9 - Información asimétrica

1. ⋆ El estado desea privatizar una empresa pública distribuidora de energía eléctrica. Sin embargo, los responsables de la privatización han determinado que existe un problema de exceso de personal, pero temen proponer un esquema de renuncias voluntarias (la empresa le paga un determinado monto a los trabajadores, a cambio de que estos renuncien) pues temen que se presente el problema de selección adversa si lo hacen. ¿En qué consistiría el problema de selección adversa en este caso?

   Solución

   El problema de selección adversa podría darse debido a que los nuevos empleadores no saben de qué tipo serán los empleados que apliquen a la renuncia voluntaria. Note que al ofrecer un monto por renunciar al empleo, es probable que quieran permanecer en el trabajo aquellos que se saben menos productivos y que consideran que no conseguirán un mejor empleo. Por el contrario, aquellos trabajadores eficientes y productivos aceptarán renunciar y buscar otro trabajo, pues saben que es muy probable que consigan un nuevo empleo con rapidez.

2. ⋆⋆ Considere el siguiente mercado para autos usados, donde las calidades de dichos autos son $z \in [0, 1]$. Un auto de calidad z es valuado en z por el comprador, y $v(z)$ por el vendedor, donde $v(.)$ es una función continua y estrictamente creciente con $v(z) \leq z$ para todo z. Si la densidad de las calidades es $f(z)$, determinar el equilibrio cuando:

   a) Los compradores y vendedores conocen la calidad de cada auto.

   b) Ni los compradores ni vendedores conocen la calidad de cada auto.

   c) Si f es una distribución uniforme $[0, 1]$, que $v(z) = z^2$ y que sólo los vendedores conocen la calidad del auto.

d) ¿Cuál es la pérdida de bienestar que se ocasiona por la asimetría de información?

Solución

a) Si $v(z) < z$, entonces cada uno de los tipos de carros se venderán al precio z.

b) Siempre que $v(z) \leq z \forall z$. Si no es posible verificar la calidad de los autos por ninguno de los agentes, entonces el precio único es la calidad esperada:

$$p = E(z) = \int_0^1 zf(z)dz \geq \int_0^1 v(z)f(z)dz = E[v(z)]$$

c) En el equilibrio se debe cumplir que:

$$p^* = E[z|z \in \Theta^*] \quad \wedge \quad \Theta^* = \{z/v(z) \leq p\}$$

Luego,

$$p^* = E[z|z \leq \sqrt{p}] = \int_0^{\sqrt{p}} \frac{z}{\sqrt{p}} dz = \left[\frac{z^2}{2\sqrt{p}}\right]_0^{\sqrt{p}}$$

De donde se observa que $p = 1/4$. Los autos que no se comercializan están en el conjunto $\underline{S} = \{z/z > 1/2\}$.

¿Se nos pasa algún equilibrio? - Exactamente, nos faltó $p = 0$ (El caso en el que colapsa el mercado a la venta de los autos de menor calidad).

d) Para el equilibrio competitivo con $p = 1/4$, definimos P como la pérdida de bienestar:

$$P = \int_{1/2}^1 (z - z^2)dz = 1/12$$

Que representa lo que dejaron de ganar los vendedores por la información asimétrica (notar que los consumidores siguen ganando cero).

3. $\star\star\star$ Suponga que un empleador (P) contrata a un abogado (A) para que lo represente. Para el Agente tipo θ, el tiempo requerido para producir servicios legales en un monto "x" está denotado como "a", donde $a = x/2\theta$. El agente puede ser de baja productividad (θ_1) o de alta productividad (θ_2), con $\theta_2 > \theta_1 > 0$. Sea "y", el pago realizado al abogado. El Agente tiene una utilidad de reserva igual a 0 y su función de utilidad es $U(y, a) = \sqrt{y} - a$

El Principal es neutral al riesgo y los servicios legales tienen un precio unitario de 1 u.m.

a) Si usted observase el tipo de abogado que va a contratar, ¿qué contrato ofrecería? ¿Es ese contrato eficiente? Grafique el equilibrio (cantidades óptimas, curvas de indiferencia, rectas de isobeneficio), con y en el eje vertical y x, en el eje horizontal.

b) Suponga que, ahora, usted cree que $\pi_1 = Pr(\theta = \theta_1)$, $\pi_2 = Pr(\theta = \theta_2)$. Asuma que $\theta_1 \geq (1 - \pi_1)\theta_2$. ¿Cómo sería ahora el conjunto de contratos que usted ofrecería? Grafique los equilibrios e indique claramente las cantidades óptimas, las curvas de indiferencia y las rectas de isobeneficio.

Solución

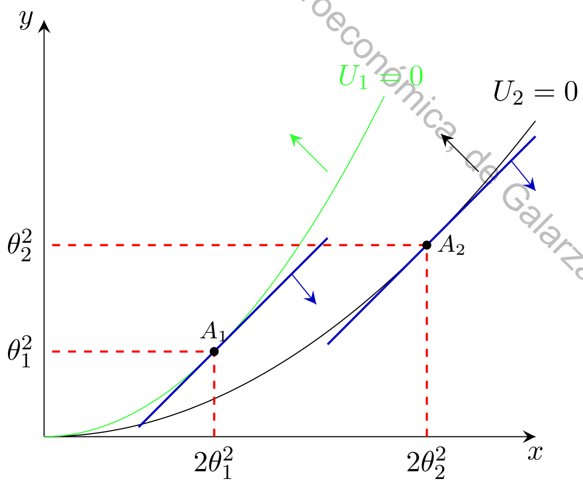
a) La situación descrita es la de información completa. En este escenario, el Principal enfrenta el siguiente problema de maximización de beneficios (B):

$$\max_{x_i, y_i} B = (x_i - y_i) \quad \text{s.a. :} \quad \sqrt{y_i} - a = \sqrt{y_i} - \frac{x_i}{2\theta} \geq u_R = 0$$

donde sólo es necesaria la restricción de participación pues, al ser observable el tipo de los agentes, se les puede exigir que el trabajo x se haga en un tiempo a. Así, como la restricción se debe cumplir con igualdad, el equilibrio será uno separador. Por lo tanto, reexpresamos el problema de optimización:

$$\max_{y_i} (2\theta\sqrt{y_i} - y_i)$$

De donde obtenemos que $y_i^* = \theta_i^2$, $x_i^* = 2\theta_i^2$ y $B^*(\theta_i) = \theta_i^2$. A continuación se representa el equilibrio descrito, los puntos A_1 y A_2 denotan el equilibrio del primer mejor (el equilibrio es eficiente):



b) Ahora, bajo información asimétrica, el principal se enfrentará al siguiente problema de optimización:

$$\max_{y_1, y_2} B = \pi_1(x_1 - y_1) + \pi_2(x_2 - y_2)$$

$s.a.:$

$RP_1: \quad \sqrt{y_1} - \frac{x_1}{2\theta_1} \geq 0$

$RP_2: \quad \sqrt{y_2} - \frac{x_2}{2\theta_2} \geq 0$

$RI_1: \quad \sqrt{y_1} - \frac{x_1}{2\theta_1} \geq \sqrt{y_2} - \frac{x_2}{2\theta_1}$

$RI_2: \quad \sqrt{y_2} - \frac{x_2}{2\theta_2} \geq \sqrt{y_1} - \frac{x_1}{2\theta_2}$

Donde RP_1 y RI_2 se cumplen con igualdad, por lo que tenemos:

$$x_1 = 2\theta_1\sqrt{y_1}$$

$$x_2 = 2\theta_2(\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}) + x_1$$

Usando las ecuaciones anteriores se puede obtener que:

$$x_2 = 2(\theta_2\sqrt{y_2} - (\theta_2 - \theta_1)\sqrt{y_1}) \tag{.1}$$

Y reemplazando .1 en la función objetivo:

$$\max_{y_1, y_2} B = \pi_1(2\theta_1\sqrt{y_1} - y_1) + \pi_2\left[2(\theta_2\sqrt{y_2} - (\theta_2 - \theta_1)\sqrt{y_1}) - y_2\right]$$

Y obtenemos las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial B}{\partial y_1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\pi_1\theta_1}{\sqrt{y_1}} - \pi_1 + \frac{\pi_2(\theta_1 - \theta_2)}{\sqrt{y_1}} = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial y_2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\pi_2\theta_2}{\sqrt{y_2}} - \pi_2 = 0$$

