad extraída es 1. El factor de descuento es δ.

   a) Halle la extracción óptima de ambos períodos usando inducción hacia atrás.

   b) Asuma que en el segundo período entrará otra firma. Ahora, los costos del segundo período para la firma i es $\frac{(q_i+q_j)q_i}{\theta-(1-\beta)x_i}$. Halle la extracción óptima de ambos períodos usando inducción hacia atrás.

<u>Solución</u>

a) En el segundo período, dado que eligió x_i en el primer período y lo vendió al precio de 1, la función de beneficios a maximizar sería:

$$q_i - \frac{q_i^2}{\theta-(1-\beta)x_i}$$

De tomar la CPO respecto de q_i e igualar a 0 obtenemos:

$$q_i(x_i) = \frac{\theta-(1-\beta)x_i}{2}$$

Con eso, en el primer período decidirá maximizar el valor presente de sus beneficios, dado por:

$$x_i - \frac{x_i^2}{\theta} + \delta\left(q_i(x) - \frac{q_i^2(x)}{\theta-(1-\beta)x_i}\right),$$

De tomar la CPO respecto de x_i e igualar a 0 obtenemos:

$$x_i = \frac{\theta(4-(1-\beta)\delta)}{8}$$

De reemplazar esa extracción del primer período en la expresión para la extracción del segundo período, obtenemos:

$$q_i(x_i) = \frac{\theta(4+4\beta+(1-\beta)^2\delta)}{16}$$

b) En el segundo período, dado que eligió x_i en el primer período y lo vendió al precio de 1, la función de beneficios a maximizar sería:

$$q_i - \frac{(q_i + q_j)q_i}{\theta - (1-\beta)x_i}$$

De tomar la CPO respecto de q_i e igualar a 0 obtenemos:

$$q_i(q_j, x_i) = \frac{\theta - (1-\beta)x_i}{2} - \frac{1}{2}q_j$$

Podemos ver que si $q_j = 0$ (si no hay entrada de otra firma), entonces el resultado sería igual que en el apartado anterior. Sin embargo, como sí hay entrada, entonces la extracción de la incumbente se reduce. Por simetría, la extracción óptima de la nueva firma sería la misma. Reemplazando eso, podemos hallar que:

$$q_i(x_i) = q_j(x_i) = \frac{\theta - (1-\beta)x_i}{3}$$

Con eso, en el primer período decidirá maximizar el valor presente de sus beneficios, dado por:

$$x_i - \frac{x_i^2}{\theta} + \delta\left(q_i(x) - \frac{[q_i(x) + q_j(x)]q_i(x)}{\theta - (1-\beta)x_i}\right),$$

De tomar la CPO respecto de x_i e igualar a 0 obtenemos:

$$x_i = \frac{\theta(9 - (1-\beta)\delta)}{18}$$

De reemplazar esa extracción del primer período en la expresión para la extracción del segundo período, obtenemos:

$$q_i(x_i) = q_j(x_i) = \frac{\theta(9 + \delta + \beta[9 - (2-\beta)\delta])}{54}$$

15. ⋆⋆⋆ En una industria hay N firmas que compiten por cantidades y se enfrentan a una demanda lineal $p(Q) = a - bQ$ y costos marginales constantes c, donde $a > c > 0$.

a) Asuma que M firmas se fusionan, donde $M \leq N$. Halle el número de firmas que harán beneficios tras fusionarse mayores que antes de fusionarse. Identifique la participación de mercado que incentiva a las firmas a fusionarse rentablemente, $\alpha = M/N$.

b) Ahora, las firmas deben pagar un impuesto τ por unidad producida. El planificador social querrá maximizar bienestar social (BS) dado por $BS = EC + EP + T - dQ^2$. Es decir, el BS es la suma de excedente del consumidor, excedente del productor, recaudación fiscal y un descuento por la contaminación que la producción genera. Halle los mismos elementos que en el apartado anterior, esta vez con la industria sujeta a la regulación ambiental.

c) Comente en las diferencias para el α hallado en ambas secciones.

