5 - Equilibrio en estrategias mixtas y juegos con información incompleta

1. $\star\star\star$ Se tiene el siguiente juego en forma estratégica:

	a	b	c	d	e
A	$(-2,-4)$	$(1,-3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(-1,-3)$
B	$(-2,1)$	$(0,4)$	$(3,3)$	$(3,2)$	$(-6,3)$
C	$(1,-1)$	$(3,-1)$	$(0,4)$	$(0,1)$	$(2,-1)$
D	$(-1,-1)$	$(-1,2)$	$(2,2)$	$(2,2)$	$(-1,1)$
E	$(3,-1)$	$(3,1)$	$(3,1)$	$(2,0)$	$(-1,0)$
F	$(1,5)$	$(2,-4)$	$(0,-3)$	$(-1,-3)$	$(0,-2)$

   a) Utilice argumentos de dominación estricta para reducir el juego. ¿Importa el orden de eliminación de estrategias?

   b) Sobre el juego reducido: Muestre que si elimina iteradamente estrategias débilmente dominadas, el resultado del juego depende del orden de eliminación.

   <u>Solución</u>

   a) Se eliminarán iteradamente las estrategias estrictamente dominadas:

   - La estrategia F del jugador 1 es estrictamente dominada por la esrategia mixta que juega C o E con probabilidad de $1/2$.
   - La estrategia a es estrictamente dominada por c o d.

- La estrategia A es estrictamente dominada por la estrategia mixta que juega C, D o E con probabilidad de 1/3.
- La estrategia e es estrictamente dominada por la estrategia mixta que juega b o c con probabilidad 1/2.
- La estrategia D es estrictamente dominada por B.
- La estrategia d es estrictamente dominada por c.

El juego puede ser reducido en diferente orden, pero siempre se llega al siguiente juego reducido:

	b	c
B	$(0,4)$	$(3,3)$
C	$(3,-1)$	$(0,4)$
E	$(3,1)$	$(3,1)$

b) A partir de acá se puede observar que la estrategia E del jugador 1 es débilmente dominante. Por lo tanto, podemos comenzar la eliminación iterada de estrategias débilmente dominadas eliminando B o C.

Si eliminamos primero B, tenemos que:

	b	c
C	$(3,-1)$	$(0,4)$
E	$(3,1)$	$(3,1)$

Como b es débilmente dominada por c, la solución del juego sería $\{E, c\}$.

Si eliminamos primero C, tenemos que:

	b	c
B	$(0,4)$	$(3,3)$
E	$(3,1)$	$(3,1)$

Como c es débilmente dominada por b, la solución del juego sería $\{E, b\}$, por lo que se confirma que la solución de este juego bajo el enfoque de eliminación iterada de estrategias débilmente dominadas depende del orden de eliminación de las estrategias.

2. $\star\star$ Demuestre que una estrategia mixta no puede ser estrictamente dominante.

Solución

Sea σ_i una estrategia mixta i que juega las estrategias $\{s_i^1, s_i^2, ..., s_i^n\}$ con probabilidad estrictamente positiva. Por contradicción, asumimos que σ_i es una estrategia estrictamente dominante del individuo i, con lo cual, se debe cumplir:

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \quad \forall \quad \sigma_i' \neq \sigma_i \in \Sigma_i \wedge \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$$

Como σ_i' incluye a todas las estrategias puras s_i, tenemos que:

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) > u_i(s_i^k, \sigma_{-i}) \quad \forall k = 1, 2, ..., n.$$

Por lo tanto, dicha estrategia mixta debe ser preferida a la combinación lineal de cualquier conjunto de estrategias que domine:[1]

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) > \sum_{k=1}^{N} \sigma_i(s_i^k) u_i(s_i^k, s_{-i}) = u_i(\sigma_i, s_{-i}) \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$$

3. $\star\star\star$ Demuestre que, para corroborar si una estrategia mixta σ_i es estrictamente dominada por otra σ_i', sólo necesitamos comparar los pagos de estas estrategias contra las estrategias puras de los rivales.

