3 - Juegos repetidos

1. ⋆ Juan está alarmado porque Pedro, su socio en la colusión de un juego repetido, es un hombre de avanzada edad y no goza de buena salud. Pedro lo tranquiliza y le señala: "No tienes de qué preocuparte. Cuando yo no esté, mi hijo Pablo continuará con nuestro convenio. Después de todo, las condiciones del juego seguirán siendo las mismas" ¿Puede Juan estar tranquilo de que el acuerdo se mantendrá?

   Solución

   Juan no puede estar seguro de que el acuerdo se mantendrá. Por ejemplo, considere dos escenarios:

   - Puede darse el caso de que a Pedro no le importe el bienestar de su hijo. Es por ello que se desvía en su último periodo de vida, pues no le importa que su hijo reciba el castigo (el horizonte de Pedro es finito).
   - Pablo podría tener un factor de descuento (que refleja su paciencia) menor al de su padre. Ello lo llevaría, potencialmente, a tener incentivos a desviarse del acuerdo colusivo, aunque su padre nunca lo haya hecho.

2. ⋆⋆ Analice la veracidad del siguiente enunciado: "Una estrategia que es estrictamente dominada en un juego estático, G, nunca puede ser usada como parte de un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos cuando G se repite finitas veces, porque si es estrictamente dominada en el juego estático, también lo será en el juego repetido".

   Solución

   El enunciado es falso. Como se describió en la pregunta 6, una estrategia estrictamente dominada puede usarse en la repetición t si existen por lo menos dos equilibrios de Nash en el juego estático, pero nunca en el último periodo; es decir, Si hay T periodos, los jugadores podrían usar la estrategia estrictamente dominada hasta el periodo $T-1$. Ejemplo:

	a	b	c
A	$(10,10)$	$(0,11)$	$(-1,-1)$
B	$(11,0)$	$(12,12)$	$(0,0)$
C	$(-1,-1)$	$(0,0)$	$(1,1)$

En esta matriz de pagos, las estrategias A y a son estrictamente dominadas por B y b, respectivamente. Sin embargo, para $T=2$, el perfil de estrategias donde se juega (A,a) en el primer periodo y (B,b) en el segundo es sostenible si se utiliza el perfil (C,c) como castigo por desviarse en el primer periodo para una tasa de descuento de $\delta = 1/11$ (¡demuéstrelo!).

3. $\star$ Explique por qué en el Dilema del Prisionero repetido dos veces, la estrategia del gatillo que usa "no confesar" como estrategia de cooperación no es un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Luego, generalice a $T<\infty$.

Solución

Una estrategia del gatillo tiene la siguiente forma: "i juega callar en $t=1$. En $t\geq 2$, juega $Callar$ si el perfil resultante en $t-1$ fue $(Callar, Callar)$, de otro modo, juega $Confesar$".

Note que, cuando $t=2$, el perfil $(Callar, Callar)$ no es posible pues no existirán periodos posteriores para la aplicación del castigo por la no cooperación, por lo que se debe jugar el equilibrio de Nash $(Confesar, Confesar)$. Luego, en $t=1$ se conoce que en $t=2$ el perfil resultante será $(Confesar, Confesar)$, independientemente de la acción que tomen en dicha etapa, por lo que también se jugará el equilibrio de Nash.

Así pues, se observa que el perfil de estrategias donde ambos jugadores juegan la estrategia del gatillo no es un $ENPS$, pues ambos jugadores tienen incentivos a jugar $Confesar$ siempre.

Ahora supongamos que el juego se repite una cantidad finita de veces ($T<\infty$). Lo anteriormente descrito sigue siendo válido para el último periodo T y la penúltima etapa $T-1$. En $T-2$, como i sabe que $-i$ jugará $Confesar$ en $T-1$, independientemente de lo que haga, no tendrá incentivos a cooperar (pues el premio por hacerlo no se aplicará) y preferirá $Confesar$. Finalmente, si se realiza el mismo análisis hasta $T=1$, se observará que ambos jugadores tendrán incentivos a jugar $Confesar$ para todo T, por lo que la estrategia del gatillo no es $ENPS$.

4. $\star$ Considere un juego estático de dos jugadores, cada uno con dos estrategias disponibles. En este juego, existe un solo equilibrio de Nash, el cual brinda menores ganancias que

otro perfil de estrategias donde los jugadores cooperan. Si el juego se repite infinitas veces, comente qué pasa con la probabilidad de cooperación, cuando la tasa de descuento se acerca a 0 (la impaciencia aumenta).

Solución

Consideremos el siguiente juego estático:

	A_2	B_2
A_1	(x, x)	$(y+1, 0)$
B_2	$(0, y+1)$	(y, y)

donde $0 < x < y$. Este juego cuenta con las características descritas en el enunciado: el único equilibrio de Nash es el perfil (A_1, A_2), que otorga un pago de x, que es menor que el pago generado por el perfil de cooperación (B_1, B_2), y.

Cualquier estrategia que permita que el perfil de cooperación, (B_1, B_2), se repita en cada periodo otorgará el siguiente pago $\pi^c = y + y\delta + y\delta^2 + y\delta^3 + ... = y/(1+\delta)$; sin embargo, a medida que $\delta \to 0$ dicho pago tiende a y. Esto ocurre porque un δ cercano a cero denota impaciencia o preferencia por el presente.

Por lo tanto, mientras δ se acerca a cero la probabilidad de cooperación tiende a cero, pues el jugador juega cada repetición como si fuese la última (no le importa lo que viene más adelante), por lo que siempre querrá jugar su mejor respuesta, A_1, resultando en el equilibrio de Nash.

5. $\star$ Si el siguiente juego estático se juega dos veces:

	I	D
A	$(4, 4)$	$(1, 1)$
B	$(3, 2)$	$(1, 2)$

a) Muestre tres perfiles que sean ENPS.

b) Muestre que el siguiente perfil también es un ENPS:

σ_1**:** Juega B en el primer periodo. Luego, juega A en el segundo periodo, si el resultado de el primer periodo ha sido (B,I); de otro modo, juega B.

σ_2**:** Juega I en el primer periodo. Luego, juega I en el segundo periodo, si el resultado de el primer periodo ha sido (B,I); de otro modo, juega D.

Solución

a) Es fácil notar que en el juego estático, los perfiles (A,I) y (B,D) son EN. Por lo tanto, los siguientes perfiles (que implican jugar un EN siempre, cualquiera sea este) son ENPS.

$$ENPS^1 = \{(A, A), (I, I)\}$$

$$ENPS^2 = \{(B, B), (D, D)\}$$

$$ENPS^3 = \{(A, B), (I, D)\}$$

b) Abusando de la notación, escribiremos dicha estrategia como:
$(\sigma_1, \sigma_2) = ((B, (A \text{ si } (B, I); \text{ si no, } B)); (I, (I \text{ si } (B, I); \text{ si no, } D)))$
Es posible ver que esta estrategia genera un equilibrio de Nash en cada subjuego: Si se juega (B,I) en el primer periodo se llega a un subjuego en el que se juega (A,I) (2da repetición del juego) y si se jugase alguna otra cosa, se llegaría al mismo subjuego pero con el resultado (B, D), que también es EN. Por lo tanto, esta estrategia será ENPS.

