7 - El mercado de capital

1. $\star$ Roberto vive y trabaja durante dos periodos, siendo su salario de S/.1 800 en el primer periodo y S/. 1 100 en el segundo. Las preferencias sobre el consumo intertemporal de este consumidor están representadas por la siguiente función de de utilidad:

$$U(C_1, C_2) = \ln C_1 + \ln C_2$$

Roberto puedo prestar y pedir prestado al tipo de interés real de 10 %.

a) Defina y explique la expresión de la restricción presupuestaria intertemporal de Roberto.

b) Calcule el consumo presente y ahorro de equilibrio de Roberto.

<u>Solución</u>

a) La restricción presupuestaria intertemporal está definida por:

$$C_1 + \frac{C_2}{1.1} = 1\,800 + \frac{1\,100}{1.1}$$

Esta expresión explica que el valor presente del consumo debe ser igual al valor presente del ingreso, es decir, que las personas se gastan todas sus riquezas a lo largo de su vida. Note que cualquier desbalance entre ingresos y gastos en el periodo 1 necesariamente se compensa en el periodo posterior, tomando en consideración la tasa de interés.

b) Primero planteamos el lagrangiano:

$$L = \ln C_1 + \ln C_2 + \lambda \left(2\,800 - C_1 - \frac{C_2}{1.1} \right)$$

Las CPO son:

$$\frac{\partial L}{\partial C_1} = \frac{1}{C_1} - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial C_2} = \frac{1}{C_2} - \frac{\lambda}{1.1} = 0$$

De donde obtenemos que $1.1C_1 = C_2$. Dicha igualdad se utiliza en la tercera CPO:

$$2\,800 - C_1 - \frac{C_2}{1.1} = 2\,800 - 2C_1 = 0$$

De donde obtenemos que el consumo óptimo para ambos periodos son $C_1 = 1\,400$ y $C_2 = 1\,540$.

2. ⋆⋆ Juanito recibe anualmente ingresos de 110 soles por lavar el carro de su papá. él ha sido invitado al cine por su amiga Claudia, pero no sabe cuánto debe gastar en esta ocasión.

   él puede pedir prestado hasta 500 soles a una tasa de interés del 15 %. ¿Cuánto debe gastar en su cita?. Tome en cuenta que la utilidad de Juanito es $U = 2C_1\sqrt{C_2}$, donde C_1 es el consumo presente y C_2 es el consumo futuro.

   a) Defina la restricción presupuestaria intertemporal de Juanito y encuentre su consumo óptimo en el primer periodo.

   b) Especifique cuánto pide prestado o ahorra Juanito en el primer periodo y halle su utilidad. Grafique el equilibrio.

   Solución

   a) La restricción presupuestaria intertemporal está dada por:

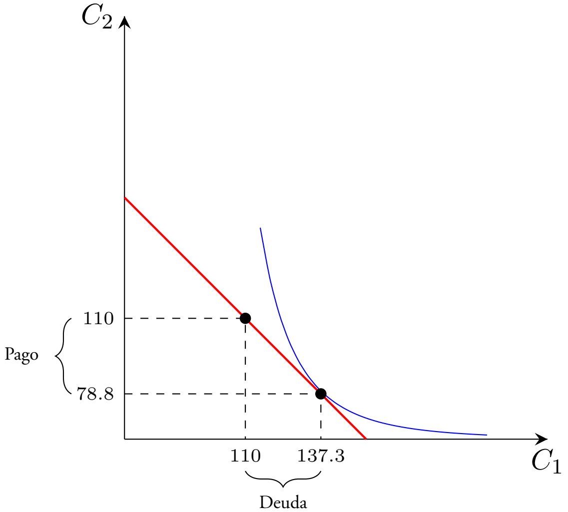
   $$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} \quad \Rightarrow \quad C_1 + \frac{C_2}{1.15} = 205.65$$

   Por lo que podemos plantear el Lagrangiano y las CPO:

   $$L = 2C_1\sqrt{(C_2)} + \lambda\left[205.65 - C_1 - \frac{C_2}{1.15}\right]$$
   $$L_{C_1} = 2\sqrt{C_2} - \lambda = 0$$
   $$L_{C_2} = \frac{C_1}{\sqrt{C_2}} - \frac{\lambda}{1.15} = 0$$

   De donde obtenemos que $2C_2 = 1.15C_1$. Si se utiliza dicha información en la restricción intertemporal, entonces el consumo óptimo en el primer periodo sería $C_1 \approx 137.1$.

b) Se observa que dado que $C_1 > Y_1$, Juanito debe pedir prestado 27.1 soles, y como debe pagar una tasa de interés de 15 %, en el segundo periodo deberá pagar 31.2 soles, por lo que el consumo óptimo en el segundo periodo sería $C_2 \approx 78.8$. Luego, la utilidad de Juanito será igual a $U = 2(137.1)\sqrt{78.8} \approx 2\,434.06$. Esto puede representarse gráficamente de la siguiente manera:



3. ⋆ Analice la veracidad del siguiente enunciado: “Un aumento en la tasa de interés hará que sea preferible consumir más en el presente que en el futuro”.

   Solución

   El enunciado es incierto. Un aumento en la tasa de interés haría que sea más viable ahorrar y consumir en un periodo futuro; sin embargo, la decisión del consumidor también dependerá de su tasa subjetiva de descuento.