   Solución

   Lo que se pide es demostrar que se cumple lo siguiente:

$$u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \iff u_i(\sigma_i', s_{-i}) > u_i(\sigma_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

   Para la demostración se debe recordar que la utilidad que obtiene i por jugar σ_i dentro del perfil σ puede expresarse de la siguiente manera:

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} u_i(s) \left(\prod_{j \in N} \sigma_j(s_j) \right)$$

   Donde el término entre paréntesis es la probabilidad de ocurrencia del perfil $s = (s_1, ..., s_N)$. Si, además, consideramos que $u_i(\sigma_i, s_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}) \sigma_i(s_i)$, la expresión anterior se puede reordenar de la siguiente manera:

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sum_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}) \left(\sigma_i(s_i) \prod_{j \neq i} \sigma_j(s_j) \right) = \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(\sigma_i, s_{-i}) \left(\prod_{j \neq i} \sigma_j(s_j) \right)$$

   Por lo tanto, $u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$ será mayor que $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ si y sólo si:

1 Recordemos que para verificar si una estrategia mixta domina a otra sólo se necesita considerar los pagos de estas estrategias contra las estrategias puras de los rivales: $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \leftrightarrow u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(\sigma_i', s_{-i})$. Ver la proposición **??**.

$$[u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) - u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})] = \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \left[\prod_{j \neq i} \sigma_j(s_j) \right] [u_i(\sigma_i', s_{-i}) - u_i(\sigma_i, s_{-i})] > 0$$

Como $\sigma_j(s_j) \geq 0$, es claro que si $u_i(\sigma_i', s_{-i}) > u_i(\sigma_i, s_{-i})$ para todo $s_{-i} \in S_{-i}$, el valor de la sumatoria es mayor que cero, por lo que necesariamente $u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$.

4. ⋆⋆ Se tiene la siguiente matriz de pagos:

	X	Y	Z
A	$(3,0)$	$(2,5)$	$(1,3)$
B	$(2,4)$	$(1,2)$	$(2,1)$
C	$(1,-1)$	$(0,3)$	$(0,1)$

a) Elimine iteradamente las estrategias estrictamente dominadas y halle el equilibrio.

b) Si se supiera que el jugador 2 jugará la estrategia mixta (1/3,0,2/3), identifique la mejor respuesta del jugador 1.

c) Proponga una estrategia mixta del jugador 2 tal que la mejor respuesta del jugador 1 sea también una estrategia mixta.

Solución

a) Para el juego 1, tenemos lo siguiente:

1) C es estrictamente dominada por A ($A \succ C$).
2) Z es estrictamente dominada por Y ($Y \succ Z$).
3) B es estrictamente dominada por A ($A \succ B$).
4) X es estrictamente dominada por Y ($Y \succ X$).

Por lo que el perfil de equilibrio es (A, Y).

b) Si la estrategia del jugador 2 es $\sigma_2 = (1/3, 0, 2/3)$, la mejor respuesta del jugador 1 dependerá de la utilidad esperada que le den las diferentes estrategias puras:

$$UE_1(A, \sigma_2) = 3\left(\frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

$$UE_1(B, \sigma_2) = 2\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) = 2$$

$$UE_1(C, \sigma_2) = 1\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)(0) = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, se puede concluir que la mejor respuesta del jugador 1 a la estrategia del jugador 2 (σ_2) es B, puesto que es la estrategia que le da una mayor utilidad esperada. No existe ninguna estrategia mixta que sea mejor respuesta, pues si lo hiciera, las estrategias puras que conformasen dicha estrategia deberían ser indiferentes entre sí, pero esto no es posible.

c) Sea σ_2 una estrategia mixta del jugador 2 que asigna la probabilidad 0.5 a la estrategia Z ($\sigma_2(Z) = 0.5$). Luego, si $\sigma_2(X) = \alpha$, tal que $\alpha \in [0, 0.5]$, tenemos:

$$UE_1(A, \sigma_2) = 3\alpha + 2(0.5 - \alpha) + 1(0.5) = \alpha + 1.5$$

$$UE_1(B, \sigma_2) = 2\alpha + 1(0.5 - \alpha) + 2(0.5) = \alpha + 1.5$$

$$UE_1(C, \sigma_2) = \alpha + 0(0.5 - \alpha) + 0(0.5) = \alpha$$

Por lo que la mejor respuesta del jugador 1 es jugar cualquier aleatorización entre A y B; es decir, $\sigma_1 = (\beta, 1 - \beta, 0)$ para todo $\beta \in [0, 1]$.

5. $\star$ Dada la siguiente matriz de pagos:

	C	NC
C	$(0,0)$	$(2,-1)$
NC	$(-1,2)$	$(1,1)$

a) Resuelva el juego utilizando el concepto de dominación estricta.

b) Grafique las funciones de mejor respuesta del juego y muestre que el equilibrio de Nash es único.

