2 - Juegos con información completa

1. $\star$ Un excelente ejemplo de aplicación de teoría de juegos estáticos con información completa son los juegos de *poker*, donde las funciones de ganancia de cada jugador son interdependientes en función a las estrategias que los jugadores elijan.

   Solución

   Falso. En este juego no existe simultaneidad, sino secuencialidad, pues cada persona reacciona en función a las estrategias escogidas por los rivales. Por otro lado, es importante notar que la información no es completa, porque los jugadores no saben las cartas con las que cuentan los demás jugadores.

2. $\star\star$ Se tiene un juego con los siguientes elementos: $N = 3$, $S_i = \{A_i, B_i\}$, donde $i = 1, 2, 3$, y un conjunto de pagos $u_i(\cdot)$. Muestre el conjunto de perfiles de estrategias puras, S.

   Solución

   Dado que $N = 3$ y $S_i = A_i, B_i$, los conjuntos de estrategias puras se define como:

   $$S_1 = \{A_1, B_1\} \qquad S_2 = \{A_2, B_2\} \qquad S_3 = \{A_3, B_3\}$$

   Y el conjunto de perfiles es $S = \prod_{i \in N} S_i$, y tiene 8 elementos:

   $$S = \{(A_1, A_2, A_3), (A_1, A_2, B_3), (A_1, B_2, A_3), (B_1, A_2, A_3),$$
   $$(A_1, B_2, B_3), (B_1, A_2, B_3), (B_1, B_2, A_3), (B_1, B_2, B_3)\}$$

3. $\star$ Plantee un ejemplo en el cual se verifique que la solución de un juego por eliminación iterada de estrategias débilmente dominadas dependa del orden de eliminación.

Solución

Hay muchas posibilidades, incluyendo el juego mostrado:

	A_2	B_2	C_2	D_2
A_1	$(6,0)$	$(5,4)$	$(2,0)$	$(2,3)$
B_1	$(4,1)$	$(5,2)$	$(4,2)$	$(2,3)$
C_1	$(2,2)$	$(2,1)$	$(4,2)$	$(0,2)$
D_1	$(4,1)$	$(2,1)$	$(1,1)$	$(2,1)$

Eliminaremos iteradamente las estrategias débilmente dominadas:

- A_2 está débilmente dominada por C_2 ($C_2 \succsim A_2$).
- A_1, C_1 y D_1 están débilmente dominadas por B_1 ($B_1 \succsim A_1, C_1, D_1$).
- B_2 y C_2 están estrictamente dominadas por D_2 ($D_2 \succ B_2, C_2$).

Por lo que la solución del juego es el perfil (B_1, D_2) . Sin embargo, si la eliminación iterada de estrategias se realiza en el siguiente orden:

- C_2 está débilmente dominada por D_2 ($D_2 \succsim C_2$).
- B_1 y D_1 están débilmente dominadas por A_1 ($A_1 \succsim B_1, D_1$).
- C_1 está estrictamente dominada por A_1 ($A_1 \succ C_1$).
- A_2 y D_2 están estrictamente dominadas por B_2 ($B_2 \succ A_2, D_2$).

De donde obtendremos el perfil (A_1, B_2), lo que muestra que la solución del juego obtenido por la eliminación iterada de estrategias débilmente dominadas puede depender del orden de eliminación. De hecho, si consideramos una tercera forma de eliminar estrategias:

- C_1 y D_1 están débilmente dominadas por B_1 ($B_1 \succsim C_1, D_1$).
- A_2 y C_2 están estrictamente dominadas por D_2 ($D_2 \succ A_2, C_2$).

Encontraremos otra solución al juego propuesto (no es posible reducir aún más la matriz de pagos):

	B_2	D_2
A_1	$(5,4)$	$(2,3)$
B_1	$(5,2)$	$(2,3)$

4. $\star\star$ Demuestre que un individuo no puede tener dos estrategias puras que sean débilmente dominantes.

   Solución

   Realizaremos la demostración por contradicción:

   Dado el juego $G = [N, \{S_i\}, \{u_i(S)\}]$, se asume que el individuo i cuenta con dos estrategias puras $s_i^\star, s_i^\circ \in S_i$, tal que ambas son débilmente dominantes.

   Una estrategia es débilmente dominante si domina débilmente a todas las demás. Por ello,

   $$u_i(s_i^\star, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall s_i \in S_i \quad \wedge \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

   $$u_i(s_i^\circ, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall s_i \in S_i \quad \wedge \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

   Con desigualdad estricta para algún s_{-i}. Dado que, tanto $s_i^\star$ como s_i° pertenecen a S_i, entonces, debe cumplirse que:

   $$u_i(s_i^\star, s_{-i}) \geq u_i(s_i^\circ, s_{-i}) \quad \wedge \quad u_i(s_i^\circ, s_{-i}) \geq u_i(s_i^\star, s_{-i})$$

   Por lo que se tendría que $u_i(s_i^\circ, s_{-i}) = u_i(s_i^\star, s_{-i})$ para todo s_{-i}, lo cual implica que todos los pagos de ambas estrategias deben ser iguales. Sin embargo, esto contradice la definición **??** sobre la dominación débil.

5. $\star$ Analice la veracidad del siguiente enunciado: “Por definición, un equilibrio de Nash jamás debería usar ninguna estrategia estrictamente dominada, ni ninguna estrategia débilmente dominada”.

   Solución

   La primera parte del enunciado es verdadera. Para mostrar que la segunda parte es falsa, consideremos el siguiente ejemplo:

	C	D
A	$(4,4)$	$(2,1)$
B	$(1,2)$	$(2,2)$

   Queda claro que las estrategias B y D son estrategias débilmente dominadas para los jugadores 1 y 2, respectivamente; sin embargo, el perfil (B, D) es un equilibrio de Nash.

6. $\star$ Considere una industria con I empresas; cada una trata de convencer al Congreso para que le otorgue un subsidio. Sea h_i el número de horas de esfuerzo utilizados por la

empresa i, y sea $c_i(h_i) = w_i h_i^2$ el costo de dicho esfuerzo, donde w_i es una constante positiva. Si el nivel de esfuerzo de las empresas es $(h_1, ..., h_I)$, el valor del subsidio que obtiene la industria es $\alpha \sum_i h_i + \beta(\prod_i h_i)$, donde α y β son constantes.

Considere un juego en el que las empresas deciden simultánea e independientemente el número de horas que van a dedicar a esta tarea. Demuestre que cada empresa tiene una estrategia estrictamente dominante, si y solo si $\beta = 0$, y muestre dicha estrategia[1].

Solución

Note que cada empresa i se enfrenta al siguiente problema:

$$\max_{h_i} \pi_i = \alpha \sum_{i=1}^{I} h_i + \beta \left(\prod_{i=1}^{I} h_i \right) - w_i h_i^2$$

Luego, la condición de primer orden es:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial h_i} = \alpha + \beta \left(\prod_{j \neq i} h_j \right) - 2 w_i h_i = 0$$

De donde puede obtenerse la función de mejor respuesta de la empresa i:

$$h_i = \frac{\alpha}{2 w_i} + \frac{\beta}{2 w_i} \left(\prod_{j \neq i} h_j \right),$$

donde puede observarse que la mejor respuesta de la empresa i depende de la acción del resto de las $I - 1$ empresas; sin embargo, si $\beta = 0$ se observa que la mejor respuesta del jugador i es $h_i = \alpha / 2 w_i$, que es única e independiente de las estrategias de los demás jugadores; es decir, es una estrategia estrictamente dominante.

7. $\star$ La inconsistencia dinámica de una política de gobierno bajo un escenario de discreción puede ser analizada desde la teoría de juegos de la siguiente manera: El gobierno debe decidir entre una inflación de 1 % ó 10 %. El sindicato debe elegir entre elevar los salarios nominales 1 % ó 10 % también. El gobierno se interesa por el nivel de empleo: su utilidad es 1 si el pleno empleo se mantiene; 3, si el empleo sobrepasa su nivel de largo plazo; y -1, si se encuentra por debajo de dicho nivel. Los sindicatos se interesan en sus salarios reales: su utilidad es 1, si sus salarios reales se mantienen constantes; es 3, si suben; y -1, si caen.

   a) Plantee la matriz de pagos y halle el equilibrio. Analice si es posible llegar a una economía en pleno empleo y con el menor nivel de inflación posible.

1 Ejercicio 8.B.1 del libro "*Microeconomic theory*" (Mas-Colell *et al.*, 1995).

b) ¿Cambia la respuesta a la parte a) si el gobierno se compromete a alcanzar un nivel de inflación de 1 %?

Solución

a) El juego puede representarse de la siguiente manera:

		Sindicato	
		$1\,\%$	$10\,\%$
Gobierno	$1\,\%$	$(1,1)$	$(-1,3)$
	$10\,\%$	$(3,-1)$	$(1,1)$

Usando el concepto de dominación (estrategias estrictamente dominantes) se observa que el perfil $(10\,\%, 10\,\%)$ es el único equilibrio. El resultado es de pleno empleo, pero con un nivel de inflación de 10 %. No es posible lograr menor nivel de inflación.

b) No cambiaría la respuesta, pues el sindicato se verá incentivado a elegir elevar los salarios en 10 %. Si el estado prevé esto de antemano, tendrá el incentivo, a su vez, de no cumplir con su promesa. Finalmente, llegaremos al mismo resultado que en la parte a).

8. ⋆⋆ Se tienen las siguientes matrices de pagos:

Juego 1

	X	Y	Z
A	$(3,0)$	$(2,5)$	$(1,3)$
B	$(2,4)$	$(1,2)$	$(2,1)$
C	$(1,-1)$	$(0,3)$	$(0,1)$

Juego 2

	X	Y	Z
A	$(3,0)$	$(2,5)$	$(1,3)$
B	$(2,1)$	$(1,2)$	$(2,4)$
C	$(1,-1)$	$(0,3)$	$(0,1)$

a) Elimine iteradamente las estrategias estrictamente dominadas.

b) ¿Es posible hallar el equilibrio a través de la eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas? ¿Importa el orden de eliminación de estrategias?

Solución

a) Para el juego 1, tenemos lo siguiente:

1) C es estrictamente dominada por A ($A \succ C$).
2) Luego de eliminar C, Z es estrictamente dominada por Y ($Y \succ Z$).

3) Luego de eliminar Z, B es estrictamente dominada por A $(A \succ B)$.

4) Luego de eliminar B, X es estrictamente dominada por Y $(Y \succ X)$.

Mientras que, para el juego 2, tenemos lo siguiente:

1) C es estrictamente dominada por A ($A \succ C$).

2) Luego de eliminar C, X es estrictamente dominada por Y $(Y \succ X)$.

b) En el juego 1 es posible encontrar un único perfil de equilibrio (A, Y). Sin embargo, en el caso del juego 2, el resultado del proceso de eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas es la siguiente matriz reducida:

	Y	Z
A	$(2, 5)$	$(1, 3)$
B	$(1, 2)$	$(2, 4)$

Es claro que el resultado de ambos juegos no depende del orden de eliminación de estrategias. En el juego 1, por ejemplo, se puede comenzar eliminando Z (estrictamente dominado por Y), luego eliminar B y C (estrictamente dominados por A) y finalmente eliminar X (estrictamente dominado por Y); mientras que, en el juego 2 puede eliminarse primero X (estrictamente dominado por Y y Z) para después eliminar C (estrictamente dominado por A). Esta es una característica exclusiva de las estrategias estrictamente dominadas.