4. ⋆ Un aumento de la tasa subjetiva de descuento hará que sea preferible consumir más en el presente que en el futuro.

   Solución

   Verdadero. Un aumento en la tasa de descuento subjetiva hace que el factor de descuento disminuya, con lo cual el individuo deja de preferir tanto el futuro (es más impaciente).

5. ⋆ Analice la veracidad del siguiente enunciado: “Si la tasa de descuento y la tasa de interés son iguales a cero, el consumo siempre será el mismo para todos los periodos”.

   Solución

   El enunciado es verdadero. Esto se comprueba con la ecuación de Euler, donde $UMgC_1 = \delta(1+r)UMgC_0$, siendo “$\delta$” el factor de descuento subjetivo. Si se cumple el enunciado, entonces $UMgC_1 = UMgC_0$, con lo cual, si la función es monótona, se cumplirá que $C_1 = C_0$.

6. $\star\star$ Sean r' y r'' las tasas de interés activa y pasiva, respectivamente. Si $r' > r''$, se pide lo siguiente:

   a) Especifique y grafique la restricción presupuestaria.

   b) De qué dependerá que el agente sea prestamista o deudor.

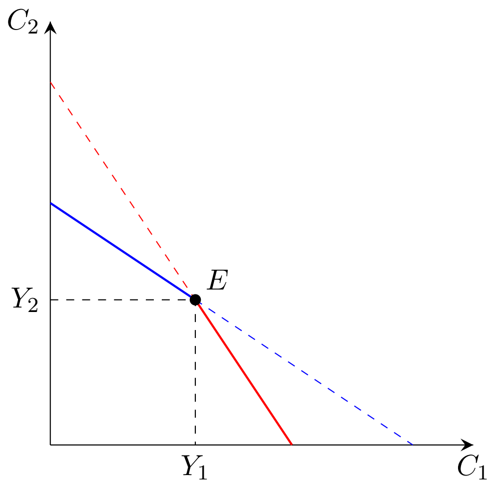
   c) ¿Por qué se espera que $r' > r''$?

   Solución

   a) La restricción presupuestaria intertemporal típica tiene la siguiente forma:

   $$c_1 + \frac{C_2}{1+r} = Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} = k$$

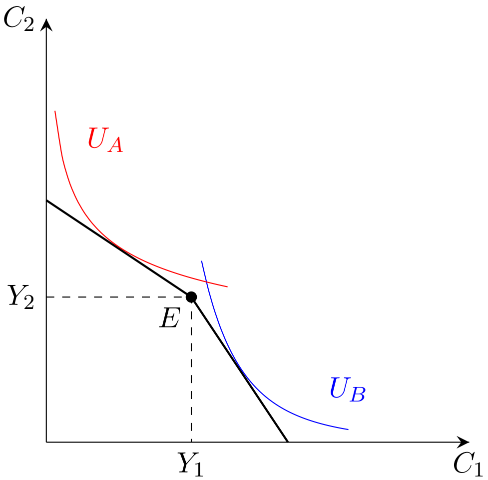
   Luego, es posible ver que $C_2 = (1+r)k - (1+r)C_1$; sin embargo, note que la pendiente no es constante pues r depende de la situación del individuo: si es deudor pagará la tasa de interés activa, mientras que si es acreedor se le pagará la tasa de interés pasiva. Gráficamente tenemos lo siguiente:

   Como puede observarse, en el gráfico se muestra de rojo la que sería la restricción presupuestaria considerando la tasa de interés activa r' y de azul la restricción que considera la tasa de interés pasiva r''. Note que la recta roja tiene una mayor pendiente pues $r' > r''$, note que ambas rectas deben pasar por la dotación inicial (punto E).

Si el individuo quisiera gastar más que Y_1 en el primer periodo, tendría que pedirse prestado, pagando la tasa de interés activa r', por lo que la restricción relevante será la roja. Análogamente, si el individuo gastase menos que Y_1 en el primer periodo, se le pagaría la tasa de interés pasiva r'' por su ahorro, por lo que la restricción relevante será la azul.

b) En base a la parte a), se puede afirmar que si el agente elige una combinación (C_1^*, C_2^*) que se encuentre a la derecha (izquierda) de E, será deudor (prestamista). Finalmente, la condición del agente dependerá de su función de utilidad. A continuación se muestra gráficamente que el individuo A (con curva de indiferencia roja) es prestamista y el individuo B (con curva de indiferencia azul) es deudor.



c) Normalmente se espera que r' sea mayor que r'' pues debe existir un margen de ganancia para el intermediador (usualmente los bancos). Este margen viene justificado por la capacidad del intermediador de poder gestar los recursos sobrantes de algunos individuos hacia aquellos que necesitan de ellos.

Asimismo, este margen se puede ver disminuido por la mayor competencia entre bancos, una menor percepción de riesgo de los individuos prestatarios (hace menos costoso al banco gestionar los recursos, por lo que puede reducir su margen y seguir obteniendo ganancias), regulación menos rigurosa, etc.