Solución

a) Es fácil notar que la estrategia C es estrictamente dominante para ambos jugadores, pues da un pago estrictamente mayor que la otra estrategia:

$$u_i(C, s_{-i}) > u_i(NC, s_{-i}), \text{ para todo } s_{-i} = \{C, NC\}$$

Por lo tanto, el perfil $S = (C, C)$ es el único equilibrio resultante (con ambos agentes jugando su estrategia dominante).

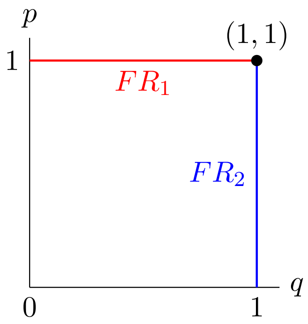
b) Sean p y q son las probabilidades con que los jugadores 1 y 2 juegan C, respectivamente. Entonces, para el jugador 1 tenemos:

$$C \succ NC \longleftrightarrow UE_1(C) > UE_1(NC)$$

Como lo anterior se cumple para todo q, la función de reacción de Diego (FR_1) es $p = 1$. Análogamente, tenemos lo siguiente para el jugador 2:

$$C \succ NC \longleftrightarrow UE_2(C) > UE_2(NC)$$

Lo que se cumple para todo p. Por lo tanto, la función de reacción de $J2$ (FR_2) es $q = 1$. Gráficamente tenemos:



Donde se observa que el perfil (C, C) es el único equilibrio de Nash.

6. ⋆⋆ Halle todos los equilibrios en el juego de "guerra de los sexos":

		Mujer	
		Fútbol	Teatro
Hombre	Fútbol	$(2, 1)$	$(0, 0)$
	Teatro	$(0, 0)$	$(1, 2)$

<u>Solución</u>

Sean p y q las probabilidades con las que el hombre y la mujer juegan fútbol respectivamente. Para el hombre tenemos:

$$F \succsim T \longleftrightarrow UE_h(F) \geq UE_h(T) \longleftrightarrow q \geq \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, tenemos la función de reacción del hombre (FR_h):

$$p = \begin{cases} 1 & \text{(elegir F con probabilidad 1)} \quad si \quad q > 1/3 \\ [0,1] & \text{(aleatorizar entre F y T)} \quad si \quad q = 1/3 \\ 0 & \text{(elegir T con probabilidad 1)} \quad si \quad q < 1/3 \end{cases}$$

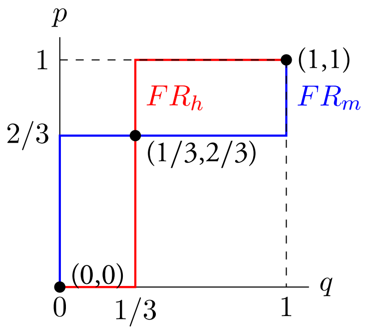
Análogamente tenemos lo siguiente para la mujer:

$$F \succsim T \longleftrightarrow UE_m(F) \geq UE_m(T) \longleftrightarrow p \geq \frac{2}{3}$$

De donde obtenemos la función de reacción de la mujer (FR_m):

$$q = \begin{cases} 1 & \text{(elegir F con probabilidad 1)} \quad si \quad p > 2/3 \\ [0,1] & \text{(aleatorizar entre F y T)} \quad si \quad p = 2/3 \\ 0 & \text{(elegir T con probabilidad 1)} \quad si \quad p < 2/3 \end{cases}$$

Los equilibrios de Nash resultan de la intersección de las funciones de reacción. Gráficamente, tenemos:



Por lo tanto, $EN = \{(F,F),(T,T),(\sigma_h(F) = 2/3, \sigma_m(F) = 1/3)\}$.

7. ⋆⋆ Diego decide ir a su universidad en transporte público. él sabe que debe tomar su bus en un paradero autorizado, pero, como odia caminar, preferiría tomarlo en la esquina de su casa. Por otro lado, el chofer del bus, puede respetar el reglamento de tránsito y recoger a sus pasajeros en los paraderos autorizados, o hacerlo en cualquier esquina. La siguiente matriz de pagos resume las utilidades para cada agente.

   Analice si existen estrategias dominadas y encuentre todos los equilibrios de Nash.