También puede verse utilizando el principio de desviación por una sola vez:

- Para el jugador 2, dado $\sigma_1 = (B, A \text{ si } (B, I); \text{ si no, } B)$:
  Pago de jugar σ_2: 2 + 4 = 6
  Pago de desviarse a $\sigma_2' = (D, I \text{ si } (B, I); \text{ si no, } D))$: 2 + 2 = 4
  Pago de desviarse a $\sigma_2'' = (I, D \text{ si } (B, I); \text{ si no, } I))$: 2 + 1 = 3
- Para el jugador 1, dado $\sigma_2 = (I, I \text{ si } (B, I); \text{ si no, } D)$:
  Pago de jugar σ_1: 3 + 4 = 7
  Pago de desviarse a $\sigma_1' = (A, A \text{ si } (B, I); \text{ si no, } B)$: 4 + 1 = 5
  Pago de desviarse a $\sigma_1'' = (B, B \text{ si } (B, I); \text{ si no, } A)$: 3 + 3 = 6

Note que esto hace que, en el primer periodo, pueda jugarse un perfil de estrategias que no es parte de un EN.

6. ⋆⋆ Analice la veracidad del siguiente enunciado: "Si, en un juego estático, la cooperación no es parte de un equilibrio de Nash, entonces los jugadores nunca cooperarán en un juego repetido finitas veces, a menos que desconozcan el número de repeticiones del juego".

Solución

El enunciado es falso. Los jugadores no necesitan desconocer el número de repeticiones para cooperar. Si en el juego estático existen múltiples equilibrios de Nash, es posible que exista cooperación si los jugadores plantean una estrategia creíble utilizando al equilibrio de Nash con mayor pago como un premio por cooperar y al de menor pago como un castigo por no hacerlo.

De esta manera, en un juego estático, la cooperación incluso podría ser un perfil de estrategias estrictamente dominadas. Para ilustrar esta idea consideremos el siguiente juego:

	A_2	B_2	C_2
A_1	$(1, 1)$	$(10, 0)$	$(2, 0)$
B_1	$(0, 6)$	$(8, 8)$	$(1, 10)$
C_1	$(0, 2)$	$(9, 1)$	$(4, 4)$

en el cual los equilibrios de Nash en estrategias puras son (A_1, A_2) y (C_1, C_2), mientras que B_1 y B_2, estrategias que representan la cooperación, son estrictamente dominadas[1].

Consideremos, además, la siguiente estrategia del jugador i:

σ_i**:** "Jugar B_i (cooperar) en $t = 0$. Jugar C_i para todo $t \in [1, T]$ si se jugó (B_1, B_2) en $t = 0$; y, de otro modo, jugar A_i para todo $t \in [1, T]$."

Luego, el pago esperado del jugador i por cooperar será:

$$\pi^c = 8 + 4\delta + 4\delta^2 + 4\delta^3 + ... + 4\delta^{T-1}$$

Mientras que su pago esperado por desviarse será:

$$\pi^d = 10 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + ... + \delta^{T-1}$$

Finalmente, vemos para cualquier $T > 1$, existe un $\delta \in [0, 1]$ tal que σ_i es un $ENPS$ (note que $\delta = 1$ siempre será una raíz posible).

7. ⋆⋆ Considere un juego estático bipersonal, que tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras, $EN1$ y $EN2$, cuyos pagos son tales que: $U(EN1) > U(EN2)$ (donde las utilidades son vectores $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$). Si dicho juego es repetido infinitas veces, muestre que una estrategia de gatillo será más fácil de sostener (i.e., que requerirá una menor tasa de descuento) en un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, si el castigo por desviarse de cualquier acuerdo colusivo es la acción $EN2$ en lugar de $EN1$. Considere un juego con dos estrategias puras pasa cada jugador, (C y D).

Solución

Sea $(C, C), (C, C), (C, C), ...$ la secuencia del acuerdo colusivo con pago total $U(C, C)/(1-\delta)$. Asumiendo que el jugador 1 se desvía:

1 La estrategia B_1 está estrictamente dominada por la estrategia mixta $0.5A_1 + 0.5C_1$ y la estrategia B_2 lo está por $0.1A_2 + 0.9C_2$. Las estrategias mixtas se estudiarán con detalle en el capítulo 5.

- La secuencia con castigo $EN1$ será $(D,C),(EN1),(EN1),...$, con pagos $U(D,C)+\delta U(EN1)/(1-\delta)$.
- La secuencia con castigo $EN2$ será: $(D,C),(EN2),(EN2),...$, con pagos $U(D,C)+\delta U(EN2)/(1-\delta)$.

Podemos hallar los umbrales de δ_i para ENi, donde $i=1,2$:

$$\frac{U(C,C)}{1-\delta_i}=U(D,C)+\frac{\delta_i}{1-\delta_i}U(ENi)$$

$$U(C,C)=U(D,C)(1-\delta_i)+\delta_i U(ENi)$$

$$\delta_i=\frac{U(D,C)-U(C,C)}{U(D,C)-U(ENi)}$$

Note que por los datos del ejercicio, $U(EN1)>U(EN2)$, por lo que la tasa de descuento mínima necesaria para sostener el acuerdo colusivo como ENPS es menor para $i=2$. En este sentido, es más factible sostener un ENPS colusivo usando $EN2$ como perfil de castigo.

8. $\star\star$ El siguiente juego se repite dos veces:

	L	M	R
U	(B,B)	$(0,0)$	$(0,A)$
M	$(0,0)$	(x,x)	$(0,0)$
D	$(A,0)$	$(0,0)$	(y,y)

Si se sabe que $A>B>x>y>0$ y que ambos tienen una tasa de descuento $\delta\leq 1$, encuentre un equilibrio en el que el perfil (U,L) se sostiene en la primera ronda. ¿Es este equilibrio perfecto en subjuegos?

Solución

Considere el siguiente perfil de estrategias (que usa las estrategias de la diagonal de la matriz para construir un ENPS):

σ_1: Juega U en el primer periodo. Luego, juega M en la segunda, si el resultado de el primer periodo fue (U,L); de otro modo, juega D.

σ_2: Juega L en el primer periodo. Luego, juega M en la segunda, si el resultado de el primer periodo fue (U,L); de otro modo, juega R.