9. ⋆⋆ Dado el siguiente juego en forma estratégica:

		2			
		A	B	C	D
1	a	(1,1)	(2,5)	(1,3)	(0,4)
	b	(3,2)	(3,0)	(2,3)	(2,2)
	c	(0,0)	(2,2)	(0,1)	(5,0)
	d	(1,2)	(3,1)	(4,2)	(1,1)

a) Enumere los elementos del juego descrito.

b) Utilice argumentos de dominación para obtener soluciones del juego.

c) Encuentre el conjunto de estrategias razonalizables y compárelo con el conjunto solución de la eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas.

d) Encuentre el/los equilibrios de Nash en estrategias puras.

Solución

Este ejercicio nos permitirá recordar las definiciones estudiadas antes.

a) El juego descrito puede representarse como $G = [N, \{S_i\}, \{u_i(S)\}]$, donde $N = 2$, $S_1 = \{a, b, c, d\}$, $S_2 = \{A, B, C, D\}$ y los conjuntos u_1 y u_2 que contienen todos los posibles pagos a los jugadores 1 y 2.

b) No existen estrategias que sean estrictamente dominantes para ningún jugador. Pero existe una estrategia estrictamente dominada:

La estrategia $a \in S_1$ es estrictamente dominada para el jugador 1 pues para cualquier estrategia que elija el jugador 2 existe la estrategia $b \in S_1$ tal que:

$$u_1(b, m) > u_2(a, m) \quad \text{para } m = A, B, C, D$$

Si al supuesto de racionalidad se le suma el supuesto de conocimiento común, se puede reducir el juego eliminando iteradamente estrategias que sean estrictamente dominadas.

Por lo tanto se elimina D (dominado por C), luego c (dominado por b y d) y luego B (dominado por A y C). Finalmente, la predicción del juego es:

		2	
		A	C
1	b	(3,2)	(2,3)
	d	(1,2)	(4,2)

Note que, si utilizamos el concepto de dominación débil, se puede eliminar la estrategia A (dominada débilmente por C), por lo que la solución del juego sería el perfil de estrategias $\{d, C\}$.

c) Si tomamos la definición de mejor respuesta (def. **??**) para estrategias puras, tenemos:

$$B_1(A) = \{b\} \quad \wedge \quad B_1(B) = \{d\} \quad \wedge \quad B_1(C) = \{d\} \quad \wedge \quad B_1(D) = \{b\}$$

Se observa que a y c nunca son mejores respuestas; por lo tanto, un jugador racional no las jugaría nunca. Luego, por conocimiento común, el jugador 2 genera las correspondencias de mejores respuestas sin considerar las estrategias a y c (eliminación iterada de estrategias que nunca son mejores respuestas):

$$B_2(b) = \{C\} \quad \wedge \quad B_2(d) = \{A, C\}$$

Luego, las estrategias B y D son eliminadas. Luego de ello, no es posible eliminar más estrategias, por lo que el juego se reduce a:

		2	
		A	C
1	b	(3,2)	(2,3)
	d	(1,2)	(4,2)

El conjunto de estrategias racionalizables es igual al conjunto solución derivado de la eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas (esto es cierto siempre que $N = 2$).

d) Un perfil de estrategias puras $s \in S$ es un equilibrio de Nash en estrategias puras si[2]:

$$s_i \in B_i(s_{-i}) \qquad \forall i \in N$$

El único perfil de estrategias puras que cumple con esto es el perfil $\{d, C\}$, pues se observa que:

$$d \in B_1(C) \qquad \wedge \qquad C \in B_2(d)$$

10. ⋆⋆ Considere el siguiente juego representado de forma normal:

	C_1	C_2	C_3
R_1	$(3,2)$	$(2,1)$	$(1,a)$
R_2	$(2,2)$	$(b,4)$	$(0,2)$
R_3	(c,d)	$(3,2)$	$(e,4)$

a) ¿Qué condición debe cumplir b para que R_2 sea estrictamente dominada por R_1?

b) Asumiendo que se cumple la primera condición y que existe conocimiento común de racionalidad, indique cuál es la condición sobre d para que C_2 sea estrictamente dominada por C_1.

c) Si se cumplen las dos primeras condiciones, ¿qué más se necesitaría para afirmar que (R_1, C_1) es un equilibrio de Nash?

d) ¿Qué condiciones adicionales serían necesarias para que este equilibrio de Nash sea único?

Solución

a) Los pagos de escoger R_1 son: $(3,2,1)$, que debe ser mayor a los pagos de escoger R_2, que son (2,b,0). Luego, bastaría que $b < 2$.

2 Para esto se debe asumir que existen creencias comunes.

b) Notar que como existe conocimiento común de racionalidad, se puede eliminar iteradamente las estrategias estrictamente dominadas. Por lo tanto, si $b < 2$, la matriz se reduce a:

	C_1	C_2	C_3
R_1	$(3,2)$	$(2,1)$	$(1,a)$
R_3	(c,d)	$(3,2)$	$(e,4)$

De lo anterior, se observa que, para que C_2 sea estrictamente dominada por C_1, basta con que $d > 2$.

c) Si se cumplen las dos primeras condiciones, el juego se reduce a:

	C_1	C_3
R_1	$(3,2)$	$(1,a)$
R_3	(c,d)	$(e,4)$

Por lo que (R_1, C_1) será un equilibrio de Nash siempre que $c \leq 3$ y que $a \leq 2$.

d) Si se quiere garantizar que (R_1, C_1) sea el único equilibrio de Nash, se deben cumplir las siguientes condiciones: $c < 3$, $a < 2$, $e < 1$ y $d < 4$

11. ⋆⋆ Se tiene un juego con tres personas eligiendo simultáneamente. El jugador 1 elige (filas) entre T y B, el jugador 2 elige (columnas) entre L y R, y el jugador 3 elige entre las matrices A y B. A continuación, se muestra la representación normal del juego, donde los pagos son (u_1, u_2, u_3).

A

	L	R
T	$(1,1,1)$	$(3,0,0)$
B	$(0,0,3)$	$(0,0,0)$

B

	L	R
T	$(0,0,0)$	$(0,3,0)$
B	$(0,3,0)$	$(3,3,0)$

Encuentre los equilibrios de Nash en estrategias puras.

Solución

Se puede proceder de forma análoga a los ejercicios anteriores, cuando habían dos jugadores. Al realizar el análisis para el jugador i, se debe subrayar el pago que corresponde a la mejor respuesta ante s_{-i}. Por ejemplo, vemos que si el jugador 2 juega L y el jugador 3 juega A, el jugador 1 debe jugar T pues es la que le otorga el mayor pago, por lo que subrayamos dicho pago. Si el jugador 1 juega T y el jugador 2 juega L, el jugador 3 debe jugar A, que le otorga un pago de 1 mientras que la estrategia B le otorgaba 0 (luego, subrayamos dicho pago). Si realizamos dicho procedimiento para cada jugador y cada perfil de estrategias (una forma simple de hacerlo, es hallar las mejores respuestas de los jugadores 1 y 2 para cada matriz, ignorando el tercer pago. Luego, hallar la mejor respuesta del jugador 3, comparando su pago en cada celda de la matriz de la derecha (cuando escoge A) con el pago correspondiente a la misma celda de la matriz izquierda (cuando escoge B), tenemos:

$$\begin{array}{c} A \\ \begin{array}{c|c|c|} & L & R \\ \hline U & (\underline{1},\underline{1},\underline{1}) & (\underline{3},0,\underline{0}) \\ \hline D & (0,0,\underline{3}) & (0,\underline{3},\underline{0}) \\ \hline \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{c} B \\ \begin{array}{c|c|c|} & L & R \\ \hline T & (\underline{0},0,0) & (0,\underline{3},\underline{0}) \\ \hline B & (\underline{0},\underline{3},0) & (\underline{3},\underline{3},\underline{0}) \\ \hline \end{array} \end{array}$$

De donde se concluye que existen dos equilibrios de Nash, $EN = \{(U, L, A), (D, R, B)\}$.

12. $\star$ Analice la veracidad del siguiente enunciado: "El método iterativo de eliminación de estrategias estrictamente dominadas no resulta siempre en el mismo conjunto de predicciones que el equilibrio de Nash".

    Solución

    Verdadero. Como el concepto de equilibrio de Nash es más restrictivo que el de la eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas (EIEED), por lo que el conjunto de perfiles que son equilibrios de Nash es un subconjunto de los perfiles que sobreviven a la EIEED, pudiendo coincidir.

    Un ejemplo donde ambos conjuntos coinciden puede verse en el siguiente juego, cuya estructura corresponde al Dilema del Prisionero:

	NC	C
NC	$(7,7)$	$(5,8)$
C	$(8,5)$	$(6,6)$

    Podemos ver que, mediante ambos conceptos de solución, obtenemos únicamente el perfil (C, C) como resultado. Por otro lado, un ejemplo donde ambos conjuntos difieren, se encuentra en el siguiente juego, conocido como *Matching Pennies*.

	C	S
C	$(-1,1)$	$(1,-1)$
S	$(1,-1)$	$(-1,1)$

    En este caso, ninguna estrategia es estrictamente dominada; por lo tanto, cualquier perfil de estrategias sobreviven trivialmente la EIEED; sin embargo, el equilibrio de Nash implica un único resultado, en el que cada jugador elige C o S con la misma probabilidad para ambos jugadores (este tipo de equilibrios, en los que se randomiza la elección, se estudiarán con mayor detalle en el capítulo 5).

13. ⋆ Analice la veracidad del siguiente enunciado: "Un equilibrio formado por estrategias estrictamente dominantes siempre es Pareto-eficiente, pues los jugadores juegan la estrategia que más le conviene independientemente de lo que decida el resto de jugadores".

    Solución

    El enunciado es falso. El hecho de que un equilibrio esté formado por estrategias estrictamente dominantes no significa que sea Pareto-eficiente, en el sentido que maximiza las utilidades de todos los jugadores. A veces, una estrategia cooperativa puede llevar a mejores resultados que una estrategia que persigue el propio bienestar. Lo anterior se evidencia claramente en el caso del Dilema del Prisionero.

14. ⋆ El siguiente juego tiene la estructura del Dilema del Prisionero.

	C	NC
c	$(0,0)$	$(2,-1)$
nc	$(-1,2)$	$(1,1)$

Resuelva el juego utilizando el concepto de equilibrio de Nash.

Solución

Para resolver el juego usando el concepto de equilibrio de Nash, debemos usar los conjuntos de mejor respuesta de ambos jugadores:

$$B_2(c) = C \qquad B_2(nc) = C \qquad \wedge \qquad B_1(C) = c \qquad B_1(NC) = c$$

Note que el perfil (c, C) es la intersección de las mejores respuestas, por lo que ninguno de los jugadores no tienen incentivos a desviarse unilateralmente. Note que esto no se cumple con otros perfiles; por ejemplo, analicemos el perfil (nc, C): Si el jugador 1 elige nc, la mejor respuesta del jugador 2 es elegir C; sin embargo, la mejor respuesta del jugador 1 ante dicha estrategia es jugar c, por lo que dicho agente tendría incentivos a desviarse de dicho perfil.

