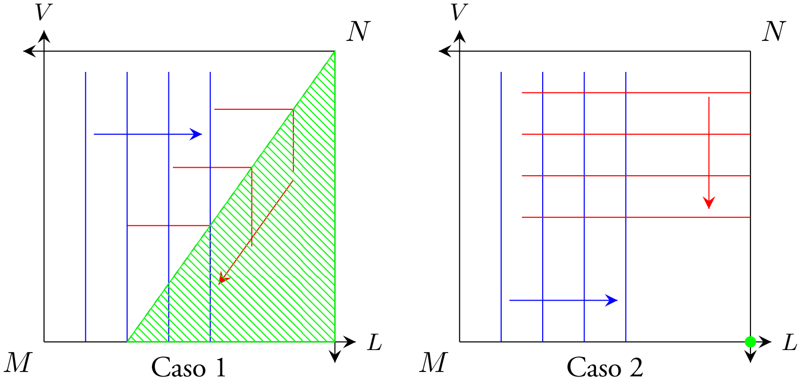
8 - Teoría del equilibrio general

1. ⋆ En una economía con 2 agentes, Maricarmen (M) y Norvil (N), existen dos únicos bienes: videojuegos (V) y libros (L). A Maricarmen solo le generan utilidad los libros, mientras que Norvil consume libros y videojuegos en proporciones fijas. Grafique la Caja de Edgeworth y la curva o área de contrato. ¿Maricarmen estaría mejor si la función de utilidad de Norvil fuese $U = V$?

   Solución

   A continuación, se presentan las cajas de Edgeworth para ambos casos:

   En el primer caso (izquierda), a Maricarmen solo le producen utilidad los libros, mientras que Norvil considera a ambos bienes como complementarios, por lo tanto tiene curvas de indiferencia de tipo Leontief.

   Como se ha visto en la sección ??, los segmentos en donde cruzan ambas funciones de utilidad representan la curva (o área, en este caso) de contrato. En el primer caso es posible ver que si la dotación es tal que se encuentra ubicada en la región verde, no es posible realizar más intercambios (Maricarmen querría más libros, pero no puede intercambiarlos por videojuegos, pues Norvil perdería utilidad).

En el segundo caso (gráfico de la derecha), Norvil es neutral al consumo de libros, y solo obtiene utilidad de los videojuegos. En este caso, la curva de contrato está compuesta de un solo punto, donde Maricarmen consume sólo libros y Norvil sólo consume videojuegos. Entonces, en el segundo caso Maricarmen alcanza su máxima utilidad posible, mientras que en el primer caso no siempre es así, por lo que Maricarmen no necesariamente estará mejor si la utilidad de Norvil fuese $U = V$, sino que dependerá de la dotación inicial.

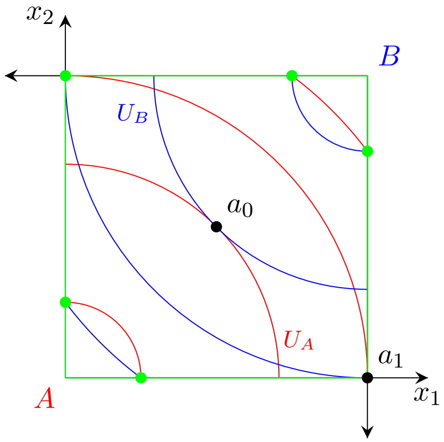
2. $\star$ Si las preferencias de 2 consumidores son estrictamente cóncavas, la curva de contrato no existe. Considere las siguientes preferencias:

$$U_i(x) = x_1^2 + x_2^2,$$

y una caja de Edgeworth cuadrada.

Solución

Falso. Este es el caso de los llamados bienes adictivos, cuyas utilidades marginales aumentan (en lugar de disminuir) con el consumo. En este caso, la curva de contrato resulta ser la frontera de la caja de Edeworth, como se muestra debajo.



Note que la curva de contrato no puede resultar de la tangencia de las curvas de indiferencia. La asignación a_0 es claro ejemplo de la premisa anterior, pues el agente A puede intercambiar toda su dotación del bien x_2 a cambio de toda la dotación del bien x_1 del agente B, y ambos aumentarían su bienestar.

3. ⋆ En cualquier combinación dentro de la curva de contrato, se agotan las ganancias del intercambio.

<u>Solución</u>

Verdadero. Todos los puntos de la curva de contrato son, por definición, Pareto óptimos. En ese sentido, sí es cierto que a lo largo de dicha curva ocurre que ya no se puede mejorar la situación de alguno de los individuos sin perjudicar al otro. Por lo mismo, las ganancias del intercambio entre ambos individuos se agotan.

4. ⋆ Asuma que dos personas A y B consideran dos bienes x e y como sustitutos perfectos en su función de utilidad. Explique cómo serían todos los casos posibles para la curva de contrato. Asuma dotaciones iguales para ambos bienes.

<u>Solución</u>

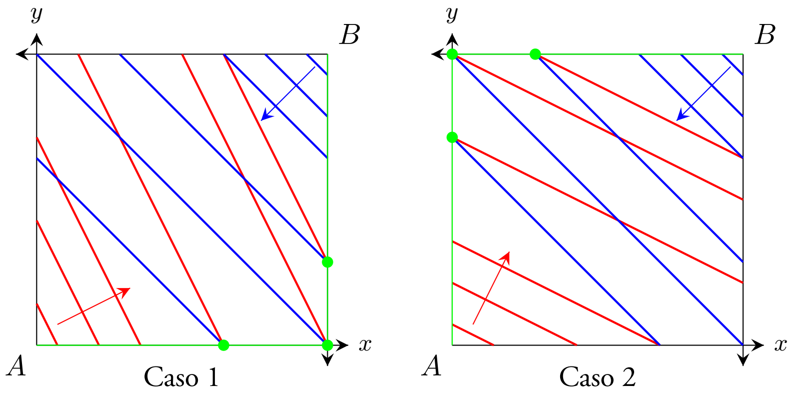
Dado que las curvas de indiferencia de ambas personas son rectas, la curva de contrato dependerá de la relación entre las tasas marginales de sustitución de ambos agentes:

Caso 1: Si $TMS^A_{x,y} > TMS^B_{x,y}$ (A valora más al bien x que al y respecto a B), la curva de contrato es todo el extremo inferior y lateral derecho de la caja de Edgeworth.

Caso 2: Si $TMS^A_{x,y} < TMS^B_{x,y}$ (A valora más al bien y que al x respecto a B), la curva de contrato es todo el extremo superior y lateral izquierdo de la caja de Edgeworth.

Caso 3: Si $TMS^A_{x,y} = TMS^B_{x,y}$ (A valora igual al bien x que al y respecto a B), la curva de contrato es toda caja de Edgeworth.

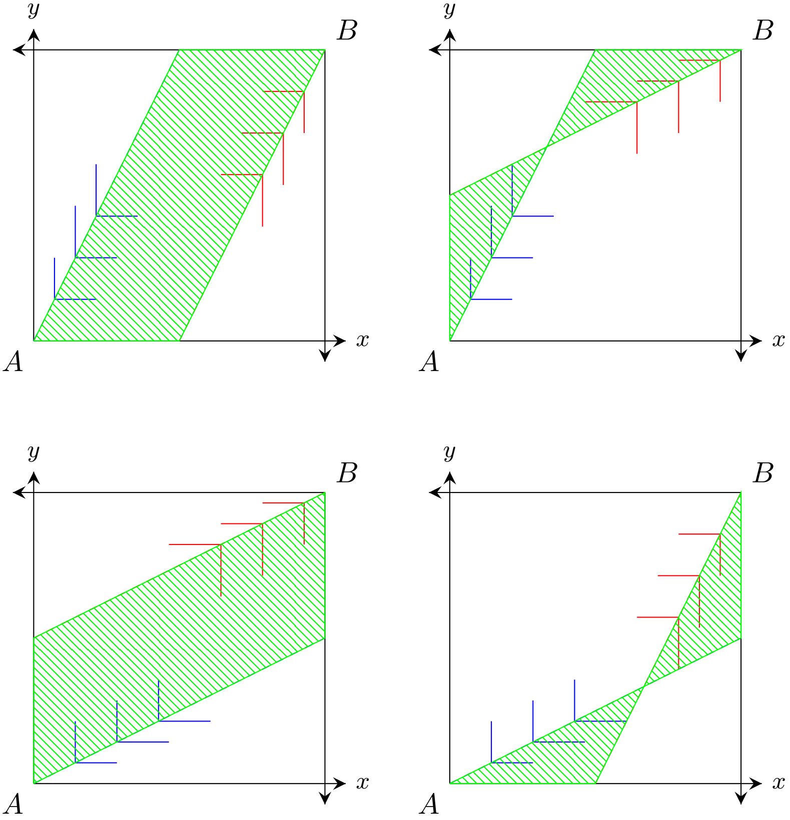
A continuación se grafican los dos primeros casos:



5. ⋆ Asuma que dos personas A y B consideran dos bienes x e y como complementarios perfectos en su función de utilidad. Explique cómo serían todos los casos posibles para la curva de contrato, asumiendo que la dotación total de ambos bienes es la misma.

Solución

En este caso el área de contrato dependerá de las proporciones óptimas en las que A y B consumen los bienes.



Si ambos agentes consumen los bienes en proporciones iguales, la curva de contrato sería una línea recta (diagonal del cuadrado).

6. ⋆⋆ Si las preferencias de 2 consumidores, Albert y Betty, son tales que:

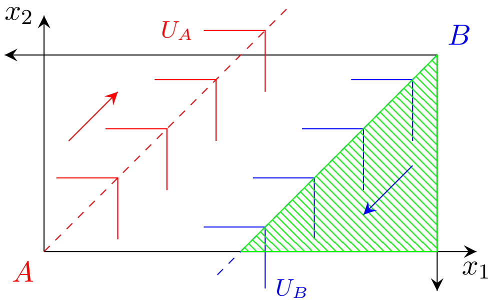
$$U_A(x) = max\{x_1, x_2\} \qquad\qquad U_B(x) = min\{x_1, x_2\},$$

entonces, la curva de contrato no existe. Considere los siguientes casos: (i) Dotación total de $x_1 >$ Dotación total de x_2; (ii) Dotación total de $x_1 <$ Dotación total de x_2; y (iii) Dotación total de $x_1 =$ Dotación total de x_2.

Solución

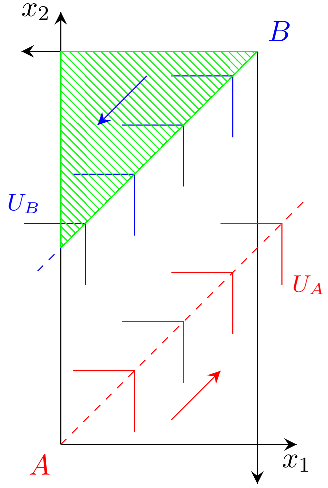
Falso. Primero, debe saber que la forma de las curvas de indiferencia de la función de utilidad de Albert luce exactamente opuesta a la de Betty. De esta manera, graficadas en una misma Caja de Edgeworth, con los orígenes opuestos, dichas curvas lucirán exactamente iguales.

Luego, usando análisis gráfico, podemos ver que, en cada uno de los casos expuestos, la curva de contrato está definida por una área. (i) Si $\omega_1 > \omega_2$, entonces la caja de Edgeworth y la curva de contrato serían de la siguiente manera:

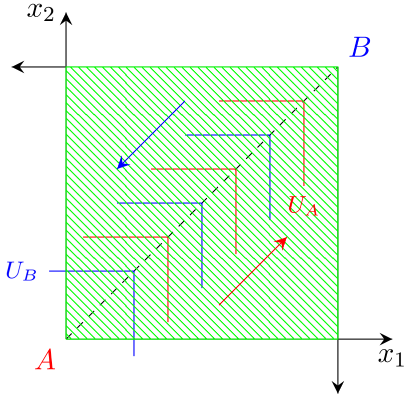


Note que si el vector de dotaciones iniciales se ubica en el área verde, no existe espacio para el intercambio de x_1, pues el intercambio de dicho bien genera un incremento de la utilidad de A y una reducción de la utilidad de B (o viceversa); mientras que el intercambio de x_2 no modifica el bienestar de ninguno de los agentes. Por otro lado, si el vector de dotaciones iniciales se encuentra fuera del área verde, A estaría mejor si renuncia a un monto de x_2 a cambio de un gran aumento de x_1, lo cual incrementa también la utilidad de B, por lo que existiría intercambio hasta que la asignación se encuentre dentro del área verde.

(ii) Utilizando un racionamiento similar, podemos obtener la curva de contrato cuando $\omega_2 > \omega_1$.



(iii) Finalmente, si $\omega_1 = \omega_2$, toda la caja de Edgeworth conformará la curva de contrato, pues dada una dotación inicial cualquiera, el intercambio no podrá mejorar la situación de ninguno de los agentes, como se aprecia debajo.



7. ⋆⋆ Diego y Ángel tienen las siguientes funciones de utilidad por los dos bienes consumidos:

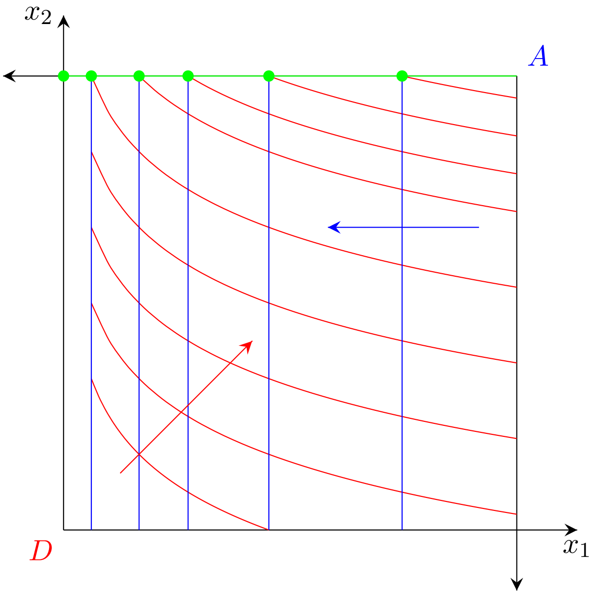
$$U_D = \ln x_1 + x_2 \qquad\qquad U_A = x_1$$

Grafique la curva de contrato.

<u>Solución</u>

Note que la utilidad de Ángel depende únicamente del bien x_1, por lo que sus curvas de indiferencia son perfectamente inelásticas. Por otro lado, la utilidad de Diego no está definida cuando $x_1 = 0$.

Por lo tanto, si la dotación inicial de Diego sólo consta de x_2, el único "intercambio" posible es que Ángel transfiera unidades de x_2 a Diego de forma gratuita; sin embargo, Diego será indiferente entre cualquier cantidad de x_2. Finalmente, la curva de contrato abarca toda la frontera superior de la caja de Edgeworth e incluye la línea vertical más cercana al eje vertical ($x_1 = \epsilon$, para el cual sí existe la curva de indiferencia de Diego). El gráfico mostrado debajo considera iguales dotaciones de ambos bienes, pero el resultado se mantiene cuando las dotaciones son distintas.



8. ⋆ En una economía con intercambio, el equilibrio competitivo siempre implica que haya intercambio (i.e., que no se consuman sus dotaciones iniciales de ambos bienes).

<u>Solución</u>

Falso. No siempre un equilibrio walrasiano implica que haya intercambio. Por ejemplo, en la siguiente economía, donde las preferencias son localmente no saciadas para cada agente i:

$$U_i(x) = x_1^{0.5} x_2^{0.5},$$

el equilibrio competitivo, para el caso en el cual el vector de dotaciones totales es: $w_i = (1,1)$, es: $p^* = (1,1)$, $x_i^* = (1,1) = w_i$. (¡Demuestre eso!).

9. ⋆⋆ En una economía con intercambio, existen dos agentes, A y B, que consumen dos bienes (poseen 2 unidades de cada bien) y tienen las mismas preferencias:

$$U_i(x) = x_1^{0.5} x_2^{0.5},$$

la Frontera de Posibilidades de la Utilidad (FPU) es una recta con pendiente igual a -1. ¿Qué pasaría si las dotaciones totales fueran 4 (bien 1) y 6 (bien2)?

<u>Solución</u>

Verdadero. Como dijimos en la sección de teoría, la FPU se construye a partir de la curva de contrato; de modo que usamos la ecuación de la misma:

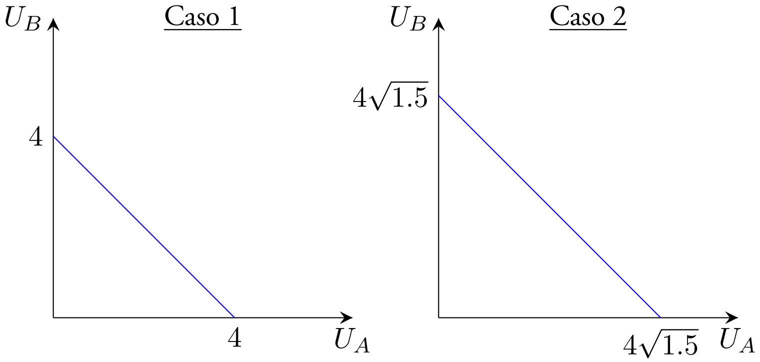
$$TMgS_{21}^1 = \frac{x_{11}}{x_{12}} = \frac{x_{21}}{x_{22}} = TMgS_{21}^2$$

Por lo tanto:

$$\frac{x_{11}}{x_{12}} = \frac{2 - x_{11}}{2 - x_{12}} \quad \Rightarrow \quad x_{11} = x_{12}$$

Reemplazando esta igualdad en la función de utilidad, $U_i(x) = x_{i1}^{0.5} x_{i2}^{0.5} = x_{i1}$. De esta manera, $U_A(x) = x_{A1}$ y $U_B(x) = x_{B1}$, de modo que $U_A + U_B = x_{A1} + x_{B1} = 4$ es la ecuación de la FPU; la misma que tiene pendiente -1.

Ahora bien, con las nuevas dotaciones, la ecuación de la curva de contrato se reduce a $x_{i2} = 1.5x_{i1}$. Reemplazando eso en la función de utilidad, $U_i(x) = x_{i1}^{0.5}(1.5x_{i1})^{0.5} = \sqrt{1.5}\, x_{i1}$. De esta manera, $U_A(x) = \sqrt{1.5}\, x_{A1}$ y $U_B(x) = \sqrt{1.5}\, x_{B1}$, de modo que $U_A + U_B = \sqrt{1.5}\,(4)$ es la ecuación de la FPU; la misma que continúa teniendo pendiente -1 (solo aumentan los interceptos en ambos ejes).



10. ⋆⋆ Suponga una economía de intercambio puro entre tres individuos (I_1, I_2 e I_3) que disponen de dotaciones de tres bienes distintos: A, B y C. Se sabe además que solo I_2

es ofertante neto del bien B, y solo I_3 es ofertante neto del bien C. Finalmente, los precios de A, B y C están fijados de tal manera que existe un exceso de demanda neta en los mercados de A y B. Examine la veracidad de las siguientes afirmaciones, de manera justificada:

a) El mercado del bien C está en equilibrio.

b) Para equilibrar el mercado de A, bastará con incrementar los precios relativos de B y C con respecto a A.

c) Si los individuos tienen preferencias típicas y buscan maximizar su utilidad; y, además, se sabe que el individuo I_1 solo tiene dotaciones del bien A, entonces necesariamente cada individuo deberá intercambiar bienes con cada uno de los demás.

d) Ahora suponga que la economía se reduce solo a los individuos (I_1 e I_2), pero no se conoce sus preferencias. Si I_1 solo posee dotaciones del bien A e I_2 solo del bien B, entonces será necesario que intercambien bienes entre ellos para llegar al equilibrio.

Solución

a) Falso. Se sabe que existe un exceso de demanda neta tanto para A y para B, lo que implica que el tercer mercado necesariamente esté en exceso de oferta (usando la Ley de Walras).

b) Falso. Si se incrementasen los precios relativos de B y C con respecto a A, dicho bien sería aún más barato. Para corregir el exceso de demanda en el mercado de A, lo ideal sería elevar el precio relativo de este bien con respecto a los demás. De esta forma, la demanda reaccionará de manera inversa, reduciendo su exceso actual.

c) Dado que I_1 no posee dotaciones de B y C, él querrá ofertar el único bien que posee a cambio de conseguir los otros dos (considerando que tiene preferencias típicas). Como sabemos que existe exceso de demanda de A, esto refuerza el hecho de que I_1 intercambie bienes con I_2 para obtener B (dado que I_2 es el único ofertante de B), y con I_3 para obtener C (dado que I_3 es el único ofertante de C). No obstante, nada nos garantiza que I_2 e I_3 necesiten interactuar entre ellos. Podría darse el caso de que ninguno de ellos sea demandante ni ofertante de los demás bienes, y podrían llegar al equilibrio luego de transar con I_1. Dicha transacción dependerá de qué tanto demanden u oferten de sus demás bienes.

d) No necesariamente habrá intercambio sino que dependerá de las preferencias de ambos agentes. Si por ejemplo I_1 solo recibe utilidad al consumir A e I_2 solo cuando consume B, entonces no será necesario que interactúen entre ellos.

11. ⋆⋆ La Ley de Walras establece que:

$$\sum_{l=1}^{L} p_l^* Z_l(p^*) = 0,$$

donde, en equilibrio, los precios son no negativos, $p^* \geq 0$, y el exceso de demanda es no positivo, $Z_l(p^*) \leq 0$.

a) Muestre que la Ley de Walras implica que, si $p_l^* > 0$, entonces $Z_l(p^*) = 0$ y que si $Z_l(p^*) < 0$ entonces $p_l^* = 0$ para todo $l \in \{1, ..., L\}$.

b) ¿La ley de Walras se cumple cuando la economía no se encuentra en equilibrio competitivo? Grafique.

Solución

a) En equilibrio, para cada uno de los mercados debe cumplirse que $p_l^* Z_l(p^*) = 0$, de donde se obtiene directamente lo solicitado: si el exceso de demanda es cero en un mercado, el precio del bien debe ser positivo; y cuando el exceso de demanda es negativo, el precio debe ser cero (bien gratuito).

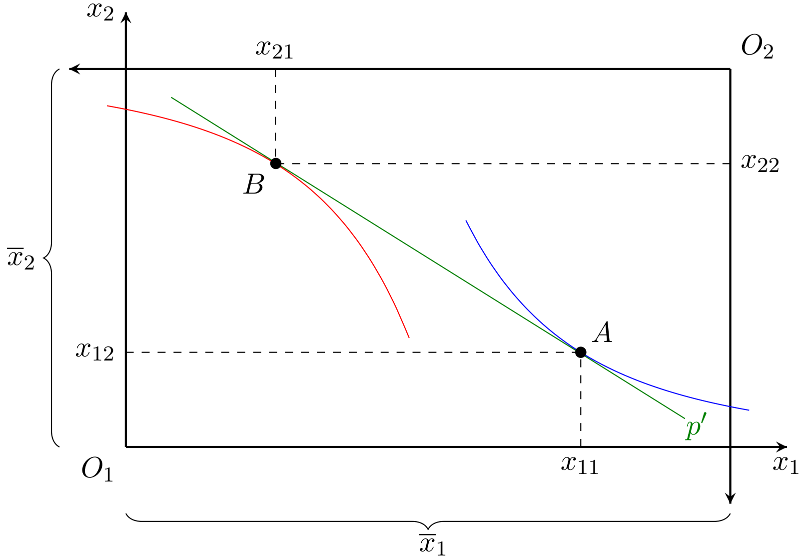
b) De acuerdo a lo visto en la sección **??**, asumamos que, para el vector de precios p', cada agente i consume su canasta de bienes cumpliendo su restricción presupuestaria con igualdad:

$$\sum_{l=1}^{L} p_l x_{il}(p') = \sum_{l=1}^{L} p_l w_{il} \quad \Rightarrow \quad \sum_{l=1}^{L} p_l \left[x_{il}(p') - w_{il}\right] = 0 \quad \forall i \in [1, N]$$

Luego, si sumamos sobre todos los agentes de la economía y consideramos que $z_{il}(p') = x_{il}(p') - w_{il}$:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{l=1}^{L} p_l z_{il}(p') \quad \Rightarrow \quad \sum_{l=1}^{L} p_l z_l(p') = 0$$

de donde obtenemos la Ley de Walras, sin importar si (x_{il}, p') es un equilibrio Walrasiano o no. Note que lo único que necesitamos para esta demostración es que cada agente cumpla su restricción presupuestaria con igualdad, lo cual se puede obtener asumiendo que las preferencias son estrictamente monótonas o localmente no saciadas. En conclusión, la Ley de Walras se cumplirá incluso si no nos encontramos en el equilibrio competitivo. A continuación presentamos un ejemplo gráfico en el que un vector de precios p' induce a una asignación de bienes que no es factible (pues existe exceso de demanda del bien 1).