Note que, para que los individuos no se deseen traicionar en el primer periodo, debe cumplirse que:

$$B + \delta x \geq A + \delta y \quad \Rightarrow \quad \delta(x - y) \geq A - B$$

Es decir, lo que se gana por la cooperación (descontado por δ) debe compensar lo que se deja de ganar por traicionar en el primer periodo.

Observe que el perfil de estrategias descrito lleva siempre a un equilibrio de Nash en el subjuego de la segunda repetición; y, por lo tanto, es un ENPS.

9. $\star\star$ Considere el siguiente juego:

	B_1	B_2	B_3
A_1	$(10, 10)$	$(2, 12)$	$(0, 13)$
A_2	$(12, 2)$	$(5, 5)$	$(0, 0)$
A_3	$(13, 0)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$

a) Halle todos los equilibrios de Nash en estrategias puras del juego estático. Calcule los pagos de ambos jugadores en esos equilibrios.

b) Ahora, repetimos el juego una vez. Antes de empezar la segunda ronda, los jugadores observan las acciones elegidas por el otro en la primera ronda. Halle todos los equilibrios de Nash Perfectos en Subjuegos en estrategias puras del juego repetido. Asuma que no hay descuento ($\delta = 1$).

Solución

a) Los equilibrios de Nash en estrategias puras son $EN = \{(A_2, B_2), (A_3, B_3)\}$, donde los pagos para ambos jugadores en cada equilibrio son 5 y 1, respectivamente.

b) Note que cualquier estrategia que implique usar cualquiera de los perfiles que son equilibrio de Nash en estrategias puras en cada periodo, (A_2, B_2) o (A_3, B_3), son ENPS:

- El jugador 1 juega A_i y el 2 juega B_i en ambos periodos, donde $i \in \{2, 3\}$.
- El jugador 1 juega A_i en el primer periodo y A_j en el segundo periodo, mientras que el jugador 2 juega B_i en el primer periodo y B_j en el segundo periodo, donde $i, j \in \{2, 3\}$, con $i \neq j$.

Por otro lado, también son ENPS aquellos juegos en los que existe cooperación, utilizando el equilibrio de Nash con menor pago como castigo por no cooperar en el primer periodo.

- Estrategia del jugador 1: jugar A_1 en el periodo 1 y en el segundo periodo jugar A_2 si el jugador 2 jugó B_1 en el primer periodo o jugar A_3 de otro modo.
- Estrategia del jugador 2: jugar B_1 en el periodo 1 y en el segundo periodo jugar B_2 si el jugador 1 jugó A_1 en el primer periodo o jugar B_3 de otro modo.

Note que en cualquiera de las cuatro estrategias descritas, ninguno de los jugadores tiene incentivos a desviarse unilateralmente pues recibiría un menor pago.

10. ⋆⋆ Se tiene la siguiente matriz de pagos:

	C	D
C	$(6,6)$	$(0,10)$
D	$(10,0)$	$(1,1)$

a) Suponga que el juego se repite T veces. ¿A partir de qué valor de δ se puede esperar que exista un ENPS en el que se juegue (C, C) en cada repetición?

b) Si el juego se repite infinitas veces y los agentes son perfectamente pacientes; sin embargo, debido al repudio que genera la comisión de crímenes, existe una probabilidad p de que ambos agentes sean ejecutados de manera arbitraria al final de cada periodo. Halle las condiciones que debe cumplir p para que la colusión sea sostenible en el tiempo. Considere el uso de la estrategia del Gatillo.

<u>Solución</u>

a) No es posible obtener dicho ENPS. Dado que el juego solo tiene un equilibrio de Nash (D, D), y se trata de un juego repetido finitas veces, el único ENPS posible es aquel en el que se juegue el equilibrio de Nash (D, D) en cada repetición, como se vio en el ejercicio 3.

b) Note que la probabilidad de seguir vivo y gozar del pago durante un periodo más es $1-p$. Por lo tanto, los beneficios de seguir la estrategia del gatillo (C) o desviarse (D) son:

$$\pi^C = 6 + (1-p)6 + (1-p)^2 6 + (1-p)^3 6 + ... = \frac{6}{p}$$

$$\pi^D = 10 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + ... = 9 + \frac{1}{p}$$

Para que exista colusión debe ocurrir que $\pi^C \geq \pi^D$, lo que pasa siempre que $p \leq 5/9$. Es decir, para que la colusión sea posible, la probabilidad de ser ejecutado debe ser baja.

11. ⋆⋆ Anita y Beto son los únicos productores de papas en la región. Si se unen y venden toda la producción en el mismo puesto, pueden actuar como un monopolio y obtener ganancias de USD 7 cada uno, pero si solo uno de ellos se presenta en el mercado, el precio de la papa sube de modo que el productor obtiene una ganancia de USD 12. Cada uno va al mercado en su propia camioneta, por lo que pueden contratar a un agente para que corte los frenos de la camioneta del otro, por un pago de USD 2. El daño a los frenos equivale a una pérdida de USD 5.

    a) Escriba el juego en forma normal.

    b) Halle las condiciones bajo las cuales los jugadores cooperarán si el juego se repite infinitas veces.

    c) Proponga una estrategia que sea un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Demuéstrelo.

Solución

a) El juego puede expresarse de la siguiente manera:

	$Coopera$	$Traiciona$
$Coopera$	$(7,7)$	$(-5,10)$
$Traiciona$	$(10,-5)$	$(-7,-7)$

Donde los equilibrios de Nash son $\{Traiciona, Coopera\}$ y $\{Coopera, Traiciona\}$.

b) En este caso, debemos notar que si uno de los agentes traiciona se llega a un equilibrio de Nash, luego no existirían incentivos a desviarse unilateralmente. Es decir, para el agente i, tenemos:

Pago de cooperar vs Pago de traicionar

$$7 + 7\delta + 7\delta^2 + 7\delta^3 + 7\delta^4 + ... \quad vs \quad 10 + 10\delta + 10\delta^2 + 10\delta^3 + ...$$

$$\frac{7}{1-\delta} \quad vs \quad \frac{10}{1-\delta}$$

De ahí, δ debe ser mayor que 1 para que exista cooperación, lo cual no es posible.

c) Un perfil que es ENPS puede ser aquel en que el jugador 1 traiciona siempre y el jugador 2 coopera siempre. Basta con ver que en este perfil de estrategias siempre se está jugando un equilibrio de Nash, por lo que no existen incentivos a desviarse unilateralmente.

	C	D
C	$(4,4)$	$(0,8)$
D	$(8,0)$	$(1,1)$

12. ⋆⋆ Considere que el siguiente juego estático se repite indefinidamente:

Si sabemos que $\delta = 3/4$, evalúe si los siguientes perfiles son ENPS.

a) Ambos jugadores juegan C siempre.

b) Ambos jugadores juegan D siempre.

c) 1 juega primero C y luego alterna entre D y C en ese orden y 2 juega C siempre. Si alguno se desvía, entonces ambos juegan D para siempre.

d) Ambos jugadores comienzan jugando (C, C); si i se desvía, entonces i juega C por cinco periodos consecutivos mientras que $-i$ juega D. Luego, se vuelve a jugar (C, C); sin embargo, si en dichos periodos ambos juegan D, entonces juegan D para siempre (ya no vuelven a jugar (C, C)).