7. ⋆⋆ Alberto consume un único bien y vivirá por "T" periodos. Sus preferencias sobre sus flujos de consumo están representadas por la siguiente función de utilidad:

$$U(x_1, ..., x_T) = \sum_{t=1}^{T} \beta_t u(x_t)$$

donde x_t es la cantidad del bien que Alberto consume en el año "t" y $u(x_t)$ es una función estrictamente cóncava. Alberto sabe que tendrá un flujo de ingresos de $(m_1, ..., m_T)$, donde m_t es el ingreso que recibe en el año "t". Alberto puede prestar o prestarse a la tasa de interés "r". En el año 1, Alberto es capaz de comprometerse a cualquier senda de consumo que satisfaga su restricción presupuestaria (que es tal que el valor presente de su consumo no supere el valor presente de flujo de ingresos).

a) Asuma que, para algún α $(0 < \alpha < 1)$ y para todo $t = 1, ..., T$, $\beta_t = \alpha^{t-1}$. ¿Para qué tasa de interés, Alberto elegirá consumir la misma cantidad de bienes en cada periodo de su vida? Para la tasa de interés hallada, indique de qué depende su consumo.

b) Suponga que $T = 3$ y su función de utilidad es:

$$U(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \alpha\sqrt{x_3}$$

Si Alberto gana un ingreso $W > 0$ en el periodo 1, donde $m_t = 0$ para $t > 1$. Suponga además que $\alpha = 1/(1+r)$. Si, en el año 1, Alberto puede elegir su consumo para cada año, sujeto a su restricción presupuestaria, encuentre los valores de x_1,x_2 y x_3, como función de los parámetros W y r.

Solución

a) La restricción presupuestaria intertemporal es:

$$\sum_{t=1}^{T} x_t \frac{1}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^{T} m_t \frac{1}{(1+r)^t}$$

La elección óptima de consumo satisface que $TMgS = 1 + r$:

$$\frac{\alpha^{t-1}u'(x_t)}{\alpha^t u'(x_{t+1})} = 1 + r$$

Para que se consuma la misma cantidad siempre, $\alpha = 1/(1+r)$. Dado que el flujo de consumo sería:

$$c(1 + r + ... + r^T) = VP$$

$$c = \frac{VP}{1 + r + ... + r^T} = (1-r)\frac{VP}{1 - r^{T+1}}$$

y el consumo de Alberto solo depende del VP de sus ingresos.

b) La restricción presupuestaria de Alberto es:

$$x_1 + \frac{x_2}{(1+r)} + \frac{x_3}{(1+r)^2} = W \tag{.1}$$

Usando la condición de primer orden ($TMgS = 1 + r$) obtenemos:

$$\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = 1 + r = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{x_3}{x_2}} \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = x_2 = (1+r)^2 x_1 \tag{.2}$$

De (.1) y (.2):

$$x_1(1 + (1+r) + 1) = W$$

Luego, obtenemos:

$$x_1 = \frac{W}{3+r} \qquad x_2 = x_3 = \frac{W(1+r)^2}{3+r}$$

8. ⋆⋆⋆ Una persona vive durante T periodos. Nace sin activos y no puede morir endeudada. La tasa de descuento intertemporal es cero, mientras que la tasa de interés está dada por r. La función de utilidad es $U_t = \ln(C_t)$, donde C_t es el consumo en el periodo t. El ingreso de esta persona en el periodo cero es uno. El ingreso en cada uno de los periodos posteriores está dado por $Y_{t+1} = (1-g)Y_t$, para $t = 1, ..., T-1$, donde $0 < g < 1$. Encuentre el valor del consumo de esta persona en el periodo t en términos de r, g, t y T.

Solución

Este problema de maximización puede ser planteado de la siguiente manera:

$$\max_{C_0,\dots,C_{T-1}} \sum_{i=0}^{T-1} \ln(C_i) \qquad s.a. \quad \sum_{i=0}^{T-1} \frac{C_i}{(1+r)^i} = \sum_{i=0}^{T-1} \frac{Y_i}{(1+r)^i}$$

Como sabemos que $Y_0 = 1$ y que el ingreso crece a tasa constante g, tenemos lo siguiente:

$$L = \sum_{i=0}^{T-1} \ln(C_i) + \lambda \left[\sum_{i=0}^{T-1} \left(\frac{(1+g)}{(1+r)} \right)^i - \sum_{i=0}^{T-1} \frac{C_i}{(1+r)^i} \right]$$

Luego, podemos plantear las CPO de forma genérica:

$$\frac{\partial L}{\partial C_i} = \frac{1}{C_i} - \frac{\lambda}{(1+r)^i} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_i = \frac{(1+r)^i}{\lambda}$$

Por lo que la relación entre cualquier par de periodos consecutivos es:

$$\frac{C_i}{C_{i+1}} = \frac{1}{1+r} \qquad \Rightarrow \qquad C_{i+1} = (1+r)C_i$$

Iterando, encontramos que $C_i = (1+r)^i C_0$. Note que también se puede llegar a dicha condición a través de la ecuación de Euler. Luego, reemplazando en la restricción (la última CPO, $\partial L/\partial\lambda$) y como $(1+g)/(1+r) = k$, entonces:

$$\sum_{i=0}^{T-1} \frac{C_0(1+r)^i}{(1+r)^i} = \sum_{i=0}^{T-1} k^i$$

Note que el resultado del elemento de la izquierda es C_0 sumado T veces, mientras que el resultado del elemento de la derecha es conocido. Por lo tanto:

$$C_0 = \frac{1}{T}\left(\frac{1-k^T}{1-k}\right)$$

Donde $k = (1+g)/(1+r)$. Finalmente, el consumo óptimo en el periodo t será $(1+r)^t C_0$.