De donde obtenemos los pagos de segundo mejor (SB):

$$y_1^{SB} = \left[\frac{\theta_1 - \pi_2\theta_2}{\pi_1}\right]^2 = \left[\frac{\pi_1\theta_1 - \pi_2(\theta_2 - \theta_1)}{\pi_1}\right]^2 < \theta_1^2 = y_1^* \qquad (\text{pues } \theta_2 > \theta_1) \tag{.2}$$

$$y_2^{SB} = \theta_2^2 = y_2^* \tag{.3}$$

Reemplazando .2 en la restricción de participación del jugador 1 (RP_1), tenemos que:

$$x_1^{SB} = 2\theta_1\sqrt{y_1^{SB}} = \frac{2\theta_1}{\pi_1}(\theta_1 - \pi_2\theta_2) = \frac{2\theta_1}{\pi_1}(\pi_1\theta_1 - \pi_2(\theta_2 - \theta_1)) < 2\theta_1^2 = x_1^* \qquad (\text{pues } \theta_2 >$$

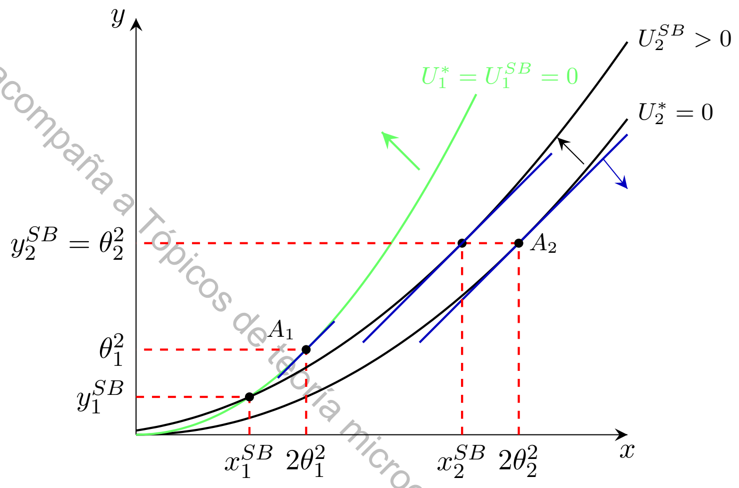
Y reemplazando .2 y .3 en .1 tenemos:

$$x_2^{SB} = 2\left[\theta_2^2 - (\theta_2 - \theta_1)\left(\frac{\theta_1 - \pi_2\theta_2}{\pi_1}\right)\right] = 2\left[\frac{\pi_1\theta_2^2 + \theta_1^2 + \pi_2\theta_2^2 - \theta_1\theta_2 - \pi_2\theta_1\theta_2}{\pi_1}\right]$$

$$x_2^{SB} = 2\left[\frac{\theta_2^2 + \theta_1^2 - 2\theta_1\theta_2 + \pi_1\theta_2\theta_1}{\pi_1}\right] = 2\left[\frac{(\theta_2-\theta_1)^2 + \pi_1\theta_2\theta_1}{\pi_1}\right] \leq 2\theta_2^2 = x_2^*$$

Para demostrar la última desigualdad, compare $((\theta_2-\theta_1)^2 + \pi_1\theta_2\theta_1)$ con $\pi_1\theta_2^2$ y use la condición del enunciado, de que $\theta_1 \geq (1-\pi_1)\theta_2$.

A continuación, se presenta la solución gráfica para $\pi_1 = 0.6$, $\theta_1 = 1.5$ y $\theta_2 = 2.25$:



4. ⋆⋆ Consideremos personas que tienen una riqueza de USD 900 pero que enfrentan la probabilidad de perder USD 800 como consecuencia de un robo el próximo año. Además, la función de utilidad de estas personas depende de su riqueza, $U(w) = \sqrt{w}$.

   En el mercado existen dos grupos de individuos, los "imprudentes" (I) y los "diligentes" (D). El primer grupo no tiene cuidado con la seguridad de su hogar y tiene una alta probabilidad de sufrir un robo ($p_I = 62.5\,\%$), mientras que el segundo asegura muy bien su hogar, usando candados, alarmas, entre otros dispositivos, por lo que la probabilidad de sufrir un robo es mucho menor ($p_D = 30\,\%$).

   a) Si las empresas de seguros son capaces de identificar el tipo de sus clientes y operan bajo competencia perfecta, ¿cuáles serían los seguros que se ofrecerían a cada tipo de agente? Grafique.

   b) Ahora bien, si la empresa no es capaz de reconocer el tipo de sus clientes; ¿qué problema surgiría y cómo se solucionaría?

<u>Solución</u>

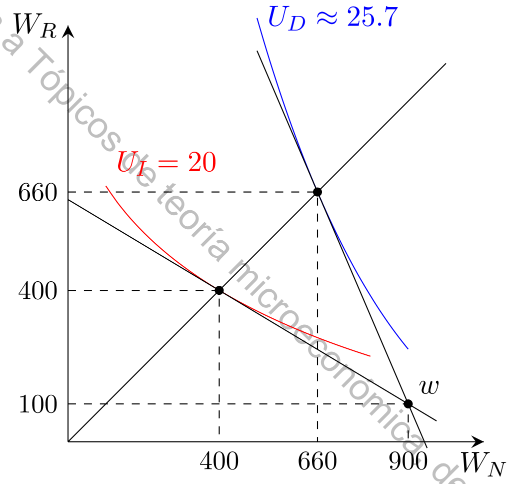
a) Como las empresas de seguros actúan operan bajo competencia perfecta, la prima a cobrar por la cobertura total del robo es la actuarialmente justa: $PAJ_I = 0.625(800) = 500$ para los imprudentes, y es $PAJ_D = 0.3(800) = 240$ para los diligentes. Luego, las pólizas óptimas (C_i, P_i) son:

$$(C_I, P_I) = (800, 500) \qquad\qquad (C_D, P_D) = (800, 240)$$

Note que dichos contratos genera que ambos agentes tengan un pago cierto, 400 para los imprudentes y 660 para los diligentes. Por lo tanto, la utilidad de cada agente será:

$$U_I(C_I, P_I) = \sqrt{400} = 20 \qquad\qquad U_D(C_D, P_D) = \sqrt{660} \approx 25.7$$

De esta manera, el bienestar social es igual a $20 + 25.7 = 45.7$ (las empresas tienen beneficios nulos). Gráficamente, tenemos:



b) Si las empresas no pueden diferenciar, queda claro que los imprudentes (agentes de alto riesgo) querrían hacerse pasar por diligentes (agentes de bajo riesgo), para pagar la prima menor por el seguro completo. Este es un problema de selección adversa y puede solucionarse mediante screening; es decir, el principal (la empresa de seguros) ofrece dos pólizas $(C_I, P_I) = (800, 500)$ (la póliza de los imprudentes bajo información simétrica) y $(C_D, P_D) = (z, pz)$, donde z es la cobertura y pz la prima que se le ofrecen al diligente. Para esto debe cumplirse lo siguiente:

$$RP: \quad U_D(C_D, P_D) \geq U_D(w) \qquad\qquad RCI: \quad U_I(C_I, P_I) \geq U_I(C_D, P_D)$$

Sabemos que la solución implica que la RCI se cumple con igualdad; sin embargo, dado que las empresas se encuentran en competencia perfecta los beneficios son cero y $p = 30\,\%$ (pues es la prima actuarialmente justa):

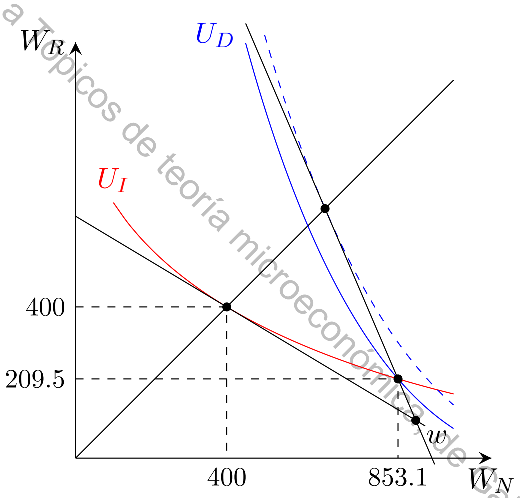
$$U_I(800, 500) = 20 = 0.625\sqrt{100 + 0.7z} + 0.375\sqrt{900 - 0.3z} = U_I(z, 0.3z)$$

De donde tenemos que $z \approx 156.5$ y $pz \approx 46.9$, por lo que la riqueza del individuo será 853.1 si no le roban o 209.5 si lo hacen. Note que, con dicha póliza, la RP se cumple con desigualdad.

$$U_D(156.5, 46.9) = 0.3\sqrt{209.5} + 0.7\sqrt{853.1} \approx 24.8 > 24 = 0.3\sqrt{100} + 0.7\sqrt{900} = U_D(0, 0$$

Por lo tanto, ambos agentes tomarán su propio contrato y la empresa tiene cero beneficios. Entonces, el bienestar social es igual a: $24.8 + 20 = 44.8$, con lo cual la pérdida de eficiencia social generada por la asimetría de la información es $44.8 - 45.7 = -0.9$.