   Solución

		Chofer	
		Esquina	*Paradero*
Diego	*Esquina*	$(15, 10)$	$(5, 5)$
	Paradero	$(5, 5)$	$(20, 30)$

Es claro que no existen estrategias dominadas, sea débil o estrictamente. Luego, los equilibrios de Nash pueden obtenerse mediante las funciones de reacción (o de mejor respuesta): Sea p la probabilidad con la que Diego juega $Esquina$ y sea q la probabilidad con la que el chofer juega la misma estrategia. Entonces tenemos que:

Para Diego:

$$E \succsim P \longleftrightarrow UE_D(E) \geq UE_D(P) \longleftrightarrow q \geq \frac{3}{5}$$

Por lo tanto, tenemos la función de reacción de Diego (FR_D):

$$p = \begin{cases} 1 & \text{(elegir E con probabilidad 1)} & si & q > 3/5 \\ [0,1] & \text{(aleatorizar entre E y P)} & si & q = 3/5 \\ 0 & \text{(elegir P con probabilidad 1)} & si & q < 3/5 \end{cases}$$

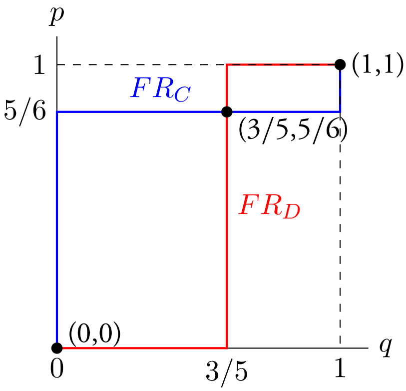
Análogamente, tenemos lo siguiente para el chofer:

$$E \succsim P \longleftrightarrow UE_C(E) \geq UE_C(P) \longleftrightarrow p \geq \frac{5}{6}$$

De donde obtenemos la función de reacción del chofer (FR_C):

$$q = \begin{cases} 1 & \text{(elegir E con probabilidad 1)} & si & p > 5/6 \\ [0,1] & \text{(aleatorizar entre E y P)} & si & p = 5/6 \\ 0 & \text{(elegir P con probabilidad 1)} & si & p < 5/6 \end{cases}$$

Los equilibrios de Nash resultan de la intersección de las funciones de reacción. Gráficamente tenemos:



Por lo tanto, $EN = \{(E,E),(P,P),(\sigma_D(E) = 5/6, \sigma_C(E) = 3/5)\}$.

8. $\star\star$ Considere el siguiente juego en representación normal:

	A	B	C
a	$(2,1)$	$(4,3)$	$(1,2)$
b	$(4,0)$	$(5,3)$	$(2,2)$
c	$(3,3)$	$(2,2)$	$(2,4)$

Encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias puras y mixtas.

Solución

Se debe notar que las estrategias a y A son estrictamente dominadas por b y C respectivamente, por lo que el juego se reduce a:

	B	C
b	$(5,3)$	$(2,2)$
c	$(2,2)$	$(2,4)$

A partir de acá hallaremos las estrategias de equilibrio. Siendo α y β las probabilidades con las que los jugadores 1 y 2 juegan b y B respectivamente, tenemos:

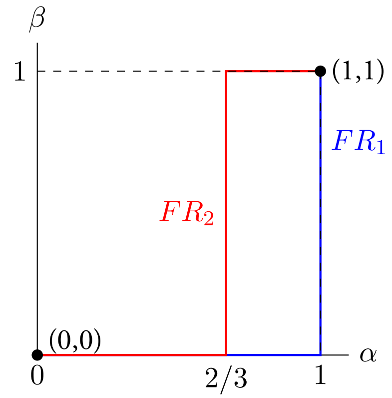
$$\begin{array}{llcccc}
\text{Para } J_1: & b \succsim c & \leftrightarrow & u_1(b,\sigma_2) \geq u_1(c,\sigma_2) & \Rightarrow & \beta \geq 0 \\
\text{Para } J_2: & B \succsim C & \leftrightarrow & u_2(B,\sigma_1) \geq u_2(C,\sigma_1) & \Rightarrow & \alpha \geq 2/3
\end{array}$$

Luego, podemos obtener los conjuntos de mejores respuestas para los jugadores 1 y 2 respectivamente:

$$FR1: \quad \beta = \begin{cases} 0 & \rightarrow \quad \alpha \in [0,1] \quad (b \sim c) \\ (0,1] & \rightarrow \quad \alpha = 1 \quad (b \succ c) \end{cases}$$

$$FR2: \quad \alpha = \begin{cases} [0,2/3) & \rightarrow \quad \beta = 0 \quad (C \succ B) \\ 2/3 & \rightarrow \quad \beta \in [0,1] \quad (C \sim B) \\ (2/3,1] & \rightarrow \quad \beta = 1 \quad (C \prec B) \end{cases}$$

Los equilibrios de Nash resultan de la intersección de los conjuntos de mejores respuestas:



