4 - Principales modelos de oligopolio

1. ⋆⋆ Se tienen dos empresas que pueden elegir entre competir a la Cournot y coludir produciendo de forma conjunta la cantidad de monopolio. Si la función de demanda inversa es $p = a - bQ$, donde $Q = q_1 + q_2$:

   a) Halle los beneficios que obtienen las empresas cuando compiten a la Cournot, cuando coluden y cuando se desvían de la colusión.

   b) Represente el juego descrito en forma normal.

   c) Encuentre el equilibrio del juego representado en la parte b).

   <u>Solución</u>

   a) A continuación, se presentan los posibles perfiles de estrategias y el vector de pagos para las empresas (omitiendo procedimientos):

   - Ambas empresas compiten a la Cournot:

   $$q_i^* = \frac{a-c}{3b} \qquad \Longrightarrow \qquad \pi_i^* \frac{(a-c)^2}{9b}$$

   - Ambas empresas producen la mitad de la cantidad de monopolio:

   $$q_i = \frac{a-c}{4b} \qquad \Longrightarrow \qquad \pi_i^* \frac{(a-c)^2}{8b}$$

   - Si la empresa $-i$ mantiene la colusión pero i compite a la Cournot:

   $$q_{-i} = \frac{a-c}{4b} \quad \Rightarrow \quad q_i(q_{-i}) = \frac{a-c-bq_{-i}}{2b} = \frac{3(a-c)}{8b} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{5(a-c)}{8b}$$

   Luego, tenemos que $P = (3a+5c)/8$. Por lo tanto, los beneficios para ambas empresas son:

$$\pi_{-i} = \frac{3(a-c)^2}{32b} \qquad \wedge \qquad \pi_i = \frac{9(a-c)^2}{64b}$$

b) Dados los beneficios calculados para cada escenario, el juego descrito puede ser representado por la siguiente matriz de pagos:

	Competir	*Coludir*
Competir	$\left(\frac{(a-c)^2}{9b}, \frac{(a-c)^2}{9b}\right)$	$\left(\frac{9(a-c)^2}{64b}, \frac{3(a-c)^2}{32b}\right)$
Coludir	$\left(\frac{3(a-c)^2}{32b}, \frac{9(a-c)^2}{64b}\right)$	$\left(\frac{(a-c)^2}{8b}, \frac{(a-c)^2}{8b}\right)$

c) Se puede ver que el perfil de estrategias $\{Competir, Competir\}$ es el único equilibrio del juego, pues la estrategia "Competir" es estrictamente dominante para cada una de las empresas. Note que la estructura del juego es la misma que la del Dilema del Prisionero.

2. ⋆⋆⋆ Sea un mercado con dos empresas que compiten en cantidades y que se enfrentan a la siguiente de demanda inversa:

$$P = a - b(q_1 + q_2)$$

Las empresas tienen costos marginales constantes pero diferentes.

a) Defina la producción de equilibrio de cada empresa, el precio de mercado y los beneficios para cada empresa.

b) ¿Bajó qué condición no existiría producción en equilibrio?

c) Generalice los resultados de la parte a) para el caso de N empresas.

d) Generalice la condición obtenida en la parte b).

<u>Solución</u>

a) Sea c_i el costo marginal de cada empresa $i = 1, 2$, de forma que $c_1 \neq c_2$. Entonces cada empresa enfrenta el siguiente problema:

$$\max_{q_i} \pi_i = [P(Q) - c_i]q_i$$

De ahí se puede obtener la función de mejor respuesta de cada empresa:

$$B(q_i) = q_i(q_{-i}) = \frac{a - c_i}{2b} - \frac{q_{-i}}{2} \quad \Rightarrow \quad q_i = \frac{a - 2c_i + c_{-i}}{3b} \quad , \quad P = \frac{a + c_1 + c_2}{3}$$

De ahí, se puede obtener que cada empresa tendrá el siguiente beneficio:

$$\pi_i = \frac{(a - 2c_i + c_{-i})^2}{9b}$$

b) Note que la descripción del juego implica que existen 2 empresas que pueden elegir una producción $q \in [0, \infty)$ (pues no es posible producir una cantidad negativa). Luego, para que no pueda existir el equilibrio clásico de Cournot, basta que se cumpla que $c_i > (a + c_{-i})/2$; es decir, que los costos marginales de las empresas sean muy diferentes (tomando en consideración la demanda existente). Note que bajo esta condición se cumple que:

$$q_i = \frac{a - 2c_i + c_{-i}}{3b} < 0$$

En otras palabras, la máxima valoración del producto por parte del mercado, a, es la que marca la pauta de cuán diferentes pueden ser las empresas para que exista competencia a lo Cournot entre dos empresas.

c) En este caso el problema de maximización es el mismo pero debemos tomar en cuenta que la demanda inversa a la que se enfrentarían las empresas sería la siguiente:

$$P = a - b\sum_{i=1}^{N}(q_i)$$

Luego, la función de reacción (mejor respuesta) de cada empresa será:

$$B_i(q_{-i}) = q_i(q_{-i}) = \frac{a - c_i}{2b} - \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{2}$$

Note que en este caso no es posible Resuelva el juego asumiendo simetría ($q = q_i = q_{-i}$), pues las empresas no necesariamente son iguales en términos de sus costos marginales. Pero, dado que tenemos un sistema de N ecuaciones con N incógnitas, es posible hallar el equilibrio de Nash de este juego. Por inducción tenemos:

Para $N = 2$:

$$q_i = \frac{a - 2c_i + c_{-i}}{3b}$$

Para $N = 3$:

$$q_i = \frac{a - 3c_i + \sum_{j \neq i} c_j}{4b}$$

Para $N = 4$:

$$q_i = \frac{a - 4c_i + \sum_{j \neq i} c_j}{5b}$$

Por lo tanto, se desprende que, para cualquier N:

$$q_i = \frac{a - Nc_i + \sum_{j \neq i} c_j}{(N+1)b} \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{a + \sum_{i=1}^{N} c_i}{N+1}$$

Finalmente, el beneficio que obtiene cada empresa i en equilibrio es:

$$\pi_i = \frac{1}{b}\left(\frac{a - Nc_i + \sum_{j \neq i} c_i}{N+1}\right)^2$$

Note que si se asume que $c_i = c_{-i} = c$ (empresas idénticas), obtenemos los resultados vistos en la sección **??**: $\pi_i = (a-c)^2/b(N+1)^2$.

d) La lógica de la sección b) se mantiene. En este caso, para que exista el equilibrio de Cournot para N empresas el costo marginal de cada empresa i debe cumplir lo siguiente:

$$c_i < \frac{a + \sum_{j \neq i} c_j}{N}$$

3. ⋆⋆ Considere el modelo de duopolio de Cournot en el que dos empresas, 1 y 2, simultáneamente eligen las cantidades que venderán en el mercado, q_1 y q_2. El precio que cada empresa recibe por cada unidad vendida dadas las cantidades es $P(q_1, q_2) = a - b(q_1 + q_2)$. El costo de ambas empresas es c por unidad vendida.

a) Muestre que la eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas conlleva a una única predicción del juego.

b) ¿Lo anterior sería cierto si existiesen tres empresas en vez de dos?.

<u>Solución</u>

a) Imagine que el jugador $-i$ produce q_{-i}, entonces la mejor respuesta del jugador i sería:

$$q_i(q_{-i}) = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_{-i}}{2}$$

Como las cantidades vendidas no pueden ser negativas, entonces $0 \leq q_i \leq (a-c)/2b$. Note que $(a-c)/2b$ es la producción de monopolio, por lo que cualquier producción mayor es estrictamente dominada por dicha producción.

Ahora comencemos a eliminar iteradamente las estrategias estrictamente dominadas:

- Dado que para el jugador i producirá de forma que $q_i \leq (a-c)/2b$, entonces $-i$ producirá de forma que $q_{-i} \geq (a-c)/4b$.
- Dado lo anterior, i producirá de forma que $q_i \leq 3(a-c)/8b$ (estrategias entre $3(a-c)/8b$ y $(a-c)/2b$ son estrictamente dominadas).
- Dado lo anterior, $-i$ producirá de forma que $q_{-i} \geq 5(a-c)/16b$ (estrategias por debajo de $5(a-c)/16b$ son estrictamente dominadas).
- dado lo anterior, i producirá de forma que $q_i \leq 11(a-c)/32b$, luego $-i$ producirá de forma que $q_{-i} \geq 21(a-c)/64b$, y así sucesivamente.

Note que, cada vez, el límite inferior de q_{-i} ($\underline{q_{-i}}$) se aproxima al límite superior de q_i ($\overline{q_i}$), por lo que en el límite, la eliminación iterada de estrategías estrictamente dominadas nos llevará a que $\underline{q_{-i}} = \overline{q_i} = q$, por lo que se cumplirá lo siguiente:

$$\underline{q_{-i}} = (a-c)/2b - \overline{q_i}/2 \quad \Rightarrow \quad q = (a-c)/2b - q/2$$

De donde se obtendrá el perfil de estrategias $q_1 = q_2 = (a-c)/3b$.

b) Sean los jugadores h, i y j, donde la función de reacción para cada empresa es:

$$q_i(q_j, q_h) = \frac{(a-c)}{2b} - \frac{(q_j + q_h)}{2}$$

Luego, como $q_j, q_h \geq 0$, entonces $q_i \leq (a-c)/2b$. Dado que esto también se cumple para h y j, podemos tomar en cuenta que $q_j \leq (a-c)/2b$ y concluir que $q_h \geq (a-c)/2b - [2(a-c)/2b]/2 = 0$. Por lo tanto, si intentamos eliminar iteradamente las estrategias estrictamente dominadas obtendremos que q_h, q_i y q_j cumplirán las condiciones $q_h, q_i, q_j \geq 0$ y $q_h, q_i, q_j \leq (a-c)/2b$, lo que no nos permite predecir un único perfil de equilibrio.

4. ⋆⋆⋆ En una ciudad existen tres importantes empresas que producen productos diferenciados. Dichas empresas se enfrentan a la siguiente función de demanda inversa:

$$P = a - \alpha q_1 - \beta q_2 - \gamma q_3$$

Donde P es el precio de mercado y α, β y γ son constantes. Finalmente, las empresas no enfrentan costos fijos y su costo variable es c_i, donde $i = 1, 2, 3$.

a) ¿Cuál será el beneficio obtenido por cada una de las empresas si se sabe que compiten en un modelo de oligopolio de Cournot?

b) Interprete intuitivamente el significado de α, β y γ en la función de reacción de la empresa 1.