Note que, como ambos puntos, A y B, pertenecen a la misma recta (de pendiente $-p_1/p_2$), siempre se cumplirá lo siguiente:

$$\frac{x_{12} - (\overline{x}_2 - x_{22})}{x_{11} - (\overline{x}_1 - x_{21})} = -\frac{p_1}{p_2} \quad \Rightarrow \quad p_2(x_{12}+x_{22}-\overline{x}_2)+p_1(x_{11}+x_{21}-\overline{x}_1) = 0$$

donde los elementos entre paréntesis son las funciones de exceso de demanda del bien 1 y 2, z_1 y z_2. Por tanto, tenemos que $p_1z_1 + p_2z_2 = 0$ (se cumple la Ley de Walras) incluso cuando el mercado no se encuentra en equilibrio.

12. $\star\star$ Considere una economía de dos bienes, x_1 y x_2; y dos agentes, A y B. El agente A cuenta con una dotación inicial conformada por 2 unidades de x_1 y 1 unidad de x_2. El agente B, por otro lado, solo posee 1 unidad de x_1 (y ninguna de x_2). Las preferencias de los agentes son las siguientes:

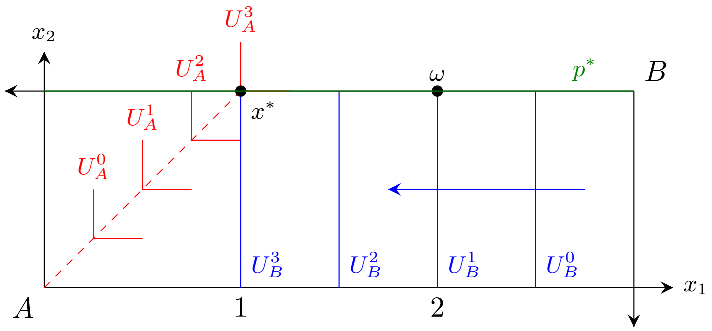
$$U_A(x) = min\{x_1, x_2\} \qquad\qquad U_B(x) = x_1^2$$

Si el precio de x_2 es 1, ¿cuál es el precio de equilibrio de x_1?

<u>Solución</u>

El agente A posee la dotación total del bien x_2 (véase el vector ω en la caja de Edgeworth), y dadas sus preferencias, se observa que solo obtiene utilidad de 1 unidad de x_1. Por otro lado, el agente B solo valora el consumo del bien x_1. Dado que A no puede obtener más del bien x_2 a cambio de x_1, es evidente que un intercambio óptimo en el sentido de Pareto está caracterizado por una transferencia de x_1 de A hacia B. Para que esto suceda, el precio de equilibrio de x_1 debe ser 0. Luego, el consumo de A es $x^*_{A1} = x^*_{A2} = 1$ (obteniendo $U_A = 1$); mientras que el consumo de B es $x^*_{B1} = 2$ y $x^*_{B2} = 0$ (obteniendo $U_B = 4$).

La solución descrita se plantea en el siguiente gráfico, donde ω es la dotación inicial y x^* es la asignación de equilibrio, que involucra un precio relativo $p^* = p_1/p_2 = 0$. Note que $U_A(\omega_1) = U_A(2,1) = U_A(1,1)$, y si A vende x_1 a B a un precio $p_1 > 0$, el aumento de su riqueza no podría traducirse en un aumento de utilidad pues no podría consumir más unidades de x_2.



13. ⋆⋆ En el caso de una economía de intercambio, con dos individuos cuyas preferencias son:

$$U_1(x) = x_{11} + \ln x_{12} \qquad\qquad U_2(x) = x_{21} + 2\ln x_{22}$$

La curva de contrato será una recta de pendiente positiva. Comente sobre la veracidad del enunciado anterior y justifique su respuesta con un gráfico (en una caja de Edgeworth, con el bien 1 en el eje horizontal y el bien 2 en el eje vertical).

<u>Solución</u>

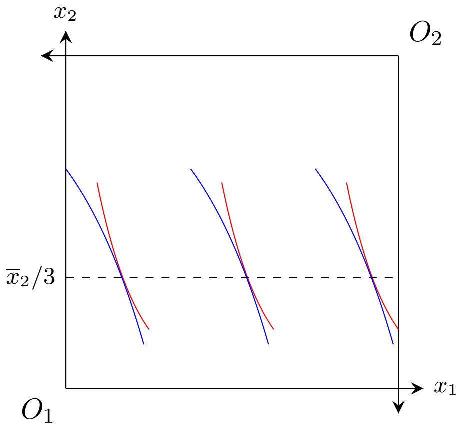
Enunciado es falso pues en este caso la pendiente es de la curva de contrato es 0. Dado que las preferencias son cuasilineales en el bien 2, no hay efecto ingreso para ese bien; de manera que las curvas de indiferencia serán tangentes en un mismo nivel del bien 2. Al respecto, note que:

$$TMgS^1_{21} = \frac{1}{x_{12}} = \frac{2}{x_{22}} = TMgS^2_{21}$$

Si denotamos por $\overline{x}_2$ a la cantidad total del bien 2, entonces la curva de oferta sera:

$$\frac{1}{x_{12}} = \frac{2}{\overline{x}_2 - x_{12}} \qquad \Rightarrow \qquad x_{12} = \frac{\overline{x}_2}{3}$$

Una función constante. Gráficamente tenemos lo siguiente:



14. ⋆⋆ En una economía "Stone-Geary" existen dos agentes, A y B, quienes tienen la siguiente función de utilidad:

$$U_i(x, y) = (x_i - 1)^{\beta_1}(y_i - 1)^{\beta_2},$$

donde $i = 1, 2$ y $\beta_1, \beta_2 > 0$. Se sabe que el agente A cuenta con una dotación inicial de 3 unidades del bien x y 2 unidades del bien y; mientras que el agente B tiene 2 unidades del bien x y 3 unidades del bien y. Halle la expresión matemática de la curva de contrato y grafíquela.

<u>Solución</u>

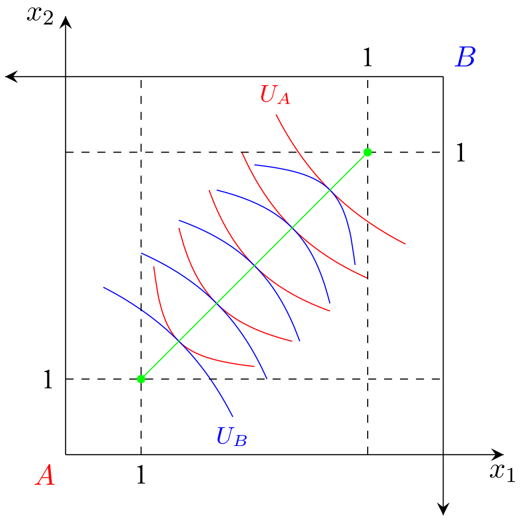
Dado que las preferencias son típicas, usaremos la tangencia de curvas de indiferencia para hallar la curva de contrato. La tasa marginal de sustitución para el agente i es:

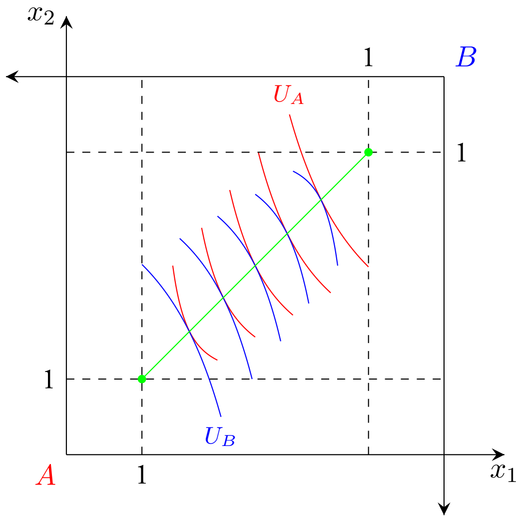
$$TMgS^i_{y,x} = \frac{\beta_1(x-1)^{\beta_1-1}(y-1)^{\beta_2}}{\beta_2(x-1)^{\beta_1}(y-1)^{\beta_2-1}} = \frac{\beta_1(y-1)}{\beta_2(x-1)}$$

Dado que en la curva de contrato se cumple que $TMgS^A_{y,x} = TMgS^B_{y,x}$, y considerando que la dotación total de ambos bienes es 5, tenemos:

$$\frac{(y_A-1)}{(x_A-1)} = \frac{(y_B-1)}{(x_B-1)} = \frac{(4-y_A)}{(4-x_A)} \qquad \Rightarrow \qquad y_A = x_A$$

Note que para llegar a dicha conclusión se está suponiendo que $x_A, x_B > 1$, pues las funciones de utilidad de ambos agentes son bien comportadas para dichos valores de x. Por lo tanto la curva de contrato será una recta de 45° que va desde la coordenada $(1, 1)$ hasta $(4, 4)$, independientemente de los valores que tomen β_1 y β_2. A continuación se muestra la curva de contrato (recta verde) para dos casos: i) cuando $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$ (izquierda) y ii) cuando $\beta_1 = 2 > 1 = \beta_2$ (derecha):





Una observación importante es que este resultado (curva de contrato de $45°$ grados) ocurre gracias al supuesto de que β_1 y β_2 son los mismos para los individuos A y B.

15. ⋆⋆ Imagine una pequeña isla con solo dos personas. La primera, "a", tiene una dotación inicial de una unidad del bien 2, mientras que la segunda persona, "b", tiene solo una unidad del bien 1. Además, se conoce que las funciones de utilidad de las personas son:

$$U_a(x) = (x_{1a})^{\alpha}(x_{2a})^{1-\alpha} \qquad\qquad U_b(x) = Min\{x_{1b}, x_{2b}\}$$

Halle los precios y cantidades de equilibrio.

Solución

Debido a que la función de utilidad de la persona b es de complementarios perfectos, la solución no pasa por encontrar el punto de tangencia de las curvas de indiferencia, sino que pasa por hallar las cantidades óptimas demandadas por ambas personas (en función de los precios) tal que la asignación sea factible.

Las dotaciones de las personas a y b son $w_a = (0,1)$ y $w_b = (1,0)$, por lo que sus ingresos totales serán el precio del bien que poseen (que será utilizado para conseguir ambos bienes). En este sentido, el problema de optimización para el consumidor a es el siguiente:

$$\max_{x_{1a},x_{2a}\in[0,1]} (x_{1a})^{\alpha}(x_{2a})^{1-\alpha} \qquad \text{s.a.} \qquad p_2 = p_1 x_{1a} + p_2 x_{2a}$$

Por lo que el Lagrangiano es el siguiente:

$$L = (x_{1a})^{\alpha}(x_{2a})^{1-\alpha} + \lambda(p_2 - p_1 x_{1a} - p_2 x_{2a})$$

Y las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{1a}} = \alpha(x_{1a})^{\alpha-1}(x_{2a})^{1-\alpha} - \lambda p_1 = 0 \tag{.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{2a}} = (1-\alpha)(x_{1a})^{\alpha}(x_{2a})^{-\alpha} - \lambda p_2 = 0 \tag{.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_2 - p_1 x_{1a} - p_2 x_{2a} = 0 \tag{.3}$$

De (8.1) y (8.2) tenemos que:

$$x_{1a} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}\frac{p_2}{p_1}x_{2a} \tag{.4}$$

Luego, incluyendo a (8.4) en (8.3), se pueden obtener el consumo óptimo:

$$x_{2a}^{*} = (1-\alpha) \qquad \Rightarrow \qquad x_{1a}^{*} = \alpha\frac{p_2}{p_1}$$

Por otro lado, para el consumidor b tenemos que $x_{1b}^{*} = x_{2b}^{*}$ (porque son bienes complementarios perfectos). Luego, de su restricción presupuestaria obtenemos su consumo óptimo:

$$p_1 = p_1 x_{1b} + p_2 x_{2b} \qquad \Rightarrow \qquad x_{1b}^{*} = x_{2b}^{*} = \frac{p_1}{p_1 + p_2}$$

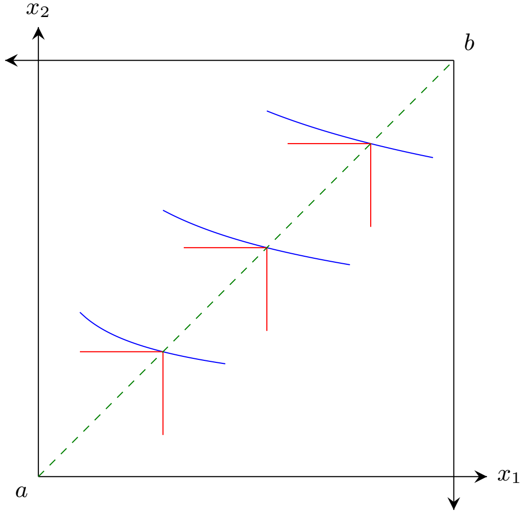
Luego, dicha asignación debe ser factible:

$$\alpha\frac{p_2}{p_1} + \frac{p_1}{p_1+p_2} \leq 1$$
$$(1-\alpha) + \frac{p_1}{p_1+p_2} \leq 1$$

Dado que ambos son bienes y las preferencias son localmente no saciadas, dichas condiciones deben cumplirse con igualdad, de donde obtenemos el precio relativo $p_2/p_1 = (1-\alpha)/\alpha$. Por lo tanto, el consumo óptimo de ambos agentes es:

$$x_{1a}^{*} = x_{2a}^{*} = (1-\alpha) \qquad \wedge \qquad x_{1b}^{*} = x_{2b}^{*} = \alpha$$

Note que dicho resultado nos muestra que, en equilibrio, ambos agentes consumen la misma cantidad de ambos bienes, por lo que se puede inferir que la curva de contrato es la diagonal de la caja de Edgeworth. A continuación se muestra gráficamente la curva de contrato, asumiendo que $\alpha = 1/5$.



16. ⋆⋆ Considere una economía con 4 000 personas, divididas equitativamente entre dos tipos (A y B), cuyas preferencias son las siguientes:

$$U_A(x) = x_{A1} + x_{A2} \qquad\qquad U_B(x) = min\{2x_{B1}, x_{B2}\}$$

Cada persona tiene una dotación de 1 unidad de cada uno de los bienes. Halle el equilibrio competitivo (precios y consumo de cada persona). Muestre el equilibrio en la respectiva Caja de Edgeworth.

<u>Solución</u>

Hay que considerar tres escenarios para el ratio de precios; los mismos que definirán las demandas walrasianas y luego chequearemos la restricción de factibilidad para cada uno de ellos. Las riquezas de cada agente son: $m_A = m_B = p_1 + p_2$.

Para las personas tipo A:

(i) Si $p_1 > p_2$: solo se consume el bien 2, de modo que $x_{A1} = 0$, $x_{A2} = \frac{m_A}{p_2}$.

(ii) Si $p_1 < p_2$: solo se consume el bien 1, de modo que $x_{A1} = \frac{m_A}{p_1}$, $x_{A2} = 0$.

(iii) Si $p_1 = p_2$: se consumen ambos bienes, $x_{A1} + x_{A2} = \frac{m_A}{p_2} = 2$.

Para las personas tipo B, en el óptimo, $2x_{B1} = x_{B2}$ sin importar los precios relativos. Además, usando la restricción de presupuesto, $(p_1 x_{B1} + p_2 x_{B2} = p_1 x_{B1} + p_2(2x_{B1}) = m_B)$, tenemos que $x_{B1} = \frac{m_B}{p_1+2p_2}$ y $x_{B2} = \frac{2m_B}{p_1+2p_2}$.

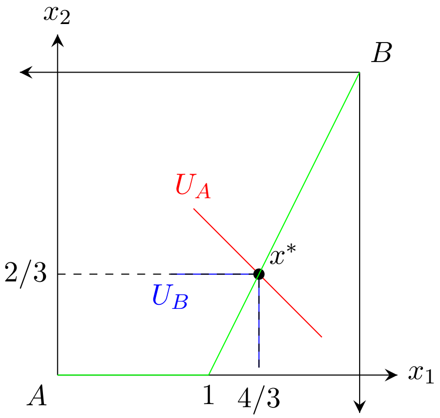
Para hallar los precios del equilibrio, usamos la condición de factibilidad para cada mercado. Para ello, usamos las demandas antes halladas de las personas tipo B y consideramos cada uno de los tres casos para la persona tipo A: $x_{A1} + x_{B1} = 2$; y $x_{A2} + x_{B2} = 2$.

(i) (Para el mercado 1) Se llega a $p_1 + 3p_2 = 0$ (no hay solución)

(ii) (Para el mercado 2) Se llega a $p_2 = 2p_2$ (no hay solución)

(iii) (Para el mercado 2) Se llega a: $x^*_{B1} = \frac{2}{3}$ y $x^*_{B2} = \frac{4}{3}$; $x^*_{A1} = \frac{4}{3}$ y $x^*_{A2} = \frac{2}{3}$, con p^* = (1,1).

A continuación, se presenta el equilibrio competitivo de forma gráfica, especificando también la curva de contrato con color verde.



17. ⋆⋆ En una economía con intercambio, hay r niñas (G) y r niños (B), donde $r > 0$. Los únicos bienes existentes son: pan (X) y botellas de miel (Y). Cada niña posee 8 botellas de miel y nada de pan, mientras que cada niño cuenta con 8 panes de pan pero no tienen miel. Las preferencias de cada niña y niño están descritas por:

$$U^G(X,Y) = \text{mín}\{aX, Y\} \qquad\qquad U^B(X,Y) = X + Y$$

Halle la función de exceso de demanda Walrasiana de la miel, los precios del equilibrio Walrasiano y las asignaciones en ese equilibrio. Analice todos los casos posibles y grafique el (los) equilibrio(s) en una caja de Edgeworth.

<u>Solución</u>

La demanda de cada niña es tal que: $Y^G(p) = aX^G(p)$, con $Y^G + pX^G = 8$ y $p = p_x/p_y$, por lo cual:

$$X^G(p) = \frac{1}{a+p}(8) \qquad\qquad Y^G(p) = \frac{a}{a+p}(8)$$

La demanda de cada niño es:

$$X^B = \begin{cases} 8 & \text{si } p < 1 \\ [0,8] & \text{si } p = 1 \\ 0 & \text{si } p > 1 \end{cases} \qquad Y^B = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 1 \\ [0,8] & \text{si } p = 1 \\ 8p & \text{si } p > 1 \end{cases}$$

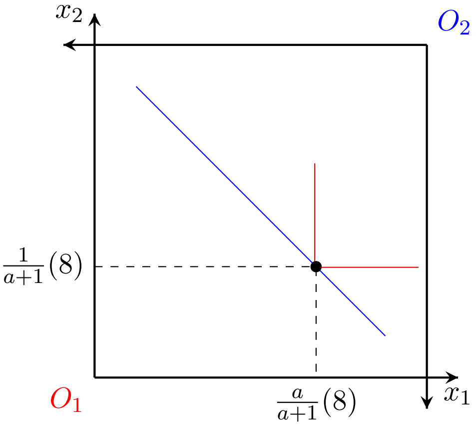
Luego, $Y^B + pX^B = 8p$ y la función de exceso de demanda de MIEL es:

$$Z = Y - 8 = \begin{cases} \frac{1}{a+p}(8) - 8 & \text{si } p < 1 \text{ (exceso de oferta)} \\ \left[\frac{a}{a+1}(8) - 8, \frac{a}{a+1}(8)\right] & \text{si } p = 1 \text{ (equilibrio)} \\ \frac{a}{a+p}(8) + 8p - 8 & \text{si } p > 1 \text{ (exceso de demanda)} \end{cases}$$

En equilibrio, entonces, cada niño: $X^B + Y^B = 8$, con $X^B = 8 - \frac{1}{a+1}(8)$ e $Y^B = \frac{1}{a+1}(8)$, de modo que las demandas agregadas para los r pares de niños son:

$$rX^G + rX^B = \frac{r}{a+1}(8) + 8r - \frac{r}{a+1}(8) = 8r$$
$$rY^G + rY^B = \frac{ar}{a+1}(8) + \frac{r}{a+1}(8) = 8r$$

A continuación se presenta el gráfico de la caja de Edgeworth para $r = 1$ (un niño y una niña) y $a < 1$:



18. $\star\star$ En una economía de intercambio, con dos agentes ($i = A, B$) y dos bienes (x e y), donde las preferencias y las dotaciones están dadas por: $U_i(x, y) = 2x^2 + 2y^2$ y $\omega_i = (1, 1)$, los precios en equilibrio nunca pueden ser distintos y las canastas de consumo implican que ambos consumidores consumen la misma cantidad de ambos bienes ($x_1^A = x_1^B, x_2^A = x_2^B$).

Solución

Cierto que los precios deben ser iguales, porque si uno de los bienes es más caro, habría especialización de ambos agentes en el bien más barato (dado que ambos bien dan la misma utilidad marginal a ambos agentes), con lo cual habría exceso de demanda!

Pero resulta falso decir que las cantidades de consumo de ambos consumidores serán iguales: Hay especialización en el consumo. Dos asignaciones en un equilibrio competitivo son: $\{(x_1^A, x_2^A) = (2,0); (x_1^B, x_2^B) = (0,2)\}$ y $\{(x_1^A, x_2^A) = (0,2); (x_1^B, x_2^B) = (2,0)\}$.

19. ⋆⋆ Dada una economía con intercambio que tiene 2 agentes:

$$U_1(x) = \alpha \ln x_{11} + (1-\alpha)\ln x_{12} \;\text{ y }\; \omega_1 = (\omega_{x_{11}}, \omega_{x_{12}}) = (1, c)$$
$$U_2(x) = \beta \ln x_{21} + (1-\beta)\ln x_{22} \;\text{ y }\; \omega_2 =(\omega_{x_2 1}), \omega_{x_{22}}) = (1, c), \text{ con } c > 1$$

Normalice $p_1 = 1$ e indique qué pasa con el precio relativo (p_2/p_1) de equilibrio cuando c aumenta. Explique su resultado.

<u>Solución</u>

Necesitan hallar las demandas Walrasianas y usar la restricción de equilibrio de O y D para el bien 1 (usando $p_1 = 1$):

$$m_1 = p_1 + p_2 c = m_2$$
$$x_{11}(p) = \alpha\left(1 + \frac{p_2}{p_1}c\right)$$
$$x_{21}(p) = \beta\left(1 + \frac{p_2}{p_1}c\right)$$
$$x_{11}(p) + x_{21}(p) = (\alpha+\beta)\left(1 + \frac{p_2}{p_1}c\right) = (\alpha+\beta)\left(1 + \frac{p_2}{p_1}c\right) = 2$$

de donde:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2-\alpha-\beta}{(\alpha+\beta)c}$$

y observamos que (p_2/p_1) decrece con c. Recuerde que la cantidad demandada del bien 2 aumenta cuando c aumenta, mientras que la cantidad demanda del bien 1 es constante en 2.

Entonces, si c aumenta, habrá un exceso de demanda en el mercado 1 al precio de equilibrio. Para resolver ese exceso de demanda, el precio relativo del bien 1 debe aumentar; lo que implica que, dado que $p_1 = 1$, p_2 debe disminuir.