Solución

a) Podemos escribir la función de beneficios de la firma i, denotando a Q_{-i} como la suma de todas las cantidades producidas por todas las firmas menos la i. Entonces, $Q = q_i + Q_{-i}$. Así, el problema es maximizar:

$$\pi_i = pq_i \breve{}\, cq_i = (a - bQ_{-i} - bq_i)q_i - cq_i$$

La CPO da

$$a - bQ_{-i} - 2bq_i - c = 0$$

Como todas las firmas son idénticas, podemos reemplazar $Q_{-i} = (N-1)q_i$. Así, la cantidad que producirá cada firma es

$$q_i = \frac{a-c}{b(1+N)}$$

La cantidad total de mercado sería $Q = Nq_i = \frac{N(a-c)}{b(1+N)}$ y el precio (de reemplazar en la demanda) sería $\frac{a+cN}{N+1}$. Así, los beneficios de la empresa son $\pi_i = \frac{(a-c)^2}{b(1+N)^2}$. Ahora, si M firmas se fusionan, quedarán $N - M + 1$ firmas. Esto da beneficios a la gran firma fusionada iguales a $\pi_i = \frac{(a-c)^2}{b(1+N-M+1)^2}$. Por lo tanto, las firmas decidirán fusionarse si dicho beneficio es mayor que el de no fusión:

$$\frac{(a-c)^2}{b(2+N-M)^2} \geq M\frac{(a-c)^2}{b(1+N)^2}$$

Esto sucederá si $M \geq 0.5(3 + 2N - \sqrt{5+4N})$. Por lo tanto, la participación de mercado que hace que las firmas se fusionen es:

$$\alpha = \frac{M}{N} = \frac{3 + 2N - \sqrt{5+4N}}{2N}$$

b) Ahora, el problema es maximizar:

$$\pi_i = pq_i \breve{}\,(c+\tau)q_i = (a - bQ_{-i} - bq_i)q_i - (c+\tau)q_i$$

De la misma forma, resolviendo obtenemos

$$q_i = \frac{a-c-\tau}{b(1+N)}$$

Ahora, hallemos la producción socialmente óptima según la función de bienestar social del planificador social:

$$BS = EC + EP + T - dQ^2 = 0.5[a-(a-bQ)Q] + [(a-bQ)Q-(c+\tau)Q] + \tau Q\breve{\ } dQ^2$$

De tomar CPO respecto de Q obtenemos que la producción óptima es $Q = \frac{a-c}{b+2d}$, por lo que cada firma producirá $q_i = \frac{a-c}{(b+2d)N}$. Queremos que la maximización privada nos dé como resultado la producción socialmente óptima. En otras palabras:

$$\frac{a-c-\tau}{b(1+N)} = \frac{a-c}{(b+2d)N}$$

Eso da como resultado, que el impuesto óptimo es $\tau = \frac{(a-c)(2dN-b)}{(b+2d)N}$, lo cual nos muestra que a mayor cantidad de firmas, el impuesto debe ser mayor. Los beneficios serían:

$$\pi_i = \frac{b(a-c)^2}{(b+2d)^2 N^2}$$

Y cuando hay fusión de M firmas y por lo tanto quedan $N - M + 1$ firmas, los beneficios de la firma fusionada son:

$$\pi_i = \frac{b(a-c)^2}{(b+2d)^2(1-M+N)^2}$$

Entonces, las firmas decidirán fusionarse si esto le da mayores beneficios que no hacerlo:

$$\frac{b(a-c)^2}{(b+2d)^2 N^2} \geq \frac{b(a-c)^2}{(b+2d)^2(1-M+N)^2}$$

El M crítico que resuelve eso es $M = 0.5(1 + 2N - \sqrt{1+4N})$. Por lo tanto, la participación de mercado que hace que sea rentable fusionarse es:

$$\alpha = \frac{M}{N} = \frac{1 + 2N - \sqrt{1+4N}}{2N}$$

c) De realizar varios cálculos podemos notar que α es mayor sin regulación que con regulación. La fusión reduce el número de firmas en la industria, por lo que aumenta los beneficios de cada una. Sin embargo, ante una regulación, este beneficio adicional es aún mayor, pues además del poder de mercado, reduce el impuesto que el gobierno debe poner. Así, no se necesita una participación de mercado tan alta para que sea rentable fusionarse.