Gráficamente:



5. ⋆⋆ Consideremos personas que tienen una riqueza de USD 100 mil y la perspectiva de perder el próximo año su automóvil, el cual está valorado en USD 20 mil, con una probabilidad de 25 % como consecuencia de un accidente. Además, la función de utilidad para estas personas depende de su riqueza: $U(w) = \ln(w)$.

   Existen dos grupos de individuos que poseen autos, los que manejan irresponsablemente (A) y los que manejan prudentemente (B). El primer grupo tiene un alto riesgo de chocar ($p_A = 25\,\%$), mientras que el segundo tiene un bajo riesgo de chocar ($p_B = 15\,\%$). Asuma que las empresas de seguros operan bajo competencia perfecta.

   a) Si la empresa de seguros puede identificar quién es A y quién es B, ¿cuáles serían las pólizas ofrecidas y la utilidad de cada tipo de agente?

b) Si las empresas de seguros no puede identificar el tipo del agente, ¿cuáles son las pólizas que ofrecerían dichas empresas para solucionar el problema de información asimétrica?

Solución

a) Sea L_i la pérdida que se genera para el agente i si sufre el accidente. La prima a cobrarse en competencia perfecta es la actuarialmente justa por la cobertura completa:

$$PAJ_i = p_i(L_i) \quad \Rightarrow \quad PAJ_A = 0.25(20) = 5 \quad \wedge \quad PAJ_B = 0.15(20) = 3$$

Por lo tanto, las pólizas $C_A = (20, 5)$ y $C_B = (20, 3)$ y la utilidad de cada agente es $U_A(95) \approx 4.55$ y $U_B(97) \approx 4.57$.

b) Si la empresa de seguros no puede diferenciar el tipo de los agentes, los agentes tipo A querrían confundirse con los tipo B, pagando una menor prima para obtener la misma cobertura y, de esa manera, una mayor utilidad.

Por lo tanto, la solución al problema de información asimétrica es ofrecer dos pólizas, una de cobertura total y otra de cobertura parcial: $C_A = (20, 5)$ para los individuos tipo A y $C_B = (z, p_B z)$ para los individuos tipo B, donde $z \in [0, 20]$ es la cobertura ofrecida a B.

Por lo tanto, se debe cumplir la restricción de participación con desigualdad y la de compatibilidad de incentivos con igualdad:

$$U_A(20, 5) = U_A(z, p_B z)$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\ln(95) \approx 4.57 = 0.25 \ln(100 - 20 - 0.15z + z) + 0.75 \ln(100 - 0.15z)$$

De donde obtenemos que z son $z_1 \approx 3.02$ y $z_2 \approx 215.93$, pero como $z_2 > L$, entonces dicha raíz se descarta. Luego, el valor de z_1 debe cumplir la restricción de participación para el agente de bajo riesgo.

$$U_B(z, p_B z) = U_B(0, 0)$$

Por lo tanto:

$$0.15 \ln(80{+}0.85(3.02)){+}0.85 \ln(100{-}0.15(3.02)) \geq 0.15 \ln(80){+}0.85 \ln(100)$$

Como la parte izquierda es mayor que la parte derecha $(4.573 > 4.572)$, la RP se cumple y las pólizas óptimas que solucionan el problema de información asimétrica es $C_A = (20, 5)$ y $C_B = (3.02, 0.45)$.

6. ⋆⋆ Sea un mercado con dos empresas y un trabajador, que puede ser del tipo eficiente (con productividad $\theta_e = 2$) o del tipo ineficiente (con productividad $\theta_i = 1$), donde la probabilidad de que el trabajador sea eficiente es p.

   En un primer momento, las empresas ofrecen los contratos que deseen (w, t), para que luego el trabajador decida cuál contrato aceptar. Se tiene la siguiente función de utilidad:

$$u(w, t|\theta) = w - \frac{t^2}{\theta}$$

   a) Encuentre los contratos de equilibrio.

   b) Encuentre el p^* a partir del cual no existe el equilibrio.

   Solución

   a) Resolveremos tomando en cuenta lo siguiente

   - No hay equilibrios agrupadores.
   - En el equilibrio separador, los trabajadores ineficientes aceptan el contrato $(\theta_i, 0)$. En este caso, el contrato es $(1, 0)$.
   - En el equilibrio separador, los trabajadores eficientes aceptan el contrato $(\theta_e, \tilde{t}_e)$. Donde $\tilde{t}_e$ es el nivel de esfuerzo que deja indiferentes a los trabajadores ineficientes entre aceptar cualquiera de los dos contratos:

$$\theta_e - c(\tilde{t}_e, \theta_i) = \theta_i - c(0, \theta_i)$$

     De donde obtenemos que $\tilde{t}_e = 1$. La intuición es que para esos dos contratos, el trabajador ineficiente es indiferente entre mentir sobre su tipo y no hacerlo, por lo que no lo hará.

   b) Para que el equilibrio separador no exista basta con que la productividad esperada sea mayor que el salario que hace que el trabajador eficiente sea indiferente entre $(\theta_e, \tilde{t}_e)$ y $(w, 0)$. Por lo que basta con un p que haga que la productividad esperada sea mayor a $w = 3/2$:

$$p\theta_e + (1 - p)\theta_i > 3/2 \quad \leftrightarrow \quad p > 1/2$$

   Por lo tanto, si la probabilidad de que el trabajador sea ineficiente es muy baja, no existirá equilibrio separador.

7. ⋆⋆ Un cliente quiere asegurar su automóvil contra accidentes. La empresa sabe que el individuo puede ser un buen conductor con probabilidad $t \in (0, 1)$ o un mal conductor. La probabilidad de tener un accidente para el buen conductor es $p_b = 1/3$ y la del malo

es $p_m = 1/2$. Hay muchas empresas en el mercado y la utilidad del cliente sobre su riqueza x es $u(x) = log(x)$.

La riqueza inicial del individuo es $w = 64$ y si choca pierde 63. Las compañías de seguro ofrecen contratos con una prima "ρ" y un nivel de cobertura "q", y los conductores eligen el contrato de su preferencia:

a) Escriba la restricción de participación para cada tipo de conductor para el contrato (ρ, q).

b) Calcule los contratos de equilibrio si hay información simétrica.

c) Estos contratos, ¿podrían pertenecer a un equilibrio con información asimétrica?

d) Encuentre los contratos de equilibrio cuando hay información asimétrica.

<u>Solución</u>

a) La restricción de participación para acceder al contrato (ρ, q) se obtiene de la comparación de las utilidades esperadas de participar y no participar:

Para el conductor bueno:

$$p_b log(w - c - \rho + q) + (1 - p_b) log(w - \rho) \geq p_b log(w - c) + (1 - p_b) log(w)$$

$$(1 - \rho + q)^{1/3}(64 - \rho)^{2/3} \geq 16$$

Para el conductor malo:

$$p_m log(w - c - \rho + q) + (1 - p_m) log(w - \rho) \geq p_m log(w - c) + (1 - p_m) log(w)$$

$$(1 - \rho + q)^{1/2}(64 - \rho)^{1/2} \geq 8$$

b) Si hay información simétrica, entonces la firma debe ofrecer un contrato para cada tipo de agente que maximice su utilidad esperada y obtener beneficio cero (si alguna tiene beneficio positivo, entonces la que obtiene menos puede llevarse el mercado ofreciendo una ϵ-mejor propuesta).

Por lo tanto, el contrato óptimo para el buen conductor surge de la siguiente maximización:

$$\max_q U_b(\rho, q) = \frac{1}{3} log(1 - \rho + q) + \frac{2}{3} log(64 - \rho) \quad s.a. \quad \frac{1}{3} q = \rho$$

De donde obtenemos que $q = 63$ y $\rho = 21$. De forma similar se procede para el mal conductor:

$$\max_q U_m(\rho, q) = \frac{1}{2}log(1 - \rho + q) + \frac{1}{2}log(64 - \rho) \quad s.a. \quad \frac{1}{2}q = \rho$$

De donde $q = 63$ y $\rho = 63/2$. De esta forma obtenemos los contratos $C_b = \{63, 21\}$ y $C_m = \{63, 63/2\}$

c) No. Si fuesen los contratos de equilibrio bajo información asimétrica, todos los conductores (buenos y malos) elegirían el contrato C_b.

d) Siguiendo la lógica del screening, al conductor malo se le ofrece el contrato de información simétrica C_m, mientras que al conductor bueno se le ofrece un contrato que también le da beneficio cero a la empresa ($q_b = 3\rho_b$):

$$\max_q U_b(\rho, q) = \frac{1}{3}log(1 - \rho + q) + \frac{2}{3}log(64 - \rho)$$

$$s.a. \quad q_b = 3\rho_b \quad \wedge \quad log(64 - 63/2) \geq \frac{1}{2}log(1 - \rho_s + q_b) + \frac{1}{2}log(64 - \rho_b)$$