20. ⋆ ⋆ ⋆ En la economía "Fiestón", existen dos bienes, cervezas (x_1) y tequilas (x_2), y dos consumidores, Pepelucho y Epifanio. Inicialmente, ambos tienen una unidad de cada bien. La utilidad de Pepelucho es $U_P = x_{1P}x_{2P}$, mientras que la de Epifanio es $U_E = x_{1E} + 2x_{2E}$.

a) Halle y grafique la curva de contrato y encuentre la asignación eficiente de los recursos.

b) Halle la expresión de la Frontera de Posibilidades de Utilidad (FPU). Grafique.

<u>Solución</u>

a) La dotación total de la economía es $(x_{1P}, x_{2P}) + (x_{1E}, x_{2E}) = (1,1) + (1,1) = (2,2)$.

Luego, la asignación eficiente $x^* = x^*_P + x^*_E$ debe cumplir lo siguiente: (i) $x^* = (2,2)$ y (ii) $TMgS^P_{x^*_{2P},x^*_{1P}} = TMgS^E_{x^*_{2E},x^*_{1E}}$.

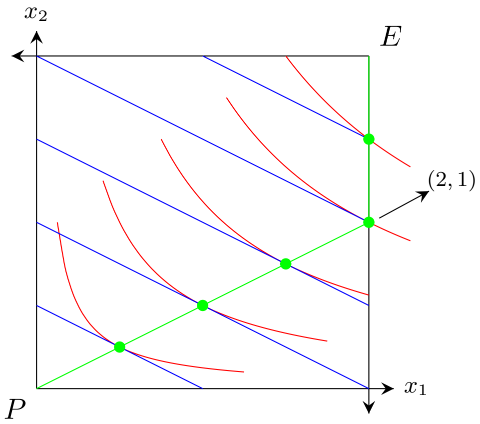
Note que la condición b) se cumple en los puntos de tangencia de ambas curvas de indiferencia, lo que ocurre siempre que:

$$\frac{x_{2P}}{x_{1P}} = \frac{1}{2}$$

De dicha relación se define la ecuación $x_{2P} = x_{1P}/2$; sin embargo, la primera condición impide que $x_{2P} > 2$. Luego, podemos definir la curva de contrato dentro de la caja de Edgeworth como la siguiente relación:

$$x_{2P} = \begin{cases} x_{1P}/2 & si \quad x_{1P} \in [0,2) \\ [1,2] & si \quad x_{1P} = 2 \end{cases}$$

Es importante destacar que el segundo tramo de la curva de contrato surge debido a la existencia de soluciones de esquina, donde $TMgS^P_{x^*_{2P},x^*_{1P}} > TMgS^E_{x^*_{2E},x^*_{1E}}$, por lo que lo óptimo es que Pepelucho consuma toda la dotación del bien 1 de la economía, como se muestra en el siguiente gráfico.



b) La FPU corresponde a cada punto de la curva de contrato del consumo de la Caja de Edgeworth, por lo que también tendrá 2 tramos:

<u>Cuando $x_{2P} \in [0,1]$</u>

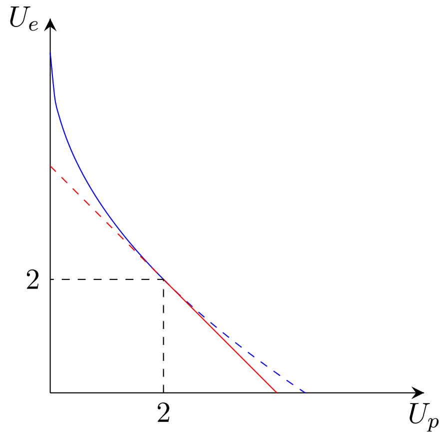
Como $2x_{2P} = x_{1P}$, entonces la función de utilidad para Pepelucho estará dada por $U_p = 2x_{2P}^2$, y para Epifanio estará dada por $U_e = (2 - x_{1P}) + 2(2 - x_{2P}) = 6 - 4x_{2P} = 4x_{2E} - 2$.

Por lo tanto, como $x_{2P} + x_{2E} = 2$, la FPU estará dada por $\sqrt{8U_p} + U_e = 6$.

<u>Cuando $x_{2P} \in (1, 2]$</u>

En este caso, x_{1P} se mantiene fijo en 2, por lo que la función de utilidad de Pepelucho será $U_p = 2x_{2p}$, mientras que la de Epifanio será $U_e = 2x_{2E}$.

Por lo tanto, como $x_{2P}+x_{2E} = 2$, la FPU estará dada por $U_p+U_e = 4$. Note que el quiebre de la FPU se da cuando $x_{1P} = 2$ y $x_{2P} = 1$, por lo que la utilidad de Pepelucho será $U_p = 2(1^2) = 2$, mientras que la Epifanio será $U_e = 4(1)-2 = 2$. Gráficamente tenemos:



Note que el tramo derecho de la FPU corresponde a $U_p+U_e = 4$, pues alberga el caso en el que la utilidad de Epifanio es cero. Observe que la recta tiene un pequeño quiebre en $(2, 2)$, que hace que sea no diferenciable.

21. ⋆⋆⋆ Considere una economía de intercambio con 1,000 consumidores tipo A y 1,000 consumidores tipo B; cuyas funciones de utilidad son las siguientes:

$$U_A(x_{A1}, x_{A2}) = x_{A1} + 2x_{A2}^{0.5} \qquad U_B(x_{B1}, x_{B2}) = 2x_{B1}^{0.5} + x_{B2}$$

Si el bien 1 es numerario y p es el precio del bien 2 y las dotaciones de cada consumidor son: ω_A=(9,0) y ω_B=(0,16).

a) Halle las funciones de demanda de los bienes para cada tipo de consumidor. ¿Para qué precios alguno de los consumidores desearía consumir solo un bien? Grafique en una caja de Edgeworth el caso en el que la demanda de ambos bienes sea estrictamente positiva para ambos tipos de individuos.

b) ¿Para qué precios hay un equilibrio competitivo en el cual los dos consumidores consumen cantidades positivas de ambos bienes?

c) Halle todos los equilibrios competitivos de esta economía. Preste atención a las soluciones de esquina.

Solución

a) En una solución interior, debe cumplirse que:

$$TMgS^i_{1,2} = \frac{1}{p} \qquad \Rightarrow \qquad x_{A2} = \frac{1}{p^2} \quad x_{B1} = p^2$$

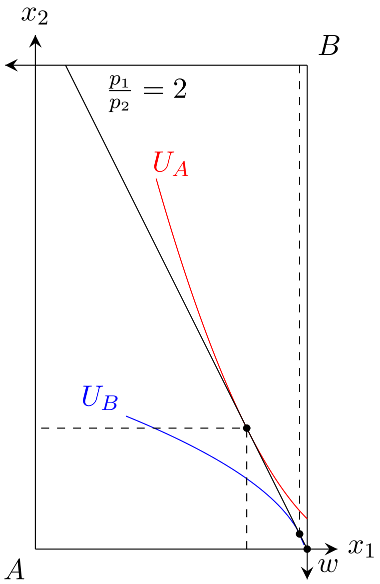
Luego, reemplazando dichas demandas en la restricción de presupuestaria de cada agente y obtenemos:

$$x_{A1} = 9 - \frac{1}{p} \quad \wedge \qquad x_{B2} = 16 - p$$

Entonces, el consumidor tipo A querrá consumir una cantidad positiva de ambos bienes, si y solo si $p > \frac{1}{9}$; y el consumidor tipo B consumirá una cantidad positiva de ambos bienes, si y solo si $p < 16$. Por lo tanto, tenemos:

1) Si $p \leq \frac{1}{9}$, el consumidor tipo A querría consumir sólo el bien 2 ($x_{A1}(p) = 0$).
2) Si $p \geq 16$, el consumidor tipo B querría consumir sólo el bien 1 ($x_{B2}(p) = 0$).
3) Si $1/9 < p < 16$, ambos consumidores querrán consumir ambos bienes.

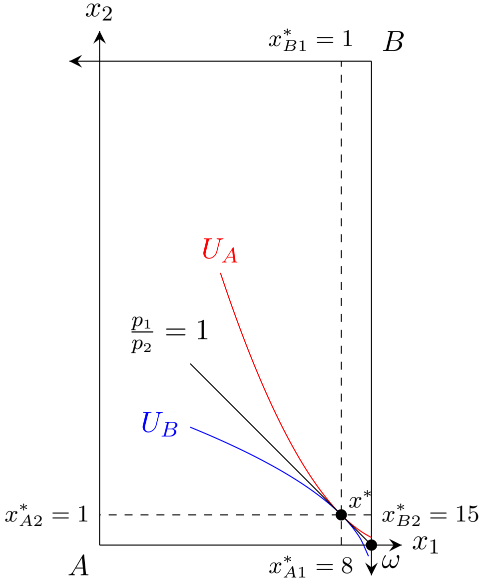
A continuación, se muestra gráficamente una solución interior para cada tipo de consumidor cuando $p = 1/2$ (los casos en que $p < 1/4$ o $p > 3(1+\sqrt{2})$ implican demandas fuera de la caja de Edgeworth para los agentes A y B, respectivamente, ¡demuéstrelo!).



b) Para que exista un equilibrio competitivo interior, el exceso de demanda por el bien 2 debe ser cero (asignación factible):

$$1\,000\left(\frac{1}{p^2} + 16 - p - 16\right) = 1\,000\left(\frac{1}{p^2} - p\right),$$

lo cual ocurre siempre que $p^* = 1$. Por lo tanto, $x^*_{A1} = 8$, $x^*_{A2} = 1$, $x^*_{B1} = 1$ y $x^*_{B2} = 15$, Gráficamente, tenemos lo siguiente:



c) Veamos si existen soluciones de esquina. Las posibilidades son dos:

1) $x_{B2}(p) = 0; x_{A2}(p) = 16$.
Pero si $x_{B2}(p) = 0$, entonces $p \geq 16$, por lo que $x_{A2}(p) = 1/p^2 < 16$, de modo que no hay equilibrio, pues el consumo agregado del bien 2 es menor que la dotación total de la economía (existe exceso de oferta con $p > 0$).
2) Si $x_{A1}(p) = 0; x_{B1}(p) = 9$.
Pero si $x_{A1}(p) = 0$, entonces $p \leq \frac{1}{9}$, por lo que $x_{B1}(p) = p^2 \leq 1/81$, de modo que no hay equilibrio, pues el consumo agregado del bien 1 es menor que la dotación total de la economía (existe exceso de oferta con $p > 0$).

Por lo tanto, no hay equilibrio con soluciones de esquina y solo hay un equilibrio con solución interior, indicado en la parte b).

22. $\star\star\star$ En una economía de intercambio con 2 bienes, existen 2 agentes con las siguientes funciones de utilidad:

$$U_a(x_a) = \ln x_{a1} + 2\ln x_{a2} \qquad\qquad U_b(x_b) = 2\ln x_{b1} + \ln x_{b2}$$

Considere que la dotación inicial en dicha economía es la siguiente: $\omega_a = (9, 3)$ y $\omega_b = (12, 6)$ y responda las siguientes preguntas:

a) Derive la expresión de la curva de contrato.

b) Encuentre el equilibrio competitivo y grafíquelo.

c) Ahora, suponga que las funciones de utilidad son las siguientes:

$$U_a(x_a) = 2\ln x_{a1} + \ln x_{a2} \qquad\qquad U_b(x_b) = \ln x_{b1} + 2\ln x_{b2}$$

Y que ambos agentes cuentan con la misma dotación inicial: $\omega_a = \omega_b = (10.5, 4.5)$. Encuentre el nuevo equilibrio competitivo y la nueva curva de contrato. Grafique.

<u>Solución</u>

a) Dada las formas de las curvas de indiferencia, en la curva de contrato se debe cumplir lo siguiente:

$$TMgS^a_{2,1} = TMgS^b_{2,1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_{a2}}{2x_{a1}} = \frac{2x_{b2}}{x_{b1}} = \frac{2(9-x_{a2})}{(21-x_{a1})} \quad \Rightarrow \quad x_{a2} = \frac{12x_{a1}}{7+x_{a1}}$$

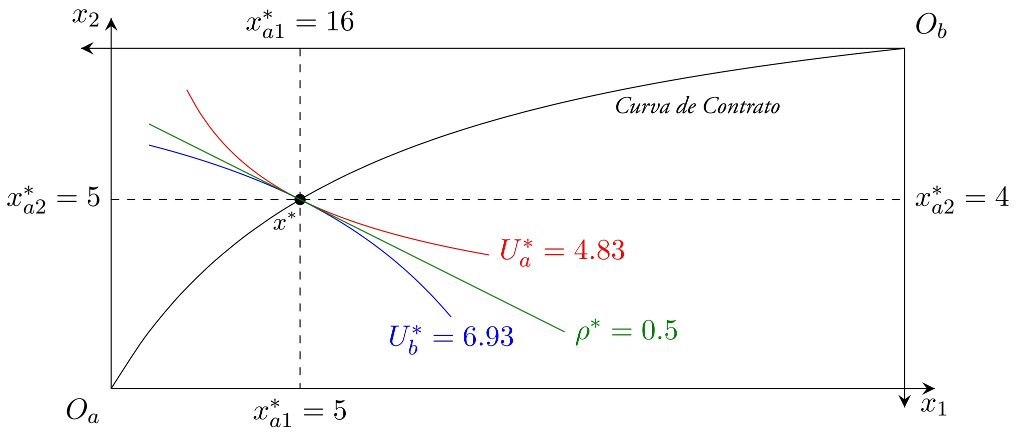
b) Si normalizamos $p_2 = 1$ y denotamos por ρ al ratio de precios p_1/p_2, se pueden plantear los siguientes lagrangianos:

$$L_A = \ln x_{a1} + 2\ln x_{a2} + \lambda[9\rho + 3 - \rho x_{a1} - x_{a2}]$$
$$L_B = 2\ln x_{b1} + \ln x_{b2} + \lambda[12\rho + 6 - \rho x_{b1} - x_{b2}]$$

Realizando el proceso de optimización de forma regular, obtenemos que las demandas de a son $x^*_{a1} = 3 + 1/\rho$ y $x^*_{a2} = 6\rho + 2$, mientras que las demandas de b son $x^*_{b1} = 8 + 4/\rho$ y $x^*_{b2} = 4\rho + 2$. Luego, para obtener ρ debemos ver que la asignación sea factible para el mercado 1:

$$x_{a1} + x_{b1} = 3 + 1/\rho + 8 + 4/\rho = 21 \qquad \Rightarrow \qquad \rho^* = 0.5$$

Note que dicho ρ permite que el mercado del bien 2 también se encuentre en equilibrio (por la Ley de Walras). Finalmente, el consumo de ambos agentes en equilibrio es $x^*_{a1} = 5$, $x^*_{a2} = 5$, $x^*_{b1} = 16$ y $x^*_{b2} = 4$. Gráficamente tenemos:



c) Con las nuevas preferencias, la nueva curva de contrato debe cumplir lo siguiente:

$$TMgS_{2,1}^{a} = TMgS_{2,1}^{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{2x_{a2}}{x_{a1}} = \frac{x_{b2}}{2x_{b1}} = \frac{(9 - x_{a2})}{2(21 - x_{a1})} \quad \Rightarrow \quad x_{a2} = \frac{3x_{a1}}{28 - x_{a1}}$$

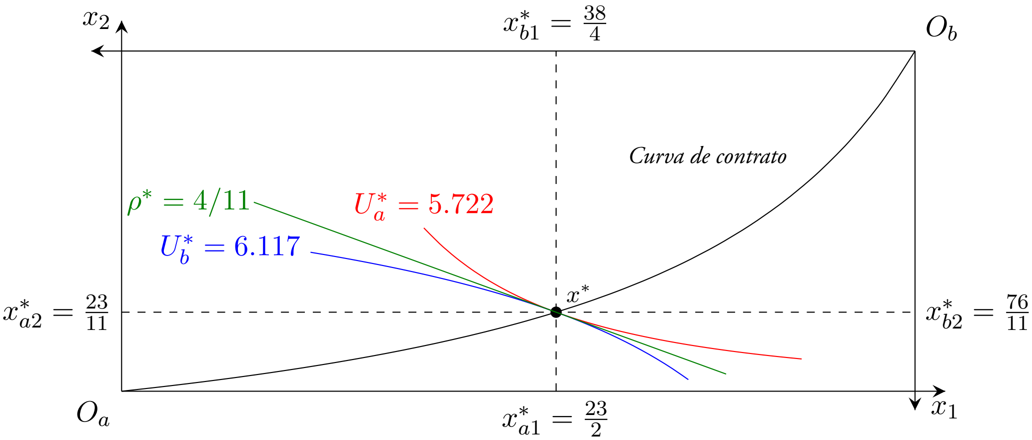
Por otro lado, dado que ambos agentes tienen la misma dotación inicial $w/2$, los lagrangianos a maximizar serían los siguientes:

$$L_A = 2\ln x_{a1} + \ln x_{a2} + \lambda[10.5\rho + 4.5 - \rho x_{a1} - x_{a2}]$$
$$L_B = \ln x_{b1} + 2\ln x_{b2} + \lambda[10.5\rho + 4.5 - \rho x_{b1} - x_{b2}]$$

De la maximización de utilidad de ambos agentes obtenemos lo siguiente: $x_{a1}^{*} = 6 + 2/\rho$, $x_{a2}^{*} = 3\rho + 1$, $x_{b1}^{*} = 4 + 2/\rho$ y $x_{b2}^{*} = 8\rho + 4$. Luego, el nuevo ρ debe asegurar que la asignación sea factible en el mercado del bien 1:

$$x_{a1} + x_{b1} = 6 + 2/\rho + 4 + 2/\rho = 21 \qquad \Rightarrow \qquad \rho^{*} = 4/11$$

Note que dicho ρ permite que el mercado del bien 2 también se encuentre en equilibrio (por la Ley de Walras). Finalmente, las demandas de ambos agentes son $x_{a1}^{*} = 23/2$, $x_{a2}^{*} = 23/11$, $x_{b1}^{*} = 38/4$ y $x_{b2}^{*} = 76/11$. El gráfico mostrado debajo ilustra dicho equilibrio.



23. ⋆⋆⋆ En una economía, existen 2 bienes (x_1 y x_2) y 2 personas (a y b), con las siguientes funciones de utilidad:

$$U^{a} = \tau^{a}[1 - e^{-x_1^{a}}] + x_2^{a} \qquad U^{b} = \tau^{b}x_1^{b} + x_2^{b}$$

Donde x_i^{h} es el monto del bien i consumido por la persona h, y $\tau^{h} > 0$ es un parámetro de gusto para la persona h ($h = a, b$), donde $\tau^{b} < \tau^{a}$. A la persona b le pertenece todo el *stock* del bien 1, R_1; y cada persona tiene la mitad del *stock* del bien 2, R_2.

a) Asumiendo que ambas personas actúan como tomadoras de precios, halle el equilibrio competitivo. ¿Qué hubiera pasado si $\tau^b > \tau^a$?

b) Ahora suponga que la persona b puede actuar como un monopolista simple en la oferta del bien 1 mientras que la persona a continúa siendo una tomadora de precios. Muestre que la persona b fijará un precio estrictamente mayor que τ^b. Comente su resultado en términos de la eficiencia.

c) Ahora suponga que la persona b puede tanto cobrar un monto fijo adicional por el derecho de comprar el bien 1, como fijar el precio por unidad del bien 1. Para cualquier precio del bien 1, ¿Cuál es el cobro adicional máximo que la persona b puede fijar de tal forma que a esté aun dispuesta a comerciar? Encuentre el cobro adicional óptimo de la persona b y el precio del bien 1. Comente su resultado en términos de la eficiencia.

Solución

a) Sea $\rho = p_1/p_2$ el precio relativo (precio del bien 1 en términos del precio del bien 2). El problema de optimización de la persona a es como sigue:

$$\max_{x_1^a, x_2^a} \tau^a[1 - e^{-x_1^a}] + x_2^a \quad s.a. \quad \rho x_1^a + x_2^a = \frac{R_2}{2}$$

De donde obtenemos la condición de optimalidad:

$$x_1^a = \ln\left(\frac{\tau^a}{\rho}\right) \tag{.5}$$

Que no depende de x_2^a. Luego, reemplazando esto en la restricción presupuestaria, obtenemos:

$$x_2^a = \frac{R_2}{2} - \rho \ln\left(\frac{\tau^a}{\rho}\right) \tag{.6}$$

Por otro lado, también debe cumplirse que $TMgS_{2,1}^a = TMgS_{2,1}^b = \rho$. Dado que la función de utilidad de b es $U^b = \tau^b x_1^b + x_2^b$, la $TMgS_{2,1}^b = \tau^b$ es constante; por lo que, si el equilibrio competitivo existe, el precio relativo debe ser $\rho^* = \tau^b$. Si consideramos dicha igualdad en las ecuaciones .5 y .6 podremos hallar la demanda del consumidor a:

$$x_1^{a*} = \ln\left(\frac{\tau^a}{\tau^b}\right) \qquad\qquad x_2^{a*} = \frac{R_2}{2} - \tau^b \ln\left(\frac{\tau^a}{\tau^b}\right)$$

Luego, para hallar la demanda de b debemos verificar que los mercados se limpien:

$$x_1^{b*} = R_1 - \ln\left(\frac{\tau^a}{\tau^b}\right) \qquad\qquad x_2^{b*} = \frac{R_2}{2} + \tau^b \ln\left(\frac{\tau^a}{\tau^b}\right)$$

Donde debe ocurrir que $\tau^b \leq \tau^a$ para que el equilibrio exista. Note que si $\tau^b > \tau^a$, la demanda óptima del bien 1 por parte del consumidor a sería negativa, por lo que no existiría comercio.

b) Si a es un tomador de precios, su demanda está expresada en las ecuaciones .5 y .6. Por otro lado, dado que b actúa como un monopolista, entonces b elige un ρ que maximiza su propia utilidad:

$$v(\rho) = \tau^b[R_1 - x_1^a(\rho)] + R_2 - x_2^a(\rho)$$

E incluyendo la demanda de a en la ecuación anterior, obtenemos:

$$v(\rho) = \tau^b \left[R_1 - \ln\left(\frac{\tau^a}{\rho}\right)\right] + \frac{R_2}{2} + \rho \ln\left(\frac{\tau^a}{\rho}\right) = \tau^b R_1 + \frac{R_2}{2} + (\rho - \tau^b) \ln\left(\frac{\tau^a}{\rho}\right)$$

A continuación se muestra la condición de primer orden:

$$\frac{\partial v(\rho)}{\partial \rho} = \ln\left(\frac{\tau^a}{\rho}\right) - 1 + \frac{\tau^b}{\rho} = 0$$

Note que si $\tau^b = \tau^a$, entonces $\rho = \tau^b$ es el precio relativo óptimo, por lo que el resultado seguiría siendo eficiente. Por otro lado, si $\tau^b < \tau^a$, entonces $\partial v(\rho)/\partial \rho$ será positivo cuando $\rho = \tau^b$ y será negativo para un ρ lo suficientemente grande ($\rho > \tau^b$). Por lo tanto, la solución del problema de optimización de la persona b implica que $\rho > \tau^b$.