9. ⋆⋆⋆ Imagine a un consumidor representativo que vive dos periodos y cuya función de utilidad depende del consumo y el trabajo en cada periodo:

$$U = C_1 - \frac{1}{2}L_1^2 + C_2 - \frac{1}{2}L_2^2$$

Los salarios en ambos periodos son constantes e iguales a 1. Asimismo, la dotación inicial del agente es K_0, la cual corresponde a una herencia y no tiene ingresos adicionales.

Si tomamos en cuenta que el factor de descuento es 1, que existen un impuesto al consumo denotado por η y un impuesto a la renta denotado por τ. Se pide:

a) Plantee la restricción presupuestaria y las condiciones de primer orden del "agente representativo".

b) Determine los niveles óptimos de consumo y trabajo en cada periodo.

c) A un funcionario de la SUNAT le interesaría conocer su restricción presupuestaria bajo este modelo. Ayúdelo a hallarla sabiendo que el gobierno necesita gastar g en cada periodo.

d) El funcionario le pide determinar el nivel óptimo de τ que maximice el gasto de gobierno en cada periodo bajo el supuesto de que no cobrasen IGV.

e) El funcionario necesitaría saber adicionalmente el nivel óptimo del IGV que maximice el gasto de gobierno en cada periodo bajo los siguientes supuestos: i) $K_0 = 0$ y ii) no existe impuesto a la renta.

<u>Solución</u>

a) Notar que el impuesto a la renta se aplica a los ingresos, mietras que el IGV se aplica al precio de los bienes consumidos. En este sentido, si tomamos en cuenta los datos del ejercicio se debe cumplir la siguiente restricción:

$$(1+\eta)C_1 + (1+\eta)C_2 = k_0 + (1-\tau)(L_1 + L_2)$$

Luego, el lagrangiano es el siguiente:

$$L = C_1 - \frac{1}{2}L_1^2 + C_2 - \frac{1}{2}L_2^2 + \lambda[k_0 + (1-\tau)(L_1 + L_2) - (1+\eta)C_1 - (1+\eta)C_2]$$

De donde obtenemos las CPO:

$$\frac{\partial L}{\partial C_1} = \frac{\partial L}{\partial C_2} = 1 - \lambda(1+\eta) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial L_1} = -L_1 + \lambda(1-\tau) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial L_2} = -L_2 + \lambda(1-\tau) = 0$$

b) De las CPO se observa que:

$$\lambda = \frac{1}{1+\eta} \qquad \wedge \qquad L_1^* = L_2^* = \lambda(1-\tau) = \frac{1-\tau}{1+\eta}$$

Luego, reemplazando en la restricción tenemos que:

$$C_1^* + C_2^* = \frac{K_0}{1+\eta} + 2\left(\frac{1-\tau}{1+\eta}\right)^2$$

Note que cualquier combinación que sume el factor de la derecha es óptimo debido a que el consumidor no muestra preferencia por el consumo presente o futuro (notar que en la función de utilidad ambos consumos son sustitutos perfectos).

c) Recordemos que tanto el IGV como el impuesto a la renta son ingresos del gobierno. Dado que el factor de descuento sigue siendo 1, el gobierno se enfrenta a la siguiente restricción:

$$2g = \tau(L_1 + L_2) + \eta(C_1 + C_2)$$

Donde la parte de la derecha corresponde a la recaudación: El primer elemento corresponde al impuesto a la renta, mientras que la segunda corresponde al IGV.

d) Considerando que $\eta = 0$ (no hay IGV), la restricción del gobierno se reduce a:

$$2g = \tau(L_1 + L_2)$$

Luego, podemos hallar el gasto del gobierno utilizando el trabajo óptimo del agente representativo $L_1 = L_2 = (1 - \tau)$:

$$g = \tau - \tau^2$$

Por lo tanto, la tasa de impuestos que maximiza el gasto en cada periodo es $\tau = 0.5$.

e) Considerando que $\tau = 0$ (no hay impuesto a la renta), la restricción del gobierno se reduce a:

$$g = \frac{n}{2}(C_1 + C_2)$$

Luego, podemos hallar el gasto del gobierno utilizando los consumos óptimos del agente representativo (hallados en la parte b):

$$g = \frac{K_0}{2}\frac{\eta}{1+\eta} + \frac{\eta}{(1+\eta)^2}$$

De aquí, si $K_0 = 0$ se puede ver que el valor de η que maximiza g es $\eta = 1$.

10. $\star$ La tasa de descuento intertemporal es igual a la tasa de interés si y solo si el consumo es igual en ambos períodos. Comente.

    Solución

    El enunciado es falso. Podemos comprobar que se cumple que si ambas tasas son 0, entonces el consume es igual en ambos períodos. Sin embargo, si el consumo es igual en ambos períodos, no necesariamente ambas tasas son 0. Esto lo vemos en la ecuación de Euler que resulta de maximizar el problema del consumidor:

$$UMgC_{t+1} = \frac{1+r}{1+\delta}UMgC_t$$

    De ahí, vemos que si ambas tasas r y δ son 0, entonces los consumos serán iguales. Sin embargo, si ambos consumos son iguales, basta con que ambas tasas sean iguales (no necesariamente 0).