Otra forma de encontrar el perfil de equilibrio es, para cada jugador, subrayar los pagos que corresponden a su mejor respuesta ante cada estrategia del rival. Por ejemplo, si realizamos esta tarea para el jugador 2 ($B(nc) = C$ y $B(c) = C$) se tendría:

Finalmente, si se hace para ambos jugadores, el equilibrio de Nash es aquel perfil que tiene todos sus pagos subrayados:

	C	NC
c	$(0,\underline{0})$	$(2,-1)$
nc	$(-1,\underline{2})$	$(1,1)$

	C	NC
c	$(\underline{0},\underline{0})$	$(\underline{2},-1)$
nc	$(-1,\underline{2})$	$(1,1)$

Por lo que el equilibrio de Nash en estrategias puras es el perfil (c, C). En los ejercicios siguientes utilizaremos este último método.

15. $\star$ El siguiente juego tiene una estructura conocida como la “Guerra de los Sexos”:

		Mujer	
		Fútbol	Teatro
Hombre	Fútbol	$(2,1)$	$(0,0)$
	Teatro	$(0,0)$	$(1,2)$

Encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias puras.

<u>Solución</u>

Utilizamos el método utilizado en el ejercicio anterior, y subrayamos los pagos que corresponden a las mejores respuestas:

		Mujer	
		Fútbol	Teatro
Hombre	Fútbol	$(\underline{2},\underline{1})$	$(0,0)$
	Teatro	$(0,0)$	$(\underline{1},\underline{2})$

De donde se observa que los equilibrios de Nash en estrategias puras son los perfiles (Fútbol,Fútbol) y (Teatro,Teatro).

16. $\star$ Existen dos jugadores: el gobierno y un criminal. El gobierno busca elegir un nivel de supervisión y control de sus leyes (x), mientras que el criminal elige un nivel de crimen (y). Estas elecciones se realizan de forma simultánea e independiente. La función de utilidad del gobierno y del criminal son, respectivamente, las siguientes:

$$U_G = -xc^4 - \frac{y^2}{x}$$

$$U_C = \frac{y^{1/2}}{1+xy},$$

Donde "c" es una constante asociada al costo de supervisión que elige el gobierno. Halle el equilibrio de Nash del juego y explique intuitivamente cómo cambia el nivel de equilibrio (de x e y), ante cambios en el parámetro c.

Solución

Para solucionar este ejercicio, debemos buscar las funciones de reacción de ambos agentes. En el caso del gobierno, tenemos:

$$\frac{\partial U_G}{\partial x} = -c^4 + \frac{y^2}{x^2} = 0,$$

de donde se desprende que $x = y/c^2$.

Para el caso del criminal, tenemos que:

$$\frac{\partial U_C}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}(1+xy) - x\sqrt{y} = 0,$$

de donde obtenemos que $y = 1/x$.

Por lo tanto, el equilibrio de Nash vendría dado por la solución al sistema de ecuaciones generado por las dos funciones de reacción. Luego, si reemplazamos $y = 1/x$ en $x = y/c^2$, tenemos:

$$x = 1/c \quad \wedge \quad y = c$$

Finalmente, vemos que, a medida que aumentan los costos asociados a la supervisión de la ley (c), el nivel de supervisión y control baja, mientras que el nivel del crimen aumenta.

17. ⋆⋆ Analice la veracidad del siguiente enunciado: "Todo equilibrio de Nash es un perfil de estrategias estrictamente dominantes, pero no todo perfil de estrategias estrictamente dominantes es un equilibrio de Nash".

Solución

El enunciado es falso. Una estrategia estrictamente dominante es siempre la mejor respuesta a cualquier estrategia del rival (revisar la definición **??**). Si un perfil está formado por estrategias estrictamente dominantes, entonces también será la intersección del conjunto de mejores respuestas; es decir, será también un EN. Lo contrario no necesariamente es cierto (véase, por ejemplo, *matching pennies*).

	A	B	C
a	$(2,1)$	$(4,3)$	$(1,2)$
b	$(4,0)$	$(5,3)$	$(2,2)$
c	$(3,3)$	$(2,2)$	$(2,4)$

18. $\star\star$ Considere el siguiente juego en su representación normal:
Encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias puras.

Solución

Se observa que las estrategias a y A son estrictamente dominadas por b y C, respectivamente, por lo que el juego se reduce a:

	B	C
b	$(\underline{5},\underline{3})$	$(\underline{2},2)$
c	$(2,2)$	$(\underline{2},\underline{4})$

Luego, los equilibrios de Nash son $EN = \{(b,B),(c,C)\}$. Este ejemplo es valioso porque se observa que el perfil (c,C) también es un equilibrio de Nash, a pesar de contar con una estrategia débilmente dominada: c, que ya vimos que no la impide de ser parte de un EN.

19. $\star\star$ Sean $S_1 = \{1,2,3\}$ y $S_2 = \{1,2,3\}$ los conjuntos de estrategias puras para los jugadores 1 y 2. Si las funciones de pago son:

$$u_1 = (\text{mín}\{s_1, s_2\})^2 - |s_1 - s_2|$$

$$u_2 = \begin{cases} (s_1)^2 + (s_1 - s_2), & si \quad s_1 - s_2 < 2 \\ 0, & si \quad s_1 - s_2 = 2 \end{cases}$$

Especifique la matriz de pagos correspondiente al juego y halle todos los equilibrios de Nash.

Solución

La matriz de pagos es la siguiente:

	1	2	3
1	$(1,1)$	$(0,0)$	$(-1,-1)$
2	$(0,5)$	$(4,4)$	$(3,3)$
3	$(-1,0)$	$(3,10)$	$(9,9)$

Y observamos que el único equilibrio de Nash es $EN = (1, 1)$. También se puede resolver eliminando estrategias estrictamente dominadas (3 para el jugador 2; luego 3 para el jugador 1; luego 2, para el jugador 2; y, finalmente, 2 para el jugador 1).

20. $\star\star$ Ponte Lindo es un país que tendrá elecciones presidenciales pronto. Los electores se distribuyen uniformemente, según sus preferencias ideológicas, desde el extremo izquierdo (x=0), hasta el extremo derecho (x=1).

    Los candidatos de Ponte Lindo, por su parte, deben elegir un punto entre 0 y 1 en el cual ubicarse. Los electores observan dónde se ubican los candidatos y votan por el que se acerque más a sus preferencias ideológicas. Así, por ejemplo, si hay dos candidatos y uno se ubica en 0.3 y el otro en 0.6, los que se encuentren al lado izquierdo del punto 0.45 votarán por el candidato 1, y los que se encuentren a la derecha de 0.45, votarán por el candidato 2.

    Los candidatos no tienen verdaderas ideologías políticas y lo único que les importa es ser elegidos, por lo que no tendrían problemas en ubicarse en cualquier punto entre 0 y 1. Asuma que, si dos candidatos eligen exactamente el mismo punto, se reparten equitativamente a los votantes y que un empate entre dos candidatos con mayores votaciones se resuelve lanzando una moneda. Si hay solo dos candidatos en estas elecciones, ¿cuál será el equilibrio de Nash en estrategias puras de este juego?

    Solución

    Al existir dos candidatos, maximizarían sus votos ubicándose al centro. Para demostrar que este es un equilibrio, se debe constatar que no existe incentivo para desviarse de ese resultado.

    Supongamos que el candidato 1 se desvía un poco a la izquierda de 0.5, hasta $0.5 - \epsilon$. En ese sentido, capturaría a todos los votantes a la izquierda de su ubicación además de la mitad de los que se encuentren entre $0.5 - \varepsilon$ y 0.5. Es decir, obtiene a todo el que se encuentre a la izquierda del punto $0.5 - \varepsilon$ más $\varepsilon/2$. Dado que este número de votantes es menor a 50 %, con seguridad perdería la elección. Lo mismo ocurre si se mueve ligeramente a la derecha del centro. El análisis es el mismo para el otro candidato. En ese sentido, mantenerse en el centro es un equilibrio de Nash: $EN = \{(0.5, 0.5)\}$.

    Es importante destacar que cualquier perfil en el que ambos candidatos se ubican en el mismo lugar o en el que se ubican en puntos equidistantes del centro también podrían aparentar ser equilibrios de Nash porque cada candidato se llevaría el 50 % de votantes. Pero si se analiza cualquiera de estos perfiles, ambos candidatos tendrían incentivos a acercarse al centro.

    La solución se puede ver fácilmente si se representa dicho juego en su forma normal o estratégica. Para este fin, asumiremos que el candidato gana 1 si es elegido y gana 0 si no lo es; adicionalmente asumiremos incrementos de 0.1 (por simplicidad), obteniendo la siguiente matriz de pagos:

	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	$(0.5,0.5)$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0.5,0.5)$
0.1	$(\underline{1},0)$	$(0.5,0.5)$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0.5,0.5)$	$(\underline{1},0)$
0.2	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(0.5,0.5)$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0.5,0.5)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$
0.3	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(0.5,0.5)$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0.5,0.5)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$
0.4	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(0.5,0.5)$	$(0,\underline{1})$	$(0.5,0.5)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$
0.5	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{0.5},\underline{0.5})$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$
0.6	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(0.5,0.5)$	$(0,\underline{1})$	$(0.5,0.5)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$
0.7	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(0.5,0.5)$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0.5,0.5)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$
0.8	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$	$(0.5,0.5)$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0.5,0.5)$	$(\underline{1},0)$	$(\underline{1},0)$
0.9	$(\underline{1},0)$	$(0.5,0.5)$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0.5,0.5)$	$(\underline{1},0)$
1	$(0.5,0.5)$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0,\underline{1})$	$(0.5,0.5)$

21. $\star\star$ Se tiene un juego con más de 4 jugadores ($n > 4$). Cada jugador elige un número entero $x_i \in [0, 100]$. Luego, el jugador cuyo número esté más cerca de $2/3$ del promedio de todos los números es el ganador y recibe 1 000 puntos (de existir varios ganadores, el dinero se distribuye en partes iguales). Defina el espacio de estrategias de cada jugador y encuentre el perfil de equilibrio en estrategias puras. Explique qué sucedería si se pudieran elegir números no enteros.

   Solución

   El espacio de estrategias para cada jugador i son los números enteros entre 0 y 100. En este tipo de ejercicios, normalmente obtenemos el perfil de equilibrio mediante eliminación iterada de estrategias, que sean estrictamente dominadas o que no sean nunca una mejor respuesta.

   Imaginemos así, que $n-1$ jugadores han jugado 100. Es posible ver que para el n-ésimo jugador, 100 nunca será una mejor respuesta, pues, de jugarse, generaría un pago de $1\,000/n$, mientras que elegir un número menor, como 99 genera un pago de 1 000. Esta misma idea se cumple para el jugador i y para cualquier estrategia $s_i \geq 2$.

   Como el juego tiene por lo menos cinco jugadores, imagine que cuatro de ellos eligen 0, mientras que el quinto se desvía a 1, entonces $2/3$ del promedio sería aproximadamente 0.13. Como dicho número está más cerca de 0 que de 1, no existirán incentivos a desviarse unilateralmente pues se obtendría un pago de 0 en vez de $1000/5$.