Note que la solución de $\rho > \tau^b$ implica que necesariamente $TMgS_{21}^b = \tau^b < \rho$, por lo que el resultado de monopolio no es eficiente en el sentido de Pareto (la solución no es de tangencia).

c) Si la persona b le cobra un monto fijo F a la persona a por la compra del bien 1, la demanda de a por dicho bien se mantiene igual que cuando no existe dicho cobro:

$$x_1^a = \ln\left(\frac{\tau^a}{\rho}\right)$$

Sin embargo, la demanda del bien 2 sí se modifica:

$$x_2^a = \frac{R_2}{2} - F - \rho \ln\left(\frac{\tau^a}{\rho}\right)$$

Note que la persona a estará dispuesta a intercambiar bienes solo si la utilidad de hacerlo es al menos igual a la utilidad de no hacerlo. Dado que la dotación inicial de a es $(0, R_2/2)$, su utilidad sin comerciar es:

$$\tau^a[1 - e^{-x_1^a}] + x_2^a = \frac{R_2}{2},$$

mientras que su utilidad de comerciar es:

$$\tau^a[1 - e^{-x_1^a}] + x_2^a = \tau^a - \rho + \frac{R_2}{2} - \rho \ln\left(\frac{\tau^a}{\rho}\right) - F$$

Por lo tanto, para que exista comercio basta con que se cumpla lo siguiente:

$$F = \tau^a - \rho - \rho \ln\left(\frac{\tau^a}{\rho},\right)$$

donde el cargo fijo cobrado depende del precio relativo. Esto impacta en la función de utilidad, $v(\rho)$, de la pregunta b):

$$v(\rho) = \tau^b \left[R_1 - \ln\left(\frac{\tau^a}{\rho}\right)\right] + \frac{R_2}{2} + \tau^a - \rho,$$

de donde obtenemos la condición de primer orden:

$$\frac{\partial v(\rho)}{\partial \rho} = \frac{\tau^b}{\rho} - 1 = 0$$

De la última expresión, obtenemos que b maximiza su utilidad cuando $\rho = \tau^b$, que es el resultado competitivo (eficiente).

24. ⋆⋆⋆ Considere una economía de intercambio con dos agentes, A y B, con las siguientes funciones de utilidad:

$$u_A(x_{A1}, x_{A2}) = \text{mín}\{x_{A1}, 2x_{A2}\} \qquad u_B(x_{B1}, x_{B2}) = \text{mín}\{2x_{B1}, x_{B2}\}$$

Las dotaciones de cada individuo son $w_A = (3, 1)$ y $w_B = (1, 3)$.

a) Halle el equilibrio competitivo si $p_1 = 0$ y $p_2 > 0$. Grafique.

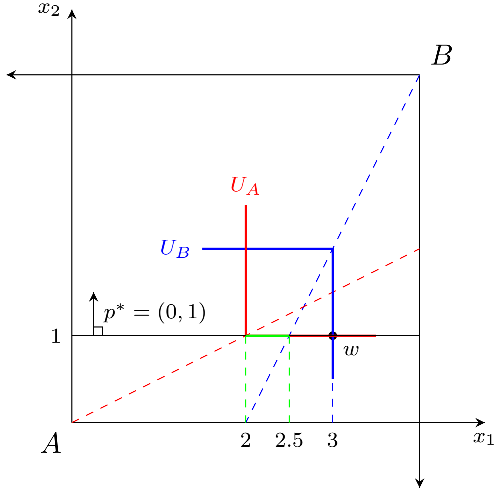
b) Halle el equilibrio competitivo si $p_1 > 0$ y $p_2 = 0$. Grafique.

c) Halle el equilibrio competitivo si $p_1 > 0$ y $p_2 > 0$. Grafique.

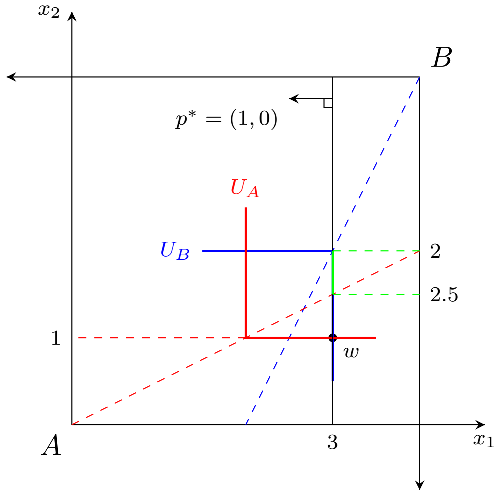
Solución

a) Si $p_1 = 0$ y $p_2 > 0$, la dotación de A determina su consumo del bien 2 (pues la cantidad que tiene del bien 1 no aumenta su riqueza). Por lo tanto, $x_{A2} = 1$ y $x_{A1} \in [2, \infty)$. Lo mismo ocurre para B, para quien $x_{B2} = 3$ y $x_{B1} \in [1.5, \infty)$.

Note que las asignaciones descritas son factibles siempre que $x_{A1} + x_{B1} \leq 4$, por lo que estas asignaciones son equilibrios walrasianos. A continuación se muestra gráficamente el conjunto de equilibrios walrasianos (segmento verde), dado que el bien 1 es gratis.



b) Si $p_1 > 0$ y $p_2 = 0$, la dotación de A determina su consumo del bien 1 (pues la cantidad que tiene del bien 2 no aumenta su riqueza). Por lo tanto, $x_{A1} = 3$ y $x_{A2} \in [1.5, \infty)$. Lo mismo ocurre para B, para quien $x_{B1} = 1$ y $x_{B2} \in [2, \infty)$.
Las asignaciones descritas son factibles siempre que $x_{A2}+x_{B2} \leq 4$, por lo que estas asignaciones son equilibrios walrasianos. A continuación se muestra gráficamente el conjunto de equilibrios walrasianos (segmento verde), dado que el bien 2 es gratis.



c) Si $p_1, p_2 > 0$, entonces, para el agente A debe cumplirse que:

$$x_{A1} = 2x_{A2} \qquad \wedge \qquad p_1 x_{A1} + p_2 x_{A2} = 3p_1 + p_2,$$

de donde tenemos que la demanda de ambos bienes es:

$$x_{A1} = \frac{6p_1 + 2p_2}{2p_1 + p_2} \qquad \wedge \qquad x_{A2} = \frac{3p_1 + p_2}{2p_1 + p_2}$$

De igual manera, la demanda de B para ambos bienes está dada por:

$$x_{B1} = \frac{p_1 + 3p_2}{p_1 + 2p_2} \qquad \wedge \qquad x_{B2} = \frac{2p_1 + 6p_2}{p_1 + 2p_2}$$

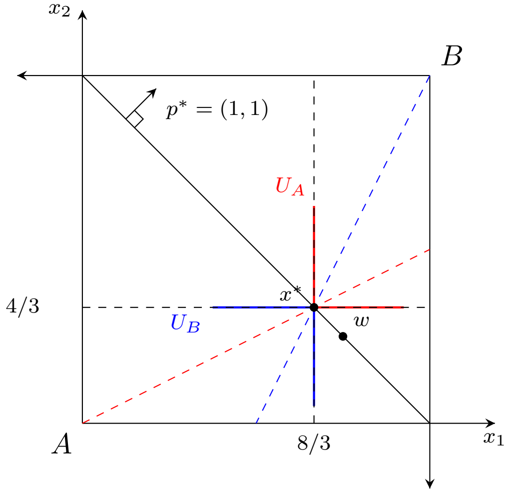
Finalmente, debemos verificar que la asignación encontrada sea factible (por la Ley de Walras, es suficiente analizar cualquier mercado; en este caso, escogemos el mercado del bien 1):

$$x_{A1} + x_{B1} = \frac{6p_1 + 2p_2}{2p_1 + p_2} + \frac{p_1 + 3p_2}{p_1 + 2p_2} = 4$$

Si normalizamos $p_1 = 1$, se llega a que $p_2^2 = p_2$, por lo que $p_2 = 1$. Por lo tanto, el equilibrio competitivo es el siguiente:

$$(p^*, x_A^*, x_B^*) = \left((1,1); \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)\right)$$

El gráfico siguiente ilustra este equilibrio.

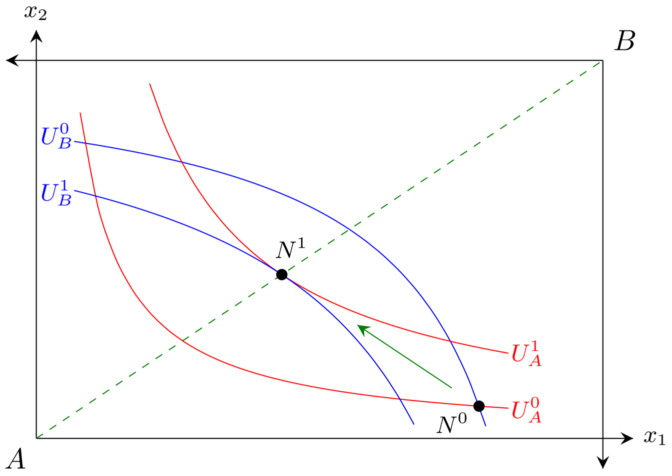


25. ⋆ Analice la veracidad del siguiente enunciado: "En una economía de dos bienes y dos consumidores, en una asignación Pareto-eficiente se cumple que $TMgS^A = TMgS^B$, de tal manera que ninguna persona tiene incentivos para intercambiar su consumo de cada bien".

<u>Solución</u>

El enunciado es verdadero. Note que, para que ellos suceda, se requiere que las preferencias sean estrictamente convexas. Luego, que una economía se encuentre en una asignación Pareto-eficiente significa que no se puede aumentar la utilidad de un individuo sin disminuir la de algún otro, lo cual ocurre en el punto de tangencia de sus curvas de utilidad ($TMgS^A = TMgS^B$ para el caso de dos agentes). Note que en caso que no se cumpla dicha condición, ambos agentes podrían aumentar simultáneamente su utilidad mediante el intercambio.

Por ejemplo, supongamos que la deseabilidad relativa del bien 1 con respecto al bien 2 para el consumidor A es igual a 2.8 ($TMgS^A = 2.8$) y que para el consumidor B es igual a 0.1 ($TMgS^B = 0.1$). En este caso, el consumidor A estaría en una mejor situación si le diera algunas unidades del bien 2 al consumidor B a cambio de algunas unidades del bien 1, aumentando la utilidad de ambos, tal como se muestra en el siguiente gráfico, donde N^0 es la asignación inicial y N^1 es la asignación que se alcanza después del intercambio.



26. ⋆ Una asignación Pareto-eficiente implica una distribución equitativa de los recursos y asegura la condición de tangencia entre las curvas de indiferencia de los individuos.

Solución

El enunciado es falso. La definición de eficiencia de Pareto no menciona nada sobre cómo debe distribuirse la riqueza; es decir, no interesa la equidad distributiva. Por otro lado, recordemos que la condición de tangencia no se cumple en el caso de curvas de indiferencia atípicas como la de bienes sustitutos o complementarios perfectos (ver ejercicios 1, 2, 4 y 5).

27. ⋆⋆ Considere una economía de intercambio con dos agentes y dos bienes. Los agentes tienen una función de utilidad de la forma $u_i(x_{i1}, x_{i2}) = x_{i1}^{\alpha} x_{i2}^{1-\alpha}$, y sus dotaciones son $w_1 = (1, 2)$ y $w_2 = (2, 1)$.

   a) Muestre que la curva de contrato no depende del valor de α. Grafique.

   b) Halle el equilibrio competitivo y las asignaciones Pareto eficientes.

   Solución

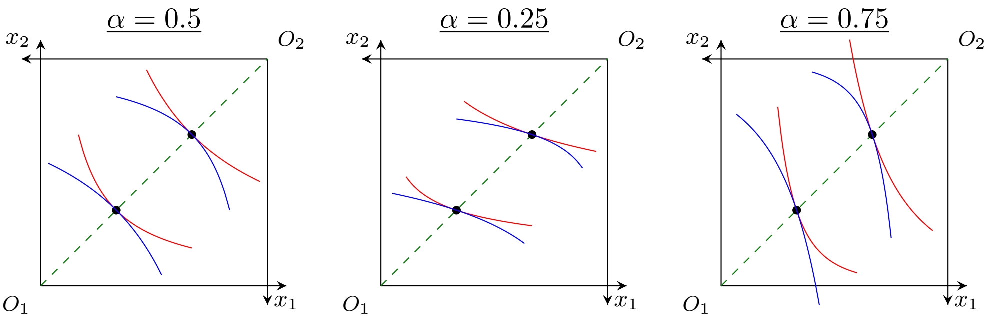
   a) A continuación, se muestra la tasa marginal de sustitución del agente i:

$$TMgS^i_{x_2,x_1} = \frac{\alpha \left(\frac{x_{i2}}{x_{i1}}\right)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\left(\frac{x_{i1}}{x_{i2}}\right)^{\alpha}} = \frac{\alpha x_{i2}}{(1-\alpha)x_{i1}}$$

   Luego, en la curva de contrato se cumple que $TMgS^1_{x_2,x_1} = TMgS^2_{x_2,x_1}$. Además, debemos considerar que las dotaciones de ambos bienes son $w = w_1 + w_2 = (3, 3)$, por lo que se tiene:

$$\frac{\alpha x_{12}}{(1-\alpha)x_{11}} = \frac{\alpha x_{22}}{(1-\alpha)x_{21}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x_{12}}{x_{11}} = \frac{3 - x_{12}}{3 - x_{11}} \qquad \Rightarrow \qquad x_{12} = x_{11}$$

   Es decir, la curva de contrato será la diagonal de la caja de Edgeworth, cualquiera sea el valor de α. En el siguiente gráfico se observa la curva de contrato (línea verde punteada) para tres valores diferentes de α:



   b) Si normalizamos el precio del bien 1 y el precio del bien 2 es p, entonces para cada agente se cumple:

$$TMgS^i_{x_2,x_1} = \frac{1}{p} \qquad \Rightarrow \qquad x_{i2} = \frac{(1-\alpha)x_{i1}}{p\alpha}$$

Dicha relación debe reemplazarse en la restricción presupuestaria de cada agente:

$$x_{i1} + px_{i2} = x_{i1} + p\frac{(1-\alpha)x_{i1}}{p\alpha} = \frac{x_{i1}}{\alpha} = w_{i1} + pw_{i2}$$

Por lo tanto, tenemos:

$$x_{11} = \alpha(1+2p) \qquad \Rightarrow \qquad x_{12} = \frac{(1-\alpha)(1+2p)}{p}$$

$$x_{21} = \alpha(2+p) \qquad \Rightarrow \qquad x_{22} = \frac{(1-\alpha)(2+p)}{p}$$

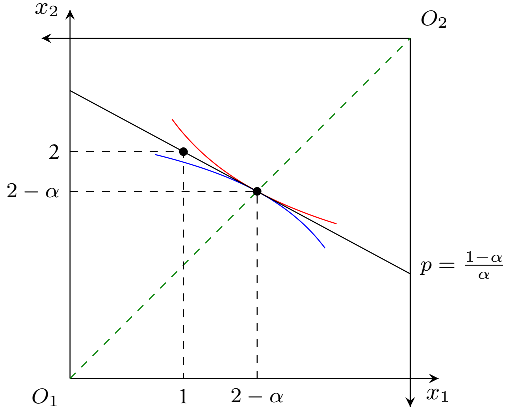
Finalmente, para hallar el precio relativo debemos verificar que cualquiera de los dos mercados se encuentre en equilibrio, pues por la Ley de Walras, sabremos automáticamente que el otro mercado también lo está:

$$x_{11} + x_{21} = \alpha(3+3p) = w_{11} + w_{21} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

Por lo que el equilibrio competitivo será:

$$(1/p^*, x^*_{i1}, x^*_{i2}) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}, (2-\alpha, 1+\alpha), (2-\alpha, 1+\alpha)\right)$$

Gráficamente se tiene:



28. $\star\star\star$ El siguiente ejemplo ilustra el análisis bajo equilibrio general cuando las curvas de indiferencia son $kinked$. Considere una economía de intercambio con dos agentes, A y B, que tienen la misma función de utilidad:

$$u_i(x_{i1}, x_{i2}) = \begin{cases} \sqrt{x_{i1}} + 0.5\sqrt{x_{i2}}, & \text{si } x_{i1} \leq x_{i2} \\ \\ 0.5\sqrt{x_{i1}} + \sqrt{x_{i2}}, & \text{si } x_{i1} > x_{i2} \end{cases}$$

a) Suponga que las dotaciones de cada individuo son $w_A = w_B = (4, 4)$. Grafique la Caja de Edgeworth y halle las asignaciones Pareto-eficientes.

b) Suponga ahora que las dotaciones de cada individuo son $w'_A = (5, 3)$ y $w'_B = (3, 5)$. Halle los precios del equilibrio competitivo. Grafique.

c) Suponga ahora que las dotaciones de cada individuo son $w''_A = (8, 2)$ y $w''_B = (3, 5)$. Halle los precios del equilibrio competitivo. Grafique. Comente cómo afecta la $kinkiness$ el número de equilibros competitivos.

Solución

a) Para hallar las demandas, podríamos usar las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker, de modo que incluyamos las restricciones de desigualdad en el análisis (lo cual sería tedioso), o podríamos usar un método más intuitivo; a saber, resolver para cada uno de los tres casos ($x_{i1} > x_{i2}$, $x_{i1} < x_{i2}$ y $x_{i1} = x_{i2}$) y evaluar los posibles equilibrios. Seguiremos este segundo camino y normalizaremos $p_2 = 1$, de modo que $p_1 = p$.

(i) Para $x_{i1} > x_{i2} > 0$, la solución es interior, de modo que podemos usar el método de Lagrange. $L = 0.5\sqrt{x_{i1}} + \sqrt{x_{2i}} + \lambda(m_i - px_{i1} - x_{i2})$. Derivando L con respecto a x_{i1} y x_{i2}, llegamos a la condición de tangencia entre la $TMgS_{x_{i2},x_{i1}} = p$:

$$\frac{\frac{1}{4\sqrt{x_{i1}}}}{\frac{1}{2\sqrt{x_{i2}}}} = 0.5\sqrt{\frac{x_{i2}}{x_{i1}}} = p < 1/2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x_{i2}} = 2p\sqrt{x_{i1}} \quad \Rightarrow \quad x_{i2} = 4p^2 x_{i1}.$$

Reemplazando esa relación en la restricción presupuestaria, $px_{i1} + x_{i2} = m_i$:

$$x_{i1} = \frac{1}{p(4p+1)} m_i \qquad \wedge \qquad x_{i2} = \frac{4p}{(4p+1)} m_i;$$

Como $w_i = (4, 4)$, el ingreso de cada agente es $m_i = 4p + 4$, por lo que la demanda de cada bien será:

$$x^*_{i1} = \frac{4(1+p)}{p(1+4p)} \qquad \wedge \qquad x^*_{i2} = \frac{16p(1+p)}{1+4p};$$

Y verificamos que el mercado del bien 1 se limpie:

$$x^*_{11} + x^*_{21} = 8 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{4(1+p)}{p(1+4p)} + \frac{4(1+p)}{p(1+4p)} = 8 \qquad \Rightarrow \qquad p = 1/2$$

Pero como $x_{i1} > x_{i2} > 0$, por la condición de tangencia se necesita que $p < 1/2$, por lo que este equilibrio competitivo no es posible.

(ii) Para $0 < x_{i1} < x_{i2}$, la solución también es interior, de modo que podemos usar el método de Lagrange, de forma análoga al caso anterior. $L = \sqrt{x_{i1}} + 0.5\sqrt{x_{2i}} + \lambda(m_i - px_{i1} - x_{i2})$. Derivando L con respecto a x_{i1} y x_{i2}, llegamos a la condición de tangencia entre la $TMgS_{x_{i2},x_{i1}} = p$:

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x_{i1}}}}{\frac{1}{4\sqrt{x_{i2}}}} = 2\sqrt{\frac{x_{i2}}{x_{i1}}} = p > 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x_{i2}} = 0.5p\sqrt{x_{i1}} \quad \Rightarrow \quad x_{i2} = 0.25p^2 x_{i1}$$

Reemplazando esa relación en la restricción presupuestaria, $x_{i1}p + x_{i2} = m_i$:

$$x_{i1} = \frac{4}{p(4+p)}m_i \qquad \wedge \qquad x_{i2} = \frac{p}{4+p}m_i;$$

Por lo que la demanda de cada bien será

$$x_{i1}^* = \frac{16(1+p)}{p(4+p)} \qquad \wedge \qquad x_{i2}^* = \frac{p(1+p)}{4+p)};$$

Y verificamos que el mercado del bien 1 se limpie:

$$x_{11}^* + x_{21}^* = 8 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{16(1+p)}{p(4+p)} + \frac{16(1+p)}{p(4+p)} = 8 \qquad \Rightarrow \qquad p = 2$$

Pero como $x_{i2} > x_{i1} > 0$, por la condición de tangencia se necesita que $p > 2$, por lo que este equilibrio competitivo no es posible.

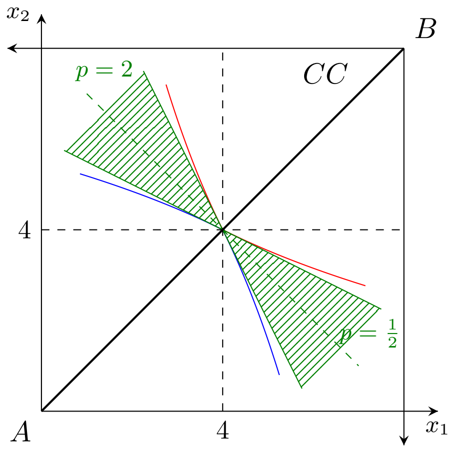
(iii) Para $x_{i1} = x_{i2} > 0$, la solución es interior. Reemplazando esa relación en la restricción presupuestaria: $x_{i1}p + x_{i2} = x_{i1}(1+p) = m_i$

$$x_{i1} = x_{i2} = \frac{m_i}{1+p}$$

Por lo que la demanda de cada bien será:

$$x_{i1}^* = x_{i2}^* = \frac{4(p+1)}{1+p} = 4,$$

y no existirá comercio. Si bien, para la condición $x_{i1} = x_{i2}$ se cumple que $u_i = 0.5\sqrt{x_{i1}} + \sqrt{x_{i2}}$, note que también se cumple que $u_i = \sqrt{x_{i1}} + 0.5\sqrt{x_{i2}}$, pues nos encontramos justo en el quiebre de la función de utilidad. Por este motivo, el precio relativo será $p^* \in [1/2, 2]$, cuyos límites son obtenidos de los casos anteriores. A continuación representamos todos los equilibrios competitivos en la caja de Edgeworth:



b) Como ahora $w_A = (5,3)$ y $w_B = (3,5)$, entonces $m_A = 5p+3$ y $m_B = 3p+5$. Y reemplazamos dichos ingresos en cada uno de los casos especificados. Así, cuando $x_{i1} > x_{i2} > 0$ ($p < 1/2$):

$$x_{11}^* = \frac{5p+3}{p(4p+1)} \qquad \wedge \qquad x_{12}^* = \frac{4p(5p+3)}{4p+1}$$

$$x_{21}^* = \frac{3p+5}{p(4p+1)} \qquad \wedge \qquad x_{22}^* = \frac{4p(3p+5)}{4p+1}$$

y planteamos la función de Exceso de Demanda ED del bien 1:

$$ED_1 = \frac{5p+3}{p(4p+1)} + \frac{3p+5}{p(4p+1)} - 5 - 3 = \frac{8-32p^2}{p(4p+1)} > 0,$$

pues $p < 1/2$. Por lo tanto, no existirá equilibrio competitivo en el que $x_{i1} > x_{i2} > 0$ para todo i. Por otro lado, cuando $x_{i2} > x_{i1} > 0$ ($p > 2$):

$$x_{11}^* = \frac{4(5p+3)}{p(4+p)} \qquad \wedge \qquad x_{12}^* = \frac{p(5p+3)}{4+p}$$

$$x_{11}^* = \frac{4(3p+5)}{p(4+p)} \qquad \wedge \qquad x_{12}^* = \frac{p(3p+5)}{4+p}$$

y planteamos la función ED_1:

$$ED_1 = \frac{4(5p+3)}{p(4+p)} + \frac{4(3p+5)}{p(4+p)} - 5 - 3 = \frac{32-8p^2}{p(4+p)} < 0,$$

pues $p > 2$. Por lo tanto, no existirá equilibrio competitivo en el que $x_{i1} > x_{i2} > 0$ para todo i, pues si existe exceso de oferta, el precio debe ser cero (ver ejercicio 11), lo cual no es cierto. Por otro lado, cuando $x_{i2} = x_{i1} > 0$ ($p \in [1/2, 2]$):