<u>Solución</u>

a) Si los jugadores 1 y 2 juegan siempre C:

$$\pi_i^{cumplir} = 4 + 4\delta + 4\delta^2 + 4\delta^3 + ... = 4\frac{1}{1-\delta} = 16$$

$$\pi_i^{nocumplir} = 8 + 4\delta + 4\delta^2 + 4\delta^3 + ... = 4 + 4\frac{1}{1-\delta} = 20$$

Hay incentivos a desviarse, por lo tanto esta estrategia no es un ENPS.

b) Si los jugadores 1 y 2 juegan siempre D: (Resultado anticipado si es un ENPS porque lleva a un equilibrio de Nash en cada subjuego).

$$\pi_i^{cumplir} = 1 + 1\delta + 1\delta^2 + 1\delta^3 + ... = \frac{1}{1-\delta} = 4$$

$$\pi_i^{nocumplir} = 0 + 1\delta + 1\delta^2 + 1\delta^3 + ... = \frac{1}{1-\delta} - 1 = 3$$

No hay incentivos a desviarse, por lo tanto esta estrategia es un ENPS.

c) 1 juega primero C y luego alterna entre D y C y 2 juega siempre C, si alguno se desvía entonces juegan D para siempre.

- El jugador 1 no tiene incentivos a desviarse:

$$\pi_1^{cumplir} = 4+8\delta+4\delta^2+8\delta^3+4\delta^4+8\delta^5+... = \frac{4}{1-\delta^2}+\frac{8\delta}{1-\delta^2} = 160/7$$

$$\pi_1^{nocumplir} = 8+1\delta+1\delta^2+1\delta^3+... = 7+\frac{1}{1-\delta} = 11$$

- El jugador 2 sí tiene incentivos a desviarse:

$$\pi_2^{cumplir} = 4+0\delta+4\delta^2+0\delta^3+4\delta^4+0\delta^5+... = \frac{4}{1-\delta^2} = 64/7$$

$$\pi_2^{nocumplir} = 8+1\delta+1\delta^2+1\delta^3+... = 7+\frac{1}{1-\delta} = 11$$

Por lo tanto, este no es un ENPS.

d) Ambos jugadores comienzan jugando (C,C), si i se desvía entonces i juega C por 3 periodos consecutivos mientras que $-i$ juega D, luego se vuelve a jugar (C,C). Si los dos juegan D, entonces juegan D para siempre:

- Para ambos jugadores:

$$\pi_i^{cumplir} = 4+4\delta+4\delta^2+4\delta^3+... = \frac{4}{1-\delta} = 16$$

$$\pi_i^{nocumplir} = 8+0\delta+0\delta^2+0\delta^3+4\delta^4+4\delta^5+4\delta^6+... = 8+\frac{4\delta^4}{1-\delta} \approx 13.06$$

Por lo que ningún jugador tendría incentivos a desviarse si tuviesen que cumplir el castigo. ¿Qué pasa si no lo quisieran cumplir? Debemos ver si el castigo es creíble:

- Para ambos jugadores:

$$\pi_i^{cumplircastigo} = 0+0\delta+0\delta^2+4\delta^3+4\delta^4+4\delta^5+... = \frac{4\delta^3}{1-\delta} \approx 6.75$$

$$\pi_i^{nocumplircastigo} = 1+1\delta+1\delta^2+1\delta^3+... = \frac{1}{1-\delta} = 4$$

Por lo tanto, el castigo es creíble y las estrategias descritas son ENPS.

13. $\star\star$[2] Un *hacker* ha logrado acceder a los servidores de dos empresas de seguridad informática (A y B) que se estaban coludiendo. Una vez dentro, programó los sistemas para

2 Ejercicio propuesto por Alberto Mendoza.

que, cada día, el director de cada empresa tenga que elegir un valor entero entre 1 y 100 (en miles de dólares), los cuales serían abonados a la cuenta bancaria del *hacker* hasta alcanzar un monto objetivo "x" que solo él conoce.

El bucle programado implica lo siguiente:

- En el día t, si ambas empresas eligen el mismo número, los bonos se abonan normalmente y se repite el mismo proceso en $t+1$.
- En el día t, si la empresa i elige un número mayor que la empresa $-i$, se abonan ambos pagos pero i nunca más realiza ningún pago y $-i$ pagará 100 diariamente hasta alcanzar el monto x.

El fascineroso individuo le advirtió de toda esta información a ambas empresas; quienes, por temor a perder su reputación, no dan aviso a la policía.

a) ¿Sería factible una colusión en la que ambos directores elijan pagar 1 todos los días? ¿Qué condiciones hacen ello posible? Explique.

b) El director de A recuerda que tiene entre sus empleados a un "tigre" en informática capaz de romper el bucle del hacker. Suponga que, en cada turno, este "tigre" tiene una probabilidad ρ de romper el bucle y terminar el juego. Ambos directores conocen esta información ¿Cómo se ve afectada la sostenibilidad de la colusión en este nuevo escenario?

c) Imagine que el "tigre" no ha logrado romper el bucle, pero ha conseguido dos cosas:

- Transformar el juego en un dilema del prisionero repetido. La matriz de pagos es la siguiente (en miles de dólares):

	C	D
C	$(0,0)$	$(-100,1)$
D	$(1,-100)$	$(-50,-50)$

- Revelar el monto que busca recaudar el hacker: 1 millón de dólares.

Considere que $\delta = 0.35$ ¿Están los directores en mejor o peor situación que antes?

d) El hacker, enterado de las maniobras del "tigre", ha retomado el control. El juego vuelve a ser el del inicio, pero el rango de opciones se ha ampliado. Ahora cada gerente puede elegir un valor entero entre 0 y 200 (en miles de dólares) para abonar al hacker. Además, el hacker les ha señalado que el juego durará únicamente 15 turnos. ¿Cuál es el nuevo equilibrio en este juego repetido? ¿Hay espacio para la colusión?