Por lo tanto el conjunto de equilibrios de Nash es:

$$\sigma^* = \{(b,B); ([\alpha b + (1-\alpha)c], C)\} \mid \alpha \in [0, 2/3]$$

9. ⋆⋆ Dado el siguiente juego en forma estratégica:

1 \ 2	A	B	C	D
a	(2,2)	(-1,0)	(0,3)	(2,6)
b	(3,2)	(2,1)	(2,3)	(3,0)
c	(1,0)	(2,2)	(1,2)	(2,1)
d	(1,2)	(3,1)	(4,2)	(1,1)

a) Utilice argumentos de dominación para obtener soluciones del juego.

b) Encuentre todos los equilibrios de Nash.

<u>Solución</u>

Este ejercicio nos permitirá recordar las definiciones vistas antes.

a) No existen estrategias que sean estrictamente dominantes para ambos jugadores. Pero podemos obtener soluciones del juego mediante la eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas:

La estrategia a es estrictamente dominada por b. Luego, se eliminan D (dominado por C), c (dominado por la estrategia mixta $0.5b + 0.5d$) y B (dominado por A y C).

Finalmente, la predicción del juego es:

		2	
		A	C
1	b	(3,2)	(2,3)
	d	(1,2)	(4,2)

b) Note que si una estrategia es estrictamente dominada por otra jamás será una mejor respuesta, por lo que el equilibrio de Nash lo buscaremos en el juego reducido. Si denotamos por p y q como las probabilidades de que los jugadores 1 y 2 jueguen b y A respectivamente. Para el jugador 1 tenemos:

$$d \succsim b \quad \longleftrightarrow \quad UE_1(d) \geq UE_1(b),$$

lo cual ocurre si y solo si:

$$q + 4(1-q) \geq 3q + 2(1-q) \quad \longleftrightarrow \quad q \leq \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, tenemos la función de reacción del jugador 1 (FR_1):

$$p = \begin{cases} 0 & \text{(elegir } d \text{ con probabilidad 1)} & si \quad q < 1/2 \\ [0,1] & \text{(aleatorizar entre } d \text{ y } b) & si \quad q = 1/2 \\ 1 & \text{(elegir } b \text{ con probabilidad 1)} & si \quad q > 1/2 \end{cases}$$

Para el jugador 2 tenemos:

$$C \succsim A \quad \longleftrightarrow UE_2(C) \quad \geq UE_2(A)$$

Lo cual ocurre si y solo si:

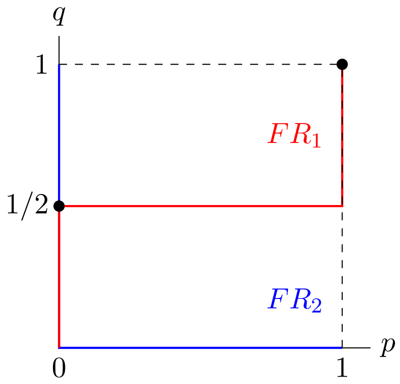
$$3p + 2(1-p) \geq 2 \quad \longleftrightarrow \quad p \geq 0$$

Por lo tanto, tenemos la función de reacción del jugador 2 (FR_2):

$$q = \begin{cases} 0 & \text{(elegir } C \text{ con probabilidad 1)} & si \quad p > 0 \\ [0,1] & \text{(aleatorizar entre } C \text{ y } A) & si \quad p = 0 \end{cases}$$

El gráfico mostrado debajo indica que $\sigma^* = FR_1 \cap FR_2$ es un conjunto con infinitos elementos (equilibrios de Nash):

$$EN = \{(d, \alpha A + (1-\alpha)C \mid \alpha \leq 0.5)\}$$



10. ⋆⋆ Considere el caso de dos vendedores, cada uno de los cuales quiere vender un cuadro antiguo raro. El vendedor A publicita un precio de 40K por su cuadro; y el vendedor B, de 60K. Hay exactamente dos compradores para estos cuadros. Cada comprador estaría dispuesto a pagar exactamente 100K para obtener uno de esos cuadros y ambos saben que el otro tiene esa disposición a pagar. Los dos compradores deciden a qué vendedor acercarse sin saber la acción del otro comprador. Si los compradores se acercan al mismo vendedor, tienen la misma probabilidad (50 %) de ser escogidos por el vendedor (el otro comprador se va a casa sin ningún cuadro—asumimos que ya no querrá acercarse al otro vendedor). La ganancia de un comprador que obtiene el cuadro al precio p es $100 - p$. Los compradores desean maximizar sus ganancias esperadas. Muestre la matriz de pagos esperados de este juego y halle todos los equilibrios de Nash (en estrategias puras y mixtas).