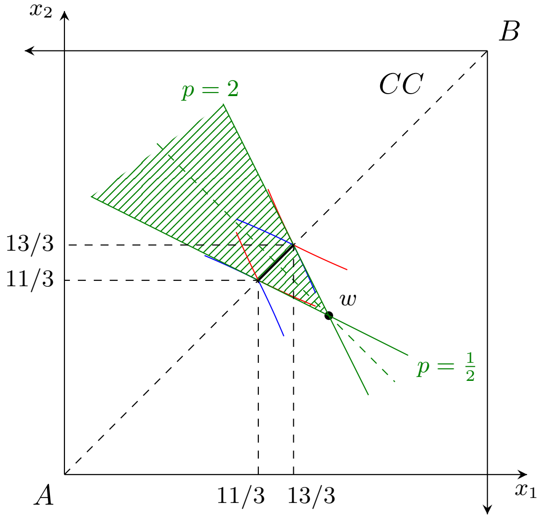
$$x_{11}^* = x_{12}^* = \frac{5p+3}{1+p} \qquad \wedge \qquad x_{21}^* = x_{22}^* = \frac{3p+5}{1+p},$$

y planteamos la función ED_1:

$$ED_1 = \frac{5p+3}{1+p} + \frac{3p+5}{1+p} - 5 - 3,$$

Lo cual es siempre igual a cero. Por lo tanto, el conjunto de equilibrios será:

$$EC = \{x_{11}^*(p) = x_{12}^*(p), x_{21}^*(p) = x_{22}^*(p), p \in [1/2, 2]\}$$



c) Ahora los ingresos de ambos individuos serán $m_1 = 8p + 2$ y $m_2 = 3p + 5$ (ahora $w = (11, 7)$ es la dotación total de bienes).Así, cuando $x_{i1} > x_{i2} > 0$ ($p < 1/2$):

$$x_{11}^* = \frac{8p+2}{p(4p+1)} \qquad \wedge \qquad x_{12}^* = \frac{4p(8p+2)}{4p+1}$$

$$x_{21}^* = \frac{3p+5}{p(4p+1)} \qquad \wedge \qquad x_{22}^* = \frac{4p(3p+5)}{4p+1}$$

y planteamos la función ED_1:

$$ED_1 = \frac{8p+2}{p(4p+1)} + \frac{3p+5}{p(4p+1)} - 8 - 3 = \frac{7-44p^2}{p(4p+1)},$$

que es igual a cero cuando $p^* = \sqrt{7/44} < 1/2$. Por lo tanto, este se trata de un equilibrio competitivo. Por otro lado, cuando $x_{i2} > x_{i1} > 0$ ($p > 2$):

$$x_{11}^* = \frac{4(8p+2)}{p(4+p)} \qquad \wedge \qquad x_{12}^* = \frac{p(8p+2)}{4+p}$$

$$x_{11}^* = \frac{4(3p+5)}{p(4+p)} \qquad \wedge \qquad x_{12}^* = \frac{p(3p+5)}{4+p}$$

y planteamos la función ED_1:

$$ED_1 = \frac{4(8p+2)}{p(4+p)} + \frac{4(3p+5)}{p(4+p)} - 8 - 3 = \frac{28-11p^2}{p(4+p)} < 0,$$

pues $p > 2$. Por lo tanto, no existirá equilibrio competitivo en el que $x_{i1} > x_{i2} > 0$ para todo i, pues si existe exceso de oferta, el precio debe ser cero, lo cual no es cierto. Por otro lado, cuando $x_{i2} = x_{i1} > 0$ ($p \in [1/2, 2]$):

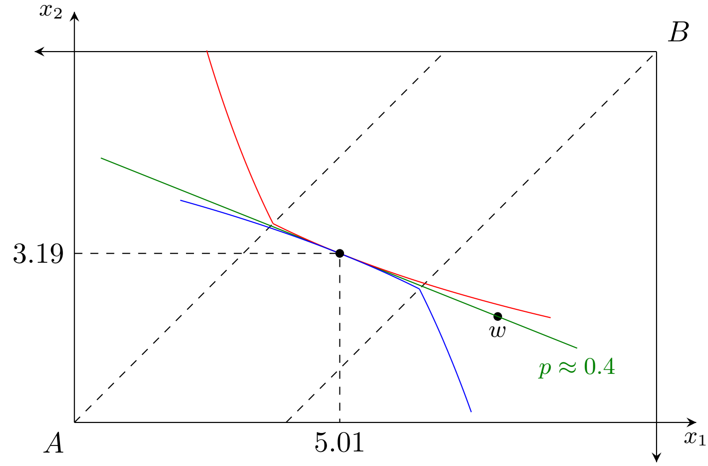
$$x_{11}^* = x_{12}^* = \frac{8p+2}{1+p} \qquad \wedge \qquad x_{21}^* = x_{22}^* = \frac{3p+5}{1+p}$$

y planteamos la función ED_1:

$$ED_1 = \frac{8p+2}{1+p} + \frac{3p+5}{1+p} - 8 - 3 = \frac{-4}{1+p},$$

Lo cual es siempre menor que cero. Por lo tanto, este tampoco se trata de un equilibrio competitivo pues $p > 0$. Finalmente, en este nuevo escenario el equilibrio es único:

$$EC = \{x_{11}^* \approx 5.01, x_{12}^* \approx 3.19, x_{21}^* \approx 5.99, = x_{22}^* \approx 3.81, p \approx 0.4\}$$



29. $\star\star\star$ Considere el caso de un desbien, en un contexto de equilibrio general. Si las preferencias de dos consumidores, que consumen dos bienes (A y B), son las siguientes:

$$u_i(x_{i1}, x_{i2}) = (x_{i1})(K - x_{i2}),$$

y las dotaciones para cada consumidor son: $w_1 = (1,3)$, $w_2 = (K-1, K-3)$. Considere que $K > 3$.

a) Muestre que la asignación x es Pareto óptima si y solo si $x_{11} + x_{12} = K$.

b) Halle el equilibrio competitivo. Grafique.

c) ¿Qué pasa con el equilibrio competitivo si el consumidor 1 tiene el derecho de echar toda la dotación de su segundo bien sobre el consumidor 2?

<u>Solución</u>

a) Para hallar las asignaciones Pareto óptimas, resolvemos el siguiente problema:

$$MaxU_1 = (x_{11})(K - x_{12})$$

Sujeto a:
$(x_{21})(K - x_{22}) = U_2^o$
$x_{11} + x_{21} = K$
$x_{12} + x_{22} = K$
Incluyendo las dos últimas restricciones en la función de utilidad del agente 2 (primera restricción), tenemos una maximización sobre sólo dos variables, x_{11} y x_{12}:

$$\text{máx}(x_{11})(K - x_{12}) \qquad s.a. \quad (K - x_{11})(x_{12}) = U_o$$

Del Lagrangiano, $L = (x_{11})(K - x_{12}) + \lambda(Uo - (K - x_{11})(x_{12}))$, derivando con respecto a x_{11} y x_{12}:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{11}} = (K - x_{12}) + \lambda x_{12} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_{12}} = -x_{11} - \lambda(K - x_{11}) = 0$$

Despejando lambda de ambas ecuaciones:

$$\frac{K - x_{12}}{-x_{12}} = \frac{-x_{11}}{K - x_{11}} \quad (K - x12)(K - x_{11}) = x_{12}x_{11}.$$

De donde se desprende la relación pedida, $x_{11} + x_{12} = K$.

b) Para hallar el equilibrio competitivo, consideremos el problema de maximización de ambos agentes. Sean $p_1 = 1$ y $p_2 = p$, entonces para el agente 1 se tiene:

$$\text{máx}(x_{11})(K - x_{12}) \qquad s.a. \quad x_{11} + px_{12} = m_1 = 1 + 3p$$

De donde obtenemos (la CPO) que:

$$\frac{K - x_{12}}{-x_{11}} = \frac{1}{p} \qquad \Rightarrow \qquad x_{11} = p(x_{12} - K).$$

Reemplazando en su restricción presupuestaria, $p(x_{12} - K) + px_{12} = 1 + 3p$, tenemos:

$$x_{12} = \frac{1 + 3p + Kp}{2p}$$

De forma análoga, para el agente 2 tenemos que la CPO implica:

$$\frac{K - x_{22}}{-x_{21}} = \frac{1}{p} \qquad \Rightarrow \qquad x_{12} = p(x_{22} - K).$$

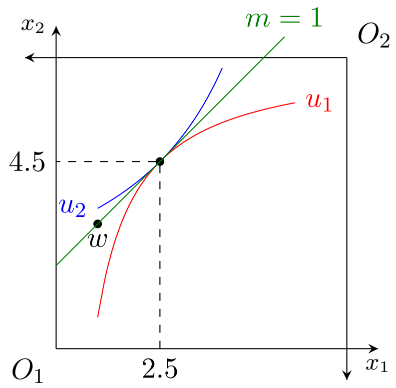
Reemplazando en su restricción presupuestaria, $p(x_{22} - K) + px_{22} = 3 + p$, tenemos:

$$x_{22} = \frac{3 + p + Kp}{2p}$$

Finalmente, usando la condición de equilibrio en el mercado 2, $x_{12} + x_{22} = K$, tenemos:

$$\frac{1 + 3p + Kp}{2p} + \frac{3 + p + Kp}{2p} = \frac{4 + 4p + 2Kp}{2p} = K \qquad \Rightarrow \qquad p^* = -1$$

Este resultado no debiera sorprendernos, pues el bien 2 es, en realidad, un desbien, cuyo precio debe ser negativo. Gráficamente (para $K = 7$), tenemos que $x_{11} = 2.5$ y $x_{12} = 4.5$:



c) Este es el caso de un consumidor (el consumidor 2), quien tiene derecho a causar una externalidad negativa sobre el consumidor 1. De esta manera, las nuevas dotaciones de los consumidores serían:

$$w_1'' = (1, 0), w_2'' = (K - 1, K).$$

Si, nuevamente, fijamos el exceso de demanda por el bien 2 a cero, tendremos el mismo resultado, $p^* = -1$, pues la dotación total del bien 2 no cambió (sigue siendo K).

30. ⋆⋆⋆ Considere una economía con 2 bienes, 2 agentes (A y B) y 1 firma. Las preferencias de los agentes son:

$$U_A(x) = \text{mín}\{x_{A1}, x_{A2}\} \qquad\qquad U_B(x) = x_{B1}x_{B2}$$

Las dotaciones de cada agente son: $(\omega_{A1}, \omega_{A2}) = (0,1)$ y $(\omega_{B1}, \omega_{B2}) = (1,0)$. Normalice el precio del bien 2 a 1.

a) Halle el (o los) equilibrio (s) competitivo(s) de la economía.

b) Defina el conjunto de asignaciones Pareto óptimas de esta economía. Muestre esas asignaciones en una caja de Edgeworth e indique cuál es el equilibrio competitivo hallado en la parte a).

Ahora, suponga que las dotaciones del agente B cambian a $(\omega_{B1}, \omega_{B2}) = (2,0)$, y que las dotaciones del agente A siguen siendo las mismas.

c) Encuentre el nuevo equilibrio competitivo. Compare las utilidades alcanzadas ahora respecto de aquellas alcanzadas en la parte a).

d) Halle las asignaciones Pareto óptimas y muéstrelas en la caja de Edgeworth. Grafique también el equilibrio competitivo.

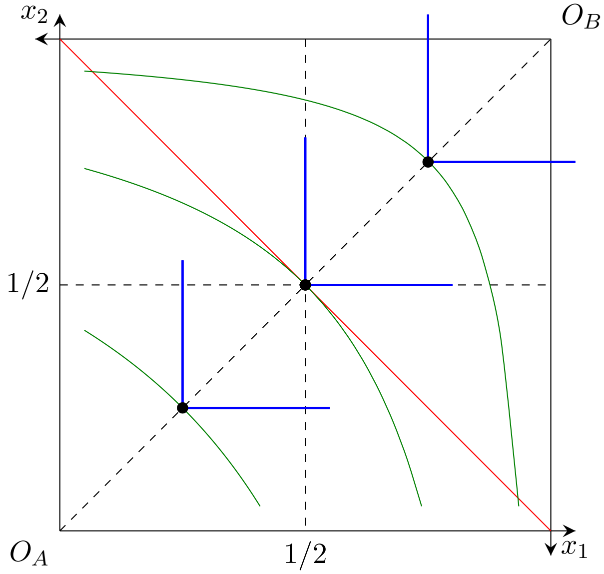
Solución

a) Resolviendo, sabemos que la persona A maximiza su utilidad donde $x_{A1} = x_{A2} = p_2/(p_1+p_2)$, con $m_A = p_2$. Por otro lado, para el agente B, la canasta óptima es $x_{B1} = 1/2$, $x_{B2} = p_1/(2p_2)$, con $m_B = p_1$.

Para hallar los precios, usamos: $x_{A1} + x_{B1} = p_2/(p_1+p_2) + 1/2 = 1$. Con $p_2 = 1$, esto implica que $p_1 = 1$. Por lo tanto, el equilibrio competitivo es:

$$EC = \{(x_{A1}, x_{A2}), (x_{B1}, x_{B2}), (p_1, p_2)\} = \{(1/2, 1/2), (1/2, 1/2), (1,1)\}$$

b) El conjunto de asignaciones $P.O.$ se puede hallar gráficamente; la tangencia asociada a este conjunto implica que $x_{A1} = x_{A2}$ (o $x_{B1} = x_{B2}$). Por lo tanto, el conjunto es $\{(x_{A1}, x_{A2}), (x_{B1}, x_{B2})\} = \{(a,a), (1-a, 1-a)\}$, donde $1 \geq a \geq 0$. El gráfico se muestra debajo (línea de 45 grados).

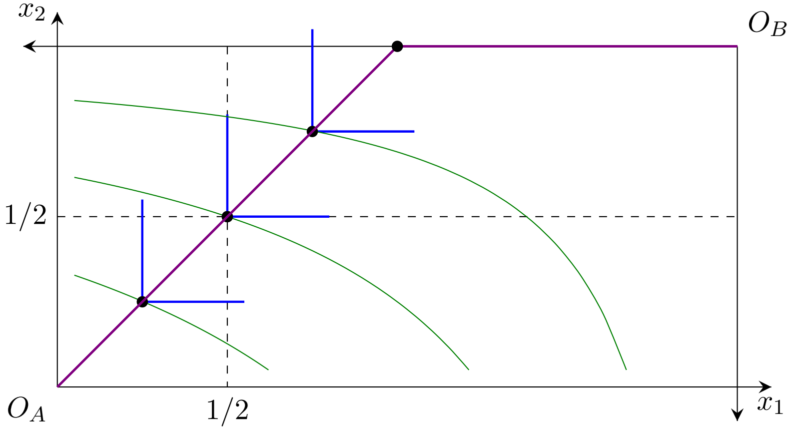


c) Resolviendo, sabemos que la persona A maximiza utilidad donde $x_{A1} = x_{A2} = p_2/(p_1 + p_2)$, con $m_A = p_2$. Para el agente B, la canasta óptima es $(x_{B1}, x_{B2}) = (1, p_1/p_2)$, con $m_B = 2p_1$. Para hallar los precios, usamos $x_{A1} + x_{B1} = p_2/(p_1 + p_2) + 1 = 2$, de donde $p_1 = 0$.

$$EC = \{(x_{A1}, x_{A2}), (x_{B1}, x_{B2}), (p_1, p_2)\} = \{(1, 1), (1, 0), (0, 1)\}.$$

La utilidad de A es ahora 1 (antes era $1/2$) y la de B es 0 (antes era $1/4$).

d) El conjunto de asignaciones $P.O.$ se puede hallar gráficamente; la tangencia asociada a este conjunto implica: $x_{A1} = x_{A2}$ (o $x_{B1} = x_{B2}$). Por lo tanto, el conjunto es $\{(x_{A1}, x_{A2}), (x_{B1}, x_{B2})\} = \{(a, a), (1 - a, 1 - a)\}$, donde $1 \geq a \geq 0$, además de la línea horizontal desde $(x_{A1}, x_{A2}) = (1, 1)$ hasta $(x_{A1}, x_{A2}) = (2, 1)$. La línea morada es la Curva de Contrato (ver gráfico). El equilibrio competitivo está en las coordenadas (1,1).



31. ⋆⋆⋆ Considere una economía de intercambio con dos personas y dos bienes. Las funciones de utilidad de las personas son: $U_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11}x_{12}$ y $U_2(x_{21}, x_{22}) = \text{mín}\{x_{21}x_{22}, 4\}$; y sus dotaciones iniciales son $\omega_1 = (1, 4)$ y $\omega_2 = (4, 1)$.

   a) Halle las asignaciones que son óptimas en el sentido de Pareto.

   b) Caracterice todos los equilibrios competitivos. ¿Alguno de dichos equilibrios es óptimo en el sentido de Pareto? Grafique.

   Solución

   a) Note que el agente 2 alcanza su utilidad máxima con su dotación inicial, ω_2. Por lo tanto, una condición necesaria para que una asignación sea óptima en el sentido de Pareto es que $U_2(x_{21}, x_{22}) = 4$. Esto ocurre si $(5 - x_{11})(5 - x_{12}) \geq 4$, por lo que dicha asignación resuelve:

   $$\arg\max_{x_{11}, x_{12}} x_{11}x_{12} \quad \text{sujeto a:} \quad (5 - x_{11})(5 - x_{12}) \geq 4$$

   Lo que es equivalente a:

   $$\arg\max_{x_{11}} x_{11}\left(5 - \frac{4}{5 - x_{11}}\right) \qquad \Rightarrow \qquad 5 = \frac{20}{(5 - X_{11})^2},$$

   donde la solución única es $x_{11} = 3$. Por lo tanto, la única asignación que es Pareto óptima es $x = \{x_{1l} = (3, 3), x_{2l} = (2, 2)\}$.

   b) Dado el vector de precios $p = (p_1, p_2)$, el consumidor 1 se enfrenta al siguiente problema de optimización:

   $$\arg\max_{x_{11}, x_{12}} x_{11}x_{12} \quad \text{sujeto a:} \quad p_1x_{11} + p_2x_{12} = p_1 + 4p_2,$$

de donde obtenemos la demanda del consumidor 1:

$$D_1(p) = \left(\frac{p_1 + 4p_2}{2p_1}, \frac{p_1 + 4p_2}{2p_2}\right)$$

y, en equilibrio, luego que el agente 1 obtiene $D_1(p)$, el resto de la dotación total de bienes debe pertenecer al agente 2:

$$(5,5) - D_1(p) = \left(\frac{9p_1 - 4p_2}{2p_1}, \frac{6p_2 - p_1}{2p_2}\right) \in D_2(p)$$

Adicionalmente, la demanda de 2 debe ser tal que $x_{21}x_{22} \geq 4$ (si fuese menor preferiría quedarse con su dotación inicial); por lo que, si denotamos $r = p_1/p_2$, tenemos:

$$\left(\frac{9p_1 - 4p_2}{2p_1}\right)\left(\frac{6p_2 - p_1}{2p_2}\right) = \frac{(9r-4)(6-r)}{4r} \geq 4$$

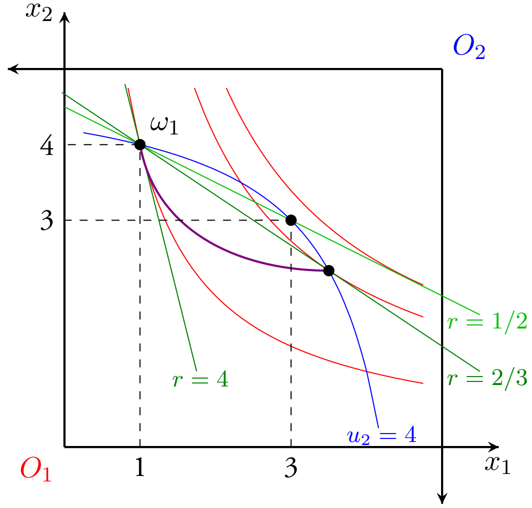
de donde obtenemos que $r \in [2/3, 4]$ son todos los precios relativos que corresponden a equilibrios competitivos:

$$EC = \left\{(p_1, p_2, x_{1l}, x_{2l}) | r = \frac{p_1}{p_2} \in \left[\frac{2}{3}, 4\right]\right\}$$

Note que ninguno de los equilibrios corresponde a la asignación óptima en el sentido de Pareto hallada en la parte a). Para entender por qué, basta con notar que la relación de precios necesaria para que $x_{1l} = (3,3)$ sea parte de un equilibrio competitivo debe ser:

$$\frac{3-4}{3-1} = -\frac{p_1}{p_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2} \notin \left[\frac{2}{3}, 4\right]$$

Gráficamente tenemos:



Donde la línea morada contiene a todos los equilibrios competitivos. Note que para $r = 1/2$, la tangencia con la curva de indiferencia de 1 no ocurriría en el vector (3,3) (asignación eficiente en el sentido de Pareto), sino que ocurre al sureste de dicho punto, donde el consumidor 2 tiene una utilidad menor a 4. Note que todos los equilibrios competitivos le otorgan 4 de utilidad al jugador 2, la diferencia con respecto a la asignación óptima en el sentido de Pareto es que el jugador 1 nunca se lleva su máxima utilidad posible, que es 9.

32. ⋆⋆⋆ Considere una economía de intercambio con dos personas y dos bienes. Ambos consumidores tienen una dotación inicial igual a $\omega_i = (1,1)$ y la siguiente función de utilidad:

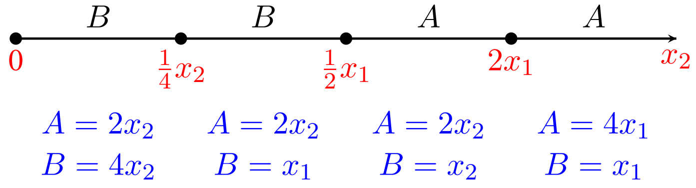
$$u_i(x_{i1}, x_{i2}) = \text{máx}\{2\,\text{mín}\{2x_{i1}, x_{i2}\}, \text{mín}\{x_{i1}, 4x_{i2}\}\}$$

a) Dibuje las curvas de indiferencia para el consumidor 1. ¿Las curvas de indiferencia son convexas?

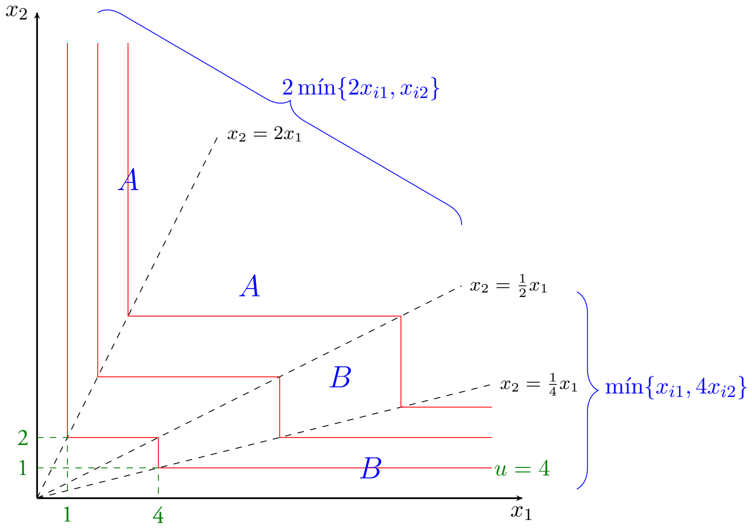
b) Dibuje la caja de Edgeworth para esta economía, especificando cuál es el conjunto de asignaciones Pareto eficientes.