Solución

a) Al coludirse, cada empresa paga 1 todos los días. Como el monto x es desconocido, el juego se desarrolla como si fuese un juego infinito, luego:

Beneficio de coludir: $\pi^c = -\frac{1}{1-\delta}$

Beneficio de desviarse: $\pi^d = -2$

La colusión se sostiene si $\pi^c \geq \pi^d$, lo cual ocurre si $\delta \leq 1/2$; es decir, la colusión ocurre solo si a los directores les importa mucho el presente (directores impacientes).

b) El enunciado quiere decir que, en cada periodo, la probabilidad de que se realice un pago será de $1 - \rho$. En este sentido, los pagos serían:

Beneficio de coludir: $\pi^c = -1 - (1-\rho)\delta - (1-\rho)^2\delta^2 - (1-\rho)^3\delta^3 - ... = -\frac{1}{1-\delta(1-\rho)}$

Dado que el pago de desviarse sigue siendo 2, la colusión se sostendrá si $\delta(1-\rho) \leq 1/2$. Note que a medida que $\rho \to 1$ el δ crítico se va relajando, lo que significa que la colusión será cada vez más probable.

c) Primero, es importante precisar que el equilibrio de Nash es el perfil (D, D). Además, al conocer que el monto objetivo del estafador, indirectamente conocemos el último periodo, lo cual convierte al juego en uno repetido finitas veces. Por tanto, por inducción hacia atrás, resulta que el ENPS es jugar $(D; D)$ en todos los periodos. El pago total hecho al hacker por cada gerente será entonces $\pi = 50(1-\delta^{10})/(1-\delta)$.

Dado que los factores de descuento de ambos gerentes son menores a 0.5, en un contexto de juego infinito, la colusión sí hubiera sido posible. Por tanto, comparamos y observamos que:

$$\frac{1}{1-\delta} < \frac{50(1-\delta^{10})}{1-\delta},$$

por lo que la situación de los gerentes es peor en este nuevo contexto.

d) Note que, ahora, el único equilibrio de Nash del juego estático es $(0, 0)$, pues una empresa nunca estará mejor si, en vez de cero, elige pagar 1 (todas las estrategias distintas a pagar cero son estrictamente dominadas).

Entonces, el nuevo equilibrio del juego repetido (ENPS) es jugar el perfil $(0, 0)$ en cada periodo. Note que este perfil no implica que haya colusión, sino que cada empresa hace lo mejor para ella misma, periodo tras periodo.

14. ⋆⋆ A continuación se presenta el juego estático del Tratado de Misiles Antibalísticos (Tratado ABM por sus siglas en inglés):

		Unión Soviética		
		No ABM	Poco ABM	Mucho ABM
Estados Unidos	No ABM	$(10, 10)$	$(6, 12)$	$(-1, \underline{18})$
	Poco ABM	$(12, 6)$	$(8, \underline{18})$	$(-2, 14)$
	Mucho ABM	$(\underline{18}, -1)$	$(\underline{14}, -2)$	$(\underline{0}, \underline{0})$

Suponga que un avance tecnológico mejora el monitoreo de los ABM, de modo tal que las probabilidades de detectar un ABM son:

Cantidad de ABM	**Prob. detección**
Ninguno	0
Pocos	0.30
Muchos	0.75

Halle las condiciones para que se cumpla el tratado; es decir, (No ABM,No ABM). Asuma que el juego se repite infinitas veces.

<u>Solución</u>

Primero debemos notar que el único equilibrio de Nash del juego estático es (Mucho ABM,Mucho ABM), el cual reporta un pago a cada país igual a 0. En este sentido, la estrategia de cada país es:

Estrategia del gatillo: colusión con castigo (Mucho ABM,Mucho ABM):

i juega “No ABM” en $t = 1$ y en $t > 1$ juega “No ABM” si en $t - 1$ el equilibrio fue (No ABM,No ABM), y juega “Mucho ABM” de otro modo.

Luego, note que desviarse a “Poco ABM” genera los siguientes pagos esperados:

$$12 + 0.7(12)\delta + 0.7^2(12)\delta^2 + 0.7^3(12)\delta^3 + ... = \frac{12}{1 - 0.7\delta}$$

Mientras que desviarse a “Mucho ABM” genera los pagos esperados:

$$18 + 0.25(18)\delta + 0.25^2(18)\delta^2 + 0.25^3(18)\delta^3 + ... = \frac{18}{1 - 0.25\delta}$$

Por lo tanto, para que se cumpla el tratado deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$\frac{10}{1-\delta} \geq \frac{12}{1 - 0.7\delta} \qquad \wedge \qquad \frac{10}{1-\delta} \geq \frac{18}{1 - 0.25\delta}$$

Lo que ocurre siempre que $\delta \geq 0.4$. Note que existen más incentivos a desviarse a “Poco ABM”, por la baja probabilidad de detección.

	B_1	B_2	B_3
A_1	$(10,10)$	$(2,12)$	$(0,13)$
A_2	$(12,2)$	$(5,5)$	$(0,0)$
A_3	$(13,0)$	$(0,0)$	$(1,1)$

15. $\star\star\star$ Considere nuevamente la siguiente matriz de pagos:

asuma una tasa de descuento $\delta < 1$ e indique una estrategia que permita sostener la cooperación (dada por escoger A_1 para el jugador 1 y B_1 para el jugador 2) si el juego se repite T periodos. Especifique el valor de δ que requiere dicha estrategia.

Solución

Los equilibrios de Nash del juego descrito son $EN = \{(A_2, B_2), (A_3, B_3)\}$. Sea la estrategia del jugador 1: jugar A_1 en $t = 0$. En $0 < t < T$ jugar A_1 si el jugador 2 jugó B_1 en $t-1$ o jugar A_3 de otro modo; finalmente, en T jugar A_2 si se mantuvo la cooperación hasta $T-1$, o jugar A_3 de otro modo.

Si la estrategia del jugador 2 es análoga, note que en el momento t, si la empresa coopera obtendría el beneficio $\pi^c = 10 + 10\delta + 10\delta^2 + ... + 10\delta^{T-t-1} + 5\delta^{T-t}$, mientras que la mejor desviación generaría el beneficio $\pi^d = 13 + \delta + \delta^2 + ... + \delta^{T-t-1} + \delta^{T-t}$. Por lo tanto, en dicho periodo la empresa coopera si:

$$\pi^c = \frac{10(1-\delta^{T-t})}{1-\delta} + 5\delta^{T-t} \geq 12 + \frac{(1-\delta^{T-t})}{1-\delta} + \delta^{T-t} = \pi^d$$

De donde obtenemos lo siguiente:

$$\frac{9(1-\delta^{T-t})}{1-\delta} + 4\delta^{T-t} \geq 12$$

Lo cual se cumple siempre que:

$$12\delta - 5\delta^{T-t} - 4\delta^{T-t+1} \geq 3$$

Si el análisis se realiza en $t = T-1$, el jugador analiza el juego como si fuese uno de dos etapas y cooperará si $7\delta - 4\delta^2 \geq 3$; es decir, si $\delta \in [3/4, 1)$. En el periodo $t = T-2$, el jugador analiza el juego como si fuese uno de tres etapas y cooperará si $12\delta - 5\delta^2 - 4\delta^3 \geq 3$; es decir, si $\delta \in [0.2947, 1)$. En el periodo $t = T-3$, el jugador analiza el juego como si fuese uno de cuatro etapas y cooperará si $12\delta - 5\delta^3 - 4\delta^4 \geq 3$; es decir, si $\delta \in [0.2587, 1)$. Finalmente, note que $12\delta - 5\delta^{T-t} - 4\delta^{T-t+1} \to 12\delta$ conforme $T - t \to \infty$, por lo que la restricción se cumple para todo $\delta \in [0.25, 1)$.