16. $\star\star\star$ Hay N personas que deciden al mismo tiempo pero independientemente cuántos soles contribuir para un bien público. Cada uno tiene una función de utilidad $u(x_i, G) = x_i^{1-\alpha} G^{\alpha}$, donde $G = \sum_{j=1}^{n} g_j$ son las contribuciones agregadas. El precio del bien público es 1.

a) Plantee el problema de maximización del agente i. Halle las demandas x_i y G del bien privado y público, respectivamente.

b) Asuma que ordenamos a las personas según su riqueza, por lo que $w_1 \geq w_2 \geq \ldots \geq 2_N$. Halle las condiciones para w_i y α para que haya un equilibrio en que solo la persona más rica contribuye ($g_1 = G$ y $g_j = 0,\ \forall j > 1$).

c) Denote a G_k como las contribuciones agregadas en un equilibrio en que la riqueza total W se divide en partes iguales entre k personas. Halle el valor de G_k y muestre que este tiende a 0 cuando k tiende a infinito (se produce muy poco bien público cuando hay muchos contribuyentes).

<u>Solución</u>

a) El problema es maximizar la utilidad

$$u(x_i, G) = x_i^{1-\alpha} G^{\alpha} = x_i^{1-\alpha} \left(g_i + \sum_{i \neq j} g_j \right) \alpha,$$

sujeto a $px_i + g_i = w_i$. Podemos insertar la restricción en la función de utilidad y esta se convierte en:

$$u(x_i) = x_i^{1-\alpha} \left(w_i \breve{} px_i + \sum_{i \neq j} g_j \right) \alpha,$$

De maximizar respecto de x_i y reemplazar la restricción presupuestaria podemos llegar al consumo privado y contribución individual óptima:

$$x_i = \frac{1}{p}(1-\alpha) \left(w_i + \sum_{i \neq j} g_j \right) \wedge g_i = \alpha w_i \breve{} (1-\alpha) \sum_{i \neq j} g_j$$

De ahí podemos ver que la persona i contribuirá más mientras los demás contribuyan menos.

b) Necesitamos hallar la condición para que la persona $i = 2$ no contribuya. Por orden, todos los demás tampoco contribuirán pues sus riquezas son menores. La condición sería:

$$g_2 = \alpha w_2 \breve{} (1-\alpha) g_1 \leq 0$$

Esto nos da $g_1 \geq \frac{\alpha}{1-\alpha} w_2$. Por otro lado, tenemos que si $\sum_{j \neq 1} = 0$ (lo que queremos hallar), entonces $g_1 = \alpha w_1$. Por lo tanto, la condición se convierte en:

$$g_1 = \alpha w_1 \geq \frac{\alpha}{1-\alpha} w_2 \rightarrow w_1 \geq \frac{1}{1-\alpha} w_2$$

c) Del resultado del primer apartado, tendríamos:

$$x_i = \frac{(1-\alpha)(W/k + \sum_{i \neq j} g_j)}{p} \wedge g_i = \alpha W/k^{\smile}(1-\alpha)\sum_{i \neq j} g_j$$

Sumando las contribuciones al bien público:

$$G_k = \sum_{k=1}^{k} g_k = \alpha W^{\smile}(1-\alpha)(k-1)G_k$$

Resolviendo eso, obtenemos finalmente:

$$G_k = \frac{\alpha W}{1 + (1-\alpha)(k-1)}$$

Como podemos ver, en el límite en que $k \to \infty$, G_k tiende a 0.

17. ⋆⋆ Hay N personas que deciden juntarse para compartir una casa. La función de utilidad de cada uno es:

$$U = 0.2ln(V) + 0.8ln(A),$$

Donde V es la cantidad de ventanas que tiene la casa y A es el alimento que consume cada uno. Además, cada uno tiene S/ 500, el precio de la ventana es $p_V = 100$ y el de los alimentos es $p_A = 10$.

a) ¿Cuáles serían los consumos si cada uno viviera solo?

b) Demuestre que si viven juntos, la cantidad eficiente del bien público (ventanas) es igual a la cantidad de personas que comparten la casa.

Solución

a) De plantear el lagrangiano y resolverlo obtenemos $V = 1$ y $A = 40$.

b) Ahora, el lagrangiano del planificador social sería:

$$L = [0.2ln(V) + 0.8ln(A)]N + \lambda \left(500N^{\smile}100V^{\smile}10 \sum_{i=1}^{N} \right)$$

De resolver el lagrangiano, obtenemos $V = N$.

18. ⋆ ¿Un parque nacional es un bien público? ¿Cómo debería ser el precio de un ticket de entrada al parque?

Solución

Es un bien público porque es no rival y no excluyente. Es no rival porque, si uno se encuentra disfrutando de él, otra persona puede entrar y disfrutarlo de igual manera. Es no excluyente porque cualquiera que desee puede ingresar gratuitamente. Además, este precio es 0 porque añadir un visitante adicional representa un costo marginal nulo. Por otro lado, sí se justificaría cobrar un precio mayor a 0 si la presencia de más personas lleguen a congestionar el parque y ponga en peligro el ecosistema.