Las firmas distorsionan la cobertura que ofrecen y la reducen hasta el punto que el mal conductor no quiera tomarla (cumplimiento de la restricción de compatibilidad de incentivos):

$$log(65/2) \geq \frac{1}{2}log(1 + \frac{2}{3}q_b) + \frac{1}{2}log(64 - \frac{q_b}{3}),$$

de donde se observa que $q_b \approx 163.13$ o $q_b \approx 27.37$. Se descarta el primero por generar beneficios negativos para la empresa y nos quedamos con el contrato para el buen conductor $C_b = \{9.12, 27.37\}$

8. ⋆⋆⋆ Considere un mercado de seguros en competencia perfecta. En este mercado existen dos tipos de agentes: los riesgosos (R) y los precavidos (P). La probabilidad de que un agente sea riesgoso es $t \in [0, 1]$. La riqueza inicial de todo agente es $w = 225$ y la utilidad de dicha riqueza es representada por la función de utilidad $U(w) = \sqrt{w}$. La probabilidad de un mal escenario para R es $p_R = 4/5$, y la probabilidad para P es $p_P = 1/5$. Cuando el escenario negativo ocurre, los agentes sufren una perdida monetaria de $L = 125$.

   a) Si las aseguradoras pueden distinguir entre los tipos ¿Cuáles serían las pólizas justas que se aplicarían?

   b) Suponga que no es posible distinguir entre los tipos de agente y que además el gobierno obliga a que el contrato no discrimine entre personas. ¿Cuál sería la póliza justa?

   c) Basado en la pregunta b) ¿Para qué valor de t existe el problema de selección adversa?

d) Ahora asuma que $t = 1/5$ y que p_R no es conocido. ¿Para qué valores de p_R existe el problema de selección adversa?

e) Regresando al caso cuando t no era conocido y $p_R = 4/5$. Considere un escenario en el cual la ley le permite a las aseguradoras ofrecer un contrato del tipo (q, α), donde q es la cobertura y α es la prima del seguro. La compañía de seguros no puede distinguir entre los tipos de agente. ¿Por qué el menú de contratos de la parte a) no podría ser un equilibrio?

<u>Solución</u>

a) Al igual que en los casos anteriores, la prima a pagar por la cobertura completa, dado que existe competencia perfecta, es la actuarialmente justa, denotada por π

$$\pi_R = 125p_R = 100 \qquad \pi_P = 125p_P = 25$$

b) Si no es posible discriminar, la prima a cobrar por la cobertura completa sería el promedio ponderado de las primas a pagar por cada individuo:

$$t\pi_R + (1-t)\pi_P = 25 + 75t$$

c) La utilidad de los tipos P de obtener el seguro de cobertura completa descrita en la parte b es $U(w) = \sqrt{225 - 25 - 75t} = 5\sqrt{8 - 3t}$. Para que exista un problema de selección adversa, el individuo P no debe participar en el mercado, por lo que la utilidad anterior debe ser menor o igual a la utilidad de no adquirir ningún seguro, es decir $U(w) = 0.2\sqrt{100} + 0.8\sqrt{225} = 14$.

Por lo tanto, existirá el problema de selección adversa siempre que $t \leq 4/75$.

d) Si $t = 1/5$ y no es posible distinguir entre los tipos de agentes, entonces la prima esperada es:

$$\frac{\pi_R}{5} + \frac{4\pi_P}{5} = 25p_R + 20$$

Luego, habrá selección adversa si (los tipo P no quieren participar en el mercado): $\sqrt{225 - 25p_R - 20} \leq 14$, por lo que $p_R \geq 9/25$.

e) Los agentes del tipo R también escogerían el contrato π_S, porque le otorga la misma cobertura pero pagando una prima menor. Por lo tanto, nadie escogería el contrato π_R y la empresa tendría beneficios esperados negativos.

9. ⋆ Diana, una alumna ejemplar, afirma que “una persona podría obtener un mayor salario en el mercado laboral cuando aumenta su nivel educativo, incluso si la educación no incrementase su productividad”. ¿Está de acuerdo con esta afirmación?

<u>Solución</u>

Si aceptamos que la educación aumenta la productividad de las personas, entonces también debería aumentar su salario; y aun si asumimos que la educación no afectase a la productividad, el nivel educativo aún podría servir como un mecanismo de señalamiento en el mercado laboral, que permitiría a los empleadores a inferir que las personas con mayor educación son las más productivas, por lo que les pagarían más. Por este motivo la afirmación es correcta; sin embargo, note que la educación serviría como señal sólo si obtenerla fuese menos costoso para las personas hábiles que para las que no lo son tanto.

10. $\star$ Profundice en la pregunta 9 y analice lo que ocurre en el mercado del trabajo si asumimos que:

    a) Se toma la educación (primaria y secundaria completa) como señal para conocer la productividad del trabajador.

    b) No existe un método se señalamiento.

    Solución

    a) Podemos analizar el fenómeno de selección adversa en el mercado de trabajo entre empresas y trabajadores, asumiendo ciertos supuestos:

    1) La oferta de trabajo se compone de trabajadores con productividad baja (PM_B) y de trabajadores con productividad alta (PM_A), y su participación en el stock total de trabajo es ψ y $1-\psi$ respectivamente.
    2) Los empresarios no pueden identificar el diferencial en la productividad del trabajador, pero sí identifican el nivel educativo y, por tanto, la calificación de los trabajadores, que se mide por el grado de escolaridad.
    3) Los salarios se fijan con base en la productividad esperada del trabajador, y ésta depende de la escolaridad del trabajador (e), $w = w(e)$.
    4) El costo relativo de la educación, que es menor para los trabajadores del segmento $1-\psi$ y mayor para el segmento ψ, determina la cantidad de escolaridad deseada para cada tipo de trabajador.
    5) Los agentes optimizan sus utilidades; cuando $e = 0$, el salario es w_b y si $e > 0$ el salario será $w_a > w_b$.

    b) En ausencia de algún método de señalización que permita a las empresas discriminar entre el trabajador de baja productividad (PM_b) y el trabajador de alta productividad (PM_a), los empresarios no tomarán en cuenta el valor de e para determinar los salarios.

    Como la productividad esperada es $PM^e = \psi PM_b + (1-\psi)PM_a$, el salario será $w = PM^e$ y si el salario es suficientemente alto para que todos participen, entonces el nivel de educación de los trabajadores productivos será igual al de los improductivos e igual a $e = 0$, con lo que existirá un problema de selección adversa. En un caso más severo, si el salario $w = PM^e$ no es lo suficientemente alto para los individuos de productividad alta, ellos no querrán participar en el mercado de trabajo. Esto sería anticipado por el principal, por lo que no querrá ofrecer $w = PM^e$ sino $w = PM_b$ y eso refuerza que sólo los individuos de baja productividad participen en el mercado.

11. ⋆⋆ La productividad de un trabajador está dada por un parámetro de habilidad $\tau > 0$. Las empresas pagan a los trabajadores en base a cuanta educación z tienen: el salario que se ofrece a una persona con un nivel de educación z es $w(z)$ y el costo que el trabajador incurre por obtener un nivel de educación es z es $ze^{-\tau}$.

    a) Encuentra la condición de primer orden para una persona tipo τ, y muestre que debe satisfacer:

    $$\tau = -ln\left(\frac{dw(z)}{dz}\right)$$

    b) Si las personas entran al mercado laboral teniendo la productividad que los empleadores esperan en base a su nivel de educación. Muestre que el salario óptimo debe ser $w(z) = ln(z + k)$, donde k es una constante.

    <u>Solución</u>

    a) El beneficio neto de educarse para una persona es $w(z) - ze^{-\tau}$. Maximizando esto con respecto a z da la siguiente condición de primer orden:

    $$\frac{dw(z)}{dz} = e^{-\tau} \qquad \Rightarrow \qquad \tau = -\ln\left(\frac{dw(z)}{dz}\right)$$

    b) Si las expectativas de los empleadores se cumplen entonces la productividad marginal revelada τ iguala al salario pagado $w(z)$. Asimismo, usando el resultado anterior, obtenemos que:

    $$-\ln\left(\frac{dw(z)}{dz}\right) = w(z) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\frac{dw(z)}{dz}} = e^{w(z)}$$

    De donde obtenemos que $e^{w(z)}dw(z) = dz$, e integrando, obtenemos que $e^{w(z)} = z + k$, por lo que $w(z) = \ln(z + k)$.