<u>Solución</u>

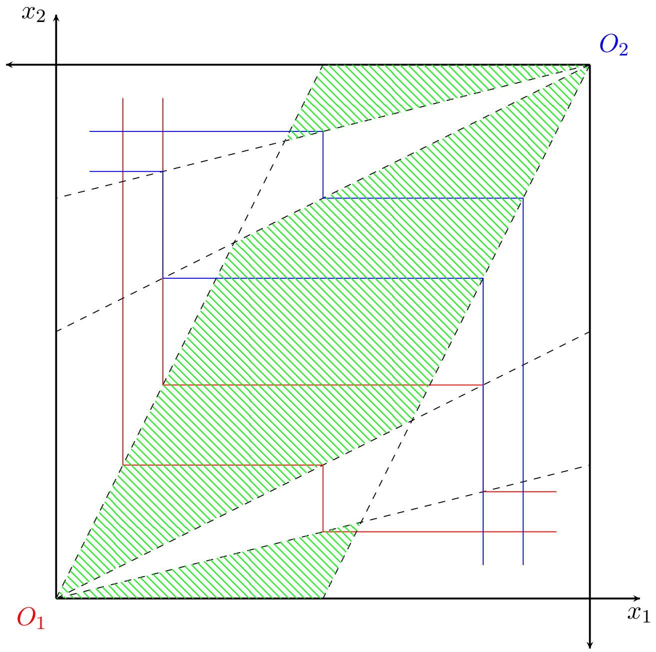
a) Las curvas de indiferencia se construyen a partir de los componentes, $A = 2\,\text{mín}\{2x_{i1}, x_{i2}\}$ (cuyo vértice es $x_2 = 2x_1$), y $B = \text{mín}\{x_{i1}, 4x_{i2}\}$ (cuyo vértice es $x_2 = \frac{1}{4}x_1$). Hay un tercer vértice que sale igualando $2x_2$ de A con x_1 de B, de esta forma tenemos:



Por lo tanto, las curvas de indiferencia no son convexas, pues tienen quiebres al estilo de una función mínimo siempre que $x_{i2} = 2x_{i1}$ y $x_{i2} = \frac{1}{4}x_{i1}$, y tiene un quiebre al estilo de una función máximo siempre que: $x_{i2} = \frac{1}{2}x_{i1}$.



b) El conjunto de asignaciones Pareto eficientes está definido por el área verde, en donde ningún jugador puede beneficiarse sin perjudicar al otro, como se muestra en el gráfico.



33. ⋆⋆ Considere una economía de producción para autoconsumo (1 consumidor productor,

1 bien, 1 insumo). Dada la siguiente función de utilidad del bien de consumo (C) y ocio (H), $U(C,H) = \ln(C) + \ln(H)$ y la función de producción que usa solo el insumo trabajo (L), $Q = f(L) = AL^{0.5}$, donde $A > 0$. Asumiendo una dotación total de tiempo igual a $\overline{T}$, halle el equilibrio competitivo. Luego de hallarlo, use la siguiente información: $A = 4$, $\overline{T} = 12$, y grafique el equilibrio competitivo (consumo y producción).

<u>Solución</u>

El problema de la empresa es el siguiente:

$$\text{máx}\, \pi = pAL^{0.5} - wL$$

De donde obtenemos la demanda del factor trabajo, la cantidad producida y los beneficios:

$$L(w,p) = \left(\frac{pA}{2w}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad Q(w,p) = \frac{pA^2}{2w} \quad \Rightarrow \quad \pi^*(w,p) = \frac{(pA)^2}{4w}$$

Por otro lado, el problema del consumidor se convierte en el siguiente:

$$\max_{C,H} U = \ln(C) + \ln(H) \qquad s.a. \quad pC + wH = w\overline{T} + \pi^*(w,p)$$

Por lo que obtenemos el consumo y el ocio óptimo:

$$C^*(w,p) = \frac{w\overline{T} + \pi^*(w,p)}{2p}$$

$$H^*(w,p) = \frac{w\overline{T} + \pi^*(w,p)}{2w} \qquad \Rightarrow \qquad L^* = \frac{w\overline{T} - \pi^*(w,p)}{2w}$$

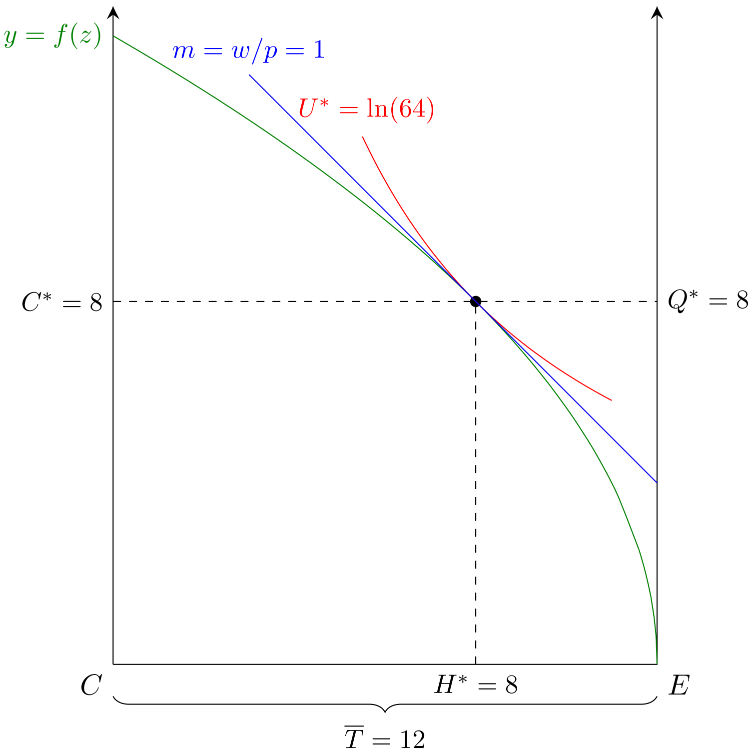
Y debemos verificar que el mercado laboral se encuentre en equilibrio:

$$\frac{w\overline{T} - \pi^*(w,p)}{2w} = \left(\frac{pA}{2w}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{w}{p} = \frac{A}{2}\left(\frac{3}{\overline{T}}\right)^{0.5}$$

Si reemplazamos dicho resultado en $L(w,p)$, obtenemos que $L^* = \overline{T}/3$. Finalmente, debemos verificar que el mercado de bienes se encuentre en equilibrio (debe estarlo por la Ley de Walras):

$$\frac{w\overline{T} + \pi^*(w,p)}{2p} = \frac{pA^2}{2w} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{w}{p} = \frac{A}{2}\left(\frac{3}{\overline{T}}\right)^{0.5}$$

Si reemplazamos dicho resultado en $Q(w,p)$, obtenemos que $C^* = A(\overline{T}/3)^{0.5}$. Finalmente, si $A = 4$ y $\overline{T} = 12$, obtenemos que $w/p = 1$, $C^* = 8$, $L^* = 4$ y que $H^* = 8$.



34. ⋆⋆ Considere una economía de intercambio con producción (1 consumidor, 1 bien, 1 insumo). Dada la siguiente función de utilidad del bien de consumo (C) y ocio (H): $U(C, H) = \log C + \log H$ y la función de producción que usa solo el insumo trabajo (L), $Q = f(L) = AL^{0.5}$ ($A > 0$). Asumiendo una dotación total de tiempo igual a $\overline{T}(H + L = \overline{T})$, halle el equilibrio competitivo. Luego de hallarlo, asuma que $A = 4$, $\overline{T} = 12$, y grafique el equilibrio competitivo (consumo y producción).

Solución

El problema de la firma: $\max_L\{pAL^{0.5} - wL\}$. Resolviendo tenemos:

$$L(w,p) = \left(\frac{A}{2\frac{w}{p}}\right)^2 \tag{.7}$$

$$Q(w,p) = A\left(\frac{A}{2\frac{w}{p}}\right) = C^* \tag{.8}$$

$$\pi^*(w,p) = pA\left(\frac{A}{2\frac{w}{p}}\right) - w\left(\frac{A}{2\frac{w}{p}}\right)^2 = \left(\frac{pA}{2}\right)\left(\frac{A}{2\frac{w}{p}}\right) \tag{.9}$$

Ahora debemos resolver el problema del consumidor $\text{máx}_{C,H}\{\log C + \log H\}$, sujeto a $pC + wH = w\overline{T} + \pi^*(w,p)$, de donde obtenemos:

$$C^*(w,p) = \frac{w\overline{T} + \pi^*(w,p)}{2p} \tag{.10}$$

$$H^*(w,p) = \frac{w\overline{T} + \pi^*(w,p)}{2w}$$

$$L^*(w,p) = \frac{w\overline{T} - \pi^*(w,p)}{2w} \tag{.11}$$

Ahora debemos verificar el equilibrio en el mercado laboral:

Ecuaciones (.7) y (.11):

$$L(w,p) = \left(\frac{A}{2\frac{w}{p}}\right)^2 = L^*(w,p) = \frac{\overline{T}}{2} - \frac{\pi^*(w,p)}{2w} = \frac{\overline{T}}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{A}{2\frac{w}{p}}\right)^2$$

Resolviendo, tenemos:

$$\left(\frac{w}{p}\right) = \frac{A}{2\left(\frac{1}{3}\overline{T}\right)^{0.5}} \tag{.12}$$

Reemplazando (.12) en (.7), tenemos que $L = \overline{T}/3$. Por completitud, haremos lo mismo para el mercado de bienes, aunque esto es redundante debido a la Ley de Walras. Así, de las ecuaciones (.8) y (.10):

$$A\left(\frac{A}{2(w/p)}\right) = \frac{w\overline{T} + \pi^*(w,p)}{2p} = \frac{1}{2}\left(\frac{w}{p}\right)\overline{T} + \frac{\pi^*(w,p)}{2p} = \frac{1}{2}\left(\frac{w}{p}\right)\overline{T} + \left(\frac{A}{4}\right)\left(\frac{A}{2(w/p)}\right)$$

De donde:

$$\frac{w}{p} = \frac{A}{2\left(\frac{1}{3}\overline{T}\right)^{0.5}} \tag{.13}$$

Este resultado es el mismo que el de la ecuación (.13). Con los datos $A = 4$ y $\overline{T} = 12$, obtenemos que $(w/p)^* = 1$. Asumiendo que $p^* = 1$, entonces $w^* = 1$, $\pi^* = 4$, $H^* = 8$, $C^* = 8$. La FIU es $\log(64)$.

35. ⋆⋆ En alguna parte aún desconocida del océano Pacífico, existen dos islas vecinas. Inexplicablemente, dos personas (A y B) lograron colonizar dichas islas (una para cada persona) y vivirán ahí por dos periodos. En el primer periodo, ambas personas deciden

qué y cuánto producir de acuerdo a su propia restricción presupuestaria, como si no hubiese un segundo periodo y tuviesen que consumir toda su producción en dicho periodo. En el segundo periodo, ambos agentes pueden consumir lo que produjeron o realizar un intercambio con el otro agente y luego consumir.

Los únicos bienes de la economía descrita son cocos (C) y pescados (P), los cuales sólo requieren de mano de obra para su extracción. Cada persona puede dedicar hasta 24 horas al trabajo en el primer periodo: A la persona A le toma 1 hora obtener un coco y 4 horas pescar un pez. Por otro lado, a la persona B le toma 2 horas obtener un coco y 3 horas pescar un pez. Por último, se conoce que ambos tienen la misma función de utilidad $U = C^{0.5}P^{0.5}$.

a) Construya las fronteras de posibilidades de producción de ambos agentes.

b) Halle la producción de ambos agentes en el primer periodo.

c) Con la información calculada en b), halle los consumos de cada uno de los agentes en el segundo periodo.

Solución

a) La frontera de posibilidades de producción debe reflejar las combinaciones de producción posibles y eficientes. Así, para el agente A se debe cumplir que $C + 4P = 24$, mientras que para B se debe cumplir que $2C + 3P = 24$.

b) Para el agente A se debe cumplir:

$$TMgS_{C,P} = \frac{P}{C} = \frac{1}{4} = TMgT_{C,P}$$

Dicha relación se incluye en la restricción $C + 4P = 24$, obteniendo $C_A^* = 12$ y $P_A^* = 3$. De igual manera, se procede para el agente B:

$$TMgS_{C,P} = \frac{P}{C} = \frac{2}{3} = TMgT_{C,P}$$

Y reemplazando dicha relación en la restricción $2C+3P = 24$, obteniendo $C_B^* = 6$ y $P_B^* = 4$.

c) La producción en el primer periodo define las dotaciones iniciales del segundo periodo: $\omega_A = (12, 3)$ y $\omega_B = (6, 4)$, siendo la dotación total de la economía $\omega = (18, 7)$. Luego, si denotamos por p_c y p_p a los precios de los cocos y de los peces respectivamente, la riqueza de cada individuo será $12p_c + 3p_p$ y $6p_c + 4p_p$. Adicionalmente, note que la condición de optimalidad para ambos agentes es:

$$TMgS_{C,P} = \frac{P}{C} = \frac{p_c}{p_p}$$

Por lo que podemos obtener las demandas de ambos agentes reemplazando dicha condición en su restricción presupuestaria. Para el agente A tenemos que:

$$p_c C_A + \underbrace{p_p \left(\frac{p_c}{p_p} C_A \right)}_{P_A} = 12p_c + 3p_p$$

De donde obtenemos la demanda de ambos bienes por parte de A:

$$C_A^* = 6 + 1.5\frac{p_p}{p_c} \qquad \wedge \qquad P_A^* = 1.5 + 6\frac{p_c}{p_p}$$

Análogamente, para el agente B, obtenemos:

$$C_B^* = 3 + 2\frac{p_p}{p_c} \qquad \wedge \qquad P_B^* = 2 + 3\frac{p_c}{p_p}$$

Adicionalmente, debemos verificar que los mercados se limpien:

$$18 - 6 - 1.5\frac{p_p}{p_c} - 3 - 2\frac{p_p}{p_c} = 9 - 3.5\frac{p_p}{p_c} = 0$$
$$7 - 1.5 - 6\frac{p_c}{p_p} - 2 - 3\frac{p_c}{p_p} = 3.5 - 9\frac{p_c}{p_p} = 0$$

Como es usual, solo basta usar una de las restricciones de factibilidad, por la Ley de Walras. De dichas restricciones, obtenemos que el precio relativo es $p_p/p_c = 9/3.5$. Finalmente, la cantidad consumida por cada agente de ambos bienes es:

$$C_A^* = 9.857 \qquad \wedge \qquad P_A^* = 3.833$$

$$C_B^* = 8.143 \qquad \wedge \qquad P_B^* = 3.167$$

De donde se observa que A intercambió C por P con B.

36. ⋆⋆ En la economía del jardín de la UP, sabemos que el total de horas disponibles para trabajar es 100 y que las horas-insecto que se deben dedicar para cazar avispas y cucarachas vienen dadas por las siguientes funciones de producción:

$$x = L_x^{1/2} \qquad\qquad y = 0.5L_y^{1/2}$$

Donde x representa las unidades de avispas e y las unidades de Cucarachas. Asimismo, L_x y L_y son las horas-insecto necesarias para producir x e y, respectivamente. Se le pide:

a) Halle la expresión de la FPP y la $TMgT$ a partir de ella. Interprete sus resultados.

b) Si el agente representativo de este jardín, Araña Maraña, posee una función de utilidad Cobb-Douglas, con parámetros iguales a 0.5 para ambos bienes, x e y, caracterice el equilibrio general.

Solución

a) Dado que $L_x+L_y = 100$, debemos expresar la FPP en términos de la producción de x e y; es decir, despejamos L_x y L_y de sus respectivas funciones de producción. Entonces, la FPP vendría dada por $x^2 + 4y^2 = 100$.

De aquí, para obtener la $TMgT$ tenemos que tomar diferenciales en la FPP, de modo que $TMgT = (\partial FPP/\partial x)/(\partial FPP/\partial y)$. Así obtenemos la $TMgT = x/4y$. Interpretación: La $TMgT$ nos dice la posibilidad técnica de intercambiar x por y, al mismo tiempo que seguimos empleando con eficiencia los factores productivos.

b) La $TMgS$ de Araña Maraña viene dada por $UMgx/UMgy = y/x$. En un equilibrio general, debe ocurrir que $TMgS = TMgT = p_x/p_y$. Por lo tanto, tenemos que $x^2 = 4y^2$, lo que puede reemplazarse en la FPP, obteniendo que $x =\sqrt{50}$ e $y =\sqrt{12.5}$, lo que implica que $p_x/p_y = 1/2$.

37. ⋆⋆ Sea una economía con dos empresas que producen dos bienes, x e y, de acuerdo con las siguientes funciones de producción:

$$x = \frac{L_x}{8} \qquad\qquad y = \frac{1}{5}(L_y - 2x)$$

Donde L_x y L_y son, respectivamente, las cantidades utilizadas de trabajo en la producción de los bienes x e y. Si en la economía la dotación total de trabajo es 600 unidades y el único consumidor de esta economía tiene unas preferencias representadas por la función de utilidad $U(x, y) = x^2y$, se pide:

a) Derive la expresión de la Frontera de posibilidades de producción.

b) Calcule las cantidades Pareto-óptimas en esta economía.

c) Calcule las cantidades de Equilibrio General Competitivo.

d) ¿Coinciden las cantidades de Pareto-óptimas y de equilibrio general competitivo de esta economía? ¿Por qué?

Solución

a) Para calcular la FPP se parte del conocimiento de que la cantidad de factor de producción utilizada debe ser igual al total de las dotaciones iniciales de dicho bien. Esto es: $L_x + L_y = 600$. Luego, calculamos las cantidades utilizadas del factor trabajo despejándolo de las funciones de producción:

$$L_x = 8x \qquad\qquad L_y = 5y + 2x$$

Por lo que podemos obtener las FPP de las ecuaciones anteriores: $2x + y = 120$.

b) El problema de optimización a resolver para calcular la asignación Pareto-óptima es el siguiente:

$$\text{máx}\, x^2y \qquad s.a. \quad 2x + y = 120$$

Resolviendo, $x^{OP} = y^{OP} = 40$.

c) Para el bien x, el problema a resolver es:

$$\text{máx}\, \pi_x = p_x x - p_L L_x \qquad s.a. \quad x = \frac{L_x}{8}$$

Y de la CPO se obtiene $p_x = 8p_L$. Por otro lado, para el bien y, el problema a resolver es:

$$\text{máx}\, \pi_y = p_y y - p_L L_y \qquad s.a. \quad y = \frac{1}{5}(L_y - 2x)$$

Y de la CPO obtenemos que $p_y = 5p_L$; por lo que los precios relativos son $p_x/p_y = 8/5$. Finalmente, el problema de optimización para el consumidor es el siguiente:

$$\text{máx}\, U = x^2y \qquad s.a. \quad p_x x + p_y y = 600p_L$$

Y de las primeras 2 CPO (con respecto a x e y), obtenemos:

$$\frac{2y}{x} = \frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad 10y - 8x = 0$$

Y tomando en cuenta que la asignación de equilibrio debe estar en la FPP, la solución es $x^{EGC} = 42.9$ e $y^{EGC} = 34.3$.

d) La asignación del equilibrio general competitivo no es una asignación óptima paretiana ya que estamos en presencia de un efecto externo en la producción:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2}{5} < 0$$

El efecto externo es negativo, la producción del bien x hace reducir la del bien y, por lo que, sin necesidad de resolver el problema sabemos que la cantidad de equilibrio general competitivo del bien x será excesiva y la del bien y insuficiente, en relación al óptimo de Pareto.

38. ⋆⋆ En Ica existen dos grandes sembradíos de espárragos, ambos con la siguiente función de producción Cobb-Douglas:

$$Q = K^{1/4}L^{3/4}$$

Se sabe que el sembradío A está menos mecanizado que el sembradío B, pues mientras el primero utiliza 16 unidades de capital, el segundo utiliza 625 unidades de dicho factor. Además, se sabe que la jornada de trabajo dura 10 horas y que además hay 10 capataces trabajando en el departamento. Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué sucedería si los administradores de estos sembradíos se pusieran de acuerdo para utilizar "equitativamente" las tierras y dividir las horas totales de trabajo en partes iguales entre los dos sembradíos?

b) Los administradores de los sembradíos no quedaron muy contentos con la cantidad producida. ¿Cuál sería la asignación eficiente del trabajo?

Solución

a) Primero, hay que obtener las cantidades que produciría cada sembradío en función del trabajo que utilicen, reemplazando las unidades de capital.

$$Q_1 = 2L_1^{3/4} \qquad\qquad Q_2 = 5L_2^{3/4}$$

Donde $L_1 + L_2 = L = 100$. Luego, al asignar la cantidad de trabajo en partes iguales tenemos:

$$Q = 2(50)^{3/4} + 5(50)^{3/4} = 131.6$$

b) Para determinar la asignación eficiente necesitamos igualar las productividades marginales del trabajo (debido a que las TMgST deben ser iguales y el capital es fijo)

$$\frac{\partial Q_1}{\partial L_1} = \frac{3}{2}L_1^{-1/4} = \frac{15}{4}L_2^{-1/4} = \frac{\partial Q_2}{\partial L_2} \quad \Rightarrow \quad L_1 = 0.0256L_2$$

Como $L_1 + L_2 = 100$, entonces $L_1^* = 2.6$ y $L_2^* = 97.4$, por lo que la producción total es $Q = Q_1 + Q_2 = 159.1$; es decir, al asignar de forma eficiente el trabajo, tomando en cuenta su PMg y no un criterio arbitrario de mitades, la producción se incrementa en alrededor de 20 %.

39. ⋆⋆ Considere una economía de intercambio 2x2, en la cual las preferencias y dotaciones de los 2 agentes son:

$$U_1(x) = min\{2x_1, x_2\} \qquad\qquad w_1 = (x_1, x_2) = (0, 10)$$

$$U_2(x) = min\{2x_1, x_2\} \qquad\qquad w_2 = (x_1, x_2) = (15, 10)$$

a) Muestre que si $p_1 > 0$ y $p_2 > 0$, no hay equilibrio de mercado.

b) Halle todos los equilibrios competitivos de esta economía. Justifique por qué son equilibrios los que sean hallados como tal e indiqué por qué no son equilibrios los demás.

c) Ahora, asuma que hay una empresa en la economía, con una tecnología de retornos decrecientes a escala, dada por la función de producción $y = \sqrt{x}$. El agente 1 es dueño de la empresa (él no controla la empresa, que maximiza beneficios independientemente, pero cualquier beneficio va a sus manos). Normalice $p_x = 1$. Encuentre el equilibrio competitivo de esta economía con producción (asuma que ningún precio es cero).

Solución

a) Si $p = (p_1, p_2) >> 0$, cada agente demandará ambos bienes en una proporción 1 a 2; es decir, que $2x_1 = x_2$ para ambos agentes. Por lo tanto, para que ambos mercados estén en equilibrio el consumo total del bien x_2 debe ser el doble que el consumo total del bien x_1; sin embargo, la dotación del bien x_1 es menor que la dotación del bien x_2 $(15 < 20)$.

b) Sabemos que $p_1, p_2 > 0$ no puede suceder en equilibrio, por lo que quedan dos posibilidades:

- $p_2 = 0$ y $p_1 > 0$, por lo que el agente 2, que tiene 15 unidades del bien x_1 demandará 30 unidades del bien x_2. Como en el mercado sólo hay 20 unidades del bien x_2, no existe equilibrio. Note que el agente 1 tendrá 0 de utilidad pues no tiene unidades de x_1 y sus unidades de x_2 no le permiten comprar unidades de x_1 porque $p_2 = 0$.
- $p_1 = 0$ y $p_2 > 0$, por lo que el agente 1, demandará 10 unidades del bien x_2 y por lo menos 5 unidades del bien x_1, el cual es gratis. Por lo tanto, los equilibrios competitivos de esta economía son:

$$\{p^* = (0,1), x_1^* = (5+a, 10), x_2^* = (5+b, 10) : a, b > 0 \quad \wedge \quad a+b = 5\}$$

Note que todos ellos son Pareto-eficientes, pues no es posible aumentar el bienestar de uno de los agentes sin reducir el del otro.

c) Si definimos a los precios relativos como $p = p_2/p_1$, entonces $p = p_2$, entonces la empresa resuelve el siguiente problema:

$$\text{máx}\, \pi = p\sqrt{z} - z$$

De la CPO obtenemos que $z = p^2/4$. Entonces el plan de producción es $(z, y) = (-p^2/4, p/2)$, obteniéndose beneficios de $p^2/4$.