De aquí se desprende, que sostener un acuerdo durante T periodos requiere una mayor paciencia conforme nos acercamos la etapa final. Esto se debe a que mientras más alejados nos encontremos del final, el beneficio de cooperar en comparación al de desviarse parece mayor; por ejemplo, en la penúltima etapa ($T-1$) el beneficio de cooperar es dejar de recibir 3 hoy por recibir 4 más mañana, pero si nos encontrásemos en el periodo antepenúltima ($T-2$) el beneficio de cooperar es dejar de recibir 3 hoy para recibir 9 más mañana y 4 más pasado mañana.

Por último, para que el perfil de estrategias descrito sea ENPS se requiere que $\delta \geq 3/4$, que permite que el jugador no desee desviarse unilateralmente en ninguna de las etapas del juego.

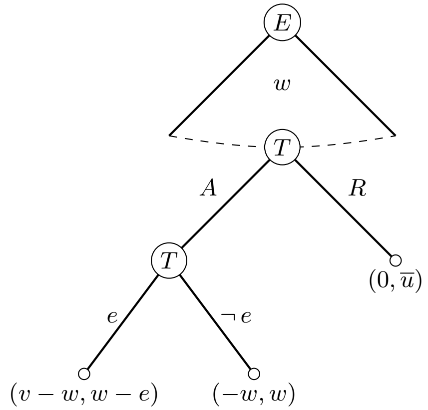
16. $\star\star$ Considere la siguiente interacción entre una empresa y un trabajador. La empresa le ofrece pagarle "w" al trabajador; luego de lo cual éste decide si acepta ese salario o no. En caso de aceptar, debe decidir si se esfuerza o si no se esfuerza. Los pagos son como siguen: Si el trabajador no está empleado, obtiene $\overline{u} > 0$ (su costo de oportunidad de trabajar). Si está empleado y se esfuerza, obtiene $(w-e)$ ("e" representa el costo de esforzarse); y si está empleado y no se esfuerza, obtiene (w). La empresa no gana nada si el trabajador no acepta trabajar, gana $(v-w)$ si acepta y se esfuerza, y $(-w)$ si acepta y no se esfuerza. Asuma que $v > \overline{u} + e$.

    a) Halle el equilibrio del juego secuencial. Indique las estrategias y los pagos de cada agente en ese equilibrio.

    b) Para un juego infinitamente repetido, demuestre que, si $v > \overline{u} + e/\delta$, hay un equilibrio perfecto en subjuegos, en el cual la empresa ofrece un salario $w \in [\overline{u} + e/\delta, v]$ y el trabajador acepta trabajar en cada periodo y se esfuerza.

<u>Solución</u>

a) Se está pidiendo el EPS del juego. Sea E la empresa y T el trabajador, tenemos la siguiente expresión del juego:



Como se puede ver, en el último subjuego, el trabajador escoge “no esforzarse”. Dado eso, él escoge aceptar el salario ofrecido siempre que $w \geq \overline{u}$; y rechazarlo si $w < \underline{u}$. Dado que, si el salario es aceptado, el beneficio para la empresa será $-w$; o es 0, de otro modo, la empresa ofrecerá un salario de $w < \overline{u}$, que el trabajador rechazará. El equilibrio es, por tanto: $(w < \overline{u}, Rechaza)$, con pagos $(0, \overline{u})$.

b) Considere la siguiente estrategia “gatillo”: “En cada periodo, la empresa ofrece un salario $w \in [\overline{u} + e/\delta, v]$ y el trabajador acepta trabajar y esforzarse. Si el trabajador decide “desviarse” en algún momento, al trabajar sin esforzarse o no aceptar el salario ofrecido, la empresa ofrece un salario $w = 0$ y el trabajador nunca acepta (i.e., repite el equilibrio del “stage game” para todo periodo subsecuente). Por otro lado, si la empresa se “desvía” y ofrece un salario distinto a $[\overline{u} + e/\delta, v]$, el trabajador o rechaza la oferta (si $w < \overline{u}$) o acepta y no se esfuerza. De ahí en adelante, ellos repiten el equilibrio del "stage game".

Entonces:

- El beneficio de la mejor desviación de la empresa es 0, de modo que no tiene incentivos a desviarse si $v \geq w$.
- En el caso del trabajador, éste no tiene incentivos a rechazar el salario ofrecido, siempre que $w \geq \overline{u} + e$. él tiene incentivos a trabajar y esforzarse (en lugar de no esforzarse) si:

$$w - e + \frac{\delta}{1-\delta}(w - e) \geq w + \frac{\delta}{1-\delta}(\overline{u}) \quad \iff \quad w \geq \overline{u} + \frac{e}{\delta}$$

De donde obtenemos que $v > \overline{u} + e/\delta$.

17. $\star\star\star$ Se tiene la siguiente matriz de pagos:

	A_2	B_2	C_2
A_1	$(2,2)$	$(2,1)$	$(7,1)$
B_1	$(1,2)$	$(3,3)$	$(5,4)$
C_1	$(1,7)$	$(4,5)$	$(6,6)$

a) Encuentre todos los equilibrios de Nash del juego. ¿Es posible sostener un ENPS donde se juegue el perfil $\{C_1, C_2\}$ en cada periodo si el juego se repite T periodos?

b) Considere, ahora, que el juego se repite por infinitos periodos. Encuentre la tasa de descuento δ mínima que permita un ENPS en el que ambos agentes usan la estrategia del gatillo para sostener el perfil (B_1, B_2) en cada periodo.

c) Proponga una estrategia de "premio y castigo" que sea sostenible como un ENPS, dada la tasa de descuento crítica hallada en la parte b).

<u>Solución</u>

a) El único equilibrio de Nash en estrategias puras del juego es el perfil $\{A_1, A_2\}$. Como el juego es finito, el único ENPS es aquel en el que se juega el perfil $\{A_1, A_2\}$ en cada repetición

b) La estrategia del gatillo: i juega B_i en $t = 1$. En $t > 1$ juega B_i si el equilibrio en $t - 1$ fue el perfil (B_1, B_2), y juega A_i de otro modo.