    Solución

    Comprador A (J_1) decide entre acercarse al vendedor A o B. Lo mismo el comprador B (J_2).

		Jugador 2	
		A	B
Jugador 1	A	$(30, 30)$	$(60, 40)$
	B	$(40, 60)$	$(20, 20)$

    Los equilibrios de Nash se consiguen de la forma que ya hemos estudiado, obteniendo $EN = \{(A, B); (B, A); (\frac{4}{5}A + \frac{1}{5}B, \frac{4}{5}A + \frac{1}{5}B\}$, con pagos $\{(60, 40); (40, 60); (36, 36)\}$.

11. ⋆⋆ Dado el siguiente juego estático:

	L	C	R
T	$(3,1)$	$(a,3)$	$(0,4)$
M	$(1,b)$	$(2,0)$	$(1,1)$
B	$(c,2)$	$(4,1)$	$(2,d)$

a) ¿Para qué valores de a, b, c, d este juego tiene un equilibrio en estrategias estrictamente dominantes?

b) ¿Para qué valores de a, b, c, d (si hay algún valor de esos parámetros), este juego tiene un equilibrio en estrategias mixtas, en el cual el jugador 1 juega solo T y B con probabilidad positiva, mientras que el jugador 2 juega solo L y R con probabilidad positiva?

<u>Solución</u>

a) Es fácil ver que, para el jugador 1 (jugador 2), solo B (R) podría ser estrictamente dominante. Luego, $c > 3$, $a < 4$ y $b < 1$, $d > 2$.

b) Esta pregunta indica que M y C son jugadas con probabilidad cero. Imaginemos que el equilibrio en estrategias mixtas es $\sigma = ((1-p)T + pB, qL + (1-q)R)$. Luego, para el jugador 1 y para todo q debe cumplirse:

$$3q + 0(1-q) = cq + 2(1-q) \quad \Rightarrow \quad c = 5 - \frac{2}{q} \quad \Rightarrow \quad c \leq 3$$

De forma análoga, para el jugador 2 y para todo p debe cumplirse:

$$1(1-p) + 2p = 4(1-p) + dp \quad \Rightarrow \quad d = \frac{5p-3}{p} \quad \Rightarrow \quad d \leq 2$$

Finalmente, note que el perfil de estrategias mixtas se sostendrá como equilibrio si ningún jugador tiene incentivos a desviarse unilateralmente. Para el jugador 1 y para todo q debe cumplirse:

$$T \sim B \succsim M \quad \Rightarrow \quad cq + 2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad c \geq \frac{-1}{q}$$

De forma análoga, para el jugador 2 y para todo p debe cumplirse:

$$L \sim R \succsim C \quad \Rightarrow \quad 4(1-p) + pd \geq 3(1-p) + p \quad \Rightarrow \quad d \geq \frac{2p-1}{p}$$

Por tanto, para cualquier a y b, y para $3 \geq c \geq -1$ y $2 \geq d \geq 1$, existe tal equilibrio.

12. $\star\star\star$ Considere el siguiente juego en representación normal:

	A	B	C
a	$(3,2)$	$(-1,0)$	$(1,0)$
b	$(1,0)$	$(0,5)$	$(1,2)$
c	$(0,-1)$	$(2,3)$	$(4,-2)$

a) Encuentre todos los equilibrios de Nash.

b) Utilice la estrategia mixta encontrada (llámela (σ_1^*, σ_2^*)) para mostrar que, dado σ_2^*, para el jugador 1 se cumple que: i) las estrategias puras jugadas con probabilidad positiva en σ_1^* son indiferentes entre sí y (ii) que dichas estrategias son al menos tan buenas como la estrategia que no se juega en σ_1^*. Verifique que esto se cumple también para el jugador 2.