   Si, por el contrario, cuatro jugadores eligen 1 y el quinto se desvía a 0, entonces $2/3$ del promedio sería aproximadamente 0.53. Como dicho número está más cerca de 1 que de 0, no existen motivos para desviarse unilateralmente pues se obtendría un pago de 0 en vez de $1000/5$. Esto se cumple para todo $n > 4$, por lo que se puede afirmar que existen dos equilibrios de Nash en estrategias puras: i) todos eligen 0 y ii) todos eligen 1.

   Note que lo anterior también se cumple para $n = 4$, sin embargo, en el perfil en el que todos juegan 1, el jugador i es indiferente entre jugar 1 o desviarse a 0 porque $2/3$ del promedio es 0.5, y obtendría el pago de $1000/5$ de todos modos. Usando el mismo razonamiento es fácil verificar que si $n < 3$, el perfil en el que todos juegan 0 es el único equilibrio de Nash.

   Finalmente, es importante notar que, de poderse elegir números no enteros, el único equilibrio de Nash en estrategias puras sería el perfil en el que todos eligen 0, independientemente del valor de n.

22. $\star\star$ Sea un juego en el cual 100 dólares son divididos entre dos hermanos (jugador 1 y jugador 2) del siguiente modo. Los dos anuncian simultáneamente el dinero que desearían recibir en números enteros (p_1 y p_2). Si $p_1 + p_2 \leq 100$, cada jugador recibirá la cantidad que solicitó. Sin embargo, si $p_1 + p_2 > 100$, ninguno de los dos recibirá nada. ¿Cuáles son los equilibrios de Nash en estrategias puras?

Solución

Para comenzar, debemos notar que no existen incentivos a escoger más de 100. Así, supongamos que el jugador 1 propone $p_1 < 100$. La mejor respuesta para el jugador 2 será $p_2 = 100 - p_1$. Del mismo modo, si el jugador 2 propone $p_2 < 100$, la mejor respuesta para el jugador 1 será $p_1 = 100 - p_2$. Por tanto cualquier combinación de p_1 y p_2 que sumen 100 es un equilibrio de Nash.

Por otro lado, si el jugador 1 escogiese $p_1 = 100$ (el valor que le daría mayor utilidad, dado el rango que puede recibir, de 0 a 100), el jugador 2 sería indiferente entre escoger cualquier valor entre 0 y 100, ya que de todos modos el pago esperado sería 0. De igual manera, si el jugador 2 propone $p_2 = 100$, al jugador 1 le daría igual proponer cualquier valor.

Por ello, se puede plantear un equilibrio de Nash adicional, cuando los dos proponen recibir 100, ya que ninguno de los dos jugadores tiene incentivos a desviarse unilateralmente.

La solución anterior puede verse también si construimos la matriz de pagos y hallamos las mejores respuestas de ambos jugadores:

	0	1	2	3	$\cdots$	97	98	99	100
0	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$		$(0,97)$	$(0,98)$	$(0,99)$	$(\underline{0},\underline{100})$
1	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$\cdots$	$(1,97)$	$(1,98)$	$(\underline{1},\underline{99})$	$(\underline{0},0)$
2	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$		$(2,97)$	$(\underline{2},\underline{98})$	$(0,0)$	$(\underline{0},0)$
3	$(3,0)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$		$(\underline{3},\underline{97})$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(\underline{0},0)$
$\vdots$		$\vdots$			$\ddots$			$\vdots$	
97	$(97,0)$	$(97,1)$	$(97,2)$	$(\underline{97},\underline{3})$		$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(\underline{0},0)$
98	$(98,0)$	$(98,1)$	$(\underline{98},\underline{2})$	$(0,0)$	$\cdots$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(\underline{0},0)$
99	$(99,0)$	$(\underline{99},\underline{1})$	$(0,0)$	$(0,0)$		$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(\underline{0},0)$
100	$(\underline{100},\underline{0})$	$(0,\underline{0})$	$(0,\underline{0})$	$(0,\underline{0})$		$(0,\underline{0})$	$(0,\underline{0})$	$(0,\underline{0})$	$(\underline{0},\underline{0})$

23. $\star\star$ Existen dos empresas que tienen L unidades de tiempo (horas). Parte de ese tiempo se destina a la producción, de forma que $q_i = L_i$ y el precio del producto es $p = 1$. Las empresas utilizan el resto de su tiempo para hacer *lobby* y obtener fondos públicos (en forma de regulaciones favorables). La fracción obtenida de dichos recursos es la siguiente:

$$z_i = \frac{\eta_i x_i}{x_i + x_j},$$

donde x_i es la cantidad de horas de la empresa i destinadas al *lobby* y η_i es su eficiencia en esta actividad, de forma que $\eta_i + \eta_j = 1$. Asuma que la cantidad total de recursos públicos es g y la producción se realiza a costo cero.

a) Si el equilibrio es simétrico, halle el equilibrio de Nash.

b) Si el equilibrio no es simétrico, ¿qué empresa dedica más horas a la obtención de recursos públicos?

Solución

a)

$$L = \begin{cases} L - x_i, siq_i \\ x_i, siz_i \end{cases}$$

Luego, la función objetivo es la siguiente:

$$\pi_i = p_i q_i + z_i g = L - x_i + \frac{g\eta_i x_i}{x_i + x_j}$$

Y la condición de primer orden (CPO) es:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = -1 + \frac{g\eta_i}{x_i + x_j} - \frac{g\eta_i x_i}{(x_i + x_j)^2} = 0 \tag{.1}$$

Por lo que, la función de mejor respuesta de i es:

$$g\eta_i x_j = (x_i + x_j)^2 \tag{.2}$$

Si el equilibrio es simétrico entonces $\eta_i = \eta_j = 1/2$, por lo que el $EN = \{x_i = g/8, x_j = g/8\}$.

b) De la CPO de la parte a), se tienen las funciones de reacción:

$$g\eta_i x_j = (x_i + x_j)^2$$
$$g\eta_j x_i = (x_i + x_j)^2$$

Por lo que $x_i = \frac{\eta_i}{\eta_j} x_j$ y $x_j = \frac{\eta_j}{\eta_i} x_i$.

Reemplazando, tenemos que el $EN = \{x_i, x_j\} = \{g\eta_j\eta_i^2, g\eta_i\eta_j^2\}$, lo que implica que la empresa que dedica mayor tiempo al lobby es la que tiene mayor eficiencia en dicha actividad.

24. ⋆⋆ Definamos un equilibrio de Nash estricto como aquel equilibrio de Nash donde todas las estrategias son las únicas mejores respuestas frente a las estrategias de sus rivales. Plantee (i) un juego con un único equilibrio de Nash estricto y (ii) otro en el cual haya varios equilibrios, donde uno de ellos sea estricto.

<u>Solución</u>

Para plantear primer juego podemos utilizar la estructura del dilema del prisionero:

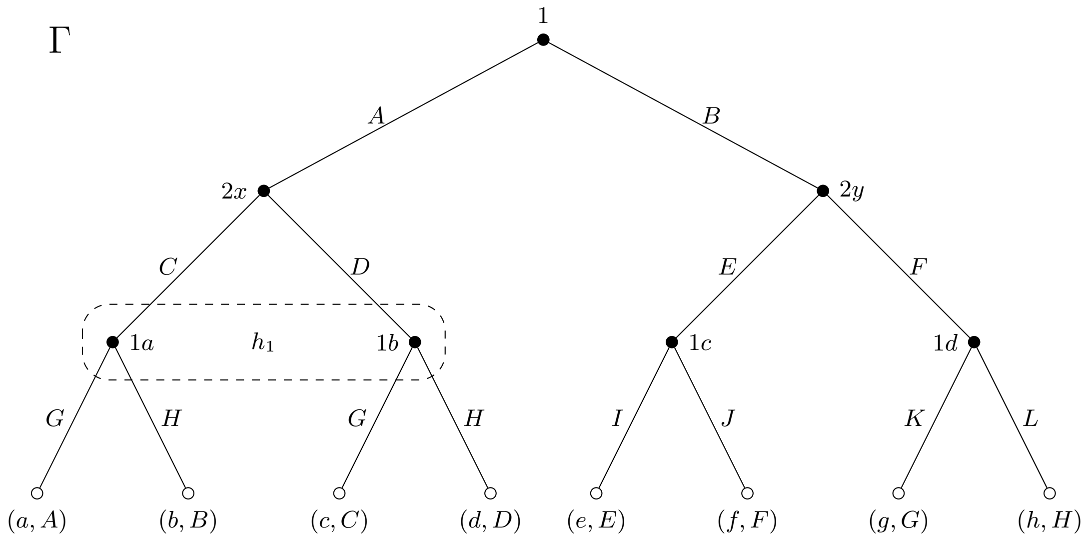
		Jugador 2	
		NC	C
Jugador 1	NC	$(2,2)$	$(0,\underline{3})$
	C	$(\underline{3},0)$	$(\underline{1},\underline{1})$

donde el único equilibrio de Nash es el perfil (C,C). Note que este es un equilibrio de Nash estricto, pues la única mejor respuesta del jugador 1 a la estrategia C del jugador 2 es, precisamente, C (y viceversa). Para el segundo ejemplo, utilizaremos la siguiente matriz de pagos:

			Jugador 2	
		L	C	R
	U	$(\underline{-4},-4)$	$(\underline{3},\underline{2})$	$(-1,-2)$
Jugador 1	M	$(\underline{-4},\underline{1})$	$(2,-1)$	$(\underline{2},0)$
	D	$(-6,2)$	$(2,\underline{3})$	$(\underline{2},\underline{3})$

donde el conjunto de equilibrios de Nash es $EN = \{(M,L),(U,C),(D,R)\}$. Note que el perfil (U,C) es un equilibrio de Nash estricto, pues U es la mejor respuesta del jugador 1 a la estrategia C del rival (y viceversa). Lo anterior no se cumple para los otros dos perfiles; por ejemplo, en el perfil (M,L), si el jugador 2 juega L, la mejor respuesta del jugador 1 es jugar M o U; mientras que en el perfil (D,R), si el jugador 1 juega D, la mejor respuesta del jugador 2 es jugar C o R.

25. ⋆⋆ Considere el siguiente juego representado en forma extensiva Γ:



Halle el conjunto de estrategias puras para cada jugador y representar el juego en su forma normal.

<u>Solución</u>

El juego Γ tiene los siguientes conjuntos de estrategias puras para ambos jugadores: $S_1 = C_1 \times C_{h_1} \times C_{1c} \times C_{1d}$ y $S_2 = C_{2x} \times C_{2y}$. S_1 cuenta con 2^4 elementos, los cuales son:

$$S_1 = \{AGIK, AGIL, AGJK, AGJL, AHIK, AHIL, AHJK, AHJL,$$

$$BGIK, BGIL, BGJK, BGJL, BHIK, BHIL, BHJK, BHJL\}$$

A su vez, S_2 cuenta con 2^2 elementos: $S_2 = \{CE, CF, DE, DF\}$.