<u>Solución</u>

a) El beneficio para cada empresa i es:

$$\pi_i = (a - \alpha q_1 - \beta q_2 - \gamma q_3 - c_i)q_i$$

Por lo tanto, podemos obtener las siguientes funciones de reacción:

$$q_1 = \frac{a - c_1 - \beta q_2 - \gamma q_3}{2\alpha} \tag{.1}$$

$$q_2 = \frac{a - c_2 - \alpha q_1 - \gamma q_3}{2\beta} \tag{.2}$$

$$q_3 = \frac{a - c_3 - \alpha q_1 - \beta q_2}{2\gamma} \tag{.3}$$

Si sumamos la ecuación .2 y .3, podemos obtener lo siguiente:

$$\beta q_2 + \gamma q_3 = \frac{2a - c_2 - c_3 - 2\alpha q_1}{3} \tag{.4}$$

Luego, si incluimos .4 en .1 podemos obtener el nivel óptimo de producción de la empresa 1:

$$q_1^* = \frac{a - 3c_1 + c_2 + c_3}{4\alpha}$$

De forma análoga se pueden obtener las cantidades óptimas para las empresas 2 y 3:

$$q_2^* = \frac{a - 3c_2 + c_1 + c_3}{4\beta} \qquad \wedge \qquad q_3^* = \frac{a - 3c_3 + c_2 + c_3}{4\gamma}$$

Por lo tanto, podemos obtener el precio de mercado:

$$P = a - \frac{\alpha(a - 3c_1 + c_2 + c_3)}{4\alpha} - \frac{\beta(a - 3c_2 + c_1 + c_3)}{4\beta} - \frac{\gamma(a - 3c_3 + c_2 + c_3)}{4\gamma}$$

$$P = \frac{a + c_1 + c_2 + c_3}{4}$$

Por lo tanto, es posible hallar los beneficios de cada empresa:

$$\pi_1^* = \frac{(a - 3c_1 + c_2 + c_3)^2}{16\alpha}$$

$$\pi_2^* = \frac{(a - 3c_2 + c_1 + c_3)^2}{16\beta}$$

$$\pi_3^* = \frac{(a - 3c_3 + c_1 + c_2)^2}{16\gamma}$$

b) Es pertinente mostrar nuevamente la función de reacción de la empresa 1:

$$q_1 = \frac{a - c_1 - \beta q_2 - \gamma q_3}{2\alpha}$$

Luego, se puede afirmar lo siguiente para la empresa 1:

- Dado que a es fijo, si se reduce el costo marginal de la empresa 1 en una unidad, su producción aumenta en $1/2\alpha$, por lo que dicho valor se interpreta como una sensibilidad de la producción de la empresa 1 a variaciones de su costo marginal.

- Si la empresa 2 aumenta q_2 en una unidad, la cantidad de la empresa 1 se reduce en $\beta/2\alpha$, por lo que dicho valor se interpreta como la sensibilidad de la producción de la empresa 1 a variaciones de la producción de la empresa 2.
- De forma análoga, $\gamma/2\alpha$ es la sensibilidad de la producción de la empresa a variaciones de la producción de la empresa 3.

En conclusión, $alpha$, β y γ son componentes de las diferentes sensibilidades de q_1.

5. $\star\star\star$ Definamos $\phi_i = \partial q_{-i}/\partial q_i$ como la "conjetura" de la empresa i; es decir, la creencia de i de cómo su producción afecta de forma directa a la producción de su adversario $-i$. En el modelo de Cournot donde $P = a - bQ$, se asume que $\phi_i = 0$ para todo i.

   a) Asuma que existen dos empresas tal que $\phi_i = \phi$ para $i = 1, 2$, y plantee el modelo general.

   b) Corroborar que, cuando $\phi = 0$, obtenemos los resultados del modelo de Cournot.

   c) Evalue los resultados del modelo cuando ϕ toma los valores de 1 y -1. Comente sobre los resultados obtenidos.

   d) Comente intuitivamente cuál es el papel que juega ϕ en la obtención de cada resultado.

Solución

a) El problema al que se enfrenta la empresa i es la siguiente:

$$\max_{q_i} \pi_i = (a - bq_i - bq_{-i} - c)q_i$$

Luego, la condición de primer orden del problema de optimización es el siguiente:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = a - 2bq_i - \left(bq_{-i} + bq_i \frac{\partial q_{-i}}{\partial q_i} \right) - c = 0$$

De donde se puede obtener la función de reacción de la empresa i y su cantidad producida:

$$q_i(q_{-i}) = \frac{(a-c)}{(\phi+2)b} - \frac{q_{-i}}{(\phi+2)} \qquad \Rightarrow \qquad q_i = \frac{(a-c)}{(\phi+3)b} \quad \wedge \quad P = \frac{(1+\phi)a + 2c}{3+\phi} \tag{.5}$$

b) Debemos reemplazar $\phi = 0$ en las ecuaciones .5 y obtenemos los resultados del modelo de Cournot:

$$q_i = \frac{(a-c)}{3b} \qquad \wedge \qquad P = \frac{a+2c}{3}$$

c) Reemplazando $\phi = 1$ en las ecuaciones .5, obtenemos los resultados de colusión, donde cada empresa produce la mitad de la cantidad de monopolio:

$$q_i = \frac{(a-c)}{4b} \qquad \wedge \qquad P = \frac{a+c}{2}$$

Por otro lado, reemplazando $\phi = -1$ en las ecuaciones .5, obtenemos los resultados de competencia perfecta, con el precio es igual al costo marginal y con cada empresa produciendo la mitad de la cantidad de competencia:

$$q_i = \frac{(a-c)}{2b} \qquad \wedge \qquad P = c$$

Note que en este último caso, existen múltiples equilibrios de Nash; en particular, cualquier vector de cantidades $(q_1, q_2) > 0$ tal que $q_1 + q_2 = (a-c)/b$ es un equilibrio de Nash (el resultado mostrado es el equilibrio simétrico).

En conclusión, el modelo desarrollado en a) "anida" los tres resultados: el de colusión, el de oligopolio (Cournot) y el de competencia perfecta.

d) Note que la conjetura de $\phi = 1$ implica que ambos productores creen que existirá un movimiento coordinado de cantidades. Así, la empresa i creerá que si produce más, entonces $-i$ aumentará la producción en la misma proporción (lo que puede interpretarse como un castigo pues dicho aumento reducirá aún más el precio); por el contrario, creerá que si reduce su producción, $-i$ también lo hará en la misma proporción (lo que puede interpretarse como un premio pues se ejerce una presión al alza del precio). Finalmente, dichas creencias generan que las empresas se mantengan produciendo la mitad de la cantidad de monopolio sin incentivos a desviarse unilateralmente.

Por otro lado, la conjetura $\phi = -1$ implica que ambos productores creen que existirá un movimiento contrario de cantidades (cantidad total constante); es decir, la empresa cree que si deja de abastecer a una parte del mercado, su competencia cubrirá la demanda. Esta creencia genera los incentivos para que ambas empresas abastezcan a todo el mercado siempre que $p \geq c$.

Finalmente, la conjetura $\phi = 0$ implica que ambos productores creen que su decisión sobre su producción no afectará *per se* a la producción de su adversario, sino que dicha decisión es resultado de su maximización de beneficios tomando en cuenta su demanda residual, lo que resulta en una producción total ubicada entre la de monopolio y la de competencia.

6. $\star\star\star$ Considere el modelo de oligopolio de Bertrand. Suponga que hay dos firmas en el mercado que enfrentan el mismo costo marginal constante $c > 0$. Las firmas eligen sus precios p_1 y p_2. Los compradores únicamente compran de la firma que ofrece el

precio menor; si ambas firmas ofrecen el mismo precio, entonces el mercado se reparte de manera equitativa. La demanda del mercado está dada por:

$$D(p) = max\{\alpha - 2p, 0\}$$

a) Asuma que $c < \alpha/2$. Halle los precios, niveles de producción y beneficios para cada firma en Equilibrio de Nash.

b) Suponga que ambas firmas se juntan para formar un monopolio. Encuentre el precio, nivel de producción y beneficios de equilibrio. ¿Es sostenible esta decisión?

c) Ahora suponga que el juego se repite infinitamente. Utilice la estrategia del gatillo y encuentre la tasa de descuento a partir de la cual existe colusión.

d) Ahora suponga que ambas firmas ofrecen la siguiente promoción: si el consumidor encuentra un precio menor en cualquier otro lugar, la firma reducirá su propio precio para alcanzar esta oferta (esto se denomina *price matching*) y que el juego es de un solo periodo. Escriba la función de pagos y discuta si cobrar el precio de monopolio es un Equilibrio de Nash.

<u>Solución</u>

a) Note que la función de demanda de cada empresa puede representarse como sigue:

$$q_i(p_i, p_j) = \begin{cases} \alpha - 2p_i & si \quad p_i < p_j \quad \wedge \quad p_i < \alpha/2 \\ \frac{\alpha - 2p_i}{2} & si \quad p_i = p_j \quad \wedge \quad p_i < \alpha/2 \\ 0 & si \quad p_i > p_j \quad \vee \quad p_i \geq \alpha/2 \end{cases}$$

Por lo tanto, la función de beneficios es la siguiente:

$$\pi_i(p_i, p_j) = \begin{cases} (p_i - c)(\alpha - 2p_i) & si \quad p_i < p_j \quad \wedge \quad p_i < \alpha/2 \\ \frac{(p_i - c)(\alpha - 2p_i)}{2} & si \quad p_i = p_j \quad \wedge \quad p_i < \alpha/2 \\ 0 & si \quad p_i > p_j \quad \vee \quad p_i \geq \alpha/2 \end{cases}$$

El único equilibrio de Nash es el perfil en el que ambas empresas eligen $p_1 = p_2 = c$, ya que de otro modo tienen incentivos a desviarse. Por lo tanto $Q = \alpha - 2c$, por lo que $q_1 = q_2 = (\alpha - 2c)/2 > 0$ (debido al supuesto de $c < \alpha/2$), donde cada empresa tiene beneficios iguales a cero.

b) Seguimos suponiendo que $c < \alpha/2$. Si existe colusión, entonces ambas empresas producen de forma conjunta la cantidad de monopolio $Q^M = (\alpha - 2c)/2$, por lo que el precio es $P = (\alpha + 2c)/4 \leq \alpha/2$. Por lo tanto:

$$q_1 = q_2 = (\alpha - 2c)/4 > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \pi_1 = \pi_2 = \left(\frac{\alpha - 2c}{4}\right)^2 > 0$$

Sin embargo, el perfil de estrategias $((\alpha + 2c)/4, (\alpha + 2c)/4)$ (ambas empresas cobran el precio de monopolio) no sería sostenible en un juego estático, pues ambos jugadores tienen incentivos a desviarse y cobrar un precio ligeramente menor.