12. ⋆⋆ En una economía hay dos tipos de trabajadores: los hábiles, quienes tienen una productividad de 2 y los lerdos, quienes tienen una productividad de 1. Las empresas no

pueden observar las productividades de los trabajadores, pero estos pueden gastar de sus propios recursos para adquirir certificados de educación que señalicen su productividad. Es de conocimiento común que el costo de obtener un nivel educativo z es igual a z para los lerdos y $z/2$ para los hábiles, y que la utilidad del agente está dada por $U^A = w - c(z)$.

a) Encuentre el equilibrio separador de menor costo.

b) Suponga que la proporción de lerdos es π. ¿Para qué valores de π, el resultado de no señalización dominará a cualquier equilibrio separador?

c) Suponga que $\pi = 1/4$. ¿Qué valores de z son consistentes con un equilibrio agrupador?

<u>Solución</u>

a) Existe un z^* tal que las empresas creen que un trabajador es hábil si $z \geq z^*$ y lerdo de otro modo, y dichas creencias se autoconfirman cuando los hábiles eligen $z = z^* > 0$ y los lerdos eligen $z = 0$ (para ellos no debe valer la pena educarse z^* pues les resulta demasiado costoso y tampoco les debe convenir educarse $0 < z < z^*$ pues los empresarios sabrán que es un torpe y le pagarán su productividad marginal). Si los contratos ofrecidos por las empresas son $(w_H, z^* > 0)$ y $(w_L, z = 0)$, para el hábil se debe cumplir que:

$$U_H(z^*) \geq U_H(z = 0) \qquad \Rightarrow \qquad w_H - \frac{z^*}{2} \geq w_L - \frac{z}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 2 - \frac{z^*}{2} \geq 1$$

Mientras que para el lerdo se debe cumplir que:

$$U_L(z = 0) \geq U_L(z^*) \qquad \Rightarrow \qquad w_L - z \geq w_L - z^* \qquad \Rightarrow \qquad 1 \geq 2 - z^*$$

Por lo tanto, de ambas ecuaciones se desprende que $1 \leq z^* \leq 2$; es decir, cualquier $z^* \in [1, 2]$ logra un equilibrio separador consistente (el hábil desea educarse z^* y el lerdo prefiere no educarse), en donde el lerdo recibe $U_L = 1$ y el hábil recibe $U_H \in [1, 1.5]$. Luego, el equilibrio separador con menor costo es aquel en el que $z^* = 1$ (pues requiere un menor esfuerzo, por lo que reduce el costo de educarse para los hábiles), por lo que las utilidades del hábil y del lerdo son $3/2$ y 1, respectivamente.

b) Si no existe un mecanismo de señalización, la productividad esperada de un trabajador cualquiera es:

$$\pi + 2(1 - \pi) = 2 - \pi$$

Note que existirá un equilibrio agrupador si los trabajadores hábiles no tienen incentivos a señalizarse; es decir, preferirán recibir el salario $2-\pi$ sin educarse ($z = 0$) en vez de señalizarse:

$$U_H(w = 2 - \pi, z = 0) = 2 - \pi \geq \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \pi \leq 1/2,$$

Donde $3/2$ es la utilidad obtenida por los hábiles en el equilibrio separador de menor costo. Se concluye que, el equilibrio agrupador se mantendrá cuando la proporción de lerdos es pequeña.

c) Si existe un nivel de educación, $\overline{z}$, requerido para trabajar en el equilibrio agrupador; es decir, si el único contrato ofrecido por el principal es $(2 - \pi, \overline{z})$, entonces la utilidad de los trabajadores hábiles es:

$$U_H(w = 2 - \pi, \overline{z}) = 2 - \pi - \frac{\overline{z}}{2} = \frac{7}{4} - \frac{\overline{z}}{2}$$

Mientras que la utilidad de los trabajadores lerdos es:

$$U_L(w = 2 - \pi, \overline{z}) = 2 - \pi - \overline{z} = \frac{7}{4} - \overline{z}$$

Luego, para que se mantenga el equilibrio agrupador, ambos trabajadores no deben tener incentivos a señalizarse. Por lo que se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\frac{7}{4} - \frac{\overline{z}}{2} \geq \frac{3}{2} \qquad \wedge \qquad \frac{7}{4} - \overline{z} \geq 1$$

Donde $3/2$ y 1 son las utilidades obtenidas por los agentes en el equilibrio separador de menor costo. De ahí, tenemos que $\overline{z} \leq 1/2$; es decir, el equilibrio agrupador con un nivel de educación positivo se mantendrá si dicho nivel de educación es lo suficientemente bajo.

13. ⋆ Dos amigas discuten sobre los problemas de asimetría de información. Una de ellas comenta que el riesgo moral es un problema de "tipo oculto", mientras que la selección adversa es un problema de "acción oculta". Comente sobre la veracidad del enunciado anterior.

<u>Solución</u>

El enunciado es falso. El riesgo moral es un problema de "acción oculta", pues se trata de un problema de incentivos luego de la firma de un contrato. Por ejemplo, después de la obtención de un seguro contra choques, un conductor tendría menos incentivos a conducir con cuidado si sabe que el seguro le pagará todo el costo del accidente si este ocurre.

Por otro lado, la selección adversa es un problema de "tipo oculto" pues surge de la incapacidad que tiene un individuo para distinguir entre los diferentes "tipos" de personas con las que está interactuando, los cuales tienen incentivos a no revelar su verdadero "tipo" para obtener un beneficio económico de ello. Por ejemplo, cuando una persona desea comprar un auto usado no conoce cuál es la verdadera calidad (o tipo) del auto que le ofrece el vendedor, pero resulta evidente que este último tiene incentivos a ensalzar las características del coche así sea de pésima calidad.

14. ⋆ Cuando un Estado tiene como parte de sus políticas un seguro de salud para todos los ciudadanos, es probable que exista congestionamiento en los establecimientos de salud. Comente utilizando conceptos de asimetrías de información.

Solución

Dado que las consultas médicas son gratuitas y el Estado no tiene una manera de determinar si las personas se encuentran realmente enfermas, los ciudadanos tendrán incentivos a visitar al médico más veces que las necesarias, lo cual generará congestionamiento y, por tanto, problemas para obtener citas. Las compañías de seguro normalmente cobran un deducible, con lo que se hace menos probable que se presente una situación de congestionamiento y evitar un comportamiento como el que se presentaría con el seguro gratuito (riesgo moral).

15. ⋆⋆ Brenda, dueña de un bar, contrata a Jason como empleado para que atienda las mesas. Si el empleado no trabaja arduamente, los clientes no recibirán una atención adecuada, por lo que la clientela disminuirá. Por el contrario, si el empleado hace su mejor esfuerzo, el restaurante se hará popular y los ingresos aumentarán. Suponga que Brenda se preocupa solamente por la cantidad esperada de dinero que le corresponde y que el agente tiene aversión al riesgo a aportar más que el mínimo esfuerzo, y su función de utilidad es: $U(s, e) = \sqrt{s} - (e - 1)$, donde s es el salario y e el grado de esfuerzo.

Si existen sólo dos posibles grados de esfuerzo $e = 1$ y $e = 2$ y la utilidad mínima aceptable por el empleado es $U = 1$. El esfuerzo del empleado ayuda a incrementar los ingresos del restaurante, pero el resultado depende también de factores aleatorios (un día de tormenta o un partido de fútbol importante aleja a los clientes, etc.). Los ingresos esperados diarios se muestran en la siguiente tabla:

Esfuerzo	Ingreso = USD 20	Ingreso = USD 30
$e_H = 2$	$p = 1/3$	$p = 2/3$
$e_L = 1$	$p = 3/4$	$p = 1/4$

La dueña del restaurante desea maximizar su utilidad y tiene dos alternativas: 1) monitorear el grado de esfuerzo del empleado a un costo de USD 2, o 2) diseñar un contrato de incentivos.

a) Determine el contrato óptimo bajo la alternativa 1.

b) Determine el contrato óptimo bajo la alternativa 2.

<u>Solución</u>

a) Al monitorear se conocerá el esfuerzo llevado a cabo por el empleado. Se incurrirá en el costo de monitoreo, solamente si se desea que lleve a cabo el mejor esfuerzo ($e = 2$).