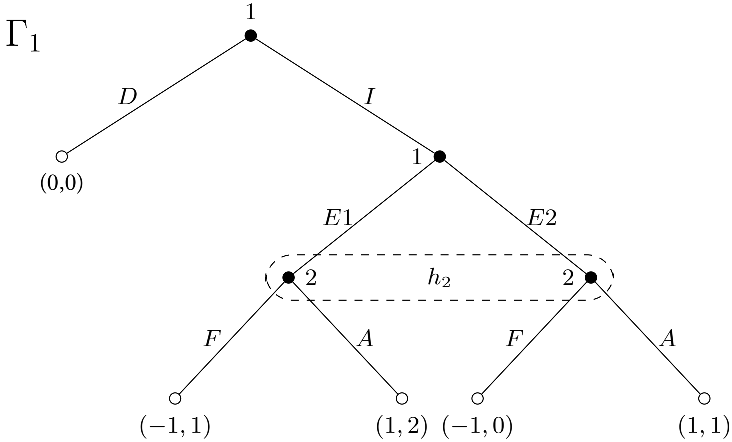
Luego, el juego puede ser representado de forma normal de la siguiente manera:

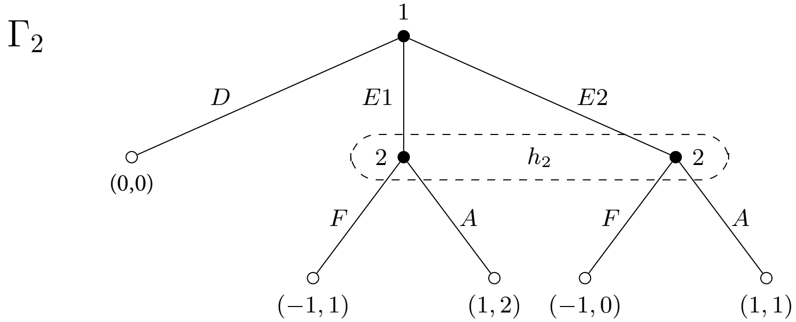
		Jugador 2			
		CE	DE	CF	DF
	$AGIK$	(a, A)	(c, C)	(a, A)	(c, C)
	$AGIL$	(a, A)	(c, C)	(a, A)	(c, C)
	$AGJK$	(a, A)	(c, C)	(a, A)	(c, C)
	$AGJL$	(a, A)	(c, C)	(a, A)	(c, C)
	$AHIK$	(b, B)	(d, D)	(b, B)	(d, D)
	$AHIL$	(b, B)	(d, D)	(b, B)	(d, D)
	$AHJK$	(b, B)	(d, D)	(b, B)	(d, D)
Jugador 1	$AHJL$	(b, B)	(d, D)	(b, B)	(d, D)
	$BGIK$	(e, E)	(e, E)	(g, G)	(g, G)
	$BGIL$	(e, E)	(e, E)	(h, H)	(h, H)
	$BGJK$	(f, F)	(f, F)	(g, G)	(g, G)
	$BGJL$	(f, F)	(f, F)	(h, H)	(h, H)
	$BHIK$	(e, E)	(e, E)	(g, G)	(g, G)
	$BHIL$	(e, E)	(e, E)	(h, H)	(h, H)
	$BHJK$	(f, F)	(f, F)	(g, G)	(g, G)
	$BHJL$	(f, F)	(f, F)	(h, H)	(h, H)

26. ⋆⋆ ¿Pueden dos juegos en forma extensiva distintos tener una misma forma normal reducida? De ser así, provee un ejemplo; de lo contrario muestre que no pueden.

    Solución

    Sí es posible. Considere los siguientes juegos con información imperfecta, Γ_1 y Γ_2:





Para representar el juego en su forma normal o estratégica, requerimos especificar las estrategias puras de cada uno de los juegos. En el caso del juego Γ_1, se tiene:

$$S_1 = \{DE_1, DE_2, IE_1, IE_2\} \qquad\qquad S_2 = \{F, A\}$$

En el caso del juego Γ_2, el conjunto de estrategias del jugador 1 se modifica:

$$S_1 = \{D, E_1, E_2\} \qquad\qquad S_2 = \{F, A\}$$

A pesar que el conjunto de estrategias puras del jugador 2 se mantiene igual, note que la descripción de dichas estrategias es diferente. Por ejemplo, en el primer caso, la estrategia FA se lee como "jugar F si D o jugar A si I", mientras que en el segundo caso, dicha estrategia se lee como "jugar F si D o jugar A si no D. Por lo tanto, la representación normal de ambos juegos es la siguiente:

$G(\Gamma_1)$

	F	A
DE_1	$(0, 0)$	$(0, 0)$
DE_2	$(0, 0)$	$(0, 0)$
IE_1	$(-1, 1)$	$(1, 2)$
IE_2	$(-1, 0)$	$(1, 1)$

$G(\Gamma_2)$

	F	A
D	$(0, 0)$	$(0, 0)$
E_1	$(-1, 1)$	$(1, 2)$
E_2	$(-1, 0)$	$(1, 1)$

Luego, una representación normal reducida elimina la estrategia del jugador i, s_i, que genera pagos iguales para ambos jugadores para todo s_{-i}. Por ejemplo, en el juego $G(\Gamma_1)$, el resultado del juego no se modifica en lo absoluto si el jugador 1 elige jugar DE_1 o DE_2, por lo que ambas estrategias pueden ser resumidas por una sola estrategia D. Por lo tanto, la representación normal reducida de ambos juegos es:

27. $\star\star$ Dos empresas están desarrollando una nueva tecnología para promocionar restaurantes, que permitirá a los consumidores probar la comida por Internet. Dado que el

	F	A
D	$(0, 0)$	$(0, 0)$
E	$(-1, 1)$	$(1, 2)$
$E1$	$(-1, 0)$	$(1, 1)$

mercado es naciente, la compatibilidad de las tecnologías es muy importante para que los consumidores se adapten a ella. La primera empresa, Sabordigital, ha desarrollado una tecnología de avanzada, saborremoto. La segunda empresa, Webolor, ya está presente en la Internet con su tecnología webamargo. Las dos empresas saben que si utilizan la misma tecnología pueden ganar unos 200 millones de Soles. Sin embargo, adoptar la tecnología de otra empresa tiene un costo. Si Sabordigital abandona su tecnología y utiliza la de Webolor, el coste es de 250 millones de Soles. Si Webolor abandona su tecnología y utiliza la de Sabordigital, el costo es de 100 millones de euros. Si ambas empresas se quedan con sus propias tecnologías, los ingresos de cada empresa serán "0". En este caso, habrán dos tecnologías y, por tanto, no se podrá desarrollar el comercio del sabor por el Internet.

a) Represente el juego en su forma normal o estratégica.

b) Determine el conjunto de estrategias estrictamente dominadas.

c) Represente el juego en su forma extensiva.

d) Encuentre el ENPS.

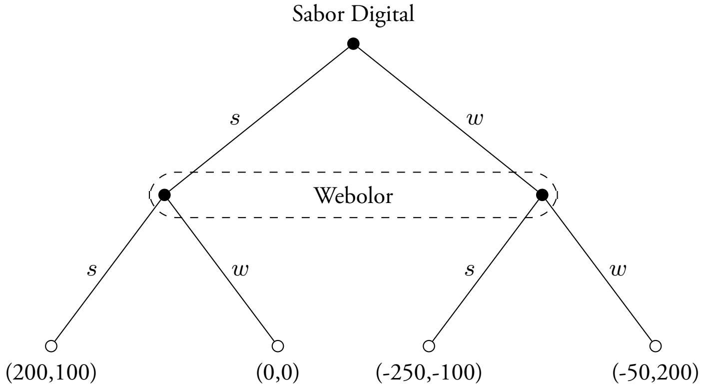
Solución

a) El juego puede ser representado en forma normal como sigue:

		Webolor	
		Saborremoto	Webamargo
Sabordigital	Saborremoto	$(200, 100)$	$(0, 0)$
	Webamargo	$(-250, -100)$	$(-50, -200)$

b) Se puede apreciar que para Webolor no existe una estrategia estrictamente dominada; sin embargo, para sabordigital, la estrategia webamargo está estrictamente dominada. Luego por eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas, Webolor elegirá no elegirá webamargo. Luego el perfil de equilibrio debe ser (s, s), el cual es, a su vez, el equilibrio de Nash.

c) La representación del juego en su forma extensiva es la siguiente:



d) En este caso, el único sub juego es el mismo juego, por lo que el ENPS es igual al EN, (s, s).

28. $\star$ Suponga que en una ciudad pequeña existe un monopolio (m) que enfrenta la potencial entrada de un competidor (e). Inicialmente, "e" toma la decisión de entrar al mercado (E) o no hacerlo (NE). Si no ingresa al mercado, se termina el juego y el pago de "e" es 0, mientras que "m" obtiene 50. Si ingresa al mercado, el monopolista puede pelear (P) o acomodarse a la competencia (A). Si aparece una guerra comercial, cada uno de ellos pierde 10; mientras que si el monopolista se acomoda, se repartirán el mercado y cada uno de ellos obtendrá 20.

   a) Represente el juego de forma normal y obtenga los equilibrios de Nash en estrategias puras.

   b) Represente el juego de forma extensiva, mediante el árbol de decisión, y halle el conjunto de ENPS.

   c) Explique por qué en la parte b) se descartó un equilibrio hallado en la parte a).

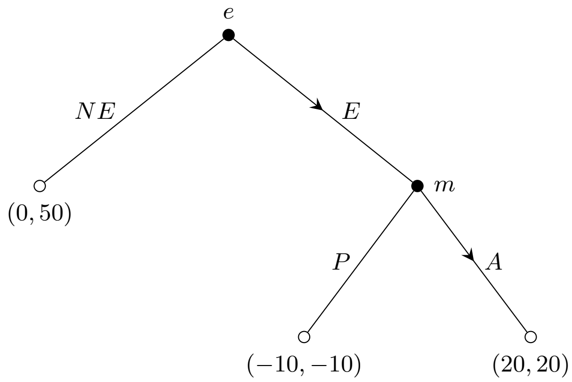
<u>Solución</u>

a) El juego puede ser representado de forma normal:

		Monopolio	
		P	A
Entrante	NE	$(\underline{0}, \underline{50})$	$(0, \underline{50})$
	E	$(-10, -10)$	$(\underline{20}, \underline{20})$

Los equilibrios de Nash en estrategias puras son $EN = \{(NE, P), (E, A)\}$

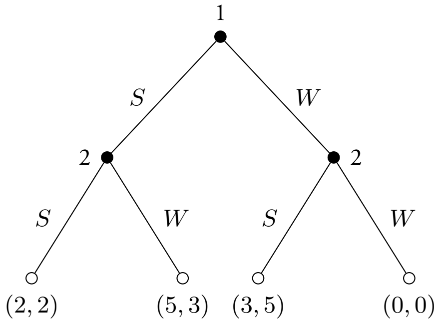
b) El juego puede representarse en forma extensiva como sigue:

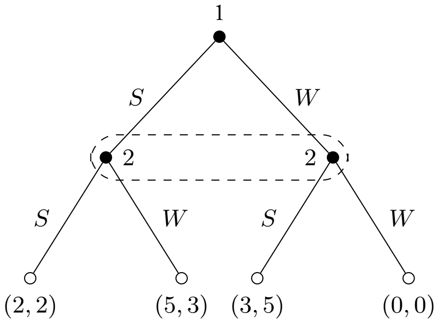


De donde obtenemos el perfil (E, A) como único ENPS.

c) La empresa "e" no entraría sí "m" diera la señal de que peleará si e entrase. Sin embargo, es posible ver que si e entra, la respuesta óptima de m es acomodarse, por lo que P constituye una amenaza no creíble. Es por esta razón que en b) se descartó el perfil (NE, P).