11. $\star$ Una persona, en un mundo de dos períodos, tiene una función de utilidad $U(C_t) = ln(C_t)$, donde $t = 1,\ 2$. Repentinamente, la tasa de interés, que era positiva, cae hasta números negativos. ¿Cómo afectará esto a las decisiones de la persona?

    Solución

    Antes de la caída de la tasa de interés y al marge de cuánto sea su tasa de descuento, la persona ahorrará para poder consumir en $t = 2$. Esto sucede pues, si no ahorrara, tendría una utilidad en el segundo período de $U(0) = ln(0) \rightarrow -\infty$. Entonces, su utilidad total sería $-\infty$ sin importar cuánto consuma en total. Al caer la tasa de interés a valores negativos, el banco le está ofreciendo un pago por ahorrar. Así, la decisión de ahorrar en $t = 1$ se mantiene, solo que ahora lo hará en mayor magnitud.

12. ⋆⋆ Considere una persona que vive 3 períodos y descuenta el futuro con un factor β, donde $\beta = \frac{1}{1+\delta}$ y δ es la tasa de descuento intertemporal. En cada período t, genera una utilidad igual a $ln(c_t)$. La tasa de interés es r. Además, solo tiene un ingreso F, el cual lo consigue en el primer período ($t = 1$).

    a) Encuentre los valores óptimos de consumo en cada período. Además, ¿cómo sería su respuesta si la persona fuese perfectamente paciente?

    b) Ahora, asuma que la persona vive T períodos. ¿Cuál sería la expresión para su consumo en el período t?

    Solución

    a) Planteamos el lagrangiano con la información brindada

    $$L = ln(c_1) + \beta ln(c_2) + \beta^2 ln(c_3) + \lambda \left(F^{\smile} c_1 - \frac{c_2}{1+r} - \frac{c_3}{(1+r)^2} \right)$$

    De resolver el lagrangiano obtenemos los consumos óptimos:

    $$c_1 = \frac{F}{1+\beta+\beta^2} \wedge c_2 = \frac{\beta(1+r)F}{1+\beta+\beta^2} \wedge c_3 = \frac{\beta^2(1+r)^2 F}{1+\beta+\beta^2}$$

    Además, una persona perfectamente paciente tendría $\delta = 0$ o, $\beta = 1$. Sus consumos serían

    $$c_1 = \frac{F}{3} \wedge c_2 = \frac{(1+r)F}{3} \wedge c_3 = \frac{(1+r)^2 F}{3},$$

    con lo que consumiría cada vez más. Esto se debe a que, como es perfectamente paciente, puede usar la rentabilidad que le genera ahorrar para poder consumir más en los períodos futuros.

    b) La expresión para 3 períodos hallada en el apartado anterior se puede generalizar. En el denominador tendríamos la suma de los factores de descuento y en el numerador tendríamos el pago del primer período con los descuentos e intereses generados hasta el período t.

    $$c_t = \frac{\beta^{t-1}(1+r)^{t-1}F}{\sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1}}$$

13. ⋆ ⋆ ⋆ Considere una economía con 3 agentes i, donde $i = 1, 2, 3$. Tienen la misma función de utilidad, pero tienen distintos factores de descuento (el factor de descuento es β_i, donde $\beta_i = \frac{1}{1+\delta_i}$ y δ_i es la tasa de descuento). Además, los agentes viven dos períodos y reciben ingresos I_t, donde $t = 1, 2$. Estos ingresos son iguales para los 3 agentes. Su función de utilidad es $U_i = ln(c_{1i}) + \beta_i ln(c_{2i})$.

a) Halle una expresión para la tasa de interés de equilibrio para estos 3 agentes. Note que, para llegar a un equilibrio, la suma de ahorros netos en la economía debe ser 0 (el dinero total depositado debe ser igual al dinero total tomado).

b) Asuma que $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 <$. ¿Qué agentes son ahorradores netos y qué agentes son prestadores netos?

<u>Solución</u>

a) Cada agente maximizará el lagrangiano:

$$L = ln(c_{1i}) + \beta_i ln(c_{2i}) + \lambda \left(I_1 + \frac{I_2}{1+r} {}^{\smile} c_{1i} {}^{\smile} \frac{c_{2i}}{1+r} \right)$$

De resolverlo, obtenemos que $c_{1i} = \frac{1}{1+\beta_i}\left(I_1 + \frac{I_2}{1+r}\right)$. Entonces, el ahorro (que puede ser positivo si es prestamista o negativo si es prestatario), es $I_1 - c_{1i}$ o:

$$s_{1i} = \frac{\beta_i I_1}{1+\beta_i} - \frac{I_2}{(1+\beta_i)(1+r)}$$

Para llegar al equilibrio, la suma de los 3 ahorros debe ser 0. Esto lo expresamos a continuación:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\beta_i I_1}{1+\beta_i} - \frac{I_2}{1+r} \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{1+\beta_i} = 0$$

Con eso, podemos despejar para hallar la tasa de interés:

$$R = \frac{I_2}{I_1} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{1+\beta_i} \right) \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\beta_i I_1}{1+\beta_i} \right)^{-1} - 1$$

b) Primero, es importante notar que, como los factores de descuento son distintos, cada agente tiene consumo y ahorro óptimo distinto. En particular, el agente 1 es el más impaciente. Dado el equilibrio, se endeudará. El agente 3 es el más paciente y ahorrará un monto positivo. Es incierto si el agente 2 será prestatario o prestamista. Además, es interesante notar el caso particular en que las 3 tasas de descuento sean idénticas. En ese caso, todos tomarían las mismas decisiones y nadie ahorraría ni pediría prestado.