<u>Solución</u>

a) Eliminamos las estrategias estrictamente dominadas: $b \prec (a/2 + c/2)$ y $C \prec (A/2 + B/2)$, por lo que el juego se reduce a:

	A	B
a	$(3,2)$	$(-1,0)$
c	$(0,-1)$	$(2,3)$

Existen tres equilibrios de Nash: $EN = \{(a,A),(c,B),\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c, \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right)\}$.

b) Note que para el jugador 1:

$$u_1\left(a,\sigma_2^*\right) = u_1\left(a, \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) = \frac{1}{2}u_1(a,A) + \frac{1}{2}u_1(a,B) = 1$$
$$u_1\left(c,\sigma_2^*\right) = u_1\left(c, \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) = \frac{1}{2}u_1(c,A) + \frac{1}{2}u_1(c,B) = 1$$
$$u_1\left(b,\sigma_2^*\right) = u_1\left(b, \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) = \frac{1}{2}u_1(b,A) + \frac{1}{2}u_1(b,B) = \frac{1}{2} < 1$$

Y para el jugador 2:

$$u_2\left(A,\sigma_1^*\right) = u_2\left(A, \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c\right) = \frac{2}{3}u_2(A,a) + \frac{1}{3}u_2(A,c) = 1$$
$$u_2\left(B,\sigma_1^*\right) = u_2\left(B, \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c\right) = \frac{2}{3}u_2(B,a) + \frac{1}{3}u_2(B,c) = 1$$
$$u_2\left(C,\sigma_1^*\right) = u_2\left(C, \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c\right) = \frac{2}{3}u_2(C,a) + \frac{1}{3}u_2(C,c) = -\frac{2}{3} < 1$$

13. $\star\star\star$ Cuando un profesor prepara el examen, su utilidad decrece en función al esfuerzo que realiza en crear nuevas preguntas, pero crece en función al tiempo que los alumnos le dediquen a revisar los temas vistos en clases. El profesor tiene dos opciones: hacer nuevas preguntas o "reciclar" preguntas de exámenes anteriores. Los alumnos, por su parte, también tienen dos opciones al estudiar: revisar los temas vistos en clases o pedir a sus amigos exámenes pasados y memorizar sus respuestas.

Al profesor no le gusta que memoricen exámenes pasados, por lo que su utilidad se incrementa si un examen solo tiene nuevas preguntas. Por su parte, la prioridad de los alumnos es su nota, por lo que su utilidad será mayor cuando estudian de las clases y su profesor pone nuevas preguntas y cuando memoriza preguntas de exámenes pasados y su profesor "recicla" preguntas.

Plantee funciones de utilidad para el profesor y un alumno típico, que estén de acuerdo con la descripción realizada líneas arriba. Encuentre el equilibrio de Nash del juego y comente cómo la probabilidad de que el profesor "recicle" preguntas está afectada por los parámetros de su función de utilidad.

<u>Solución</u>

El problema podría plantearse dando valores a las diferentes alternativas.

Para el profesor tenemos:

A: utilidad si los alumnos estudian del material de clases. E: Desutilidad de crear nuevas preguntas. a: Utilidad de jalar a quien no revisó el material. Se asume que $a - E > 0$. Es decir, que jalar compensa la desutilidad de crear nuevas preguntas.

En el caso de los alumnos, se tiene:

b: utilidad por sacar buena nota. m: desutilidad por sacar mala nota. e: desutilidad por estudiar notas de clase. Se asume que $b - e > m$, por lo que los alumnos prefieren aprender a obtener una mala nota. La matriz de pagos estaría dada por:

	$Estudiar$	$Memorizar$
$Reciclar$	$(A, b-e)$	$(0, b)$
$Inventar$	$(A-E, b-e)$	$(a-E, m)$

Podemos ver que no existe un equilibrio de Nash en estrategias puras, por lo que debe existir (al menos) un equilibrio en estrategias mixtas (recordar el teorema **??** visto en la **??**). Sean α y β las probabilidades de que un alumno estudie y que el profesor recicle ejercicios respectivamente. Adicionalmente, gracias al ejercicio anterior, en el equilibrio con estrategias mixtas se debe cumplir:

$$U(reciclar) = U(inventar) \quad \leftrightarrow \quad \alpha A + (1-\alpha)0 = \alpha(A-E) + (1-\alpha)(a-E)$$

$$U(reciclar) = U(inventar) \quad \leftrightarrow \quad b - e = \beta b + (1-\beta)m$$

De ahí, obtenemos que $\alpha = (a-E)/a$ y $\beta = (b-e-m)/(b-m)$. Finalmente, tenemos el siguiente equilibrio:

$$EN = \left\{ \left(\frac{b-e-m}{b-m} Reciclar + \frac{e}{b-m} Inventar, \frac{a-E}{a} Estudiar + \frac{E}{a} Memorizar \right) \right\}$$

14. $\star\star$ Sea $S_i^+ \subset S_i$ son el conjunto de estrategias puras que el jugador i juega con probabilidad estrictamente positiva en el perfil de estrategias mixtas $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_I)$. Muestre que el perfil de estrategias mixtas σ es un equilibrio de Nash del juego si, y solo si, para cada uno de los jugadores, se cumple:[2]

    (i) $u_i(s_i^1, \sigma_{-i}) = u_i(s_i^2, \sigma_{-i}) \qquad \forall s_i^1, s_i^2 \in S_i^+$

    (ii) $u_i(s_i^1, \sigma_{-i}) \geq u_i(s_i^2, \sigma_{-i}) \qquad \forall s_i^1 \in S_i^+ \quad \wedge \quad \forall s_i^2 \notin S_i^+$

    Finalmente, interprete el significado del enunciado.