29. ⋆⋆ Halle la representación normal de los dos juegos en forma extensiva mostrados a continuación. ¿Por qué las matrices difieren entre sí? Luego, halle los ENPS en estrategias puras. Explique sus resultados.



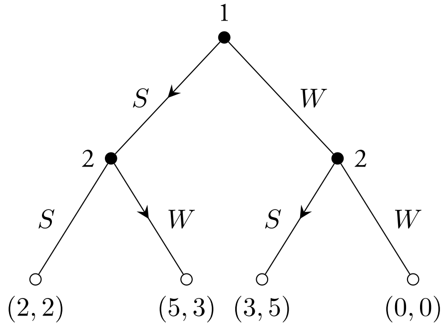


Solución

En el primer caso, podemos ver que se trata de un juego secuencial. Por tal motivo, debemos especificar todas las posibles estrategias, aun cuando el jugador 2 no llegue a ellas. $S_1 = S, W$, $S_2 = SS, SW, WS, WW$.

	SS	SW	WS	WW
S	$(2,2)$	$(\underline{2},2)$	$(\underline{5},\underline{3})$	$(\underline{5},\underline{3})$
W	$(\underline{3},\underline{5})$	$(0,0)$	$(3,\underline{5})$	$(0,0)$

Donde $EN = \{(W,SS),(S,WS),(S,WW)\}$. Note que solo el segundo perfil es perfecto en subjuegos, y puede obtenerse por inducción hacia atrás (indicado por las flechas en el árbol de decisión mostrado debajo).

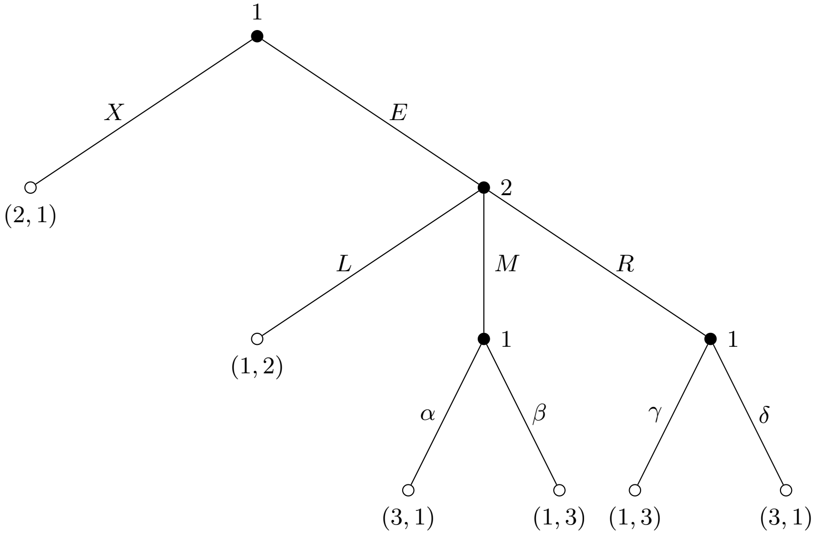


Por otro lado, el segundo juego es estático. La línea punteada en el conjunto de información del segundo jugador denota simultaneidad entre las jugadas de ambos jugadores y, por ende, existe un único subjuego, que puede ser resuelto planteando la matriz de pagos:

	S	W
S	$(2,2)$	$(\underline{5},\underline{3})$
W	$(\underline{3},\underline{5})$	$(0,0)$

Luego, $EN = \{(W,S),(S,W)\}$. Al ser el juego estático un subjuego en sí mismo, todos esos Equilibrios de Nash son también ENPS.

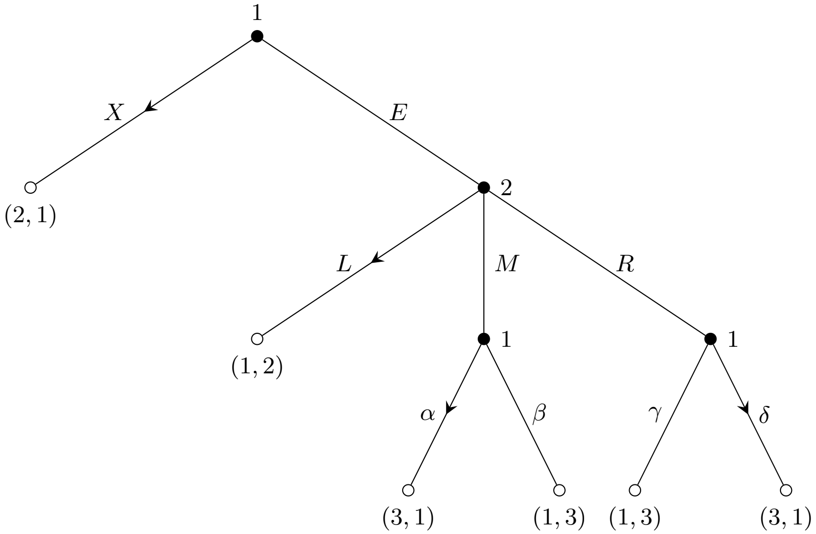
30. $\star\star$ Considere el siguiente juego dinámico con información perfecta:



Halle la solución del juego mediante inducción hacia atrás.

Solución

La solución del juego, usando inducción hacia atrás, es $ENPS = \{(X\alpha\delta, L)\}$. Las flechas muestran las acciones óptimas en cada nodo de decisión.



31. ⋆⋆ Los dos principales canales de televisión en un país, A y B, están compitiendo por la teleaudiencia en los horarios entre las 20 y 21 horas y entre las 22 y 23 horas de las

noches de los lunes. Cada canal tiene dos programas, uno de ellos más atractivo que el otro (estelar). Cada canal debe decidir en qué horario transmitir su programa estelar, considerando los ratings totales que tendrían en cada escenario:

		Canal B	
		$20-21$ hrs.	$22-23$ hrs.
Canal A	$20-21$ hrs.	$(17,23)$	$(16,26)$
	$22-23$ hrs.	$(13,14)$	$(18,21)$

Si cada canal busca maximizar el rating total, responda las siguientes preguntas justificando cada una de sus respuestas.

a) ¿Cuál será la programación si ambos canales actúan de manera coordinada?

b) Determine el horario en que cada canal pondrá su programación estelar si no existe coordinación y deciden simultáneamente.

c) Si el rating determina los ingresos publicitarios que recibe cada canal (cada punto de rating equivale a una unidad monetaria) ¿Bajo qué arreglo entre los canales sería esperable que actúen coordinadamente?

d) ¿Cuál sería el equilibrio de Nash si B escoge su programación antes que A? Represente el juego en su forma extensiva y explique.

<u>Solución</u>

a) Si ambos canales coordinan sus programaciones, maximizarían el rating conjunto:

		Canal B	
		$20-21$ hrs.	$22-23$ hrs.
Canal A	$20-21$ hrs.	40	42
	$22-23$ hrs.	27	39

Por lo tanto, el perfil de equilibrio sería $(20-21 \text{ hrs.}, 22-23 \text{ hrs.})$

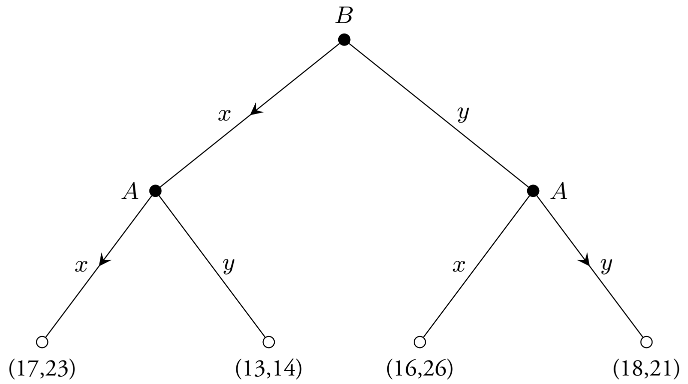
b) Obtenemos el equilibrio de Nash de la manera tradicional.

		Canal B	
		$20-21$ hrs.	$22-23$ hrs.
Canal A	$20-21$ hrs.	$(\underline{17},23)$	$(16,\underline{26})$
	$22-23$ hrs.	$(13,14)$	$(\underline{18},\underline{21})$

Donde el equilibrio de Nash es único: $EN = \{(22-23 \text{ hrs.}, 22-23 \text{ hrs.})\}$

c) Por lo visto en las preguntas a) y b), "A" no estará dispuesto a coordinar si la repartición de pagos no le proporciona al menos 18 unidades monetarias. A "B" siempre le conviene la coordinación pues $26 > 21$, por lo que bastará con que "B" le entregue a "A" 2 unidades monetarias para que la coordinación exista.

d) Si llamamos al horario 20-21 como "x" y al horario 22-23 como "y", el juego puede representarse de forma extensiva y se puede obtener el equilibrio por inducción hacia atrás (note que $S_1 = XX, XY, YX, YY$, $S_2 = x, y$):



Por lo tanto, el $ENPS = \{(xx, x)\}$: "B" sabe que si juega "x", "A" jugará "x" (ya que $17 > 13$) y obtendrá 23; y también sabe que, si juega "y", "A" jugará "y" (ya que $18 > 16$) y obtendrá 21, por lo que "A" preferirá jugar "x" ($23 > 21$). Note que en la parte b) no obtuvimos este equilibrio debido a que estábamos tratando con una matriz reducida del juego representado arriba.

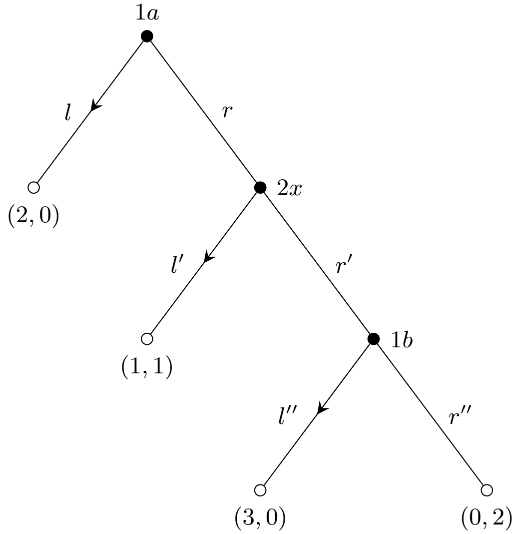
32. ⋆⋆ Considere el siguiente juego con dos jugadores. El jugador 1 escoge entre acción l o r. Escoger l termina el juego con el resultado (2,0). Luego, si el jugador 1 escoge r, el jugador 2 puede escoger entre l' y r', donde escoger l' termina el juego con el resultado $(1, 1)$. Finalmente, si el jugador 2 escoge r', entonces el jugador 1 puede escoger entre l'' y r'', las cuales terminan el juego con los resultados $(3, 0)$ y $(0, 2)$ respectivamente.

a) Esboce la forma extensiva de este juego y halle el conjunto de ENPS.

b) Encuentre todos los equilibrios de Nash y compárelos con el ENPS.