Este perfil de estrategias será sostenible si para ambos jugadores se cumple:

$$\text{Beneficio de cooperar} \geq \text{Beneficio de traicionar}$$

$$3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + ... \geq 4 + 2\delta + 2\delta^2 + 2\delta^3 + ...$$

$$\frac{3}{1-\delta} \geq 2 + \frac{2}{1-\delta}$$

Lo cual se cumple para todo $\delta \geq 1/2$.

c) Definamos la siguiente estrategia: i juega C_i en $t = 1$. Si en la repetición $t \geq 1$ el equilibrio fue $\{C_1, C_2\}$, i juega C_i en $t + 1$; de otro modo, i juega A_i en $t + 1$ y $t + 2$, y vuelve a jugar C_i en $t + 3$ si $-i$ ha jugado C_{-i} durante $t + 1$ y $t + 2$, y de otro modo se mantiene jugando A_i para siempre.

Para que este perfil de estrategias sea un ENPS debe inducir a un equilibrio de Nash en cada subjuego; en este sentido, primero debemos verificar si, en caso exista un desvío de la colusión, los agentes tendrán incentivos a cumplir el castigo ($\pi_i^{cc} > \pi_i^{dc}$):

Cumplimiento del castigo: $\pi_i^{cc} = 1 + \delta + 6\delta^2 + 6\delta^3 + 6\delta^4 + ... = \frac{1+5\delta^2}{1-\delta}$

Desvío del castigo: $\pi_i^{dc} = 2 + 2\delta + 2\delta^2 + 2\delta^3 + ... = \frac{2}{1-\delta}$

Lo cual se cumple siempre que $\delta \geq \sqrt{1/5} \approx 0.45$. Luego, para que el perfil planteado sea $ENPS$ se debe verificar que no existan incentivos a desviarse del pacto colusivo ($\pi_i^c > \pi_i^d$):

Colusión: $\pi_i^c = 6 + 6\delta + 6\delta^2 + 6\delta^3 + ... = \frac{6}{1-\delta}$

Desvío de la colusión: $\pi_i^d = 7 + \delta + \delta^2 + 6\delta^3 + 6\delta^4 + 6\delta^5 + ... = 6 + \frac{1+5\delta^3}{1-\delta}$

Lo que se cumple siempre que $5\delta^3 - 6\delta + 1 \leq 0$. De acuerdo con la parte b), $\delta \geq 1/2$; por lo tanto, ambas condiciones se cumplen satisfactoriamente y el perfil descrito se trata de un $ENPS$.

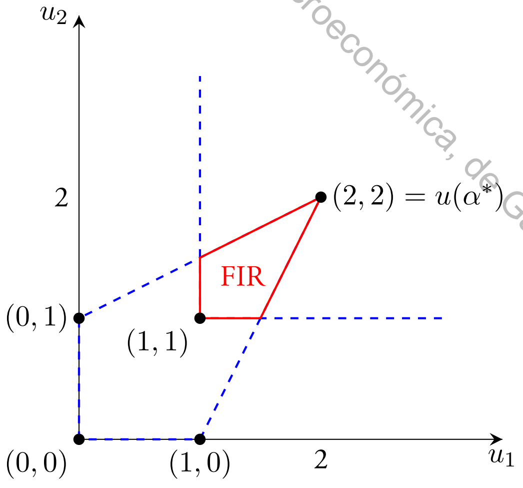
	A	B
A	$(2,2)$	$(1,0)$
B	$(0,1)$	$(0,0)$

18. $\star\star\star$ Considere el siguiente juego estático que se repetirá infinitamente:

Esboce el conjunto de vectores de pagos factibles e individualmente racionales (conjunto FIR) y utilice el teorema folclórico de reversión Nash para mostrar que no existirá un ENPS que no sea el de jugar el equilibrio de Nash en cada periodo.

Solución

Note que los pagos derivados de las estrategias *minmax* son 1: el jugador $-i$ juega la estrategia que minimiza el pago de i sabiendo que dicho agente jugará siempre su mejor respuesta a la estrategia elegida, llegando al perfil donde una empresa juega A y la otra B (podemos ver que, dada la estrategia pura escogida por el jugador 2, el jugador 1 siempre estará mejor escogiendo A (con pagos de 2 y 1); luego, la estrategia del jugador 2 que minimiza esos pagos es B y el pago minmax es 1). Adicionalmente, note que el único equilibrio de Nash es $\alpha^* = (A, A)$. En este sentido, el conjunto FIR y el vector de pagos del equilibrio de Nash pueden graficarse como sigue:



De otro lado, de acuerdo al teorema folclórico de reversión Nash (teorema ??), si hay un vector de pagos, π, que pertenece al conjunto FIR, tal que $\pi > u(\alpha^*)$, entonces hay una tasa de descuento, δ, a partir de la cual existe un ENPS con el vector de pagos π.

Sin embargo, gráficamente se puede apreciar que, en este caso, no existe tal vector de pagos π que cumpla con ambas restricciones al mismo tiempo; por lo tanto, el único ENPS que puede sostenerse es aquel en el que se juega siempre el equilibrio de Nash.

19. $\star\star\star$ Considere la siguiente matriz de pagos:

	L	R
T	$(3, 0)$	$(1, -2)$
B	$(5, 4)$	$(-1, 3)$

a) Encuentre las estrategias *minmax* de ambos jugadores y el equilibrio de Nash α^*; así como el vector de pagos asociado a cada perfil de estrategias solicitadas.

b) Grafique el conjunto FIR y ubique el vector $u(\alpha^*)$.

c) Si el juego se repite infinitas veces, ¿es posible que exista un ENPS que otorgue el vector de pagos $v_1 = (3, 3)$ en cada periodo?, ¿Qué hay del vector $v_2 = (5, 5)$?

<u>Solución</u>

a) Consideremos nuevamente la matriz de pagos:

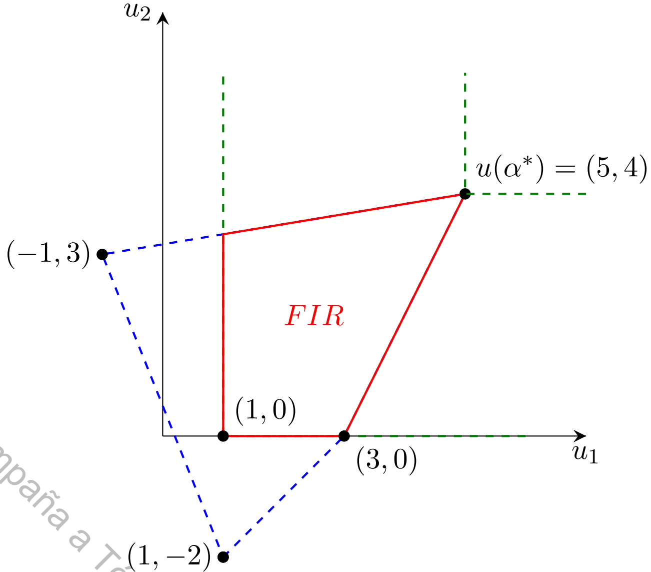
	L	R
T	$(3, \underline{0})$	$(\underline{1}, -2)$
B	$(\underline{5}, \underline{4})$	$(-1, 3)$

donde se muestra que el único equilibrio de Nash es el perfil (B, L), que genera un pago de 5 y 4 para los jugadores 1 y 2, respectivamente. Por otro lado, para hallar las estrategias *minmax* debemos especificar los pagos que tiene el jugador i a cada estrategia del oponente a_{-i}:

$$B_1(L) = \{B\}, B_1(R) = \{T\} \quad \Rightarrow \quad u_1(B_1(L), L) = 5, u_1(B_1(R), R) = 1$$
$$B_2(T) = \{L\}, B_2(B) = \{L\} \quad \Rightarrow \quad u_2(B_2(T), T) = 0, u_2(B_2(B), B) = 4.$$