En particular, note que si alguna de las empresas cobra $(\alpha + 2c)/4 - \varepsilon$ abastece a toda la demanda y obtiene beneficios muy cercanos a los beneficios de monopolio $(\alpha - 2c)^2/8$.

c) Estrategia de i: cobrar $(\alpha + 2c)/4$ en $t = 1$ y cobrar en $t > 1$ cobrar $(\alpha + 2c)/4$ si en $t - 1$ el perfil resultante fue $((\alpha + 2c)/4, (\alpha + 2c)/4)$, de otro modo cobrar c en dicho periodo y para siempre.

El beneficio por coludir (π^c) es el siguiente:

$$\pi^c = \left(\frac{\alpha - 2c}{4}\right)^2 + \delta\left(\frac{\alpha - 2c}{4}\right)^2 + \delta^2\left(\frac{\alpha - 2c}{4}\right)^2 + \ldots = \left(\frac{\alpha - 2c}{4}\right)^2\left(\frac{1}{1 - \delta}\right)$$

Mientras que el pago por desviarse es $\pi^d \approx \frac{(\alpha - 2c)^2}{8}$ (asumiendo que $\varepsilon \approx 0$), pues a partir del segundo periodo en adelante ambas empresas cobrarían un precio igual a su costo marginal. Finalmente, para que la colusión sea sostenible debe cumplirse que $\pi^c \geq \pi^d$, para lo cual se requiere que $\delta \geq 1/2$.

d) Note que las reglas del juego inicial cambiaron; es decir, si las empresas eligiesen inicialmente (p_1, p_2), el precio que ambas firmas terminarán cobrando será $p = min\{p_1, p_2\}$. Por lo tanto, la función de pagos de las empresas será:

$$\pi_(p_i, p_j) = \frac{(p - c)(\alpha - 2p)}{2}$$

Donde $p = min\{p_1, p_2\} < \alpha/2$ (si $p \geq \alpha/2$, entonces los beneficios son cero).

Ahora suponga que $p_1 = p_2 = p^M = (a + 2c)/4$. Para verificar si dicho perfil de estrategias forman parte de un equilibrio de Nash, debemos ver si hay incentivos para que las empresas se desvíen:

- Supongamos que la empresa i decide desviarse cobrando un precio mayor mientras que la empresa j continúa cobrando p^M. En este caso, la desviación no tiene ningún resultado puesto que por el *price matching* la firma i terminará cobrando p^M.

- Supongamos que la empresa i decide desviarse cobrando un precio menor $p < p^M$ mientras que la empresa j continúa cobrando p^M. Por *price matching* la empresa j terminará cobrando $p < p^M$ y ambas empresas obtendrán la mitad de los beneficios totales. Sin embargo, como se ha visto en la sección b), el precio que maximiza los beneficios conjuntos es p^M, por lo que al desviarse terminará ganando menos.

En conclusión, ninguna empresa tiene incentivos a desviarse, por lo que cada una cobra el precio de monopolio, produce la mitad de la cantidad de monopolio y obtiene la mitad de beneficios de monopolio. Esto se debe a que las reglas del juego se han modificado, de modo que el *price matching* evita de forma artificial que exista una desviación unilateral del perfil de estrategias por parte de cualquiera de los jugadores (dado que ninguna empresa puede quedarse con todo el mercado cobrando ε menos, prefieren cobrar lo que maximiza los beneficios totales pues sabe que se llevará la mitad de dichos beneficios).

7. $\star\star$ En un mercado existen dos empresas que producen un bien homogéneo y compiten en precios. Ambas empresas producen a costo cero, $c = 0$, pero se enfrentan a una restricción de capacidad; es decir, las empresa 1 y 2 pueden producir como máximo las cantidades k_1 y k_2, respectivamente. La demanda inversa de mercado es:

$$P = 1 - q_1 - q_2$$

   a) Asuma que $k_1 + k_2 \leq 1$ y que existe un "racionamiento eficiente"; es decir, aquellos que valoran más el bien son atendidos primero por la empresa que cobra el precio más bajo. Proponga una expresión para la demanda de la empresa i.

   b) Suponga que $k_i < (1 - k_{-i})/2$ para $i = 1, 2$. Analice si $p_1 = p_2 = 1 - k_1 - k_2$ es un equilibrio de Nash.

   c) ¿Cómo cambia el análisis si $k_i = k_{-i} = 1$?

Solución

   a) Como ambas empresas producen un bien homogéneo y compiten en precios, todos querrán comprar en la empresa que venda el bien al menor precio; sin embargo, una sola empresa no necesariamente podrá abastecer a todo el mercado debido a su restricción de capacidad. En este sentido, si una empresa fija el mayor precio sólo podrá atender a la demanda residual, si es que la hubiese. Note que esta demanda residual estaría compuesta por aquellos que valoran menos el producto (por el supuesto de "racionamiento eficiente").

$$q_i = \begin{cases} \text{mín}[1-p_i, k_i] & si \quad p_i < p_j \\ \\ \text{mín}[k_i, 1-p_i-k_j] & si \quad p_i > p_j \\ \\ \text{mín}\left[k_i, \frac{k_i}{k_i+k_j}(1-p_i)\right] & si \quad p_i = p_j \end{cases}$$

Es decir, si la empresa i fija el precio menor, entonces abastecerá toda la demanda a menos que su capacidad no se lo permita; mientras que si fija el precio mayor, abastecerá toda la demanda residual a menos que su capacidad no se lo permita. Finalmente, hemos supuesto que si fija el mismo precio que su rival abastecerá una proporción (en función de su capacidades relativa) de toda la demanda, salvo que su capacidad instalada no se lo permita.

b) Para saber si $p_1 = p_2 = p = 1 - k_1 - k_2$ es un equilibrio de Nash, debemos verificar si existen incentivos a desviarse unilateralmente de dicho perfil para alguno de los jugadores. Note que en dicho equilibrio, cada jugador está produciendo $q_i = k_i$ y obteniendo beneficios positivos, $\pi_i = k_i(1 - k_i - k_{-i})$ (ver ecuaciones de demanda):

- Si i desea cobrar un precio $p_i < p$, entonces quedaría en posición de atender a toda la demanda; sin embargo, ya se encuentra produciendo lo máximo posible, k_i. Por lo tanto, reducir el precio sólo reducirá sus beneficios.
- Si i desea cobrar un precio $p_i > p$, entonces quedaría en posición de atender sólo a la demanda residual. Por lo tanto, i se enfrenta al siguiente problema de optimización:

  $$\max_{p_i} \pi_i = p_i(1 - p_i - k_{-i}),$$

  de donde se tiene que $p_i^* = q_i^* = \frac{1-k_{-i}}{2}$. Note que este nivel de producción es, por datos del ejercicio, mayor a su capacidad límite, por lo que su respuesta óptima es producir lo máximo posible, k_i, cobrando $p_i = 1 - k_i - k_{-i}$.

En conclusión, ninguno de los jugadores tiene incentivos a desviarse unilateralmente, y $p_1 = p_2 = 1 - k_1 - k_2$ es un equilibrio de Nash.

c) Note que si $k_i = 1$ para $i = 1, 2$, cada una de las empresas puede abastecer por sí sola la demanda total de mercado cuando el precio es igual al costo marginal ($p = c = 0$). Esto es equivalente a decir que no existen restricciones de capacidad, por lo que el resultado a obtener es el de la paradoja de Bertrand.

8. ⋆⋆ Supongamos que dos empresas producen bienes diferenciados que compiten en precios. La demanda que enfrenta la empresa i es:

$$D_i(p_i, p_j) \equiv q_i = 1 - bp_i + dp_j$$

Donde $0 < d < b$. Cada firma i tiene costos marginales constantes e iguales a $c > 0$.

a) Derive la función de reacción de cada firma y encuentre el equilibrio de Bertrand y los pagos de equilibrio de cada firma. Discuta si las firmas tenderán a mover sus estrategias en la misma dirección que sus competidores. ¿Se cumple la paradoja de Bertrand?

b) Ahora supongamos por simplicidad que d = 1, b = 2 y c = 0. También, asuma que la firma 1 se puede comprometer a un nivel de precio antes que la firma 2. De este modo, la firma 1 es un "líder en precios". Halle el equilibrio en este juego de liderazgo en precios. Grafique la interacción entre las funciones de reacción de cada firma. ¿Hay alguna ventaja de ser líder en este contexto? Discuta los supuestos en que se basa esta situación y compare sus conclusiones con lo que sabe del modelo de Stackelberg de competencia en cantidades.

Solución

a) La función de beneficios de la empresa i es $\pi_i = (p_i - c)q_i$. Note que en el modelo de Bertrand las empresas compiten en precios, por lo que la condición de primer orden es:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} = 1 - 2bp_i + dp_j + bc = 0$$

Por lo tanto, la función de mejor respuesta de la empresa i es:

$$p_i^*(p_j) = \frac{1 + bc + dp_j}{2b},$$

donde se observa que $\partial p_i^* / \partial p_j = d/2b > 0$, lo que indica que las empresas tenderán a ir en la misma dirección respecto de la decisión del competidor. Luego, en esta variación del modelo de Bertrand, en equilibrio obtenemos los siguientes resultados:

$$p_i = p_j = \frac{1 + bc}{2b - d} \quad \Rightarrow \quad q_i = q_j = \frac{b(1 - bc + dc)}{2b - d} \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \pi_j = \frac{b(1 - bc + dc)^2}{(2b - d)^2}$$

Note que los precios de equilibrio son mayores que el costo marginal y los beneficios son positivos (pues $b > d$), por lo que la inclusión del supuesto de bienes diferenciados rompe con la paradoja de Bertrand.