Por otro lado, cada agente demandará cantidades en proporciones $2x_1 = x_2$, sujeto a su restricción presupuestaria $x_{i1} + px_{i2} = w_{i1} + pw_{i2} + \theta_i \pi(p)$, donde $\theta_1 = 1$ y $\theta_2 = 0$. Así, las demandas marshalianas de cada agente son:

$$(x_{11}, x_{12}) = \left(\frac{10p + \frac{p^2}{4}}{1+2p}, \frac{20p + \frac{p^2}{2}}{1+2p} \right)$$
$$(x_{21}, x_{22}) = \left(\frac{15 + 10p}{1+2p}, \frac{30 + 20}{1+2p} \right)$$

Finalmente se debe verificar que los mercados se encuentren en equilibrio. Para el bien x_1 se cumple:

$$x_{11} + x_{21} = w_{11} + w_{21} - z \quad \Rightarrow \quad \frac{10p + \frac{p^2}{4}}{1+2p} + \frac{15 + 10p}{1+2p} = 15 - \frac{p^2}{4}$$

Mientras que para el bien x_2 se cumple:

$$x_{12} + x_{22} = w_{12} + w_{22} + y \quad \Rightarrow \quad \frac{20p + \frac{p^2}{2}}{1+2p} + \frac{30 + 20}{1+2p} = 20 + \frac{p}{2}$$

Note que por la Ley de Walras basta con una de las dos, y de cualquiera obtenemos que $p = \{-5, 4\}$. Se toma la solución positiva, $p = 4$. Por lo tanto, el equilibrio competitivo es el siguiente:

$$\{p^* = (1, 4), x_1^* = (44/9, 88/9), x_2^* = (55/9, 110/9), (-z, y) = (-4, 2)\}$$

40. ⋆⋆⋆ Considere una economía con 2 bienes, 2 agentes (A y B) y 1 firma. Las preferencias de los agentes son:

$$U_A = min\{x_{A1}, x_{A2}\} \qquad\qquad U_B(x) = x_{B1}x_{B2}$$

Las dotaciones de cada agente son: $(w_{A1}, w_{A2}) = (0, 0)$ y $(w_{B1}, w_{B2}) = (0, 2)$. EL agente A es dueño de una empresa, la misma que puede usar el bien 2 como un insumo para producir el bien 1, usando la siguiente función de producción:

$$x_{F1} = 1 + x_{F2},$$

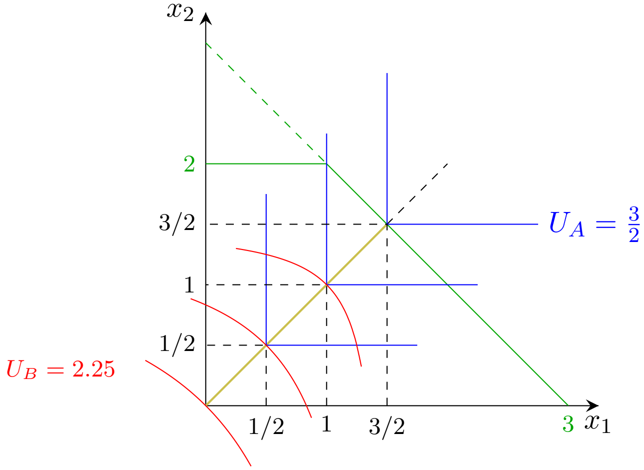
donde x_{F1} es la cantidad del bien 1 producida y x_{F2} es la cantidad del bien 2 que es usada como insumo.

a) Grafique la curva de contrato de esta economía. Identifique los niveles de utilidad que ambos agentes, A y B, alcanzan a lo largo de este conjunto.

b) Halle el equilibrio competitivo de esta economía (asuma que existe un equilibrio interior). Muestre ese equilibrio en el gráfico realizado. Normalice el precio del bien 2 a 1 u.m.

Solución

a) La forma más directa de abordar el problema es notar que la curva de contrato está definida por la proporción en la que el agente A consume los bienes 1 y 2. Dado que dicha proporción es 1, graficamente tenemos:



Donde la línea amarilla es el conjunto de todos las asignaciones Pareto-eficientes. Note que, dado que hay 2 unidades del bien 2, la producción máxima del bien 1 es 3. De ahí que la frontera de posibilidades de producción (FPP) tenga la forma de la línea verde, truncada en 2 en el eje vertical. La ecuación de la FPP está dada por la función de producción, $x_2(x1) = 1 - x_1$ (donde el valor máximo de x_2 es igual a 2).

b) La función de beneficios de la empresa de A es:

$$\pi(p) = p_1 x_{F1} - p_2 x_{F2} = p_1 + (p_1 - p_2) x_{F2}$$

Note que si $p_1 > p_2$, la empresa maximizaría beneficios produciendo tanto x_{F1} como sea posible, mientras que si $p_1 < p_2$, la empresa maximizaría beneficios produciendo una única unidad de x_{F1}. Por lo tanto, para que exista un equilibrio interior (premisa de la pregunta), debe ocurrir que $p_1 = p_2 = 1$ (normalizando precios). De ahí, obtenemos que $\pi(p) = 1$.

Luego, A maximiza sus beneficios considerando que cuenta con una riqueza igual a $p \cdot w_A + \pi(p) = 1$. Dado que para A los bienes son complementarios perfectos y considerando que $p_1 = p_2 = 1$, entonces $x^*_{A1} = x^*_{A2} = 1/2$.

B maximiza sus beneficios considerando que cuenta con una riqueza igual a $p \cdot w_B = 2p_2 = 2$. Luego, en equilibrio:

$$TMgS_{2,1} = \frac{p_1}{p_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x^*_{B1} = x^*_{B2}$$

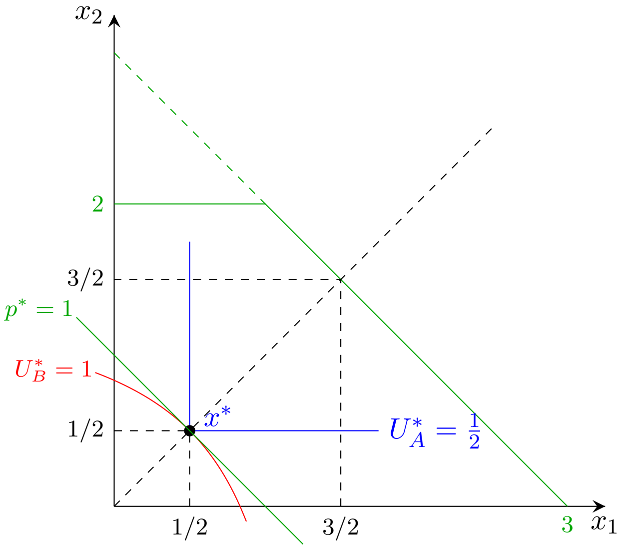
Y considerando la riqueza de B, obtenemos $x^*_{B1} = x^*_{B2} = 1$. Note que la asignación debe ser factible:

$$x_{A1} + x_{B1} = 1 + 1/2 = w_{A1} + w_{B1} + x_{F1} = 0 + 0 + x_{F1}$$

De donde obtenemos que $x_{F1} = 3/2$ y $x_{F2} = 1/2$. Por la Ley de Walras sabemos que el otro mercado también estará en equilibrio. Finalmente, el equilibrio competitivo es el siguiente:

$$EC = \{x^* = (x_A, x_B) = ((1/2, 1/2), (1, 1)), x_{F1} = 3/2, x_{F2} = 1/2, p^* = (1, 1)\}$$

La canasta x^* y el precio p^* se muestran en el siguiente gráfico.



41. ⋆⋆⋆ Una economía de dos personas, dos empresas y dos bienes está descrita por:

$$y_j = f_j(L, K) = \sqrt{LK} \quad \text{para } j \in \{1, 2\}$$

$$u_i(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2} \quad \text{para } i \in \{1, 2\}$$

Adicionalmente, la dotación de los factores de producción es $(\overline{L}_1, \overline{K}_1) = (0, 1)$ y $(\overline{L}_2, \overline{K}_2) = (1, 0)$. La participación de ambos agentes en ambas empresas es del 50 %. Si los costos de producción son $C(w, r, y_j) = 2y_j\sqrt{wr}$.

a) Especifique cuál debe ser el precio del bien j y el uso de factores en equilibrio.

b) Especifique la demanda individual de cada bien para cada individuo.

c) Normalice el precio de alguno de los factores y encuentre el equilibrio competitivo.

d) Derive la frontera de posibilidades de producción y grafique la caja de Edgeworth y el equilibrio competitivo para el mercado de bienes.

Solución

a) En equilibrio, las empresas están maximizando sus beneficios $\pi_j = p_j y_j - 2y_j\sqrt{wr}$. Por lo tanto, $p_j = 2\sqrt{wr}$. Es importante destacar que, en equilibrio, los beneficios de la empresa son cero, por lo que $y^* \geq 0$. Otro aspecto que es impotante destacar es que p_j no puede ser cero, pues de serlo, la única solución es que $y_j^* = 0$, por lo que $K_j^* = 0$ y $L_j^* = 0$ (es decir que no habría producción en la economía y por ende no habrían bienes para intercambiar).

Note que la maximización de beneficios de las empresas también implica que los factores usados para producir el bien j es:

$$\frac{K_j^*}{L_j^*} = \frac{w}{r}$$

Como $y_j^* = \sqrt{L_j^* K_j^*}$, podemos obtener que $K_j^* = y_j^*\sqrt{w/r}$ y $L_j^* = y_j^*\sqrt{r/w}$.

b) Como $p_j = 2\sqrt{wr} > 0$ para todo j, entonces $w, r > 0$, por lo que ambos agentes tienen riqueza positiva. Luego, teniendo en cuenta que los beneficios de las empresas son cero, el problema de optimización para el consumidor i es el siguiente:

$$\text{máx}\, u_i(x_{i1}, x_{i2}) = \sqrt{x_{i1}x_{i2}} \qquad s.a. \quad p_1 x_{i1} + p_2 x_{i2} = w\overline{L}_i + r\overline{K}_i$$

De donde se puede obtener que la demanda del agente i del bien j es la siguiente:

$$x_{ij}^* = \frac{1}{2p_j}(w\overline{L}_i + r\overline{K}_i) > 0$$

Dado que $p_j = 2\sqrt{wr}$, la demanda de cada agente es igual a:

$$x_{11}^* = x_{12}^* = \frac{r}{2p_j} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{r}{w}} \qquad \wedge \qquad x_{21}^* = x_{22}^* = \frac{w}{2p_j} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{w}{r}}$$

c) Si normalizamos $r = 1$, tenemos lo siguiente:

$$x_{11}^* = x_{12}^* = \frac{1}{4\sqrt{w}} \qquad \wedge \qquad x_{21}^* = x_{22}^* = \frac{\sqrt{w}}{4}$$

Por lo tanto, la condición de equilibrio en el mercado de producto es la siguiente:

$$y_j^* = x_{1j}^* + x_{2j}^* = \frac{1}{4\sqrt{w}} + \frac{\sqrt{w}}{4} = \frac{1+w}{4\sqrt{w}}$$

Luego, la demanda de factores para un bien j es:

$$K_j^* = \frac{1+w}{4\sqrt{w}}\left(\frac{1}{\sqrt{w}}\right) = \frac{1+w}{4w} \qquad\qquad L_j^* = \frac{1+w}{4\sqrt{w}}\left(\sqrt{w}\right) = \frac{1+w}{4}$$

Para que este se trate de un equilibrio competitivo, la asignación de factores debe ser factible:

$$K_1 + K_2 = \overline{K} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1+w}{4w} + \frac{1+w}{4w} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad w = 1$$

Note que dicho w también permite que el mercado de trabajo se encuentre en equilibrio. Finalmente, como $w = r = 1$, entonces $p_1 = p_2 = 2$, que $x_{11}^* = x_{12}^* = x_{21}^* = x_{22}^* = 1/4$ y que $y_1^* = y_2^* = K_1^* = K_2^* = L_1^* = L_2^* = 1/2$, el cual es el único equilibrio competitivo.

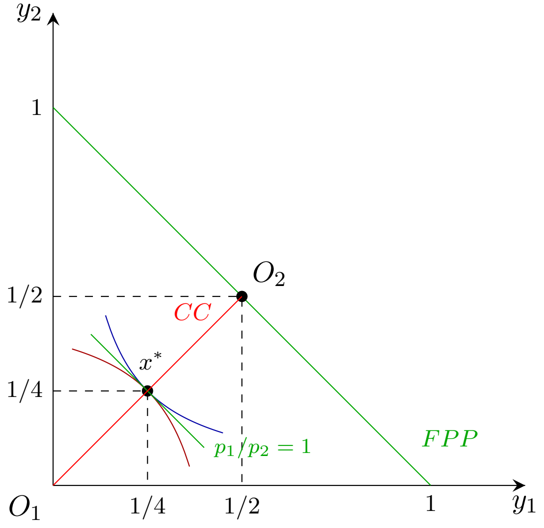
d) Para derivar la FPP debemos recordar que dicha frontera se obtiene de la combinación óptima de factores. Dichas combinaciones óptimas pueden ser capturadas a través de la curva de contrato para el mercado de factores:

$$TMgT_{LK}^1 = TMgT_{LK}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{K_1}{L_1} = \frac{K_2}{L_2}$$

Dado que $L_1 + L_2 = 1$ y $K_1 + K_2 = 1$, la combinación óptima de factores implica que $K_1 = L_1$ y $K_2 = L_2$. Por lo tanto, la producción del bien j es:

$$y_j = \sqrt{L_j K_j} = \sqrt{L_j^2} = L_j$$

Finalmente, como la cantidad total de trabajo $L_1 + L_2 = 1$, la FPP es $y_1 + y_2 = 1$. Gráficamente, el equilibrio general es el siguiente (es fácil mostrar que la curva de contrato del consumo, CC, es una recta de pendiente 1):



42. ⋆⋆⋆ En una economía con producción con 2 consumidores, A y B, y 2 bienes (x e y), las preferencias están dadas por:

$$U_A(x) = x_{A1}x_{A2} \qquad\qquad U_B(x) = x_{B1}x_{B2}$$

Las dotaciones de cada bien son: $\omega_1 = (\omega_{A1}, \omega_{B1}) = (8, 8)$ y $\omega_2 = (\omega_{A2}, \omega_{B2}) = (0, 0)$. Hay 2 empresas, cada una de las cuales puede usar el bien x_1 como insumo para producir el bien x_2. Cuando la empresa 1 usa z_1 unidades del insumo, produce $q_1 = 2\sqrt{z_1}$ y cuando la empresa usa z_2 unidades del insumo, produce $q_2 = z_2/2$. Cada consumidor posee el 50 % de la propiedad de cada empresa. Normalice el precio del bien 2 a 1.

a) Halle el equilibrio general competitivo de esta economía (consumo, producción, precios, beneficios). ¿Es Pareto óptimo? (¿por qué?)

b) Grafique el equilibrio hallado en la parte a) e indique claramente cuál es el equilibrio de consumo, cuál es el equilibrio de producción de cada empresa y el ratio de precios óptimos en cada caso (3 gráficos).

¿Si la dotación del bien 2 fuera $\omega_2 = (\omega_{A2}, \omega_{B2}) = (2, 0)$, el consumidor A sería menos feliz o más feliz? (solo basta una respuesta intuitivamente correcta).

<u>Solución</u>

a) De la maximización de beneficios tenemos que $PMg^1(z) = 1/\sqrt{z_1} = PMg^2(z) = 1/2 = p_x/p_y$. Por lo tanto, obtenemos que $z_1 = 4$ y $q_1 = 4$.

$$\pi_1 = 4p_y - 2p_x \qquad\qquad \pi_2 = \left(\frac{z_2}{2}\right)p_y - z_2 p_x = 0$$

Luego, de la maximización de la utilidad de los consumidores tenemos que $TMgS^A_{y,x} = y_A/x_A = TMgS^B_{y,x} = y_B/x_B = p_x/p_y$. Finalmente, de la condición de factibilidad tenemos:

$$\begin{aligned} x_A + x_B + z_1 + z_2 =& 16 \quad \Rightarrow \quad x_A + x_B + z_2 = 12 \\ y_A + y_B =& q_1 + q_2 = 4 + \frac{z_2}{2} \end{aligned}$$

Usando la información previa obtenemos:

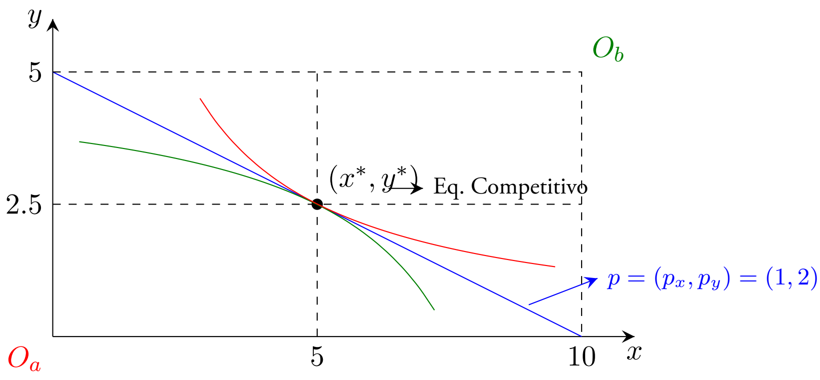
$$y_A = 0.5x_A \quad y_B = 0.5x_B \quad p_y = 2p_x$$

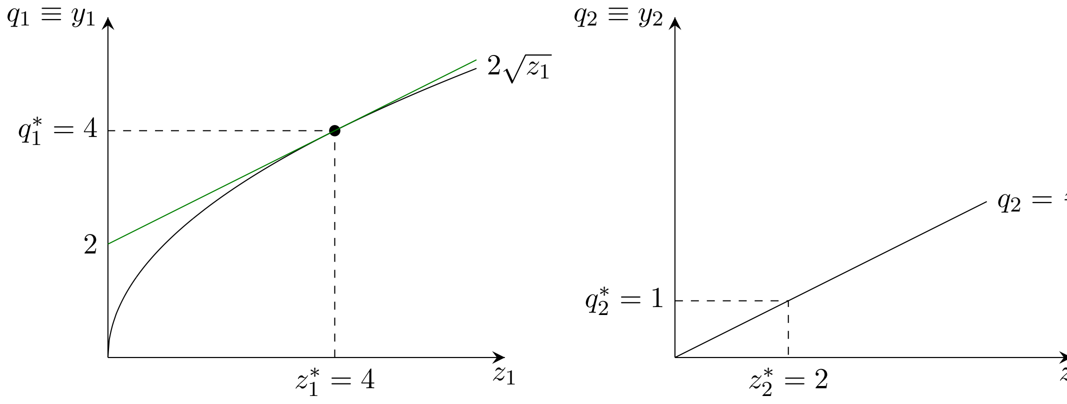
$$\begin{aligned} z_1 = 4 \quad &, \quad z_2 = 2 \\ q_1 = 4 \quad &, \quad q_2 = 1 \\ p_y = 2 \quad &, \quad p_x = 1 \\ \pi_1 = 8 - 4 = 4 \quad &, \quad \pi_2 = 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo la maximización de utilidad del consumidor en la restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned} x_A = 0.5\frac{8p_x + 0.5(4) + 0.5(0)}{p_x} = 5 \quad &, \quad y_A = 2.5 \\ x_B = 0.5\frac{8p_x + 0.5(4) + 0.5(0)}{p_x} = 5 \quad &, \quad y_B = 2.5 \end{aligned}$$

b) Gráficamente tenemos:





Hemos graficado la caja de Edgeworth para el consumo, e indicado la tangencia de los precios relativos a las curvas de indiferencia de A y B. Además, el equilibrio en producción del bien q_1 y el equilibrio en producción del bien q_2.

Para la segunda parte (intuición), solo se espera que indiquen qué pasa con las cantidades consumidas de x_A e y_A (aumentan: son bienes normales), con lo cual A es más feliz ahora.

43. ⋆⋆ Imagine que en la economía del jardín de la UP interactúan Araña Maraña y Hormiguita Edelmira, quienes buscan maximizar sus utilidades. Si la dotación inicial de Araña Maraña es de 15 avispas secas y la de Hormiguita Edelmira es de 10 cucarachas aplastadas; y además, las funciones de utilidad son las siguientes:

$$U_M = \frac{1}{4}\ln(A) + \frac{1}{5}\ln(C) \qquad\qquad U_E = A^{1/2}C^{1/2}$$

a) Halle y grafique la curva de contrato.

b) Halle el equilibrio competitivo e indique si es Pareto-óptimo. Grafique los resultados.