Solución

a) El juego puede representarse de la siguiente manera:



con estrategias: $S_1 = \{ll'', lr'', rll'', rr''\}$ y $S_2 = \{(l', r'\}$. De ahí, se encuentra que el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos es único, $ENPS = \{(ll'', l')\}$.

b) Para hallar todos los Equilibrios de Nash del juego, primero debemos representar el juego en forma estratégica. Dado el conjunto de estrategias puras de ambos jugadores, la matriz de pagos es de 4x2, como se muestra a continuación:

	l'	r'
ll''	$(\underline{2}, \underline{0})$	$(2, \underline{0})$
lr''	$(\underline{2}, \underline{0})$	$(2, \underline{0})$
rl''	$(1, \underline{1})$	$(\underline{3}, 0)$
rr''	$(1, 1)$	$(0, \underline{2})$

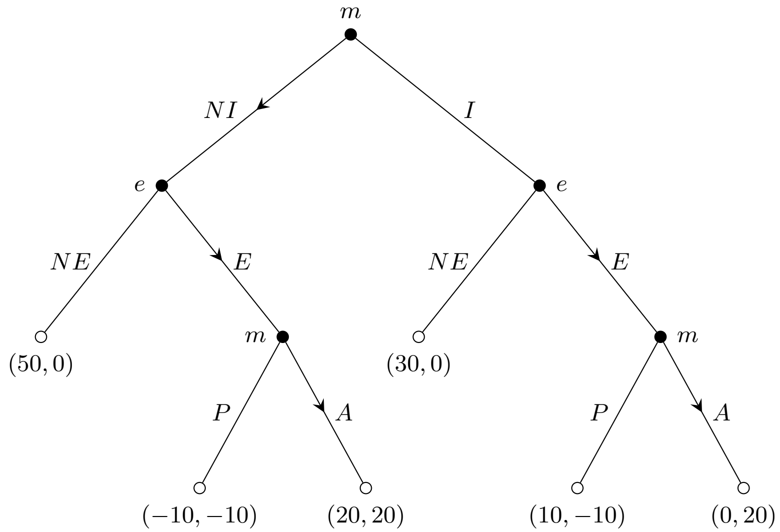
de donde resulta que el conjunto de equilibrios de Nash en estrategias puras es el conjunto $EN = \{(ll'', l'), (lr'', l')\}$. Es importante notar que el segundo equilibrio no es un ENPS porque no cumple con ser secuencialmente racional; pues, dado que nos encontramos en el nodo de decisión $1b$, la mejor respuesta a la estrategia jugada por el jugador 2 es l'' y no r''.

33. $\star\star$ Considere el juego de la pregunta 28, pero ahora el monopolista puede invertir en tecnología (I) antes de que el entrante decida entrar o no hacerlo. Si no invierte (NI), estamos de vuelta en el juego anterior. Si invierte, es más eficiente en caso de guerra comercial (P), si no hay guerra esa tecnología no es necesaria, por lo que su bienestar se reduce. Es decir, luego de invertir, si "e" no ingresa al mercado, "m" obtendrá un pago

de 30; pero si ingresa al mercado y se produce una guerra comercial, “m” gana 10 y “e” pierde 10. De otro lado, si el monopolista decide acomodarse, no gana nada y “e” gana 20. Halle el nuevo equilibrio del juego dinámico.

<u>Solución</u>

Note que, dado que el primer jugador es, ahora, m, los pagos se leen: (u_m, u_e) (en la pregunta 28, los pagos se leen (u_e, u_m)).



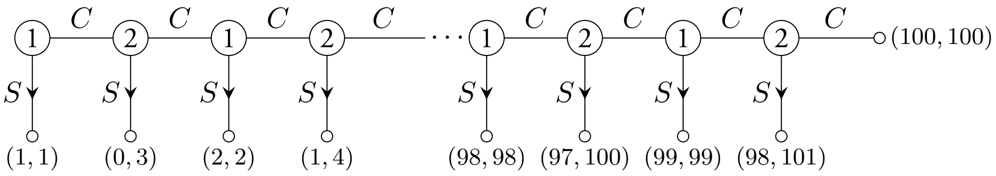
Donde se observa que el perfil $(NI, A, A; E, E)$ es el único ENPS.

34. ⋆⋆ Dos jugadores alternan turnos (el jugador 1 juega primero). Cada uno empieza con S/1 en su mesa. Cuando es su turno, cada jugador puede detener (S) o continuar el juego (C). Si un jugador continúa, su dinero se reduce en S/1, mientras que su oponente obtiene S/2 más. El juego termina cuando un jugador detiene el juego o ambos acumulan S/100. Los jugadores se llevan a casa las ganancias obtenidas en sus mesas.

    Dibuje el juegos en forma extensiva JFE y halle el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

    <u>Solución</u>

    Este es el juego del ciempiés de Rosenthal (1981), cuyo único ENPS es (“Siempre escoge S”, “Siempre escoge S”) (plantee detalladamente las estrategias de equilibrio), con pagos (1,1).



35. ⋆⋆⋆ Manuel y su hermano Joaquín tienen 1 000 soles para dividirse. Suponga que Manuel le ofrece a Joaquín un monto en soles igual a $x \in [0, 1\,000]$. Si Joaquín acepta la oferta, recibe x y Manuel recibe $1\,000 - x$. Si Joaquín rechaza la oferta, 400 soles desaparecen. Entonces Joaquín le tendrá que ofrecer a Manuel de los 600 soles restantes un monto $y \in [0, 600]$. Si Manuel acepta la oferta, recibe y, y Joaquín recibe $600 - y$. Si Manuel rechaza la oferta, todo el dinero desaparece y cada uno recibe 0 soles.

a) Represente el juego en su forma extensiva.

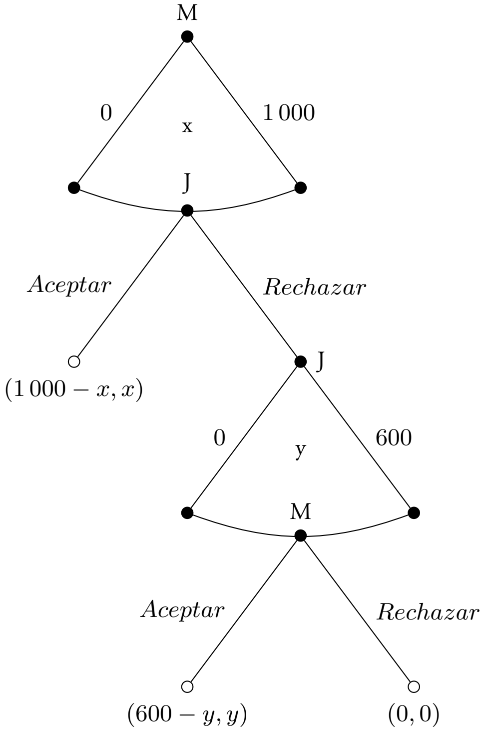
b) Describa cuidadosamente las estrategias de cada hermano.

c) Encuentre un equilibrio de Nash en el que Manuel recibe 1 000 y Joaquín recibe 0. Explique.

d) Encuentre el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. En este caso, ¿cuánto recibiría cada hermano?

Solución

a) El juego puede representarse como sigue:



b) Para Manuel y Joaquín, respectivamente, tenemos:

$$S_M^1 = x \in [0, 1\,000] \quad \wedge \quad S_M^2 = \{Aceptar, Rechazar\}$$

$$S_J^1 = \{Aceptar, Rechazar\} \quad \wedge \quad S_J^2 = y \in [0, 600]$$

Donde un conjunto de estrategias denota el monto a ofrecer, y el otro denota si acepta o no el monto ofrecido por su contraparte.

c) Para tener un pago igual a $(1\,000, 0)$ y que este sea un EN, es necesario ver que ninguno se desee desviar unilateralmente de dicho perfil; es decir, que ambos estén jugando su mejor respuesta dada la estrategia de su contraparte:

$$S_M^1 = 0 \quad \wedge \quad S_M^2 = Rechazar$$

Es decir, que Manuel ofrece 0 a Joaquín en su turno, con la amenaza que si no acepta, el rechazará su oferta cuando llegue nuevamente su turno. Luego, si Joaquín creyese dicha amenaza, una respuesta de la cual no se quisiera desviar sería:

$$S_J^1 = Aceptar \quad \wedge \quad S_J^2 = y \in [0, 600]$$

d) Por la definición ?? y el teorema ?? sabemos que un ENPS no puede incluir perfiles con amenazas no creíbles. Sabiendo esto, y aplicando la inducción hacia atrás, sabemos que Manuel, en el cuarto nodo, no jugaría nunca "rechazar", y que básicamente aceptaría cualquier monto mayor a cero. En el tercer nodo, entonces, sabemos que Joaquín tratará de sacar el mayor provecho posible, por lo que le ofrecerá un monto de "y" lo más cercano a cero (para simplificar asumiremos $y = 0$). El en segundo nodo, entonces, sabremos que a Joaquín le va a convenir aceptar cualquier monto mayor o igual a 600, con lo que estaría igual o mejor que rechazando; y que rechazará cualquier monto menor a 600. Por último, si Manuel quiere sacar el mayor provecho posible, le ofrecerá $x = 600$. De esta forma:

$$ENPS : S_M = \{x = 600, \text{Aceptar si } y \geq 0\} \quad \wedge \quad S_J\{y = 0, \text{Aceptar si } x \geq 600\}$$

36. ⋆⋆ Jorge vive en un pueblo pequeño y tiene un buen ahorro que quiere invertir en crear su propio negocio: un restaurante (r) o una panadería (p). El panadero y el cocinero del pueblo tendrían la opción de competir en precios o coludirse con Jorge si este decide entrar a su mercado. Si bien Jorge sabe que la panadería es el negocio más rentable y que, de coludir con el panadero (*co*), ambos ganarían 3; sabe también que el panadero es una persona hostil, y que si llegase a competir en precios con él (c), la rentabilidad de dicho negocio sería de -1 para ambos.

De otro lado, como el cocinero es un viejo colega suyo, Jorge sabe que la competencia con él no sería tan dura y que ambos podrían ganar 1 si compiten (C) ó 3/2 si decidiesen coludir (CO).

Si Jorge conoce que la rentabilidad actual de la panadería y el restaurante son 5 y 2 respectivamente, ¿qué debe hacer con su dinero?