Es importante destacar que las empresas tienden a mover sus precios en la misma dirección que sus competidores (ver función de mejor respuesta). Esto se debe los bienes presentan un cierto grado de sustitución, por lo que la empresa i gana clientes cuando sus rivales suben sus precios.

b) Las funciones de demanda y de beneficios de la empresa i son:

$$q_i = 1 - 2p_i + p_j \quad \Rightarrow \quad \pi_i = p_i(1 - 2p_i + p_j)$$

Luego, asumiendo que la empresa 1 es la líder y la 2 es la seguidora, resolvemos el ejercicio mediante el procedimiento de inducción hacia atrás. Así, podemos obtener la mejor respuesta de la empresa 2:

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = 1 - 4p_2 + p_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_2(p_1) = \frac{1 + p_1}{4}$$

Luego, la empresa líder incorporará dicho comportamiento en su problema de maximización de beneficios:

$$\max_{p_1} \pi_1(p_1, p_2(p_1)) = p_1 \left(1 - 2p_1 + \frac{1 + p_1}{4}\right)$$

De donde obtenemos que $p_1^* = 5/14$. Por lo tanto, la seguidora cobrará el precio $p_2^*(p_1) = 19/56$. Luego, las cantidades producidas por ambas empresas son:

$$q_1 = 1 - 2p_1 + p_2 = 0.625 \quad \wedge \quad q_2 = 1 - 2p_2 + p_1 \approx 0.679$$

Finalmente, los beneficios de cada empresa se muestra a continuación:

$$\pi_1 = p_1 q_1 \approx 0.223 \quad \wedge \quad \pi_2 = p_2 q_2 \approx 0.230$$

En este contexto la seguidora tiene mayores beneficios que la líder, lo contrario a lo que ocurre en el modelo clásico de Stackelberg con liderazgo en cantidades. Esto ocurre porque, una vez que la empresa 1 fija su precio, la empresa 2 puede fijar un precio ligeramente menor (note que $p_2^* < p_1^*$), robándole un poco de mercado a la empresa líder.

9. ⋆⋆ Siguiendo con el modelo base de Hotelling, dos empresas A y B son idénticas y desean producir en una ciudad lineal de distancia 1 y densidad unitaria. Las empresas se ubican en los puntos a y b, respectivamente (donde $0 \leq a \leq b \leq 1$), y compiten en precios.

   Cada persona dentro de la ciudad compra una unidad del bien. Si el costo de trasladarse z es tz^2 (costos de transporte cuadrático), halle los precios, cantidades y beneficios de cada empresa.

   Solución

La representación de la ciudad descrita es la siguiente:

gráfico

Donde x es la ubicación del consumidor indiferente. Para dicho consumidor se cumple:

$$p_a + t(x-a)^2 = p_b + t(b-x)^2,$$

de aquí se tiene:

$$x = \frac{p_b - p_a}{2t(b-a)} + \frac{a+b}{2}$$

Luego, la demanda de cada empresa será $D_a = x$ y $D_b = 1 - x$ y los beneficios de cada empresa será:

$$\pi_a = (p_a - c)D_a = (p_a - c)\left(\frac{p_b - p_a}{2t(b-a)} + \frac{a+b}{2}\right)$$

$$\pi_b = (p_b - c)D_b = (p_b - c)\left(1 - \frac{p_b - p_a}{2t(b-a)} - \frac{a+b}{2}\right)$$

Por lo tanto, de las condiciones de primer orden obtenemos las funciones de reacción:

$$\frac{\partial \pi_a}{\partial p_a} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_a = \frac{p_b + c + t(a+b)(b-a)}{2}$$

$$\frac{\partial \pi_b}{\partial p_b} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_b = \frac{p_a + c + t(b-a)(2-a-b)}{2}$$

De donde obtenemos los precios de equilibrio de ambas empresas:

$$p_a^* = c + \frac{t(b-a)(2+a+b)}{3} \qquad\qquad p_b^* = c + \frac{t(b-a)(4-a-b)}{3}$$

Por lo tanto, obtenemos la cantidad de cada empresa en función de a, b y t:

$$p_b^* - p_a^* = \frac{t(b-a)(2-2a-2b)}{3} \qquad \Rightarrow \qquad D_a^* = x = \frac{2+a+b}{6} \text{ y } D_b^* = 1 - x = \frac{4-a-b}{6},$$

y obtenemos los beneficios en función de a, b y t:

$$\pi_a^* = \frac{t(b-a)(2+a+b)^2}{18} \qquad\qquad \pi_b^* = \frac{t(b-a)(4-a-b)^2}{18}$$

10. ⋆ Si la función de reacción del seguidor en el modelo de Stackelberg es la misma que las que tienen las empresas en el modelo de Cournot, ¿en qué se diferencian dichos modelos?

    Solución

    La diferencia clave es que el modelo de Cournot es un juego estático y el de Stackelberg es un juego dinámico. En el primer caso, la función de reacción refleja de ambas empresas muestra mejor respuesta a una cantidad hipotética que asume que producirá su adversaria (intersección de mejores respuestas). Por otro lado, en el segundo caso, la función de reacción del seguidor muestra su mejor respuesta ante la producción que observa del líder, quien toma esto en cuenta e incorpora ex-ante la regla de decisión del seguidor al momento de decidir su nivel de producción (inducción hacia atrás).

11. ⋆ Analice la veracidad del siguiente enunciado: "Para el caso de productos homgéneos, asumiendo las mismas funciones de beneficios de dos empresas, los precios de equilibrio bajo Stackelberg serán mayores que bajo Cournot porque existe un líder con mayor poder de mercado que en el modelo de Cournot. Bajo el mismo supuesto, los precios bajo el modelo de Bertrand serán menores que bajo el de Cournot".

    Solución

    El enunciado es falso. En realidad los precios de equilibrio son menores en el modelo de Stackelberg porque la producción total es mayor; sin embargo, el líder sí obtiene mayores beneficios porque atiende a una mayor porción del mercado que en el caso de Cournot. En el caso de Bertrand, sí se tienen menores precios (precios competitivos).

12. ⋆ El modelo de Stackelberg clásico se aplica para competencia en cantidades. Sin embargo, existe una variante que permite acomodar este modelo a competencia vía precios. Indique de manera intuitiva, qué resultado se podría generar cuando existe liderazgo en precios. ¿Los beneficios económicos son cero? ¿esto sucede también para bienes diferenciados?

    Solución

    En el caso de bienes homogéneos y costos iguales ($cmg_L = cmg_S = c$), se obtendrá el resultado de Bertrand (ambas empresas con beneficios iguales a cero) sin importar la ventaja del liderazgo en precios, pues dado el precio establecido por la líder p_L, las seguidoras podrán cobrar ligeramente por debajo del precio del líder $p_L - \varepsilon > c$, llevándose todo el mercado y obteniendo beneficios positivos. Por lo tanto, la empresa líder tiene la presión a bajar su precio hasta $p_L = c$.

    Por otro lado, cuando los bienes son diferenciados, las empresas atienden mercados diferentes, por lo que la competencia no es tan directa (las empresas no pueden quitarse todo el mercado), por lo que las empresas tendrán beneficios positivos. En este caso, el liderazgo en precios es perjudicial, pues al tener un empresa que comprometerse a fijar un precio determinado p_L, la empresa seguidora podrá fijar un precio menor $p_S < p_l$ que le permitirá robar parte del mercado de la empresa líder. Este efecto se verá con mayor claridad en el ejercicio 8.

13. $\star$ El nivel de producción de una empresa seguidora siempre será el óptimo, ante cualquier situación. ¿Puede existir un escenario donde la líder abastezca a todo el mercado y deje a la seguidora con beneficios iguales a cero?

Solución

Al actuar después que la empresa líder, la empresa seguidora siempre tiene la alternativa de escoger su mejor opción posible, que depende de lo que haya producido la líder. En particular, si asumimos una demanda lineal $P = a - bQ$, note que la función de reacción de la seguidora será:

$$q_s(q_L) = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_L}{2}$$

Por lo que, si la empresa líder decide producir la cantidad de competencia perfecta $(a - c)/b$, la producción óptima de la seguidora es no producir ($q_s^* = 0$) y obtener beneficios nulos. Sin embargo, tome en cuenta que esta estrategia "predatoria" no sería óptima para el líder (pues su beneficio es cero) si el juego fuese de una sola etapa (podría serlo si el juego es repetido y la empresa seguidora no pudiera entrar después del periodo $t > 1$).

14. $\star\star$ Considere dos empresas compitiendo a lo Stackelberg, donde el costo total de producción de la empresa i es $CT_i = c_i q_i$, para $i = L, S$. Ambas empresas se enfrentan a la siguiente función de demanda inversa:

$$P = a - bQ, \text{ donde } Q = q_L + q_S,$$

donde L representa a la empresa líder; y S, a la seguidora.

a) Halle la producción, precio y beneficios de equilibrio.

b) ¿Qué pasa si $c_L > c_S$? Explique intuitivamente.