14. $\star\star\star$ Considere a una persona que vive C años en un modelo con tasa de interés y de descuento igual a 0. Desde el primer hasta A años, la persona solo se encarga de sí misma. Desde los $A+1$ hasta los B años, la persona trabaja y se encarga de su consumo, pero también del de un hijo h_t. Desde los $B+1$ hasta los C años, la persona solo se encarga de su propio consumo, pues su hijo ya creció y se puede alimentar por su propia cuenta.

Esta persona gana Y cada año desde que nace hasta que muere. Además, cuenta con una función de utilidad como esta:

$$U = \sum_{t=1}^{A} c_t^{\alpha} + \sum_{t=A+1}^{B} R(c_t h_t)^{\beta} + \sum_{t=B+1}^{C} c_t^{\delta}$$

Plantee el problema a maximizar, halle la relación entre los diferentes consumos del tiempo, para cada una de las 3 etapas de su vida y la relación entre los consumos entre las diferentes etapas

Solución

El lagrangiano es:

$$L = \sum_{t=1}^{A} c_t^{\alpha} + \sum_{t=A+1}^{B} R(c_t h_t)^{\beta} + \sum_{t=B+1}^{C} c_t^{\delta} + \lambda\left(CY - \sum_{t=1}^{C} c_t - \sum_{t=A+1}^{B} h_t\right)$$

De las condiciones de primer orden desde $t = A + 1$ hasta $t = B$, podemos llegar a que $c_t = h_t$. Es decir, la persona consume igual que su hijo.

Además, podemos ver que, dentro de cada etapa, los consumos de todos los años son iguales:

- Para todo t desde $t = 1$ hasta $t = A$, la CPO es $\alpha c_t^{\alpha-1} = \lambda$ y $\alpha c_{t+1}^{\alpha-1} = \lambda$, por lo que $c_t = c_{t+1}$ o $c_1 = c_2 = \ldots = c_A$
- Para todo t desde $t = A + 1$ hasta $t = B$, la CPO es $R\beta c_t^{\beta-1} h_t^{\beta} = \lambda$ y $R\beta c_{t+1}^{\beta-1} h_{t+1}^{\beta} = \lambda$, por lo que $c_t = c_{t+1}$ o $c_{A+1} = c_{A+2} = \ldots = c_B$
- Para todo t desde $t = B + 1$ hasta $t = C$, la CPO es $\delta c_t^{\delta-1} = \lambda$ y $\delta c_{t+1}^{\delta-1} = \lambda$, por lo que $c_t = c_{t+1}$ o $c_{B+1} = c_{B+2} = \ldots = c_C$

Finalmente, nos falta hallar la relación entre consumos en diferentes etapas. Si usamos la CPO para un período de cada etapa (no importa cuál, pues ya vimos que el consumo es igual en todos los períodos de una misma etapa), tenemos:

$$\alpha c_1^{\alpha-1} = R\beta c_{A+1}^{\beta-1} h_t^{\beta} = \delta c_{B+1}^{\delta-1}$$

15. ⋆⋆ Una persona vive un período con certeza y, con una probabilidad π, también vive un segundo período. Mientras mejor se alimente (mientras más consuma) en el primer período, aumentará su probabilidad de vivir en el segundo período. En particular, esta probabilidad viene dada por $\pi = \frac{c_1}{c_1+2}$. El ingreso en el primer período es I y en el segundo es 1. La tasa de interés y la tasa de descuento son 0. La función de utilidad es

$U(c_t) = ln(c_t)$. Plantee el problema y determine cuál el valor del ingreso I tal que el ahorro del primer período sea igual a 0.

Solución

La persona maximiza su utilidad esperada con el siguiente lagrangiano:

$$L = ln(c_1) + \frac{c_1}{c_1 + 2} ln(c_2) + \lambda(I + 1 - c_1 - c_2)$$

De las CPO llegamos a:

$$\frac{1}{c_1} + \frac{2}{(c_1+2)^2} ln(c_2) = \frac{c_1}{(c_1+2)c_2}$$

Multiplicando todos los términos por $c_1 c_2 (c_1 + 2)^2$ tenemos:

$$(c_1 + 2)^2 c_2 + 2c_1 c_2 ln(c_2) = c_1^2 (c_1 + 2)$$

Ahora, notamos que nos piden los resultados para cuando el ahorro sea 0, es decir, en cada período consume el ingreso del período: $c_1 = I$ y $c_2 = 1$. Si reemplazamos $c_2 = 1$ en la ecuación de arriba obtenemos $c_1 = 2$. Por lo tanto, el ingreso que hace que el ahorro sea 0 es $I = c_1 = 2$.

16. ⋆⋆ Una persona vive dos períodos y obtiene una utilidad de la forma $U = c_t(2 - c_t)$ en cada período. En el primer período obtiene un ingreso igual a 1 y en el segundo período no tiene ingresos. Además, la tasa de interés es $r = 0.5$ y la tasa de descuento es 0.

    a) Halle el valor de c_1 y c_2.

    b) Imagine que ahora no se sabe cuál es la tasa de interés. Con 50 % de probabilidad, esta puede ser 0. Con 50 % de probabilidad, esta puede ser 1. Halle el valor de c_1, c_2^A y c_2^B, donde c_2^A es el consumo cuando $r = 0$ y c_2^B es el consumo cuando $r = 1$.