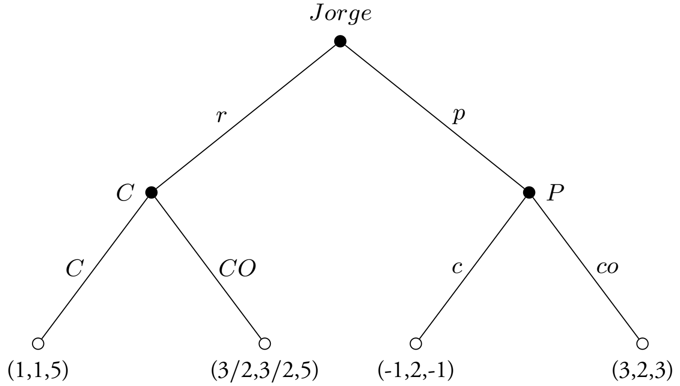
a) Represente el juego en forma extensiva. Considere que el vector de pagos de un determinado perfil es el siguiente: $u(s) = (u_{Jorge}, u_{cocinero}, u_{panadero})$.

b) Represente dicho juego en su forma normal y encuentre sus equilibrios de Nash en estrategias puras.

c) Encuentre cuáles de los EN antes hallados es un ENPS.

Solución

a) Considerando el orden de los pagos de la premisa, el juego se representa como sigue:



b) El juego descrito puede ser representado en forma normal como sigue:

Jorge juega r

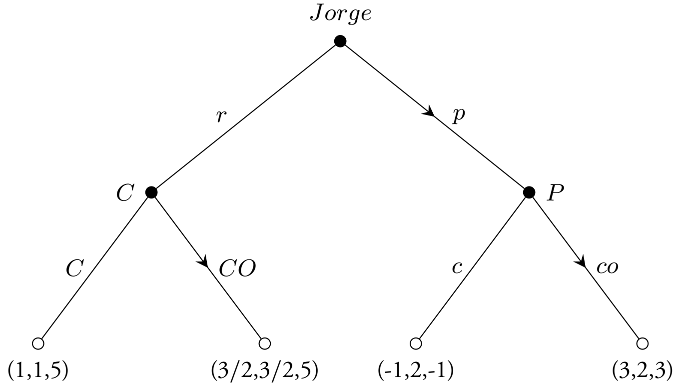
	c	co
C	$(1,1,5)$	$(1,1,5)$
CO	**(3/2,3/2,5)**	$(3/2,3/2,5)$

Jorge juega p

	c	co
C	$(-1,2,-1)$	**(3,2,3)**
CO	$(-1,2,-1)$	**(3,2,3)**

Donde cada vector representa el pago de Jorge, el cocinero y el panadero, respectivamente. Los perfiles que son equilibrio de Nash en estrategias puras son (r, CO, c) ,(p, C, co) y (p, CO, co). Note que existen tres equilibrios pero dos de ellos contienen amenazas no creíbles.

c) Es claro que la estrategia "coludir" es la mejor respuesta para los jugadores C y P, por lo que los equilibrios de Nash que contemplaban la "competencia" de alguno de ellos no es perfecto en subjuegos: $ENPS = \{p, co, co\}$.



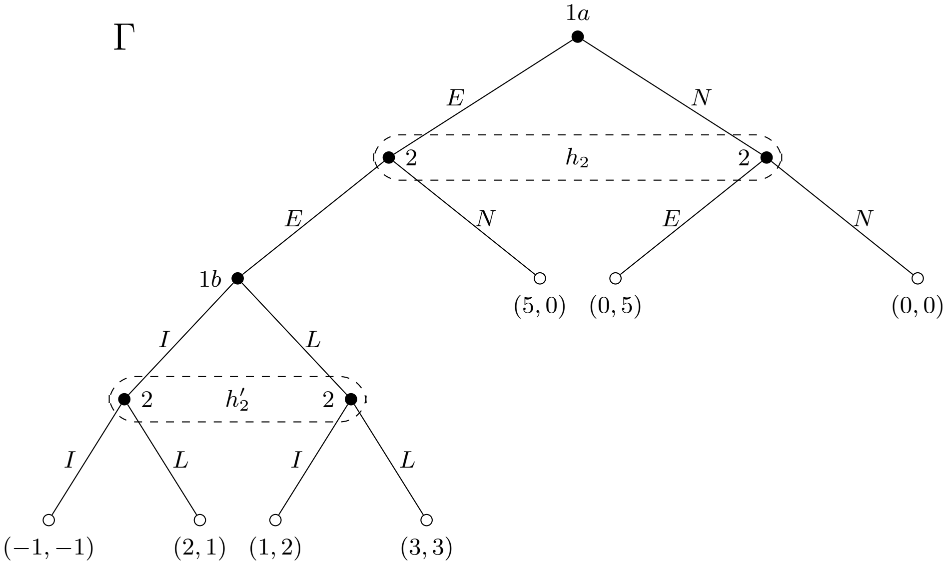
37. ⋆⋆⋆ Dos empresas deciden simultáneamente si entran (E) o no entran (N) al mercado. El juego se acaba si ninguna empresa entra al mercado o solo una de ellas lo hace. El beneficio de entrar solo es 5; y el de no entrar, es 0. Por otro lado, si las dos empresas entran, deciden simultáneamente si ejercen una competencia leve (L) o intensa (I). Si compiten intensamente sus beneficios son -1; si una compite intensamente y la otra levemente, los beneficios son 2 y 1 respectivamente; y, finalmente, si ambas compiten levemente, sus beneficios son 3 para cada una.

a) Represente el juego descrito en forma extensiva Γ y halle todos los ENPS.

b) Transforme Γ en su forma estratégica $G(\Gamma)$ y halle los equilibrios de Nash en estrategias puras.

<u>Solución</u>

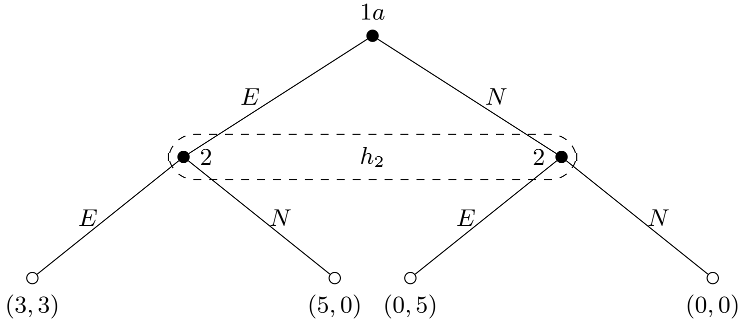
a) La representación extensiva (Γ) se muestra a continuación:



En el juego descrito existen 2 subjuegos: El que comienza a partir del nodo $1b$ y todo el juego. Luego, mediante el procedimiento de inducción hacia atrás podremos hallar el conjunto de ENPS del juego; por lo tanto, comenzamos resolviendo el subjuego que comienza en el nodo $1b$, el cual puede representarse mediante la siguiente matriz de pagos:

Donde el único equilibrio de Nash es el perfil (L, L). Como en el último subjuego ambos jugadores jugarían L, el pago que obtendría cada uno de ellos sería 3. De esta forma, podemos reemplazar dichos pagos en el nodo $1b$.

		Jugador 2	
		I	L
Jugador 1	I	$(-1,-1)$	$(2,\underline{1})$
	L	$(\underline{1},2)$	$(\underline{3},\underline{3})$



Este subjuego se representa mediante la siguiente matriz de pagos:

		Jugador 2	
		E	N
Jugador 1	E	$(\underline{3},\underline{3})$	$(\underline{5},0)$
	N	$(0,\underline{5})$	$(0,0)$

Donde el único equilibrio de Nash es el perfil (E,E). Como el ENPS es aquel perfil que induce a un equilibrio de Nash en cada subjuego, el perfil (EL,EL) es el único ENPS.

b) De la parte (a), sabemos que las estrategias disponibles para ambos jugadores son las mismas: $S_i = \{EI, EL, NI, NL\}$. Así, se puede reexpresar el juego en su forma estratégica $G(\Gamma)$, donde el único equilibrio de Nash en estrategias puras es el perfil (EL,EL), que es también un ENPS.

		$J2$			
		EI	EL	NI	NL
	EI	(-1,-1)	(2,$\underline{1}$)	($\underline{5}$,0)	($\underline{5}$,0)
$J1$	EL	($\underline{1}$,2)	**($\underline{3}$,$\underline{3}$)**	($\underline{5}$,0)	($\underline{5}$,0)
	NI	(0,$\underline{5}$)	(0,$\underline{5}$)	(0,0)	(0,0)
	NL	(0,$\underline{5}$)	(0,$\underline{5}$)	(0,0)	(0,0)

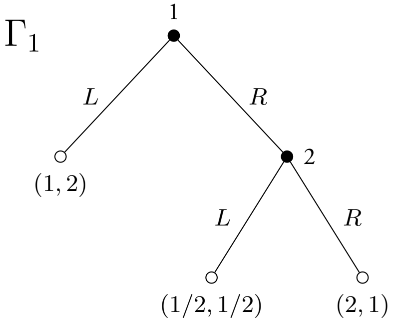
38. ⋆⋆ Analice la veracidad del siguiente enunciado: “Todo equilibrio de Nash es un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos”.

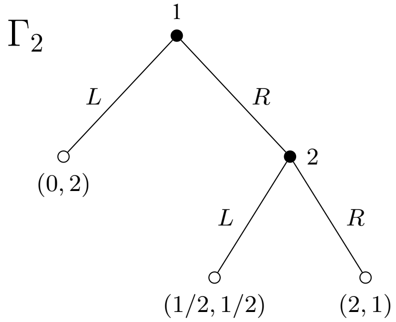
    El enunciado es falso. Un equilibrio de Nash siempre sería un ENPS en el caso trivial en el que dicho equilibrio es único o cuando el subjuego es el juego en sí mismo. De otro modo, un equilibrio de Nash no necesariamente será un ENPS, si es que dicho equilibrio de Nash contiene amenazas no creíbles (i.e, que usa estrategias que no son secuencialmente racionales).

39. ⋆⋆ Analice la veracidad del siguiente enunciado: “En cualquier juego dinámico con un único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS), el método de inducción hacia atrás siempre descarta al menos un equilibrio de Nash que incluye amenazas no creíbles”.

    Solución

    El enunciado es falso. Si bien el método de inducción hacia atrás descarta cualquier equilibrio de Nash que incluya amenazas no creíbles (i.e., que no sea secuencialmente racional), un juego dinámico con un único ENPS no necesariamente debe tener más de un equilibrio de Nash. Tome en cuenta los siguientes ejemplos:





Note que la única diferencia entre ambos juegos es el pago que recibiría el jugador 1 en el caso que juegue L. Los equilibrios de Nash en ambos casos los encontraremos representando dichos juegos en su forma normal o estratégica:

$G(\Gamma_1)$

	L	R
L	$(\underline{1},\underline{2})$	$(1,\underline{2})$
R	$(1/2,1/2)$	$(\underline{2},\underline{1})$

$G(\Gamma_2)$

	L	R
L	$(0,\underline{2})$	$(0,\underline{2})$
R	$(\underline{1/2},1/2)$	$(\underline{2},\underline{1})$

Los equilibrios de Nash son $\{(L,L),(R,R)\}$ en el primer juego y (R,R) en el segundo. En ambos casos, sin embargo, el único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos es

(R, R). En este sentido, el concepto de secuencialidad racional descarta el perfil (L, L) en el juego de la izquierda, mas no descarta ningún perfil en el juego de la derecha (pues en dicho juego existe un único equilibrio de Nash).

Referencias

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., y Green, J. R. (1995). *Microeconomic theory*. New York: Oxford University Press.