Solución

a) Resolvemos usando inducción hacia atrás. Primero, planteamos la función de beneficios de la empresa seguidora:

$$\pi_S = (p - c_S)q_S = (a - c_S - bq_L - bq_S)q_S$$

y obtenemos la función de reacción de la empresa seguidora a partir de la Condición de Primer Orden (CPO):

$$\frac{\partial \pi_S}{\partial q_S} = a - c_S - bq_L - 2bq_S = 0 \quad \Rightarrow \quad q_S(q_L) = \frac{a - c_S - bq_L}{2b}$$

Luego, dicha función de reacción es usada en la función de beneficios de la empresa líder:

$$\pi_L = (p-c_L)q_L = \left[a-c_L-bq_L-b\underbrace{\left(\frac{a-c_s-bq_L}{2b}\right)}_{q_S}\right]q_L = \left(\frac{a-2c_L+c_S-bq_L}{2}\right)q_L,$$

de donde se puede obtener la producción óptima de la empresa líder, a partir de la CPO:

$$\frac{\partial \pi_L}{\partial q_L} = \frac{a-2c_L+c_S}{2} - bq_L = 0 \quad \Rightarrow \quad q_L^* = \frac{a-2c_L+c_S}{2b}$$

Por lo tanto, la producción óptima de la empresa seguidora se obtiene reemplazando q_L^* en $q_s(q_L)$:

$$q_S^* = \frac{a-3c_S+2c_L}{4b}$$

Por lo que el perfil (q_L^*, q_S^*) es el ENPS. Finalmente, tenemos los siguientes resultados:

$$Q = q_L^* + q_S^* = \frac{a-2c_L+c_S}{2b} + \frac{a-3c_S+2c_L}{4b} = \frac{3a-2c_L-c_S}{4b}$$

Por lo tanto, el precio de mercado y los beneficios de las empresas son las siguientes:

$$P = \frac{a+2c_L+c_S}{4} \quad \Rightarrow \quad \pi_L = \frac{(a-2c_L+c_S)^2}{8b} \quad \wedge \quad \pi_S = \frac{(a+2c_L-3c_S)^2}{16b}$$

Note que si $c_L = c_S = c$, obtenemos los resultados del modelo con costos simétricos; es decir, $Q = 3(a-c)/4b$, $P = (a+3c)/4$, $\pi_L = (a-c)^2/8b$ y $\pi_S = (a-c)^2/16b$.

b) Antes de responder es importante hacer explícito el supuesto de que $c_L, c_S < a$. En particular, si alguna de las dos condiciones no se cumple, entonces la empresa con un costo marginal mayor que a debe producir una cantidad negativa, lo cual no es posible.

Gracias a esto, es posible notar que si $c_L > c_S$, entonces la empresa líder pierde poder de mercado, pues termina abasteciendo una menor proporción del mercado y obteniendo menores beneficios; y, si dicha diferencia es lo suficientemente alta, la empresa líder podría salir del mercado, dejando a la empresa seguidora como monopolista. Esto último ocurriría siempre que:

$$q_L^* \leq 0 \quad \Rightarrow \quad c_L \geq \frac{a+c_S}{2}$$

15. ⋆⋆ Extienda el modelo típico de Stackelber a tres firmas, donde los costos de producción para la empresa i son cq_i para $i = 1, 2, 3$, donde $c > 0$. La empresa 1 anuncia primero su producción q_1, luego la empresa 2 anuncia q_2 y finalmente la empresa 3 anuncia q_3. Si la función de demanda inversa es:

$$P(Q) = a - Q, \text{ donde } Q = q_1 + q_2 + q_3$$

Halle el equilibrio en este modelo de Stackelberg en tres etapas.

<u>Solución</u>

De forma genérica, la función de beneficios de la empresa i es:

$$\pi_i = [a - (q_1 + q_2 + q_3) - c]q_i \tag{.6}$$

Luego, podemos obtener la función de reacción de la empresa 3:

$$q_3 = \frac{a - c - q_1 - q_2}{2} \tag{.7}$$

Luego, la empresa 2 tomará la mejor respuesta de 3 en cuenta al momento de optimizar beneficios. Por lo tanto reemplazamos la ecuación .7 en .6 (para $i = 2$):

$$\pi_2 = \left(\frac{a - c - q_1 - q_2}{2}\right) q_2$$

De donde podemos obtener la función de reacción de la empresa 2:

$$q_2 = \frac{a - c - q_1}{2}$$

Por lo tanto, hallamos q_3 en función de $q_2(q_1)$:

$$q_3 = \frac{a - c - q_1}{4}$$

Luego, reemplazamos estos resultados en .6 (para $i = 1$):

$$\pi_1 = \left[a - c - q_1 - \frac{a - c - q_1}{2} - \frac{a - c - q_1}{4}\right] q_1$$

De la maximización de beneficios de la empresa 1 puede obtenerse que $q_1^* = (a - c)/2$. Por lo tanto, la producción de las empresas 2 y 3 es la siguiente:

$$q_2^* = \frac{a - c - q_1^*}{2} = \frac{a - c}{4} \qquad \wedge \qquad q_3^* = \frac{a - c - q_1^*}{4} = \frac{a - c}{8}$$

Luego, el ENPS sería el perfil $\{q_1^*, q_2^*, q_3^*\}$. Finalmente, el precio y cantidad de mercado serían:

$$Q^* = q_1^* + q_2^* + q_3^* = \frac{7(a-c)}{8} \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{a+7c}{8}$$

Note que con 3 empresas nos acercamos a los resultados de competencia perfecta ($q^c = a - c$).

16. ⋆⋆⋆ Generalice el modelo de Stackelberg donde existen N empresas diferentes y una de ellas es la líder, mientras que el resto son seguidoras.

Solución

A partir del ejercicio 17 conocemos la función de reacción de una empresa seguidora j; sin embargo, en este caso q_j depende de c_j, pues cada empresa es diferente:

$$q_j = \frac{a - bq_L - c_j}{2b} - \frac{\sum_{i \neq j} q_i}{2} \tag{.8}$$

Para hallar q_j, sumemos el resto de funciones de reacción de las empresas seguidoras i:

$$\sum_{i \neq j} q_i = \sum_{i \neq j} \frac{a - bq_L - c_i}{2b} - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum_{k \neq i} q_k \tag{.9}$$

Para resolver la ecuación .9, primero desarrollaremos su último elemento:

$$\sum_{i \neq j} \sum_{k \neq i} q_k = \sum_{i \neq j} \left(\sum_{k=1}^{N-1} q_k - q_i \right) \overset{(*)}{=} (N-2) \sum_{k=1}^{N-1} q_k - \sum_{i \neq j} q_i$$

Note que la igualdad $(*)$ es cierta pues $\sum_{k=1}^{N-1} q_k$ no depende de i y la sumatoria $\sum_{i \neq j}$ están definidas sobre $N-2$ elementos (pues no considera a la líder ni al elemento j). Luego, es importante notar que $\sum_{k=1}^{N-1} q_k = \sum_{k \neq j} q_k + q_j$, por lo que tenemos:

$$\sum_{i \neq j} \sum_{k \neq i} q_k = (N-3) \sum_{i \neq j} q_i + (N-2) q_j \tag{.10}$$

Luego, reemplazando .10 en .9 y despejando $\sum_{i \neq j} q_i$:

$$\sum_{i \neq j} q_i = \sum_{i \neq j} \frac{a - bq_L - c_i}{2b} - \frac{(N-2) q_j}{(N-1)} \tag{.11}$$

Luego, incluimos la ecuación .11 en .8 y despejamos q_j, obteniendo lo siguiente:

$$q_j(q_L) = \frac{a - bq_L - (N-1)c_j + \sum_{i \neq j} c_i}{Nb} = \frac{a - bq_L - Nc_j + \sum_{i=1}^{N-1} c_i}{Nb}$$

Dicha información es incorporada en la maximización de beneficios de la empresa líder:

$$\pi_L = (P - c_L)q_L = \left(a - b\sum_{j=1}^{N-1} q_j - bq_L - c_L \right) q_L \tag{.12}$$

Para poder expresar la función de beneficios de la empresa líder π_L en función de su producción q_L, calcularemos el siguiente elemento:

$$\sum_{j=1}^{N-1} q_j = \frac{(N-1)(a-bq_L) - N\sum_{j=1}^{N-1} c_j + (N-1)\sum_{j=1}^{N-1} c_j}{Nb} =$$

$$\frac{(N-1)(a-bq_L) - \sum_{j=1}^{N-1} c_j}{Nb}$$

Por lo tanto, la ecuación .12 puede reexpresarse en función de q_L:

$$\pi_L = \left(a - \frac{(N-1)(a-bq_L) - \sum_{j=1}^{N-1} c_j}{N} - bq_L - c_L \right) q_L$$

$$\pi_L = \left(\frac{a - bq_L - Nc_L + \sum_{j=1}^{N-1} c_j}{N} \right) q_L$$

Luego, de la condición de primer orden se puede obtener la producción óptima de la empresa líder:

$$q_L^* = \frac{a - Nc_L + \sum_{j=1}^{N-1} c_j}{2b}$$

Luego, la producción óptima de la empresa seguidora j es la siguiente:

$$q_j^*(q_L^*) = \frac{a + Nc_L - 2Nc_j + \sum_{j=1}^{N-1} c_j}{2Nb}$$

Por lo tanto, la cantidad total y precio de mercado son:

$$Q = q_L^* + \sum_{j=1}^{N-1} q_j^*(q_L^*) = \frac{a - Nc_L + \sum_{j=1}^{N-1} c_j}{2b} + \frac{(N-1)a + N(N-1)c_L - (N+1)\sum_{j=1}^{N-1} c_j}{2Nb}$$

Por lo que:

$$Q = \frac{a(2N-1) - Nc_L - \sum_{j=1}^{N-1} c_j}{2bN} \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{a + Nc_L + \sum_{j=1}^{N-1} c_j}{2N}$$

Con esto podemos obtener los beneficios de las empresas:

$$\pi_L = \frac{(a - Nc_L + \sum_{j=1}^{N-1} c_j)^2}{4bN} \qquad \wedge \qquad \pi_j = \frac{(a + Nc_L - 2Nc_j + \sum_{j=1}^{N-1} c_j)^2}{4bN^2}$$

Note que para el caso en que $c_i = c_j = c$ (empresas iguales), obtenemos que $\pi_L = (a-c)^2/4bN$ y que $\pi_j = (a-c)^2/4bN^2$, resultado obtenido en el ejercicio 17.

17. ⋆⋆⋆ Considere un mercado con N empresas iguales que compiten en cantidades, donde una es líder y el resto son seguidoras. La demanda a la que se enfrentan las empresas es la siguiente:

$$P(Q) = a - b\sum_{i=1}^{N} q_i$$

Encuentre la producción y el precio de equilibrio del mercado, así como los beneficios de la empresa líder y de una de las empresas seguidoras.