Solución

a) El lagrangiano a resolver es:

$$L = c_1(2 - c_1) + c_2(2 - c_2) + \lambda \left(1 - c_1 - \frac{c_2}{1 + 0.5}\right)$$

De resolverlo, obtenemos $c_1 = 0.54$ y $c_2 = 0.69$.

b) Ahora el lagrangiano es:

$$L = c_1(2-c_1) + 0.5c_2^A(2-c_2^A) + 0.5c_2^B(2-c_2^B) + \lambda_A \left(1 - c_1 - \frac{c_2}{1+0}\right) + \lambda_B \left(1 - c_1 - \frac{c_2}{1+\ldots}\right.$$

De resolverlo, obtenemos $c_1 = 0.57$ y $c_2^A = 0.43$ y $c_2^B = 0.86$.

17. $\star\star$ En el período $t = 0$ invierto K en un proyecto. Además, este proyecto producirá un bien en cada uno de los siguientes períodos, pero el valor irá cayendo en el tiempo. En $t = 1$, el bien producido tendrá valor de M. En $t = 2$, el valor será $M(1-\delta)$. En $t = 3$, el valor será $M(1-\delta)^2$. Esta dinámica se repite hasta el infinito.

    a) Calcule el VPN de este proyecto.

    b) Existe un impuesto de tasa τ a las utilidades del proyecto. ¿Cambia la decisión de inversión?

    Solución

    a) El VPN del proyecto se puede armar de la siguiente manera:

    $$VPN = -K + \frac{M}{1+r} + \frac{M(1-\delta)}{(1+r)^2} + \frac{M(1-\delta)^2}{(1+r)^3} + \ldots$$

    $$VPN = -K + \frac{M}{1+r}\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^t = -K + \frac{M}{1+r}\frac{1+r}{r+\delta} = -K + \frac{M}{r+\delta}$$

    De ahí, es sencillo ver que la decisión de invertir se tomará si $VPN > 0$, es decir, si $\frac{M}{r+\delta} > K$.

    b) La utilidad a la cual se le gravará con un impuesto τ es el flujo del período menos los intereses correspondientes de la inversión. Es decir: $M(1-\delta)^{t-1} - rK$. Entonces, el flujo en cada período será $(1-\tau)(M(1-\delta)^{t-1} - rK)$. El VPN de estos flujos viene dado por:

    $$VPN = (1-\tau)\left(-K + \frac{M}{r+\delta}\right)$$

    Para decidir invertir, este VPN debe ser positivo. Como podemos ver, la condición para que esto suceda es la misma que en el apartado anterior.

18. $\star\star\star$ Imagine una economía con J agentes y 2 períodos. Cada agente j recibe en el primer período $y_1 + w_j$ manzanas. En el segundo período recibe y_2 manzanas. La función de utilidad del agente j es:

    $$U_j = ln(c_{1j}) + \beta ln(c_{2j})$$

    La tasa de interés para ahorrar o pedir prestadas manzanas es r. El ahorro de manzanas en el primer período es s_j. Si $s_j > 0$, el agente j está consumiendo menos manzanas que su dotación y está ahorrando algunas para el futuro. Si $s_j < 0$, el agente está pidiendo prestadas manzanas en el primer período, las cuales tendrá que repagar en el segundo.

a) Halle el consumo óptimo del primer período para el agente j. Halle $\frac{\partial c_{1j}}{\partial w_j}$ e interprete esa derivada.

b) Asumamos que solo hay dos agentes ($J = 2$). En esta economía, lo que uno preste necesariamente será lo que el otro pida prestado. Halle la tasa de interés de equilibrio e interprete dicha expresión.

c) Si $w_1 > w_2$, demuestre que $s_1 > 0$. Interprete.

<u>Solución</u>

a) El lagrangiano a maximizar es:

$$L = ln(c_{1j}) + \beta ln(c_{2j}) + \lambda \left(y_1 + w_j + \frac{y_2}{1+r} \breve{} c_{1j} \breve{} c_{2j} \right)$$

De resolverlo, obtenemos el consumo del primer período:

$$c_{1j} = \frac{y_1 + w_j + \frac{y_2}{1+r}}{1+\beta}$$

De ahí, podemos hallar la derivada solicitada, la cual sería $\frac{\partial c_{1j}}{\partial w_j} = tfrac11 + \beta$. Esta es la propensión marginal del consumo ante aumentos en la dotación específica del agente. Como vemos, esta es igual para todos los agentes, ya que no depende de w_j. Además, solo depende de β, el cual es igual para todos. En el caso particular en que $\beta = 1$, el agente es perfectamente paciente. Ante un aumento de la dotación específica de ϵ, c_{1j} aumentará en 0.5ϵ, pues la otra media unidad la guardará para el período siguiente.

b) En el primer período, el ahorro de uno debe ser exactamente el préstamo del otro. Eso lo vemos a continuación:

$$y_1 + w_1 \breve{} c_{11} = - \left(y_1 + w_2 \breve{} c_{12} \right)$$

Reemplazando el consumo del primer período hallado en el apartado anterior, tenemos:

$$y_1 + w_1 \breve{} \frac{y_1 + w_1 + \frac{y_2}{1+r}}{1+\beta} = - \left(y_1 + w_2 \breve{} \frac{y_1 + w_2 + \frac{y_2}{1+r}}{1+\beta} \right)$$