19. ⋆⋆ En una economía hay 2 personas $i = 1, 2$ y dos bienes: X y Y. La utilidad de cada persona es $u_i = 2ln(X_i) + ln(Y)$. Entre ambas personas, tienen 100 soles, por lo que la restricción presupuestaria es $X_i + Y_i = 100$. $Y = Y_1 + Y_2$ es un bien público y el precio de X y Y es 1.

   a) Halle la cantidad óptima de Y desde el punto de vista privado.

   b) Halle la cantidad óptima de Y desde el punto de vista social.

   c) Asuma que el gobierno exige que cada uno contribuya 5 soles al bien público. Ahora, $Y = Y_1 + Y_2 + 10$, donde Y_i son las contribuciones voluntarias. ¿Será posible llegar al óptimo social? Halle el nuevo óptimo privado.

<u>Solución</u>

a) El problema de cada uno es maximizar su utilidad. Podemos reemplazar la restricción dentro de la función de utilidad, por lo que el problema es maximizar $2ln(100 - Y_i) + ln(Y_i + Y_j)$. La CPO respecto de Y_i nos da $Y_i = \frac{100-2Y_j}{3}$. Por simetría, $Y_i = Y_j$. Así, $Y_i = Y_j = 20$ y $Y = 40$.

b) La tasa marginal de sustitución es:

$$TMgS_i = \frac{UMgY_i}{UMgX_i} = \frac{\frac{1}{Y_i+Y_j}}{\frac{2}{X_i}} = \frac{X_i}{2Y}$$

La suma de tasas marginales de sustitución se iguala con el costo marginal (1).

$$TMgS_i + TMgS_j = \frac{X_i + X_j}{2Y} = \frac{100 - Y_i + 100 - Y_j}{2F} = \frac{200 - Y}{2Y} = 1$$

Por lo tanto, $Y = 66.7$.

c) Ahora la utilidad a maximizar es $u_i = 2ln(X_i) + ln(Y_i + Y_j + 10)$ y la restricción presupuestaria es $X_i + Y_i = 95$. De resolver este problema, llegamos a $Y_i + Y_j = 15$. Esto, sumado con las contribuciones obligatorias, dan el mismo resultado privado del primer apartado. Así, este resultado difiere del óptimo social.

20. ⋆⋆ Tenemos dos individuos idénticos que consumen un bien público, que tiene el costo marginal constante e igual a 6. Este bien público X es provisto por el agente i y j, por lo que $X = x_i + x_j$. La utilidad del agente i es:

$$U_i(x_i, X) = -0.5(10 - X)^2 - 6x_i$$

   a) Determine el nivel socialmente óptimo de provisión del bien público.

   b) Determine el nivel privadamente óptimo de provisión del bien público.

   c) Asuma que entran n nuevos agentes a la economía. La utilidad de estos nuevos agentes viene dada por

$$U_i(x_i, X) = -\frac{1}{3}(9 - X)^2 - 6x_i$$

   Asuma que cada uno elige independientemente cuánto proveer el bien público. ¿Cómo varía la provisión total del bien público respecto del apartado anterior?

<u>Solución</u>

   a) El nivel socialmente óptimo se halla sumando las utilidades

$$\max\ -\frac{1}{2}(10 - X)^{2\smile} 6x_i - \frac{1}{2}(10 - X)^{2\smile} 6x_j = -(10 - X)^{2\smile} 6X$$

   De tomar CPO respecto de X, obtenemos $X = 7$.

   b) El agente 1 maximiza

$$\max\ -\frac{1}{2}(10 - x_1 - x_2)^{2\smile} 6x_1$$

   La CPO respecto de x_1 da $x_1 = 4 - x_2$. Por siemtría, $x_1 = x_2$. Reemplazando, obtenemos $x_1 = x_2 = 2$, por lo que $X = 4$.

   c) Cada nuevo agente maximiza $-\frac{1}{3}(9 - X)^{2\smile} 6x_i$, donde:

$$X = \sum_{i=1}^{n+2} x_i$$

   La CPO respecto de x_i es $-X = 0$, lo que significa que cada nuevo agente contribuye con 0, por lo que la provisión total del bien público no cambia respecto del apartado anterior.

Referencias