<u>Solución</u>

Si tomamos en cuenta que la N-ésima empresa es la líder, entonces la función de beneficios de una empresa seguidora j será la siguiente:

$$\pi_j = \left(a - b\sum_{i=1}^{N-1} q_i - bq_L - c\right) q_j$$

Y resolvemos mediante el procedimiento de inducción hacia atrás. La CPO de la empresa j, dado que q_L es fijo, es la siguiente:

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial q_j} = a - b\sum_{i\neq j} q_i - 2bq_j - bq_L - c = 0$$

Por lo que la función de reacción de la empresa seguidora j es la siguiente:

$$q_j = \frac{a - b\sum_{i\neq j} q_i - bq_L - c}{2b}$$

Como todas las empresas son iguales, el equilibrio en la segunda etapa es simétrico; es decir, $q_1 = q_2 = ... = q_{N-1} = q_N = q$.

$$q = \frac{a - b(N-2)q - bq_L - c}{2b} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{a - bq_L - c}{bN}$$

Luego, la función de beneficios de la empresa líder es la siguiente:

$$\pi_L = (a - b(N-1)q - bq_L - c)q_L = \left(a - \frac{(N-1)(a - bq_L - c)}{N} - bq_L - c\right) q_L = \left(\frac{a - bq_L - c}{N}\right) q_L$$

De donde se observa que la producción óptima del líder es $q_L^* = (a-c)/2b$. Es decir, la empresa líder siempre produce lo mismo independientemente del número de seguidoras que existan en el mercado. Luego, la producción óptima de cada empresa seguidora será:

$$q^*(q_L^*) = \frac{a - c - q_L^*}{bN} \quad \Rightarrow \quad q^* = \frac{(a-c)}{2bN}$$

Por lo tanto, pueden obtenerse la cantidad y precio de mercado:

$$Q = (N-1)q + q_L = \frac{(2N-1)(a-c)}{2bN} \quad \Rightarrow \quad P(Q) = a - bQ = \frac{a + (2N-1)c}{2N}$$

Finalmente, los beneficios de la empresa líder y de una seguidora es:

$$\pi_L = \frac{(a-c)^2}{4bN} \qquad \wedge \qquad \pi_S = \frac{(a-c)^2}{4bN^2}$$

Es importante destacar que conforme el número de empresas seguidoras aumenta, el resultado del mercado tiende al de competencia perfecta y todas las empresas tienen beneficios económicos iguales a cero:

$$\lim_{N\to\infty} Q = \frac{a-c}{b} \qquad \wedge \qquad \lim_{N\to\infty} P(Q) = c$$

Por otro lado, note que si solo existe una empresa seguidora ($N = 2$), obtenemos los resultados del modelo clásico de Stackelberg, donde las empresas tienen beneficios positivos: $\pi_L = (a-c)^2/8b$ y $\pi_S = (a-c)^2/16b$.

18. ⋆⋆⋆ Considere un mercado donde participan N empresas que compiten en cantidades, y que producen un bien con una demanda igual a $P = a - Q$. A cada empresa se le identifica con un número, que va del 1 al N. Así, el costo total de la empresa i es $CT_i = iq_i$.

a) Si cada empresa escoge q_i simultáneamente, halle la producción de equilibrio y el beneficio para cada una de las empresas.

b) Ahora, suponga que la empresa identificada con $i = 1$ se comporta como líder, y que las demás se comportan como seguidoras. Halle la producción de equilibrio y beneficio de cada empresa.

Solución

a) En la parte c) del ejercicio 2 se observó el equilibrio de Cournot con N empresas diferentes que venden un producto homogéneo y que enfrentan una demanda del tipo $P = a - bQ$. La producción óptima de la empresa i es la siguiente:

$$q_i = \frac{a - Nc_i + \sum_{j \neq i} c_j}{(N+1)b}$$

Note que en este caso, $b = 1$ y $c_i = i$, por lo que se concluye lo siguiente:

$$q_i = \frac{a - (N+1)i + \sum_{i=1}^{N} i}{(N+1)} = \frac{a}{N+1} + \frac{N}{2} - i$$

Luego, la producción total de mercado y el precio serán:

$$Q = \sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{aN}{N+1} + \frac{N^2}{2} - \frac{N(N+1)}{2} = \frac{aN}{N+1} - \frac{N}{2} \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{a}{N+1} + \frac{N}{2}$$

Finalmente, el beneficio de la empresa i será:

$$\pi_i = (P - c_i)q_i = \left(\frac{a}{N+1} + \frac{N}{2} - i\right)^2$$

b) Tal como se vió en el ejercicio 16 la producción óptima de la empresa líder es:

$$q_L^* = \frac{a - Nc_L + \sum_{i=1}^{N-1} c_i}{2b}$$

Mientras que la producción óptima de la empresa seguidora i es la siguiente:

$$q_i^*(q_L^*) = \frac{a + Nc_L - 2Nc_i + \sum_{i=1}^{N-1} c_i}{2Nb}$$

Si bien el dato del ejercicio indica que $c_i = i$, es importante notar que la empresa líder es la identificada por el subíndice $i = 1$ (en el modelo desarrollado en el ejercicio 16 era la empresa N). Por lo tanto debemos considerar el siguiente reordenamiento:

$$q_L^* = \frac{a-(N+1)c_L + \sum_{i=1}^{N} c_i}{2b}$$

$$q_i^*(q_L^*) = \frac{a+(N-1)c_L - 2Nc_i + \sum_{i=1}^{N} c_i}{2Nb}$$

Como las sumatorias siguen incluyendo los mismos elementos pero en diferente orden el resultado sigue siendo válido. Este ordenamiento permite que $i = 1 = L$ identifique a la empresa líder y que las empresas seguidoras estén identificadas por el subíndice $i = 2, ..., N$.

Si además consideramos que $b = 1$, podemos obtener los valores de q_L^* y q_i^*, para $i = 2, ..., N$:

$$q_L^* = \frac{(a-1)}{2} + \frac{N(N-1)}{4} \qquad \wedge \qquad q_i^* = \frac{a-1}{2N} + \frac{N}{4} + \frac{3}{4} - i$$

Por lo tanto, la producción total es:

$$Q = q_L^* + \sum_{i=2}^{N} q_i^*$$

$$Q = \frac{(a-1)}{2} + \frac{N(N-1)}{4} + \frac{(a-1)(N-1)}{2N} + \frac{N(N-1)}{4} + \frac{3(N-1)}{4} - \frac{N(N+1)}{2} + 1$$

$$Q = a - \frac{(a-1)}{2N} - \frac{N}{4} - \frac{3}{4} \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{(a-1)}{2N} + \frac{N}{4} + \frac{3}{4}$$

Por lo tanto, el beneficio de cada empresa es:

$$\pi_L = (P - c_L)q_L = \frac{1}{N}\left(\frac{(a-1)}{2} + \frac{N(N-1)}{4}\right)^2$$

$$\pi_i = (P - c_i)q_i = \left(\frac{(a-1)}{2N} + \frac{N}{4} + \frac{3}{4} - i\right)^2$$

19. ⋆⋆ Suponga que en el ejercicio 9, las empresas A y B pueden elegir sus ubicaciones antes de competir en precios.

   a) Halle las ubicaciones óptimas que elegirán las empresas, a^* y b^*. Explique intuitivamente cuál es el resultado del juego.

   b) ¿Existe el incentivo de moverse al centro para obtener una mayor cuota de mercado? Interprete. (Pista: Para esto considere la función de demanda $D_i(p_i, p_{-i}, a, b, t)$ y asuma los precios como fijos).

Solución

a) Ahora estamos lidiando con un juego dinámico, por lo que la solución la obtenemos mediante indución hacia atrás. En la etapa final compiten en precios, obteniendo los beneficios (ver solución del ejercicio 9):

$$\pi_a^* = \frac{t(b-a)(2+a+b)^2}{18} \qquad \pi_b^* = \frac{t(b-a)(4-a-b)^2}{18}$$

Por lo tanto, las empresas A y B elegirán las ubicaciones a y b que maximicen sus beneficios. Por lo tanto, obtenemos:

$$\frac{\partial \pi_a}{\partial a} = \frac{t}{18}\left[-(2+a+b)^2 + 2(b-a)(2+a+b)\right] = (2+a+b)(b-3a-2) < 0$$

$$\frac{\partial \pi_b}{\partial b} = \frac{t}{18}\left[(4-a-b)^2 - 2(b-a)(4-a-b)\right] = (4-a-b)(4-3b+a) > 0$$

Como $\partial \pi_a / \partial a < 0$, a la empresa A le conviene fijar el menor valor posible de a ($a^* = 0$); mientras que, como $\partial \pi_b / \partial b > 0$, a la empresa B le conviene fijar el mayor valor posible de b ($b^* = 1$). Este resultado es independiente del valor de t.

El resultado del juego es que ambas empresas optan por la máxima diferenciación, ubicándose cada una a uno de los extremos de la ciudad lineal.

b) Si tomamos las funciones de demanda $D_i(p_i, p_{-i}, a, b, t)$, y asumimos los precios como fijos de forma que $p_b > p_a$, tenemos lo siguiente[1]:

$$D_a = \frac{p_b - p_a}{2t(b-a)} + \frac{a+b}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial D_a}{\partial a} = \frac{p_b - p_a}{2t(b-a)^2} + \frac{1}{2}$$

$$D_b = 1 - \frac{p_b - p_a}{2t(b-a)} - \frac{a+b}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial D_b}{\partial b} = \frac{p_b - p_a}{2t(b-a)^2} - \frac{1}{2}$$

Donde observamos que existe un efecto de cuota de mercado, en el sentido que ambas empresas tienen el incentivo de acercarse a la otra para ganar demanda, y una vez que se encuentran en el mismo punto, tienen el incentivo de separarse y acercarse al medio de la ciudad, por lo que ambas empresas terminarían en el medio de la ciudad, produciendo un producto homogéneo.

Sin embargo, al incluir $p_i^*(c, a, b, t)$, existe un efecto estratégico, pues ambas empresas reconocen que la reducción de la diferenciación incentiva a la empresa rival a reducir su precio para mantener su cuota de mercado. Queda claro con los cálculos de $\partial \pi_a / \partial a$ y $\partial \pi_b / \partial b$, que el efecto estratégico termina dominando al efecto de la cuota de mercado, por lo que las empresas prefieren diferenciarse.

1 Si asumimos que $p_a > p_b$ bastará con asumir que la empresa B está a la izquierda y A está a la derecha para que sus demandas estén bien comportadas ($b \leq a$).