De donde se observa que la estrategia *minmax* del jugador 1 es T y la del jugador 2 es R, mientras que los pagos que recibirían los jugadores 1 y 2 si el otro jugador juega su estrategia *minmax* es 1 y 0, respectivamente.

b) Note que el vector de pagos de las estrategias *minmax* en estrategias puras es (1,0). Por lo tanto, el conjunto FIR podemos graficarlo de la siguiente manera:



c) Note que el vector de pagos $v_1 = (3,3)$ se encuentra dentro del conjunto FIR, por lo que de acuerdo al teorema folclórico clásico, existirá un δ lo suficientemente cercano a 1 tal que existirá un equilibrio de Nash del juego con dicho vector de pagos. Sin embargo, note que dicha estrategía no será un ENPS, pues dicho vector de pagos no domina al vector de pagos del equilibrio de Nash, $u(\alpha^*)$ (recordar el teorema folclórico de reversión Nash).

Por otro lado, el vector de pagos $v_2 = (5,5)$ sí domina al vector $u(\alpha^*)$; sin embargo note que dicho vector no se encuentra dentro del conjunto FIR, por lo que no es un pago factible y no puede ser parte de un ENPS.

20. $\star\star\star$ Considere la siguiente matriz de pagos, G:[3]

	A_2	B_2	C_2
A_1	$(1,1)$	$(0,0)$	$(5,0)$
B_1	$(0,0)$	$(3,3)$	$(0,0)$
C_1	$(0,5)$	$(0,0)$	$(4,4)$

3 En el capítulo 5, examinaremos los conceptos de solución de juegos con estrategias mixtas, que son necesarios para la solución de este problema. Sin embargo, consideramos pertinente incluir este ejercicio en esta sección por ser un excelente ejemplo de cómo una estrategia estrictamente dominada (C_i, en este caso) puede ser sostenida como una estrategia colusiva cuando existen múltiples Equilibrios de Nash que ofrezcan pagos lo suficientemente diferentes entre ellos.

a) Imagine que el juego se juega 2 veces y que la tasa de descuento de ambos jugadores es $\delta = 0.45$. ¿Se puede sostener un ENPS en el que se juegue $\{C_1, C_2\}$ en el primer periodo?

b) Considere la siguiente estrategia: "i juega C_i en $t = 0$. Continúa jugando C_i en el periodo $t + 1$, siempre que (C_1, C_2) fue jugado en el periodo $t > 0$. De otro modo, si alguien se desvía de C_i, juega A_i en adelante y para siempre". Calcule la tasa de descuento mínima que sostiene dicha estrategia en un ENPS del juego infinitamente repetido.

c) Considere la siguiente estrategia: "i juega C_i en $t = 0$. Continúa jugando C_i en $t + 1$, siempre que (C_1, C_2) fue jugado en el periodo $t > 0$. De otro modo, si alguien se desvía de C_i, juega $3/4A_i + 1/4B_i$ en adelante y por dos periodos. Luego, vuelve a escoger C_i (independientemente de lo que haya jugado el otro jugador durante esos dos periodos), y sigue jugando C_i hasta que $-i$ vuelva a desviarse de (C_1, C_2)". ¿Cuáles son los valores que puede tomar la tasa de descuento para que la estrategia descrita sea un ENPS?.

<u>Solución</u>

a) Los equilibrios de Nash son $EN = \{(A_1, A_2), (B_1, B_2), (3/4A_1 + 1/4B_1, 3/4A_2 + 1/4B_2)\}$, con pagos de 1, 3 y 3/4 respectivamente (note que las estrategias C_i son estrictamente dominadas por las estrategias mixtas $0.9A_i + 0.1B_i$). En este sentido se plantea la siguiente estrategia: i juega C_i en $t = 0$ y juega B_i en $t = 1$ si el perfil en $t = 0$ fue $\{C_1, C_2\}$; y juega $3/4A_i + 1/4B_i$, de otro modo.

Note que la estrategia descrita "premia" el escoger C_i con el EN con mayor pago (B_1, B_2), y "castiga" el no escogerlo con el EN con menor pago $(3/4A_1 + 1/4B_1, 3/4A_2 + 1/4B_2)$.

Beneficio de seguir la estrategia: $4 + 3\delta = 5.35$

Beneficio de desviarse en el primer periodo: $5 + 3\delta/4 \approx 5.34$

Beneficio de desviarse en la segunda etapa: 4

Por lo que se observa que el perfil donde ambos jugadores juegan la estrategia especificada es ENPS. Note que la estrategia que establece como castigo la acción A, no forma parte de un ENPS, pues existirían incentivos a desviarse en el primer periodo.

b) La estrategia descrita corresponde a la estrategia del gatillo. En este sentido, los pagos que se generan de seguir la estrategia son $\pi^G = 4/(1 - \delta)$, mientras que el pago de desviarse es $\pi^d = (5 - 4\delta)/(1 - \delta)$. Por lo tanto, para que dicha estrategia forme parte de un ENPS se requiere que $\delta \geq 1/4$.

c) La estrategia descrita es la denominada como “premio y castigo”, la cual usa como castigo a un perfil de estrategias que es equilibrio de Nash, por lo que la mejor respuesta del jugador castigado es jugar $3/4A_i + 1/4B_i$. En este sentido, lo único que debemos verificar es que no existan incentivos a desviarse del perfil de acciones colusivas.

Beneficio de coludir: $\pi^c = \frac{4}{1-\delta}$

Beneficio de desviarse: $\pi^d = 4.25 + \frac{0.75+3.25\delta^3}{1-\delta}$

Luego, para que $\pi^c \geq \pi^d$ debe cumplirse que $0 \leq 4.25\delta - 3.25\delta^3 - 1$. Las raíces de δ son aproximadamente -1.25, 1 y 0.25. Luego, los valores de δ que cumplen con la restricción pertenecen al intervalo $(-\infty, -1.25) \cup [0.25, 1]$. Finalmente, dado que $\delta \geq 0$, el conjunto de valores para los que la estrategia descrita es un ENPS es $[0.25, 1]$.

Referencias