Para que realice este esfuerzo, hay que pagarle:

$$U(s, e_H) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{s} - (2-1) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad s = 4$$

Luego, el beneficio esperado de la Brenda sería $\overline{\pi}^E = 1/3(20) + 2/3(30) - 4 - 2 \approx 20.67$. Sin embargo, si ella no quisiera inducir el alto esfuerzo para no gastar en monitoreo, debería fijar el siguiente salario:

$$U(s, e_L) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{s} - (1-1) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad s = 1$$

Luego, el beneficio esperado de la Brenda sería $\underline{\pi}^E = 3/4(20) + 1/4(30) - 1 = 21.5$. Por lo tanto, a Brenda le convendría no monitorear y ofrecer un salario bajo $s = 1$, el cual induce un esfuerzo bajo e_L.

b) Sean s_L y s_H los salarios que se pagan cuando el ingreso es $I = 20$ o $I = 30$, respectivamente. Si Brenda desea inducir el esfuerzo alto, deben cumplirse la restricción de participación, $U(s_H, e_H) \geq 1$, y la de compatibilidad de incentivos, $U(s_H, e_H) \geq U(s_H, e_L)$:

$$U(s_H, e_H = 2) = \frac{1}{3}[\sqrt{s_L} - 1] + \frac{2}{3}[\sqrt{s_H} - 1] \geq 1 \tag{.4}$$

$$U(s_H, e_H = 2) = \frac{1}{3}[\sqrt{s_L} - 1] + \frac{2}{3}[\sqrt{s_H} - 1] \geq \frac{3}{4}\sqrt{s_L} + \frac{1}{4}\sqrt{s_H} = U(s_H, e_H = 1) \tag{.5}$$

De .4 obtenemos que $2\sqrt{s_H} + \sqrt{s_L} \geq 0$ y de .5 obtenemos que $\sqrt{s_H} - \sqrt{s_L} \geq 12/5$. Por lo tanto, obtenemos que $s_H = 7.84$ y que $s_L = 0.16$. Finalmente, el beneficio esperado de Brenda será $\pi^E = 1/3(20 - 0.16) + 2/3(30 - 7.84) = 21.39$. Note que si Brenda no desease inducir al esfuerzo más alto, bastaría con que pague $s = 1$ y tendría un beneficio esperado $\pi^E = 21.5$. Por lo tanto, a Brenda le conviene pagar un salario fijo de USD 1.

16. ⋆⋆ Suponga que en la pregunta 17, los principales compiten perfectamente y responda:

a) Escriba y resuelva el problema del principal cuando puede observar el esfuerzo del agente. Justifique cual sería el nivel óptimo de esfuerzo. Determine el salario del agente y el beneficio del principal.

b) Responda nuevamente todas las preguntas de a) considerando ahora que el principal no puede observar el nivel de esfuerzo.

c) Compare los beneficios encontrados en las partes a) y b). ¿Qué situación es preferida por cada agente?

Solución

a) Si el principal desea exigir el esfuerzo $e = 0$, el problema de optimización es:

$$\text{máx}\, \frac{2}{5}\sqrt{w_4} + \frac{3}{5}\sqrt{w_0} \qquad s.a. \qquad \frac{2}{5}(400 - w_4) + \frac{3}{5}(0 - w_0) \geq 0$$

De donde obtenemos que $w = w_4 = w_0 = 160$ y que $U = \sqrt{160}$. Por otro lado, si desea exigir el esfuerzo $e = 2$, el problema de optimización es el siguiente:

$$\text{máx}\, \frac{4}{5}\sqrt{w_4} + \frac{1}{5}\sqrt{w_0} - 2 \qquad s.a. \qquad \frac{4}{5}(400 - w_4) + \frac{1}{5}(0 - w_0) \geq 0$$

De donde obtenemos que $w = w_4 = w_0 = 320$ y la utilidad del agente es $U = -2 + 8\sqrt{5}$. Si bien el mejor escenario para el agente es que le exijan un nivel de esfuerzo $e = 2$, note que en ambos casos el beneficio del principal es cero, por lo que el principal es indiferente entre un nivel de esfuerzo u otro.

b) Si el principal es incapaz de observar el esfuerzo directamente y quiere inducir el esfuerzo bajo $e = 0$, el problema de optimización no cambia con respecto al escenario en el que e es observable. Por lo tanto, $w = w_4 = w_0 = 160$ y $U = \sqrt{160}$.

Por otro lado, si desea inducir el esfuerzo alto $e = 2$, su problema de optimización es el siguiente:

$$\text{máx}\, \frac{4}{5}\sqrt{w_4} + \frac{1}{5}\sqrt{w_0} - 2$$

Sujeto a:
$RP: \quad \frac{3}{4}\sqrt{w_4} + \frac{1}{4}\sqrt{w_0} - 2 \geq 7$
$RCI: \quad \frac{4}{5}\sqrt{w_4} + \frac{1}{5}\sqrt{w_0} - 2 \geq \frac{2}{5}\sqrt{w_4} + \frac{3}{5}\sqrt{w_0}$
$\pi = 0: \quad \frac{4}{5}(400 - w_4) + \frac{1}{5}(0 - w_0) = 0$

Como estamos en un escenario competitivo, la RCI se cumple con igualdad y la RP con desigualdad estricta. Adicionalmente, los salarios deben hacer que la utilidad esperada del principal sea cero. Por lo tanto, de las restricciones 2 y 3 tenemos que $w_4 = 317 + 4\sqrt{79} \approx 352.553$, $w_0 = 4(83 - 4\sqrt{79}) \approx 189.789$ y la utilidad del agente $U \approx 15.7764$. Por lo tanto, el mejor escenario para el agente es que el principal desee inducir el esfuerzo alto. El principal obtiene cero beneficios en ambos casos.

c) En ambos casos el beneficio del principal es 0. En cambio, el agente prefiere el escenario con información asimétrica en el cual el principal desee inducir el esfuerzo alto.

17. ⋆⋆ Considere un modelo principal-agente. El principal (P) quiere contratar a un agente neutral al riesgo para hacer un trabajo. A cambio del esfuerzo e, el cual es observado por P, el agente recibiría un salario igual a w. Un nivel de esfuerzo igual a e generaría un ingreso igual a $x(e) = e^{1/2}$ para P. El agente puede ser de dos tipos: A con probabilidad q, o B con probabilidad $1 - q$. Las preferencias de los agentes están dadas por:

$$U_A(w, e) = w - e \qquad\qquad U_B(w, e) = w - 2e$$

a) Encuentre los contratos que ofrecerá P si este puede distinguir entre los tipos de agentes.

b) Demuestre matemáticamente por qué P no ofrecerá los mismos contratos en caso de información asimétrica.

c) Encuentre los contratos ofrecidos por P en el caso de información asimétrica. ¿Cómo varían estos en función de q?

<u>Solución</u>

a) Es importante notar que la utilidad de reserva para ambos agentes es cero (pues si no trabajan el salario y el esfuerzo son cero). Por lo tanto, la restricción de participación para ambos agentes es:

$$U_A(w, e) = w - e \geq 0 \qquad\qquad U_B(w, e) = w - 2e \geq 0$$

Como P puede distinguir entre los agentes, les ofrecerá un contrato diferente a cada uno, los cuales maximizan su beneficio:

$$\max \pi = e_A^{1/2} + e_B^{1/2} - w_A - w_B \qquad s.a \quad w_A - e_A = 0 \quad \wedge \quad w_B - 2e_B = 0$$

La maximización de π permite obtener los contratos $C_i = (w_i, e_i)$ para cada agente:

$$C_A = (w_A, e_A) = (1/4, 1/4) \qquad\qquad C_B = (w_B, e_B) = (1/8, 1/16)$$

b) Note que para el agente tipo A tenemos:

$$U_A(w_A, e_A) = w_A - e_A = 0 \qquad U_A(w_B, e_B) = w_B - e_B = 1/16 > 0$$

Mientras que para el agente tipo B tenemos:

$$U_B(w_B, e_B) = w_B - 2e_B = 0 \qquad U_B(w_A, e_A) = w_A - 2e_A = -1/4 < 0$$

Por lo tanto, si P no pudiese identificar entre los diferentes tipos de agentes y ofreciese los contratos $C_A = (w_A, e_A)$ y $C_B = (w_B, e_B)$, entonces los agentes tipo B tomarían el contrato diseñado para ellos (si toman el otro contrato tienen una utilidad negativa); sin embargo, los agentes tipos A estarían mejor tomando el contrato diseñado para B. En conclusión, todos los agentes elegirán el contrato C_B.

c) Los contratos ofrecidos por P para solucionar el problema deben ser tales que los agentes se autoidentifiquen. Para esto basta con que se cumplan: 1) la restricción de participación para el agente B y 2) la restricción de compatibilidad de incentivos para el agente A.

$$U_B(w_B, e_B) \geq 0 \qquad U_A(w_A, e_A) \geq U_A(w_B, e_B)$$

Por lo tanto, P se enfrenta al nuevo problema de optimización, en el que busca maximizar sus beneficios esperados:

$$\text{máx}\, \pi^E = q(e_A^{1/2} - w_A) + (1-q)(e_B^{1/2} - w_B) \quad s.a.: \quad w_B - 2e_B = 0 \wedge w_A - e_A = w_B - e_B$$

La maximización de π^E permite obtener los nuevos contratos $C_i = (w_i, e_i)$ para cada agente:

$$C_B = (w_B, e_B) = \left(2\left(\frac{1-q}{4-2q}\right)^2, \left(\frac{1-q}{4-2q}\right)^2\right); C_A = (w_A, e_A) = \left(w_B + \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right),$$

los cuales aseguran el cumplimiento de las restricciones descritas anteriormente.