20. $\star\star$ Considere el siguiente mercado, con dos empresas que compiten en cantidades. La función de beneficios de la empresa i es:

$$\pi_i(q_1, q_2) = \begin{cases} q_i(1 - q_1 - q_2) & , si \quad q_1 + q_2 \leq 1 \\ \\ 0 & , si \quad q_1 + q_2 > 1 \end{cases}$$

La empresa 2 es operada por su propietario, mientras que la 1 es operada por un gerente, cuya función de utilidad estará dada por:

$$u(q_1, q_2) = \pi_1(q_1, q_2) + \theta q_1,$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$ refleja la comisión por ventas que recibe el gerente y que es decidida por el propietario de la empresa 1. La secuencia de acciones es como se describe a continuación:

- Primero, el propietario de la empresa 1 elige el nivel de comisión para el gerente $\theta \in [0, 1]$, el cual es de conocimiento común.
- Segundo, el gerente de la empresa 1 y el propietario de la empresa 2 compiten eligiendo q_1 y q_2 simultáneamente.

Los dueños de ambas empresas desean maximizar sus beneficios π_i $(i = 1, 2)$. El gerente desea maximizar su utilidad dada por u. Encuentre los niveles de θ, q_1 y q_2 en un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

<u>Solución</u>

Resolvamos este ejercicio mediante inducción hacia atrás, por lo que partiremos de la etapa final de competencia entre empresas tomando el factor θ como dado. El gerente de la empresa 1 se enfrenta al siguiente problema:

$$\max_{q_1 \in [0, \infty]} q_1(1 - q_1 - q_2) + \theta q_1$$

De donde obtenemos la función de reacción:

$$q_1(q_2) = \frac{1 + \theta - q_2}{2}$$

Por otro lado, la empresa 2 se enfrenta al problema clásico de maximización de beneficios, obteniendo la siguiente función de reacción:

$$q_2(q_1) = \frac{1 - q_1}{2}$$

De la intersección de las funciones de reacción obtenemos las cantidades de equilibrio para ambas empresas:

$$q_1^* = \frac{1+2\theta}{3} \qquad \wedge \qquad q_2^* = \frac{1-\theta}{3}$$

Esta información es incluida en el problema de maximización del propietario, el cual elige el valor de θ en el primer periodo, de forma que maximiza sus beneficios:

$$\max_{\theta\in[0,1]} \pi_1(q_1,q_2) = \left(\frac{1+2\theta}{3}\right)\left(1-\frac{1+2\theta}{3}-\frac{1-\theta}{3}\right) = \frac{(1+2\theta)(1-\theta)}{9}$$

De donde obtenemos que $\theta^* = 1/4$. Por lo tanto, el ENPS es el perfil $\{\theta = 1/4, q_1 = 1/2, q_2 = 1/4\}$, con beneficios $\pi_1^* = \pi_2^* = 1/8$ y $u^* = 1/4$

21. ⋆⋆ Duopolio de Cournot repetido infinitamente. Sea una función de demanda inversa $P = 2-Q$ (donde $Q = q_1+q_2$) y sean los costos marginales de las empresas $c_1 = c_2 = 0$ (se produce a costo cero).

   a) Halle la tasa de descuento a partir de la cual ambas empresas seguirán la estrategia del gatillo, produciendo la mitad de la cantidad de monopolio en cada periodo t, o produciendo la cantidad del duopolio de Cournot a partir de $t+1$ si la otra empresa la traición en t.

   b) ¿Cómo cambia su respuesta a la parte (a) si usa una estrategia gatillo que perdona (el castigo solo dura 2 periodos, luego de los cuales vuelve a cooperar normalmente)?

Solución

a) Recordemos que, para una demanda de la forma $P = a-bQ$, tenemos lo siguiente:

$$q_i = \frac{a-c}{4b} \text{ si las empresas coluden}$$

$$q_i = \frac{a-c}{3b} \text{ si las empresas compiten a lo Cournot}$$

Como $a = 2$, $b = 1$ y $c = 0$, es fácil derivar lo siguiente:

- Si las empresas cooperan:

$$q_i^m = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \pi_i = 1/2$$

- Si las empresas compiten a lo Cournot:

$$q_i^c = 2/3 \quad \Rightarrow \quad \pi_i = 4/9$$

- Si la empresa i traiciona, elige q_i de forma que:

$$\max_{q_i} \pi_i = \left(2 - \frac{1}{2} - q_i\right) q_i$$

Por lo que:

$$q_{-i} = 1/2 \quad \Rightarrow \quad q_i = 3/4 \quad \Rightarrow \quad P = 3/4$$
$$\pi_{-i} = 3/8 \quad \Rightarrow \quad \pi_i = 9/16$$

Por lo tanto, para que ambas empresas cooperen se necesita que:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2}\delta^3 + ... \geq \frac{9}{16} + \frac{4}{9}\delta + \frac{4}{9}\delta^2 + \frac{4}{9}\delta^3 ...$$

Lo cual ocurre si y solo si:

$$\frac{1}{2(1-\delta)} \geq \frac{9}{16} + \frac{4\delta}{9(1-\delta)}$$

De acá se observa que $\delta \geq 9/17$ para que exista cooperación (a mayor paciencia, $\delta \to 1$, mayor será la probabilidad de cooperación).

b) Los pagos encontrados en la parte a) siguen siendo válidos. Luego, el beneficio de mantener la cooperación es $\pi^c = 1/2(1-\delta)$, mientras que el beneficio de desviarse es el siguiente:

$$\pi^d = \frac{9}{16} + \frac{4\delta}{9} + \frac{4\delta^2}{9} + \frac{\delta^3}{2} + \frac{\delta^4}{2} + \frac{\delta^5}{2} + ...$$

Note que, si sumamos y restamos los siguientes elementos $1/2$, $\delta/2$ y $\delta^2/2$, y reordenamos, tenemos que:

$$\pi^d = \frac{1}{16} - \frac{\delta}{18} - \frac{\delta^2}{18} + \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{2} + ... = \frac{1}{2(1-\delta)} + \frac{1}{16} - \frac{\delta}{18} - \frac{\delta^2}{18}$$

Por otro lado, queda claro que no existirán incentivos a desviarse unilateralmente del castigo durante los dos periodos dado que se está jugando un equilibrio de Nash (si se analiza la existencia de incentivos a desviarse del acuerdo a partir del tercer periodo es lo mismo que analizar si existen incentivos a desviarse del acuerdo). Por lo tanto, para que exista colusión basta con que $\pi^c \geq \pi^d$:

$$\frac{1}{2(1-\delta)} \geq \frac{1}{2(1-\delta)} + \frac{1}{16} - \frac{\delta}{18} - \frac{\delta^2}{18},$$

lo cual ocurrirá siempre que $\delta^2 + \delta - 9/8 \geq 0$. Lo anterior se cumple para todo $\delta \in [0.6726, 1)$[2].

2 Note que δ no puede tomar el valor de 1 pues la serie infinita de pagos no podría converger a un valor finito.

Finalmente, es importante resaltar que en este último caso se requiere una mayor tasa de descuento (agentes más pacientes) que la requerida en la parte a). Esto se debe a que el castigo bajo la estrategia del gatillo clásica genera un mayor castigo (no cooperar nunca más) en comparación al caso en que exista un perdón después de dos periodos.

22. ⋆⋆ Suponga que la demanda de perfumes está dado por $P(Q) = 100 - Q/2$. Existen dos productores simétricos en el mercado, cada uno con la función de costos $C(q_i) = 10q_i$.

Suponga que ambas firmas compiten en el siguiente juego que se repite infinitas veces siguiendo la siguiente estrategia:

- Cada firma produce $q_i = q^*$ ($q^* = Q_M/2$).
- Si alguna empresa produce $q_i > q^*$, entonces cada empresa cree que ambas revertirán su conducta a la cantidad de Cournot, q_c, para siempre.

a) ¿Cuál será el precio, cantidad y beneficios de monopolio (Q_M)?

b) Si una empresa decide traicionar a la otra, ¿cuánto debe producir y cuanto ganará?

c) ¿Cuál es el valor crítico de la tasa de descuento β que permite la colusión?

Solución

a) El problema de maximización es el siguiente:

$$\max_{Q} P(Q)Q - C(Q) = 100Q - \frac{Q^2}{2} - 10Q$$

De ahí, tenemos que $Q_M = 90$, por lo que $P_M = 55$ y $\pi_M = 4\,050$.

b) Note que si una empresa se desvía de la colusión, sabe que la otra seguirá produciendo el nivel colusorio, $q^* = 45$, por lo que su problema de optimización de benerficios puede reexpresarse de la siguiente manera:

$$\max_{Q} P(Q)q^T - C(q^T) = 100q^T - \frac{45 + q^T}{2}q^T - 10q^T$$

De donde se observa que $q^T = 67.5$. Este monto también puede obtenerse de la función de reacción de la empresa (competencia a lo Cournot) evaluada en q^*:

$$B_i(q_{-i}) = q_i(q_{-i}) = 90 - \frac{q_{-i}}{2} = 90 - \frac{45}{2} = 67.5$$

Luego, tenemos que $P = 43.75$ y que $\pi = 2\,278.125$.

c) Note que la estrategia descrita es la denominada estrategia del gatillo, donde la acción colusiva implica producir $q^* = 45$, con beneficios $\pi^* = 2\,025$, y si existe un desvío de alguna de las empresas a $q^T = 67.5$, con beneficios $\pi^* = 2\,278.125$, entonces ambas empresas producirán la cantidad de Cournot, obteniendo los siguientes resultados:

$$B_i(q_{-i}) = q_i(q_{-i}) = 90 - \frac{q_{-i}}{2} \quad \Rightarrow \quad q_i = q_{-i} = 60, P = 40 \; y \; \pi = 1\,800.$$

Luego, tenemos lo siguiente:
Pago por coludir: $\pi^c = \frac{2\,025}{1-\beta}$
Pago por desviarse: $\pi^d = 478.125 + \frac{1\,800}{1-\beta}$
Por lo que la estrategia colusiva será un ENPS si $\pi^c \geq \pi^d$, lo que se cumple para todo β a partir del valor crítico $\beta \approx 0.53$.

23. ⋆⋆ Se sabe que, en el modelo de Bertrand con $N \geq 2$ empresas, con costos constantes e iguales a "c", el único equilibrio es aquel donde $p = c$. Demuestre que, si el juego se repite infinitas veces, se puede alcanzar un equilibrio colusivo, con un precio de equilibrio, $p^* \in [c, p^m]$, donde p^m es el precio monopólico.