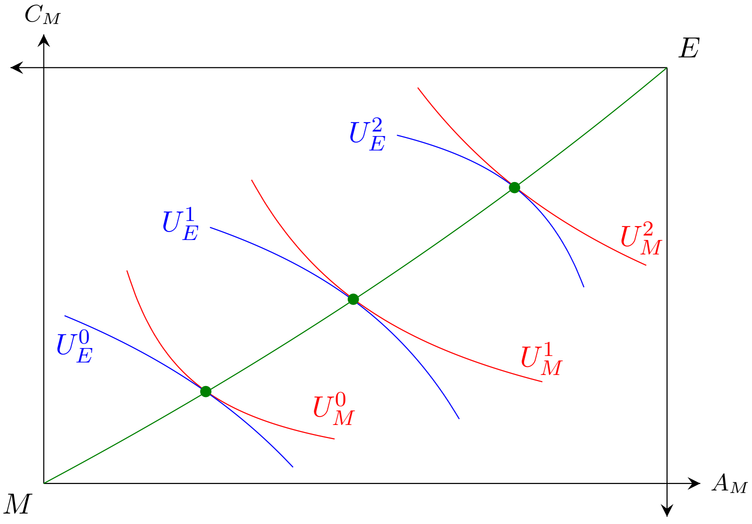
Solución

a) Las asignaciones que forman parte de la curva de contrato cumplen la siguiente condición:

$$\frac{UMg_A^M}{UMg_C^M} = \frac{UMg_A^E}{UMg_C^E} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{5C_M}{4A_M} = \frac{C_E}{A_E}$$

Dado que la dotación total de la economía es $w = (A, C) = (15, 10)$, podemos obtener la curva de contrato de la siguiente manera:

$$\frac{5C_M}{4A_M} = \frac{10 - C_M}{15 - A_M} \qquad \Rightarrow \qquad C_M = \frac{40A_M}{75 - A_M}$$



b) Para Maraña tenemos el siguiente lagrangiano:

$$L = \frac{1}{4}\ln(A) + \frac{1}{5}\ln(C) + \lambda(15p_A - Ap_A - Cp_c)$$

Y las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial L}{\partial A} = \frac{1}{4A} - \lambda p_A = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial C} = \frac{1}{5C} - \lambda p_C = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 15p_A - Ap_A - Cp_c = 0$$

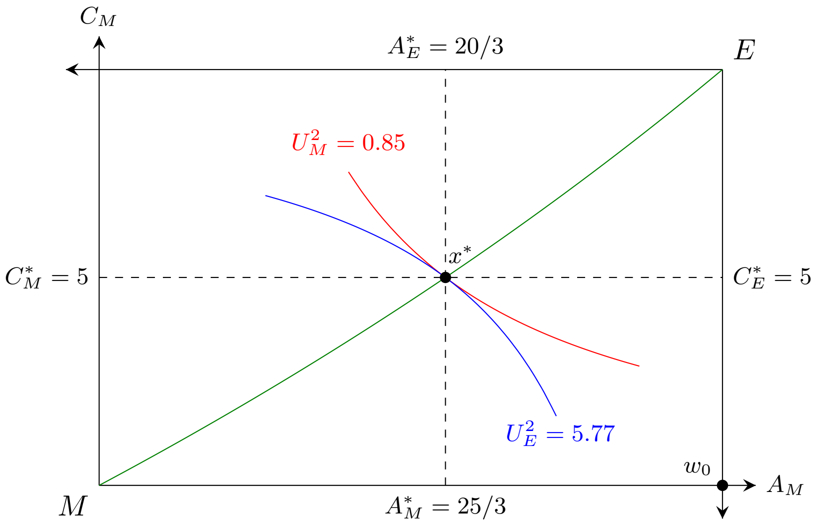
De donde $A_M = 25/3$ y $C_M = 20p_A/3p_C$. Análogamente, para Edelmira tenemos el siguiente lagrangiano:

$$L = A^{0.5}C^{0.5} + \lambda(10p_C - Ap_A - Cp_c)$$

De donde $C_E = 5$ y $A_E = 5p_C/p_A$. A continuación, debemos verificar si la asignación es factible:

$$A_M + A_E = \frac{25}{3} + \frac{5p_C}{p_A} = 15 \qquad \wedge \qquad C_M + C_E = \frac{20p_A}{3p_C} + 5 = 10$$

Y de ambas condiciones puede concluirse que $p_C/p_A = 4/3$, por lo que $(C_M, A_M) = (5, 25/3)$ y $(C_E, A_E) = (5, 20/3)$. Finalmente, sabemos por el primer teorema del bienestar que este equilibrio es Pareto-óptimo. Gráficamente:



44. ⋆⋆⋆ En la economía del jardín de la UP, sabemos que existe una función de utilidad que depende de dos agentes, Araña Maraña (A) y Hormiguita Edelmira (B):

$$W = \frac{1}{2}\ln(U_A) + \frac{1}{2}\ln(U_B)$$

Estos agentes tienen preferencias diferentes por el consumo de avispas de chocolate (x) y cucarachas azucaradas (y):

$$U_A = (x_A^{0.8})(y_A^{0.2}) \qquad\qquad U_B = (x_B^{0.2})(y_B^{0.8})$$

Además, existen dos industrias (una para cada tipo de bien) con diferentes tecnologías:

$$X = (K_x^{0.2})(L_x^{0.8}) \qquad\qquad Y = (K_y^{0.8})(L_y^{0.2})$$

Se sabe que la cantidad total de horas disponibles es $\overline{L} = 35$ y la cantidad total de máquinas disponibles es $\overline{K} = 25$. Asimismo se sabe que Araña Maraña trabaja 20 horas ($L^A = 20$) y alquila 10 máquinas a los insectos capitalistas ($K^A = 10$). Por otro lado, Hormiguita Edelmira trabaja 15 horas ($L^B = 15$) y alquila 15 máquinas a los insectos capitalistas ($K^B = 15$). Se le pide:

a) Halle el óptimo de Pareto.

b) Halle la Curva de Contrato entre Araña Maraña y Hormiguita Edelmira asumiendo que se produce en el óptimo de Pareto, desde la perspectiva de Araña Maraña (A). ¿Cuál es la valoración relativa (ratio de precios) entre las avispas de chocolate (x) y las cucarachas azucaradas (y) en el óptimo de Pareto? ¿Qué bien es más valorado?

c) Grafique la Caja de Edgeworth con producción a partir de las partes a) y b), de manera detallada.

Debido a una fumigación, Araña Maraña y Hormiguita Edelmira desaparecieron de la economía del jardín de la UP junto con los productores, dejando en la economía dotaciones totales de avispas de chocolate (X^*_{op}) y cucarachas azucaradas (Y^*_{op}) iguales a las óptimo paretianas. Días más tarde, aparecen Mariquita Martina (C) y Coco el Topo (D) como nuevos agentes representativos de esta economía. Sus preferencias se ven reflejadas de la siguiente la forma:

$$U_C = \text{mín}\{3x_C/8, 5y_C/2\} \qquad\qquad U_D = 6x_D + 9y_D$$

Se sabe, además, que aleatoriamente Mariquita Martina y Coco el Topo se encontraron con dotaciones iniciales de avispas de chocolate y cucarachas azucaradas. Luego de recolectar las dotaciones totales de ambos bienes, Mariquita Martina se encontró con la mitad de avispas de chocolate (x^o_C) que Coco el Topo (x^o_D); mientras que Coco el Topo consiguió en su exploración la mitad de cucarachas azucaradas (y^o_D) que Mariquita Martina (y^o_C).

d) A partir de una dotación inicial de bienes igual a la producción óptima Paretiana encontrada en a), encuentre (i) la Curva de Contrato desde la perspectiva de Mariquita Martina (C), (ii) el óptimo de distribución de Pareto dadas las condiciones iniciales de este nuevo set de la economía y (iii) la zona de negociación desde la perspectiva de Coco el Topo (D). Grafique la Caja de Edgeworth de manera detallada para este caso.

Solución

a) Para hallar el óptimo de Pareto, resolvemos el siguiente problema de optimización:

$$\max_{x_i, y_i, L_i, K_i} W = \frac{1}{2}\ln(U_A) + \frac{1}{2}\ln(U_B)$$

Sujeto a:

$$U_A = (x_A^{0.8})(y_A^{0.2})$$
$$U_B = (x_B^{0.2})(y_B^{0.8})$$
$$x_A + x_B = X = (K_x^0.2)(L_x^{0.8})$$
$$y_A + y_B = Y = (K_y^0.8)(L_y^{0.2})$$
$$K_x + K_y = 25$$
$$L_x + L_y = 35$$

Por lo que el lagrangiano será:

$$L = \frac{1}{2}\ln(x_A^{0.8}y_A^{0.2}) + \frac{1}{2}\ln(x_B^{0.2}y_B^{0.8}) + \lambda_1[K_x^{0.2}L_x^{0.8} - x_A - x_B] +$$
$$\lambda_2[K_y^{0.8}L_y^{0.2} - y_A - y_B] + \lambda_3[25 - K_x - K_y] + \lambda_4[35 - L_x - L_y]$$

y desagregando se obtiene:

$$L = \frac{0.8}{2}\ln(x_A)\frac{0.2}{2}(y_A) + \frac{0.2}{2}\ln(x_B) + \frac{0.8}{2}\ln(y_B) + \lambda_1[K_x^{0.2}L_x^{0.8} - x_A - x_B] +$$
$$\lambda_2[K_y^{0.8}L_y^{0.2} - y_A - y_B] + \lambda_3[25 - K_x - K_y] + \lambda_4[35 - L_x - L_y]$$

Utilizando las derivadas con respecto a x e y:

$$\frac{\partial L}{\partial x_A} = \frac{0.8}{2x_A} - \lambda_1 = 0 \tag{.14}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y_A} = \frac{0.2}{2y_A} - \lambda_2 = 0 \tag{.15}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_B} = \frac{0.2}{2x_B} - \lambda_1 = 0 \tag{.16}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y_B} = \frac{0.8}{2y_B} - \lambda_2 = 0 \tag{.17}$$

Por lo que tenemos:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = TmgS^A = \frac{\frac{0.8}{2x_A}}{\frac{0.2}{2y_A}} = 4\frac{y_A}{x_A}$$
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = TmgS^B = \frac{\frac{0.2}{2x_B}}{\frac{0.8}{2y_B}} = \frac{y_B}{4x_B}$$

Asimismo, (.14) y (.16):

$$\frac{0.8}{2x_A} = \lambda_1 = \frac{0.2}{2x_B} \quad \Rightarrow \quad x_A = 4x_B$$

Y de (.15) y (.17):

$$\frac{0.2}{2y_A} = \lambda_2 = \frac{0.8}{2y_B} \quad \Rightarrow \quad y_A = \frac{1}{4}y_B$$

Con las restricciones de producción y las relaciones x_A, x_B, y_A e y_B:

$$\begin{aligned}
x_A + x_B =& X = (K_x^{0.2})(L_x^{0.8}) \\
4x_B + x_B =& X = (K_x^{0.2})(L_x^{0.8}) \\
x_B =& \frac{K_x^{0.2}L_x^{0.8}}{5} \\
y_A + y_B =& Y = (K_y^{0.8})(L_y^{0.2}) \\
\frac{1}{4}y_B + y_B =& Y = K_y^{0.8}L_y^{0.2} \\
y_B =& \frac{4}{5}K_y^{0.8}L_y^{0.2}
\end{aligned}$$

Por el lado de producción, utilizando las derivadas contra los factores de producción:

$$\begin{aligned}
L = \frac{0.8}{2}\ln(x_A) + \frac{0.2}{2}\ln(y_A) + \frac{0.2}{2}\ln(x_B) + \frac{0.8}{2}\ln(y_B) + \lambda_1[K_x^{0.2}L_x^{0.8} - x_A - x_B] \\
+\lambda_2[K_y^{0.8}L_y^{0.2} - y_A - y_B] + \lambda_3[25 - K_x - K_y] + \lambda_4[35 - L_x - L_y]
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_x} = 0.2\lambda_1 K_x^{-0.8}L_x^{0.8} - \lambda_3 = 0 \tag{.18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial L_x} = 0.8\lambda_1 K_x^{0.2}L_x^{-0.2} - \lambda_4 = 0 \tag{.19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_y} = 0.8\lambda_2 K_y^{-0.2}L_y^{0.2} - \lambda_3 = 0 \tag{.20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial L_y} = 0.2\lambda_2 K_y^{0.8}L_y^{-0.8} - \lambda_4 = 0 \tag{.21}$$

Por el teorema de la Envolvente o (.18) y (.20), podemos sacar la razón marginal de sustitución (pendiente de la FPP) a partir de ratios de productividades marginales de K o de L. En este caso, utilizando K:

$$RmgS = \frac{PmgK_y}{PmgK_x} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{0.8K_y^{-0.2}L_y^{0.2}}{0.2K_x^{-0.8}L_x^{0.8}}$$

Por teoría, sabemos que:

$$TmgS^A = TmgS^B = RmgS = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Utilizando $TmgS^B = RmgS$:

$$\frac{y_B}{4x_B} = \frac{0.8K_y^{-0.2}L_y^{0.2}}{0.2K_x^{-0.8}L_x^{0.8}}$$

Y reemplazando y_B y x_B en función a la producción total:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left[\frac{\frac{4}{5}K_y^{0.8}L_y^{0.2}}{\frac{K_x^{0.2}L_x^{0.8}}{5}})\right] &= \frac{0.8K_y^{-0.2}L_y^{0.2}}{0.2K_x^{-0.8}L_x^{0.8}} \\
\frac{K_y^{0.8}L_y^{0.2}}{K_x^{0.2}L_x^{0.8}} &= \frac{0.8K_y^{-0.2}L_y^{0.2}}{0.2K_x^{-0.8}L_x^{0.8}} \\
\frac{K_y^{0.8}}{K_x^{0.2}} &= \frac{0.8K_y^{-0.2}}{0.2K_x^{-0.8}} \\
K_y &= 4K_x
\end{aligned}$$

Utilizando la restricción de dotación inicial de K:

$$K_x + K_y = 25 \quad \wedge \quad K_x + 4K_x = 25 \quad \Rightarrow \quad K_x = 5\ ,\ K_y = 20$$

Asimismo, por el teorema de la Envolvente o de (.12) y (.21), también podemos sacar la razón marginal de sustitución (pendiente de la FPP) a partir de ratios de productividades marginales de L. En este caso:

$$RmgS = \frac{PmgL_y}{PmgL_x} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{0.2K_y^{0.8}L_y^{-0.8}}{0.8K_x^{0.2}L_x^{-0.2}}$$

Utilizando ahora $TmgS^B = RmgS$:

$$\begin{aligned}
\frac{y_B}{4x_B} &= \frac{0.2K_y^{0.8}L_y^{-0.8}}{0.8K_x^{0.2}L_x^{-0.2}} \\
\frac{K_y^{0.8}L_y^{0.2}}{K_x^{0.2}L_x^{0.8}} &= \frac{0.2K_y^{0.8}L_y^{-0.8}}{0.8K_x^{0.2}L_x^{-0.2}} \\
\frac{L_y^{0.2}}{L_x^{0.8}} &= \frac{0.2L_y^{-0.8}}{0.8L_x^{-0.2}} \\
L_y &= \frac{1}{4}L_x
\end{aligned}$$

Utilizando la restricción de dotación inicial de L:

$$L_x + L_y = 35 \quad \wedge \quad L_x + \frac{1}{4}L_x = 35 \quad \Rightarrow \quad L_x = 28\ ,\ L_y = 7$$

y, utilizando las funciones de producción, tenemos:

$$X = (K_x^{0.2})(L_x^{0.8}) = (5^{0.2})(28^{0.8}) = 19.84 \quad \Rightarrow \quad x_B = \frac{X}{5} = 3.97\ ,\ x_A = 15.87$$

$$Y = (K_y^{0.8})(L_y^{0.2}) = (20^{0.8})(7^{0.2}) = 16.21 \quad \Rightarrow \quad y_B = \frac{4}{5}Y = 12.97\ ,\ y_A = 3.24$$

b) Para hallar la curva de contrato entre Araña Maraña y Hormiguita Edelmira, se igualan sus tasas marginales de sustitución sin considerar la función de utilidad de la sociedad (W):

$$\begin{aligned} TmgS^A &= TmgS^B \\ 4\frac{y_A}{x_A} &= \frac{y_B}{4x_B} \end{aligned}$$

Asumiendo que se produce en el óptimo de Pareto:

$$\begin{aligned} x_A + x_B &= X^* = 19.84 \\ y_A + y_B &= Y^* = 16.21 \end{aligned}$$

Dejando todo en función de Araña Maraña:

$$\begin{aligned} 4\frac{y_A}{x_A} &= \frac{16.21 - y_A}{4(19.84 - x_A)} \\ 16y_A(19.84 - x_A) &= x_A(16.21 - y_A) \\ 317.44y_A - 16y_Ax_A &= 16.21x_A - x_Ay_A \\ 317.44y_A - 15y_Ax_A &= 16.21x_A \\ y_A &= \frac{16.21x_A}{317.44 - 15x_A} \end{aligned}$$

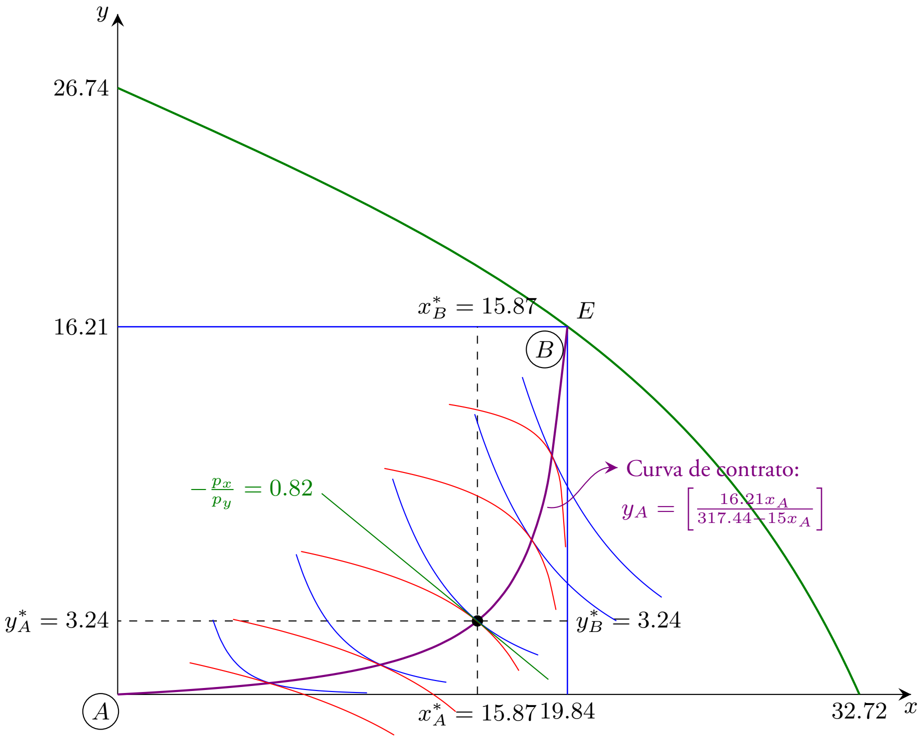
Adicionalmente, sabemos que en el óptimo:

$$\begin{aligned} TmgS^A = TmgS^B = RmgS &= \frac{P_x}{P_y} \\ \frac{P_x}{P_y} = 4\frac{y_A}{x_A} = 4\frac{3.24}{15.87} &= 0.81719 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se valora más las cucarachas azucaradas (Y) que a las hormigas avispas de chocolate (X) ya que $P_x < P_y$.

c) Para el gráfico, debemos hallar los extremos de la FPP:

- Si $Y = 0$, $X = (25^{0.2})(35^{0.8}) = 32.722$
- Si $X = 0$, $Y = (25^{0.8})(35^{0.2}) = 26.74$



d) Debido a que un agente muestra preferencias de bienes perfectamente complementarios y el otro, preferencias de bienes perfectamente sustitutos, la curva de contrato será la obtenida por la función de utilidad de bienes complementarios:

$$\frac{3x_C}{8} = \frac{5y_C}{2}$$
$$\frac{2(3x_C)}{5(8)} = y_C$$
$$y_C = \frac{3x_C}{20}$$

Para obtener la Curva de Contrato desde la perspectiva de Coco el Topo (D), se reemplaza la restricción de dotaciones, $x_C + x_D = 19.84$ y $y_C + y_D = 16.21$, obteniendo:

$$
\begin{aligned}
16.21 - y_D =& \frac{3(19.84 - x_D)}{20} \\
y_D = 16.21 -& \frac{(3(19.84 - x_D)}{20} \\
y_D = 13.234 +& \frac{3x_D}{20}
\end{aligned}
$$

Además, sabemos que en el óptimo de distribución ocurre $2x_c^o = x_D^o$. Por lo que, incorporándolo en la restricción de dotaciones iniciales:

$$
\begin{aligned}
x_C^o + x_D^o &= X_{op}^* = 19.84 \\
x_C^o + 2x_C^o &= 19.84 \\
x_C^o &= \frac{19.84}{3} = 6.61 \\
x_D^o &= 19.84 - 6.61 = 13.23
\end{aligned}
$$

Además, también se sabe que $2y_D^o = y_C^o$. Incorporando esto en la restricción de dotaciones iniciales tenemos:

$$
\begin{aligned}
y_C^o + y_D^o &= Y_{op}^* = 16.21 \\
2y_D^o + y_D^o &= 16.21 \\
y_D^o &= \frac{16.21}{3} = 5.4 \\
y_C^o &= 16.21 - 5.4 = 10.81
\end{aligned}
$$

Adicionalmente, Mariquita Martina (C) muestra el siguiente programa de optimización:

$$
\text{máx}\, U_C = min\left\{\frac{3x_C}{8}, \frac{5y_C}{2}\right\} \qquad \text{s.a.:} \quad P_x x_C + P_y y_C \leq P_x(6.61) + P_y(10.8)
$$

de donde obtenemos que:

$$
\frac{3x_C}{8} = \frac{5y_C}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x_C = \frac{20y_C}{3}
$$

Luego, en la restricción presupuestaria:

$$
P_x\left(\frac{20y_C}{3}\right) + P_y y_C = P_x(6.61) + P_y(10.81)
$$

de donde obtenemos las demandas:

$$y_C^* = \frac{P_x(6.61) + P_y(10.81)}{\frac{20}{3}P_x + P_y}$$
$$x_C^* = \frac{20}{3}\left[\frac{P_x(6.61) + P_y(10.81)}{\frac{20}{3}P_x + P_y}\right]$$

Por otro lado, Coco el Topo (D) enfrenta el siguiente programa de optimización:

$$\text{máx}\, U_D = 6x_D + 9y_D \quad s.a. \quad P_x x_D + P_y y_D \leq P_x(13.23) + P_y(5.4)$$

Donde:

$$TmgS = \frac{P_x}{P_y} = \frac{6}{9}$$

Constante, dada la naturaleza sustituta en las preferencias del agente D. Así, de las demandas del agente C, se tiene que:

$$y_C^* = \frac{P_x(6.61) + P_y(10.81)}{\frac{20}{3}P_x + P_y} = \frac{\frac{P_x}{P_y}(6.61) + 10.81}{\frac{20P_x}{3P_y} + 1}$$
$$y_C^* = \frac{\left(\frac{6}{9}\right)6.61 + 10.81}{\frac{20}{3}\left(\frac{6}{9}\right) + 1} = 2.79$$
$$x_C^* = \left(\frac{20}{3}\right)2.79 = 18.63$$

Por lo tanto, tenemos:

$$y_D^* = 16.21 - y_C^* = 14.42$$
$$x_D^* = 19.84 - x_C^* = 1.21$$

Por lo tanto, la zona de negociación para Coco el Topo (D) se encontrará en un segmento de la curva de contrato:

$$y_D = 13.234 + \frac{3x_D}{20}$$

Válido para un tramo de x_D. Dada la naturaleza de la Caja de Edgeworth, la zona de negociación será:

- Con respecto a x_D: $x_{min} \leq x_D \leq x_{max}$. Donde el valor mínimo de x_D se da cuando Mariquita Martina (C) obtiene el máximo incremento en utilidad asumiendo constante el nivel de utilidad inicial de Coco el Topo (D). Este nivel es el mismo que el óptimo de Pareto:

$$x_{min} = 1.21 = x_D^*$$

El valor máximo de x_D se da cuando Coco el Topo (D) obtiene el máximo incremento en utilidad asumiendo constante el nivel de utilidad inicial de Mariquita Martina (C). Este nivel es el mismo a la dotación inicial:

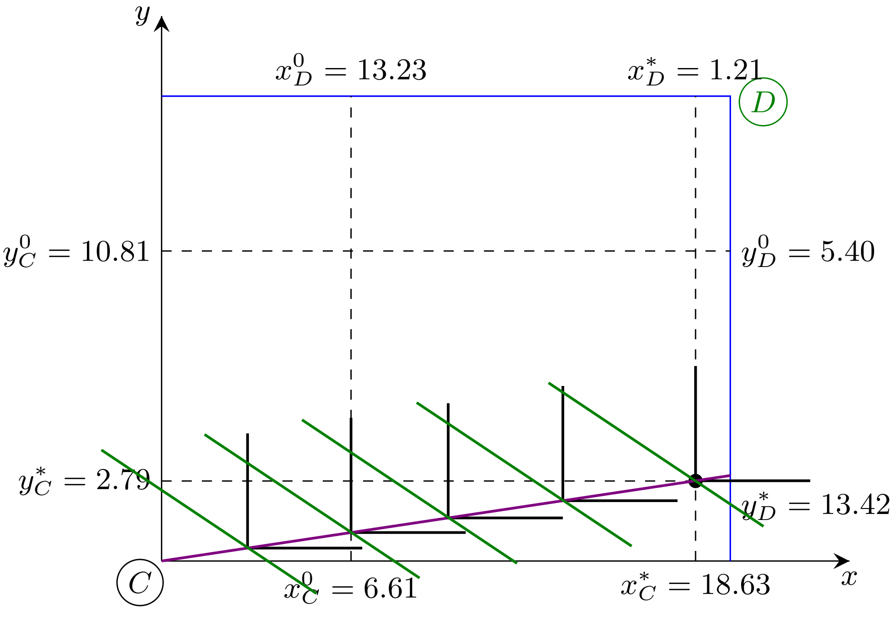
$$x_{max} = 13.23 = x_D^o$$

con lo que tenemos que $1.21 \leq x_D \leq 13.23$

- Con respecto a y_D: $y_{min} \leq y_D \leq y_{max}$. Por lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} 13.234 + \frac{3x_{min}}{20} \leq & y_D \leq 3.234 + \frac{3x_{max}}{20} \\ 13.234 + \frac{3(1.21)}{20} \leq & y_D \leq 3.234 + \frac{3(13.23)}{20} \\ 13.42 \leq & y_D \leq 15.22 \end{aligned}$$

Gráficamente, tenemos:



Referencias