18. ⋆⋆ Giuliana, la hermana de Pedro, debe estudiar matemáticas durante sus vacaciones, pues rendirá un examen muy difícil al regresar al colegio. Sus padres no tienen tiempo para verificar si Giuliana estudia o no, por lo que le piden a Pedro que trabaje como su profesor. Le proponen el siguiente "contrato":

Si Giuliana saca 20 en el examen, le pagarán S/. 5 000, pero no le pagarán nada si ella saca menos de 20 (padres muy exigentes).

Adicionalmente, Pedro valorará su éxito como profesor (que Giuliana saque 20) como una remuneración extra de 21 %.

Pedro enfrenta un costo de oportunidad: durante sus vacaciones puede ayudar a su tía por S/. 400 para ayudarla en labores domésticas que no requieren mucho esfuerzo. Si su función de utilidad es la siguiente:

$$U(e, w, z) = -\frac{e}{6} + \sqrt{w(1+z)}$$

Donde e representa el esfuerzo, que puede ser bajo ($e = 0$) o alto ($e = 1$), w representa el salario y z es la valoración del éxito, que puede ser 0.21 si Giuliana saca 20 o 0 si no lo hace.

Adicionalmente, si Pedro ejerce un alto esfuerzo en enseñarle a su hermana, la probabilidad de que obtenga un 20 es de 75 %; mientras que, si ejerce un esfuerzo bajo, la probabilidad de que obtenga 20 será de 25 %. Asuma que los padres de Pedro son neutrales al riesgo.

a) Si los padres de Pedro pudieran observar su esfuerzo directamente ¿qué esquema salarial le ofrecerían?

b) Cómo cambia la respuesta si los padres de Pedro no son capaces de observar su nivel de esfuerzo.

<u>Solución</u>

a) Si los padres de Pedro observan el esfuerzo, le ofrecerán un salario tal que la utilidad esperada de su esfuerzo alto sea mayor a la de trabajar con su tía o utilidad de reserva U_R (no es necesario crear un esquema que garantice compatibilidad de incentivos).

$$U(e=1) \geq U_R \quad \Rightarrow \quad 0.75\left[-\frac{1}{6} + \sqrt{1.21w}\right] + 0.25\left[-\frac{1}{6} + \sqrt{w}\right] \geq -\frac{0}{6} + \sqrt{400} = 20$$

De donde obtenemos que $w \geq 351.93$.

b) En este caso se debe cumplir la restricción de participación RP:

$$0.75\left[-\frac{1}{6} + \sqrt{1.21w_a}\right] + 0.25\left[-\frac{1}{6} + \sqrt{w_b}\right] \geq 20$$

Por lo que debe cumplirse que:

$$0.825\sqrt{w_a} + 0.25\sqrt{w_b} \geq \frac{121}{6} \tag{.6}$$

También debe cumplirse la restricción de compatibilidad de incentivos RCI: $UE(e = 1) \geq UE(e = 0)$

$$\frac{3}{4}\left[-\frac{1}{6} + \sqrt{1.21w_a}\right] + \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{6} + \sqrt{w_b}\right] \geq \frac{1}{4}\left[-\frac{0}{6} + \sqrt{1.21w_a}\right] + \frac{3}{4}\left[-\frac{0}{6} + \sqrt{w_b}\right]$$

Por lo que debe cumplirse que:

$$0.55\sqrt{w_a} - 0.5\sqrt{w_b} \geq \frac{1}{6} \qquad (.7)$$

De donde obtenemos que $w_a = 338.89$ y que $w_b = 396.67$. Por lo tanto, el bienestar de Pedro cuando su hermana saca 20 es $1.21w_a = 410.06$.

19. ⋆⋆ La utilidad de un agente es una función de su salario (w) y esfuerzo (e), $U(w, e)$, y su utilidad de reserva está dada por U_R. Como resultado del esfuerzo, se pueden producir los resultados x_1 y x_2, con $x_2 > x_1$. La probabilidad del mejor resultado, x_2, es p_H y p_L, dependiendo del esfuerzo, e_H o e_L, respectivamente. Con la siguiente información: $U(w, e) = \sqrt{w} - e^2$, con $e_L = 1$, $e_H = 2$, $p_L = 0.25$, $p_H = 0.50$, $U_R = 2$, calcule el contrato óptimo, $w(x)$, que ofrece el Principal, que es neutral al riesgo, cuando él pide:

   a) Esfuerzo bajo, e_L.
   b) Esfuerzo bajo, e_H.
   c) ¿Cuán grande debe ser la diferencia entre el bien 2, x_2, y el bien 1, x_1, para que el Principal exija esfuerzo alto?

<u>Solución</u>

a) Se sabe (tienen que desarrollar eso), que el Principal fija un salario constante ($w_1 = w_2 = w$). Reemplazando en la RP, $U(w, e) = \sqrt{w} - e_L^2 = U_R = 2$. Luego $\sqrt{w} - 1 = 2$ y $w = 9$.

b) En este caso, sí hay RP y RI que deben cumplirse con igualdad.

$$RP: \quad p_H U(w_2, e_H) + (1 - p_H)U(w_1, e_H) = U_R = 2$$

$$0.5\sqrt{w_2} + 0.5\sqrt{w_1} - 4 = 2$$

$$RI: \quad p_H U(w_2, e_H) + (1 - p_H)U(w_1, e_H) = p_L U(w_2, e_L) + (1 - p_L)U(w_1, e_L)$$

$$0.5\sqrt{w_2} + 0.5\sqrt{w_1} - 4 = 0.25\sqrt{w_2} + 0.75\sqrt{w_1} - 1$$

Resolviendo ambas ecuaciones, tenemos $w_1 = 0$ y $w_2 = 144$.

c) Para esto debemos analizar la utilidad del agente bajo sus diferentes niveles de esfuerzo

$$\pi(e_L) = 0.25x_2 + 0.75x_1 - 9$$
$$\pi(e_H) = 0.50(x_2 - 144) + 0.5x_1 - 72$$

Luego, debe ocurrir que $\pi(e_L) \geq \pi(e_H)$, por lo tanto:

$$0.50(x_2 - 144) + 0.5x_1 - 72 \geq 0.25x_2 + 0.75x_1 - 9 \quad \Rightarrow \quad 0.25x_2 - 0.25x_1 \geq 63$$

Por lo que $x_2 - x_1 \geq 252$.

20. ⋆⋆ Considere el siguiente problema de Principal-Agente, en el cual el Agente escoge entre dos acciones, $a \in \{a_1, a_2\} = \{0, 1\}$. El Principal paga al agente un salario w_s, con $s \in \{1, 2, 3, 4\}$ contingente en observar la producción $Y \in \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, con $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$. La distribución de probabilidades de cada nivel de producción es como sigue, $p_s(a_i) := \Pr\{Y = y_s | a = a_i\}$, $i \in \{1, 2\}$:

a_i	$p_1(a_i)$	$p_2(a_i)$	$p_3(a_i)$	$p_4(a_i)$
a_1	$3/8$	$3/8$	$1/8$	$1/8$
a_2	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

La función de utilidad del Agente es:

$$U(w, a) = \sqrt{w} - a$$

Asuma que la utilidad de reserva del Agente es $\overline{u} = 2$. El principal es neutral al riesgo.

a) Si la acción fuese observable, caracterice el contrato óptimo si se quiere incentivar la acción $a_2 = 1$.

b) Suponga que la acción a_i no es observable. Caracterice el contrato óptimo que implemente a_2. Utilice la siguiente regla para la determinación de salarios: $LR_k = p_k(a_2)/p_k(a_1)$, $w_s > (=) w_r \iff LR_s > (=) LR_r$.

c) Indique cuál es la pérdida de eficiencia debido a la asimetría de información.