Solución

Sea la siguiente estrategia: "En $t = 0$, coludirse en $p^* \in [c, p^m]$. Continuar coludiéndose en "$t + 1$", siempre que se hayan coludido en "t"; en caso contrario, castigar con el equilibrio estático $p = c$, con $\pi(p) = 0$".

Si nadie se desvía, cada empresa obtiene: $\left(\frac{1}{N}\right) \frac{\pi(p^*)}{1-\delta}$

Si una empresa se desvía (en $t = 0$), se queda con todo el mercado y obtiene: $\pi(p^m) + \frac{\pi=0}{1-\delta}$.

Por tanto, nadie se desviará si: $\left(\frac{1}{N}\right) \frac{\pi(p^m)}{1-\delta} \geq \pi(p^m) \quad \Longleftrightarrow \quad \delta \geq \frac{N}{N-1}$.

24. ⋆⋆⋆ Imagine que N empresas idénticas con costos cero compiten a la Cournot y se enfrentan a la función de demanda inversa:

$$P = 1 - \sum_{i=1}^{N} q_i$$

Imagine que dicha competencia se realiza día tras día sin que las empresas conozcan cuándo dejarán de competir

a) Encuentre la cantidad, precio y beneficio de equilibrio de la empresa i bajo competencia a la Cournot.

b) ¿Cuál sería la cantidad, precio y beneficio que obtendría la empresa i si las N empresas decidieran coludir?

c) ¿Cuál es la tasa de descuento que permite que se sostenga la colusión?, ¿Cómo depende dicha tasa del número de empresas?

Solución

a) Los resultados de la competencia a la Cournot son conocidos para N empresas y la función de demanda inversa de la forma $P = a - bQ$.

$$q_i^* = \frac{a-c}{(N+1)b} = \frac{1}{N+1} \quad \wedge \quad P = \frac{a+Nc}{N+1} = \frac{1}{N+1}$$

Por lo tanto, los beneficios para cada empresa son $\pi_i = 1/(N+1)^2$.

b) Note que la cantidad de monopolio bajo la información descrita es $Q_M = 1/2$, de modo que los precios son $P_M = 1/2$ y los beneficios totales son $\pi_M = 1/4$.

Por lo tanto, si las empresas deciden coludir producirían la N-ésima parte de la cantidad de monopolio y obtendrían también la N-ésima parte de los beneficios totales.

c) Para analizar la posibilidad de colusión utilizaremos la estrategia del gatillo. Nótese que si alguna empresa se desvía del acuerdo colusivo desearía producir de acuerdo a su función de mejor respuesta:

$$B_i(q_{-i}) = q_i(q_{-i}) = \frac{a-c-b\sum_{j\neq i} q_j}{2b} = \frac{1-\sum_{j\neq i} 1/(2N)}{2} = \frac{N+1}{4N}$$

Por lo que el precio de mercado sería $P = (N+1)/4N$ y los beneficios de desviarse serían $\pi^d = [(N+1)/4N]^2$. Luego, se pueden obtener los beneficios de coludir y de desviarse de la colusión:

Beneficio de coludir: $\pi^c = \frac{1}{4N(1-\delta)}$

Beneficio de desviarse: $\pi^c = \left(\frac{N+1}{4N}\right)^2 - \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+1)^2(1-\delta)}$

Por lo tanto, para que las empresas estén dispuestas a mantener el pacto colusivo, se debe cumplir que:

$$\delta \geq \frac{\left(\frac{N-1}{4N}\right)^2}{\left(\frac{N+1}{4N}\right)^2 - \frac{1}{(N+1)^2}} = \frac{(N+1)^2}{N^2+6N+1}$$

Note que si $N = 2$, el valor crítico es $\delta \approx 0.53$, si $N = 3$ es $\delta \approx 0.57$ y si $N = 4$ es $\delta \approx 0.61$. Finalmente note que $\lim_{N\to\infty} \delta_{crit} = 1$; es decir, mientras más empresas existen en el mercado es menos probable que pueda sostenerse la colusión.

25. ⋆⋆⋆ AgroUP S.A. y OrgaFood S.A. son dos empresas dueñas de la totalidad de terrenos agrícolas en un pequeño país. Cada una puede cultivar dos tipos de productos: papa o camotes. La demanda por cada uno está dada por:

$$P^p = 100 - bQ^p \qquad \wedge \qquad P^c = 90 - bQ^c$$

Donde $b > 0.5$. Asuma que ninguna empresa cuenta con restricciones de capacidad, que enfrentan un costo marginal por tonelada igual a c = 5 y que ninguna presenta costos fijos significativos. El director de AgroUP le propone a su par de OrgaFood que cada uno se quede como monopolista en su mercado. Al final, los beneficios conjuntos serían divididos en partes iguales; sin embargo, si uno de los dos invade el mercado del otro, entonces ocurriría una competencia a la Cournot en ambos mercados para siempre.

a) Halle los beneficios de la colusión

b) ¿Cuál es el valor de δ para cada empresa que hace sostenible el acuerdo, si se asume que se trata de un juego repetido infinitas veces?

c) ¿Qué empresa tiene mayor propensión a desviarse? ¿Por qué? Explique la intuición

Solución

a) En el mercado de la papa, el productor elige q^p tal que:

$$\max_{q^p} (100 - bq^p - c)q^p$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$100 - 2bq^p - c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q^p = \frac{95}{2b} \quad \wedge \quad P^p = 52.5$$

Por otro lado, en el mercado de camote, el productor elige q^c tal que:

$$\max_{q^c} (90 - bq^c - c)q^c$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$90 - 2bq^c - c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q^c = \frac{85}{2b} \quad \wedge \quad P^c = 47.5$$

Luego, tenemos que el beneficio obtenido por cada monopolio sería $\pi_p = 2\,256.25/b$ en el caso de la papa y $\pi_c = 1\,806.25/b$ en el caso del camote. Finalmente, en caso de existir colusión cada empresario obtendría la mitad de los beneficios conjuntos $\pi_p = \pi_c = 2\,031.25/b$ (subíndice se refiere al productor).

b) Si la productora de papa incursiona en el mercado de camote, enfrentaría el siguiente problema:

$$\max_{q_p^c} \pi_p^c = \left[90 - b\left(\frac{85}{2b} + q_p^c\right) - 5\right] q_p^c = \left[\frac{85}{2} - bq_p^c\right] q_p^c$$

Luego, obtenemos que:

$$\frac{\partial \pi_p^c}{\partial q_p^c} = \frac{85}{2} - 2bq_p^c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_p^c = \frac{85}{4b} \quad , \quad p^c = 26.25 \quad , \quad \pi_p^c = \frac{451.5625}{b}$$

Por lo que el productor de papa obtendría $\pi_p = 2\,707.8125/b$, mientras que el productor de camote obtendría $\pi_c = 903.125/b$.

Por otro lado, si la productora de camote incursiona en el mercado de papa, enfrentaría el siguiente problema:

$$\max_{q_c^p} \pi_c^p = \left[100 - b\left(\frac{95}{2b} + q_c^p\right) - 5\right] q_c^p = \left[\frac{95}{2} - bq_p^c\right] q_p^c$$

Luego, obtenemos que:

$$\frac{\partial \pi_c^p}{\partial q_c^p} = \frac{95}{2} - 2bq_c^p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_c^p = \frac{95}{4b} \quad , \quad p^c = 28.75 \quad , \quad \pi_c^p = \frac{564.0625}{b}$$

Por lo que el productor de camote obtendría $\pi_c = 2\,370.3125/b$ mientras que el productor de papa obtendría $\pi_p = 1\,128.125/b$. Luego, si existe competencia en ambos mercados, en el mercado de papas se tendría:

$$q_p^p = q_c^p = \frac{a-c}{3b} = \frac{95}{3b} \quad \Rightarrow \quad P^p = \frac{110}{3} \quad \Rightarrow \quad \pi_p^p = \pi_c^p = \frac{95^2}{9b} = \frac{1\,002.78}{b}$$

Mientras que en el mercado de camote tenemos:

$$q_1^c = q_2^c = \frac{a-c}{3b} = \frac{85}{3b} \quad \Rightarrow \quad P^c = \frac{100}{3} \quad \Rightarrow \quad \pi_p^c = \pi_c^c = \frac{85^2}{9b} = \frac{802.78}{b}$$

Por lo que si existiera competencia en ambos mercados, entonces los beneficios para ambos productores serían $\pi_p = \pi_c = 1\,805.56/b$.

Por lo tanto, para el productor de papa, tenemos:

Beneficios por colusión vs Beneficios por traición

$$\frac{2\,031.25}{b}+\frac{2\,031.25\delta}{b}+\frac{2\,031.25\delta^2}{b}+\ldots \text{ vs } \frac{2\,707.8125}{b}+\frac{1\,805.56\delta}{b}+\frac{1\,805.56\delta^2}{b}+\ldots$$

$$\frac{2\,031.125}{1-\delta} \qquad \text{vs} \qquad 2\,707.8125+\frac{1\,805.56\delta}{1-\delta}$$

De donde obtenemos que la tasa de descuento mínima para que el productor de papa mantenga el acuerdo es $\delta_p \approx 0.75$. De forma análoga, para el productor de camote tenemos:

Beneficios por colusión vs Beneficios por traición

$$\frac{2\,031.25}{b}+\frac{2\,031.25\delta}{b}+\frac{2\,031.25\delta^2}{b}+\ldots \text{ vs } \frac{2\,370,3125}{b}+\frac{1\,805.56\delta}{b}+\frac{1\,805.56\delta^2}{b}+\ldots$$

$$\frac{2\,031.125}{1-\delta} \qquad \text{vs} \qquad 2\,370.3125+\frac{1\,805.56\delta}{1-\delta}$$

Por lo que $\delta_c \approx 0.6$.

c) Se observa que AgroUP (la empresa de papas) requiere de un factor de descuento más alto para sostener la colusión. Esto se debe a que esta empresa tiene un ingreso extra mayor por romper el acuerdo, pues no solo obtiene beneficios de incursionar en el otro mercado sino que también deja de compartir los beneficios monopólicos del mercado de papas.

Este incentivo no es tan fuerte para OrgaFood, pues a pesar de estar incursionando en un mercado más grande (el de papa), estaría dejando de obtener beneficios derivados del acuerdo monopólico.

Referencias