Finalmente, de ahí despejamos la tasa de interés de equilibrio:

$$r = \frac{2y_2}{\beta(2y_1 + w_1 + w_2)} - 1$$

Esta tasa de interés tiene en el numerador el ingreso total de la economía en $t = 2$ y en el denominador el ingreso total de la economía en $t = 1$. Entonces, se ve claramente que representa una relación entre los ingresos totales de ambos períodos. Esto permite que las dotaciones específicas w_j varíen y, si sus variaciones se compensan entre sí, la tasa r no se verá afectada.

c) El ahorro del agente 1 viene dado por:

$$s_1 = y_1 + w_1 \breve{} c_{11}$$

Reemplazando c_{11} del primer apartado:

$$s_1 = y_1 + w_1 \breve{} \frac{y_1 + w_1 + \frac{y_2}{1+r}}{1+\beta}$$

Reemplazando c_{11} del primer apartado:

$$s_1 = y_1 + w_1 \breve{} \frac{y_1 + w_1 + \frac{y_2}{1+\frac{2y_2}{\beta(2y_1+w_1+w_2)}-1}}{1+\beta}$$

Resolviendo, obtenemos que:

$$s_1 = \beta \left(\frac{w1 - w2}{2(1+\beta)} \right)$$

Por lo tanto, si $w_1 > w_2$, entonces $s_1 > 0$. Esto tiene sentido pues, esto significaría que el agente 1 tendría más manzanas que su óptimo y el agente 2 tendría menos manzanas que su óptimo, por lo que el primero le prestaría al segundo.

19. ⋆⋆ Se tiene la siguiente función de utilidad de un agente que vive 5 años:

$$U = c_0 + \beta\delta c_1 + \beta\delta^2 c_2 + \beta\delta^3 c_3 + \beta\delta^4 c_4$$

Se le pide que explique esta función de utilidad.

Solución

Esta es una función de utilidad con 2 factores de descuento diferentes. Técnicamente, corresponde a un descuento cuasi-hiperbólico. Este consiste en que hay un factor de descuento β con que todos los períodos del futuro son descontados por igual. Es decir, es el factor con el que se marca la diferencia entre la valoración del presente y del futuro. Por otro lado, δ es el factor de descuento de largo plazo, que marca la diferencia en valoraciones entre cada período (la clásica, vista en la parte teórica). Esta diferencia entre el descuento "hoy–futuro" y "$t - -t + 1$" se puede apreciar mejor si reescribimos la función como:

$$U = c_0 + \beta \left(\delta c_1 + \delta^2 c_2 + \delta^3 c_3 + \delta^4 c_4 \right)$$

20. ⋆⋆ Un trabajador vive dos períodos y genera utilidad a partir del consumo y del ocio. El consumo tiene precio 1 y por su trabajo recibe un salario por hora w_1 y w_2 en el primer y segundo período, respectivamente. Al día, tiene T horas para usar o en trabajo o en ocio.

La tasa de interés es r. Su función de utilidad que depende del consumo c y del ocio h es:

$$U(c_1, c_2, h_1, h_2) = c_1^{\alpha} h_1^{(1-\alpha)} \frac{1}{1+\delta} c_2^{\alpha} h_2^{(1-\alpha)}$$

a) Plantee la restricción presupuestaria intertemporal.

b) Ante un aumento de δ, ¿qué sucedería con los ratios h_2/c_2 y h_2/h_1?

c) Si $\delta = r$, ¿$c_1 = c_2$ y $h_1 = h_2$?

Solución

a) La restricción presupuestaria intertemporal sería:

$$w_1 T + \frac{w_2 T}{1+r} = c_1 + w_1 h_1 + \frac{c_2 + w_2 h_2}{1+r}$$

b) El problema a resolver es:

$$L = c_1^{\alpha} h_1^{(1-\alpha)} \frac{1}{1+\delta} c_2^{\alpha} h_2^{(1-\alpha)} + \lambda \left(w_1 T + \frac{w_2 T}{1+r} - c_1 - w_1 h_1 - c_2 - \frac{w_2 h_2}{1+r} \right)$$

De las condiciones de primer orden obtenemos los ratios solicitados:

$$\frac{h_2}{c_2} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{1}{w_2} \wedge \frac{h_2}{h_1} = \frac{w_1}{w_2} \frac{1+r}{1+\delta}$$

El primer ratio solo muestra la sustitución entre ocio y consumo dentro de un mismo período, por lo que la tasa de descuento intertemporal no influye. El segundo ratio muestra la sustitución intertemporal de ocio, por lo que δ sí influirá. Si este descuento aumenta, entonces el ratio disminuirá, con lo que se tendrá menos ocio en $t = 2$ y más en $t = 1$. Esto se explica pues, si δ aumenta, el trabajador se vuelve menos paciente y querrá disfrutar más en $t = 1$.

c) Para que se cumpla lo que se nos está preguntando, el último ratio del apartado anterior debería volverse 1 cuando $\delta = r$. Sin embargo, esto no sucede, pues este ratio también depende de los salarios. Se cumpliría la igualdad de ocios si tenemos $\delta = r$ y además $w_1 = w_2$.

Referencias