Solución

a) Como el esfuerzo es observable, el contrato puede exigir el esfuerzo $a_2 = 1$. Por lo tanto, lo único que se debe asegurar es que el Agente acepte el contrato (RP). Por lo tanto, el salario óptimo implica un pago fijo: $w_1^* = w_2^* = w_3^* = w_4^* = w^*$, y se cumple ($RP$ se cumple con igualdad):

$$\sqrt{w^*} - a_2 = \overline{u} \rightarrow w^* = 9,$$

Una forma alternativa de obtener el salario óptimo es plantear el problema de optimización al que se enfrenta el principal:

$$\max_{w_i} \frac{1}{4}(y_1 - w_1) + \frac{1}{4}(y_2 - w_2) + \frac{1}{4}(y_3 - w_3) + \frac{1}{4}(y_4 - w_4)$$
$$\textit{s.a. } RP : \frac{1}{4}\left(\sqrt{w_1} + \sqrt{w_2} + \sqrt{w_3} + \sqrt{w_4}\right) - 1 \geq 2$$

Y planteamos el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{(y_1 - w_1)}{4} + \frac{(y_2 - w_2)}{4} + \frac{(y_3 - w_3)}{4} + \frac{(y_4 - w_4)}{4} - \lambda\left[12 - \sqrt{w_1} - \sqrt{w_2} - \sqrt{w_3} - \sqrt{w_4}\right]$$

De donde obtenemos las CPO:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_1} = 0 \quad &\Rightarrow \quad -\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{2\sqrt{w_1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\sqrt{w_1}}{2} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad ... \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\sqrt{w_2}}{2} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_3} = 0 \quad &\Rightarrow \quad ... \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\sqrt{w_3}}{2} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_4} = 0 \quad &\Rightarrow \quad ... \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\sqrt{w_4}}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 9$.

b) Si la acción no es observable debemos verificar el cumplimiento de la RP y la RI. Considerando que $w_1 = w_2$ y $w_3 = w_4$ en la RP:

$$u(w, a_2) = \overline{u} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{w_1}}{4} + \frac{\sqrt{w_2}}{4} + \frac{\sqrt{w_3}}{4} + \frac{\sqrt{w_4}}{4} - 1 = 2$$

Por lo tanto tenemos:

$$\frac{\sqrt{w_1}}{2} + \frac{\sqrt{w_3}}{2} - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{w_1} + \sqrt{w_3} = 6 \tag{.8}$$

De forma análoga, tomando en cuenta dicha igualdad en la RI tenemos:

$$u(w,a_2)=u(w,a_1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{w_1}}{2}+\frac{\sqrt{w_3}}{2}-1=\frac{3\sqrt{w_1}}{4}+\frac{\sqrt{w_3}}{4}$$

Por lo tanto tenemos:

$$\frac{\sqrt{w_3}-\sqrt{w_1}}{4}-1=0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{w_3}-\sqrt{w_1}=4 \tag{.9}$$

Luego, de .8 y .9 podemos obtener que $w_1 = w_2 = 1$ y que $w_3 = w_4 = 25$. Note que el supuesto de $w_1 = w_2$ y $w_3 = w_4$ puede demostrarse a partir de la formulación del problema de optimización del principal:

$$\max_{w_i} \frac{1}{4}\left(y_1+y_2+y_3+y_4-w_1-w_2-w_3-w_4\right)$$

s.a.:

$RP(\lambda) \quad \frac{1}{4}\left(\sqrt{w_1}+\sqrt{w_2}+\sqrt{w_3}+\sqrt{w_4}\right)-1\geq 2$

$RI(\gamma) \quad \frac{(\sqrt{w_1}+\sqrt{w_2}+\sqrt{w_3}+\sqrt{w_4})}{4}-1\geq \frac{3(\sqrt{w_1}+\sqrt{w_2})}{8}+\frac{(\sqrt{w_3}+\sqrt{w_4})}{8}$

De ahí, tenemos las CPO:

$$\begin{aligned}
\frac{dB}{dw_1}&=0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{4}+\lambda\frac{1}{4(2)\sqrt{w_1}}-\gamma\frac{1}{8(2)\sqrt{w_1}}=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{4\sqrt{w_1}+\gamma}{2}\\
\frac{dB}{dw_2}&=0 \quad \Rightarrow \quad ... \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{4\sqrt{w_2}+\gamma}{2}\\
\frac{dB}{dw_3}&=0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{4}+\frac{1}{4(2)\sqrt{w_3}}+\gamma\frac{1}{8(2)\sqrt{w_3}}=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{4\sqrt{w_3}-\gamma}{2}\\
\frac{dB}{dw_4}&=0 \quad \Rightarrow \quad ... \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{4\sqrt{w_4}-\gamma}{2}
\end{aligned}$$

de donde se concluye que $w_1 = w_2$ y que $w_3 = w_4$

c) La pérdida de eficiencia social (PES) originada por la existencia de asimetría de información se obtiene de la diferencia del bienestar total de la parte b), w^b, y de la parte a), w^a:

$w^b - w^a =$

$$\left[\frac{1}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(25)+2\right]-\left[\frac{1}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4)-9+2\right]=-4$$

21. ⋆⋆⋆ Suponga que el negocio del principal puede generar un ingreso igual a 0 ó a 400. Su empleado, el agente, escoge entre dos posibles niveles de esfuerzo que no son observables por el principal. Además, el ingreso obtenido por el principal depende del nivel de esfuerzo elegido por el agente, de acuerdo a la siguiente distribución de probabilidades:

Esfuerzo	Ingreso = 400	Ingreso = 0
$e_L = 0$	$p = 2/5$	$p = 3/5$
$e_H = 2$	$p = 4/5$	$p = 1/5$

El principal es neutral al riesgo y su función de beneficios es $\pi = x - w$, mientras el agente es averso al riesgo y su función de utilidad es $U(w, e) = \sqrt{w} - e$, donde x representa el ingreso generado por el negocio, w es el salario que se paga al agente, y e es su esfuerzo. El valor de la utilidad de reserva del agente es $U^R = 7$.

Suponga que el principal es un monopolista y responda:

a) Resuelva el problema del principal cuando puede observar el esfuerzo del agente. Justifique cuál sería el nivel óptimo de esfuerzo. Determine el salario del agente y el beneficio del principal (este es el equilibrio de primer mejor).

b) Responda nuevamente todas las preguntas de a) considerando ahora que el principal no puede observar el nivel de esfuerzo (este es el equilibrio de segundo mejor).

c) Compare los beneficios encontrados en la parte a) y b). ¿Qué situación es preferida por el agente y por el principal?

<u>Solución</u>

a) Si el principal observa el esfuerzo del agente, puede exigirlo mediante un contrato. Si desea exigir un esfuerzo igual a $e = 0$, el problema del principal es:

$$\max_{w_0, w_4} \frac{2}{5}(400 - w_4) + \frac{3}{5}(0 - w_0) \qquad s.a. \qquad \text{RP del agente: } \frac{2}{5}\sqrt{w_4} + \frac{3}{5}\sqrt{w_0} \geq 7$$

De donde obtenemos que $w_4 = w_0 = w = 49$ y el beneficio esperado de la empresa es $\pi_1 = 111$. Por otro lado, si desea exigir un esfuerzo igual a $e = 2$, el problema del principal es:

$$\max_{w_0, w_4} \frac{4}{5}(400 - w_4) + \frac{1}{5}(0 - w_0) \qquad s.a. \qquad \text{RP del agente: } \frac{4}{5}\sqrt{w_4} + \frac{1}{5}\sqrt{w_0} - 2 \geq 7$$

De donde obtenemos que $w_4 = w_0 = w = 81$ y el beneficio esperado de la empresa es $\pi_2 = 239$. Note que estos resultados son intuitivos, pues como el agente es averso al riesgo, el principal retiene todo el riesgo y le paga un monto cierto w por el esfuerzo que exige al agente (este es, en esencia, un contrato de seguro completo para el agente).

b) Si el principal desea inducir el esfuerzo $e = 0$, se enfrenta al mismo problema de maximización que en el caso en el que puede observar el esfuerzo (no existen incentivos para esforzarse más de lo exigido), por lo que $w_0 = w_4 = 49$ y $\pi_1 = 111$.

Por otro lado, si el principal desea inducir el esfuerzo alto $e = 2$, el problema de maximización incluye ahora la restricción de compatibilidad de incentivos (RCI):

$$\text{máx}\, \frac{4}{5}(400 - w_4) + \frac{1}{5}(0 - w_0)$$

Sujeto a:

$RP: \quad \frac{4}{5}\sqrt{w_4} + \frac{1}{5}\sqrt{w_0} - 2 \geq 7$

$RCI: \quad \frac{4}{5}\sqrt{w_4} + \frac{1}{5}\sqrt{w_0} - 2 \geq \frac{2}{5}\sqrt{w_4} + \frac{3}{5}\sqrt{w_0}$

Las dos restricciones se cumplen con igualdad (como se demostró en la parte teórica), por lo que el principal pagará los salarios $w_4 = 100$, $w_0 = 25$ y su beneficio esperado será $\pi_3 = 235$

c) Note que el agente es indiferente entre dos situaciones porque siempre obtiene su utilidad de reserva $U_R = 7$; sin embargo, el principal prefiere encontrarse en el caso de información simétrica y exigir el esfuerzo alto, pues obtendría $\pi_2 = 239$, por lo que el costo de la existencia de información asimétrica es 4.

Referencias