    Solución

    $\Rightarrow$) Por contradicción:

    Si σ es un equilibrio de Nash pero las condiciones (i) o (ii) no se cumple para algún jugador i, entonces hay alguna estrategia $s_i \in S_i^+$ y $s_i^{'} \in S_i$ tal que $u_i(s_i^{'}, \sigma_{-i} > u_i(s_i, \sigma_{-i})$. Por lo tanto, el individuo i podría aumentar estrictamente su utilidad jugando con certeza la estrategia $s_i^{'}$. ($\Rightarrow\Leftarrow$)

    $\Leftarrow$) Por contradicción:

    Si se cumplen las condiciones (i) y (ii), pero $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i})$ no es un equilibrio de Nash, existirá algún jugador i que tenga una estrategia mixta σ_i' que le reporte un mejor pago esperado que σ_i; es decir que $u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$, lo cual sólo sería posible si σ_i' incluyera alguna estrategia pura s_i' con probabilidad estrictamente positiva que sea estrictamente preferida a todas las estrategias en S_i^+. Esto último implica, a su vez, que las condiciones (i) y (ii) no son satisfechas, lo cual es una contradicción. ($\Rightarrow\Leftarrow$)

    El enunciado implica que si, en equilibrio, el jugador i juega una estrategia mixta, entonces i debe ser indiferente entre su estrategia mixta y cualquiera de las estrategias puras que la componen. Adicionalmente, cualquiera de dichas estrategias debe ser al menos tan buena como cualquiera de las estrategias puras que han sido descartadas por i.

15. $\star\star\star$ Se tiene un juego de suma cero con una estructura conocida como piedra, papel o tijera (Yan-Ken-Po):

$$
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & A & B & C \\ \hline
X & (0,0) & (-1,1) & (1,-1) \\ \hline
Y & (1,-1) & (0,0) & (-1,1) \\ \hline
Z & (-1,1) & (1,-1) & (0,0) \\ \hline
\end{array}
$$

Halle todos los equilibrios de Nash.

Solución

Usaremos el método del *simplex* para resolver este problema. La idea es graficar en $\mathbb{R}^2$ el conjunto de mejor respuesta de cada jugador e intersecarlos. Los equilibrios de Nash se encontrarán en dichas intersecciones.

Sean a, b y c las probabilidades con las que el jugador 2 juega A, B o C, respectivamente. Se tiene lo siguiente para el jugador 1:

$$
X \succsim Y \longleftrightarrow 2c \geq a+b \begin{cases} (a=0) \quad 2c \geq b \quad \left(\frac{2}{3}B + \frac{1}{3}C\right) \\ \\ (b=0) \quad 2c \geq a \quad \left(\frac{2}{3}A + \frac{1}{3}C\right) \end{cases}
$$

$$
Y \succsim Z \longleftrightarrow 2a \geq b+c \begin{cases} (b=0) \quad 2a \geq c \quad \left(\frac{2}{3}C + \frac{1}{3}A\right) \\ \\ (c=0) \quad 2a \geq b \quad \left(\frac{2}{3}B + \frac{1}{3}A\right) \end{cases}
$$

$$
X \succsim Z \longleftrightarrow a+c \geq 2b \begin{cases} (a=0) \quad c \geq 2b \quad \left(\frac{2}{3}C + \frac{1}{3}B\right) \\ \\ (c=0) \quad a \geq 2b \quad \left(\frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B\right) \end{cases}
$$

A continuación se presentará el *simplex*, donde cada vértice se corresponde con una estrategia jugada por 2 con certeza, y el interior contiene a todas sus posibles estrategias mixtas (en la línea que une 2 estrategias se juega con probabilidad cero la tercera estrategia). Luego, los puntos de corte encontrados nos servirán para hallar la mejor respuesta del jugador 1 frente a cualquier estrategia que pueda tomar el jugador 2.

Por ejemplo, de $X \succsim Y$ podemos extraer la siguiente información:

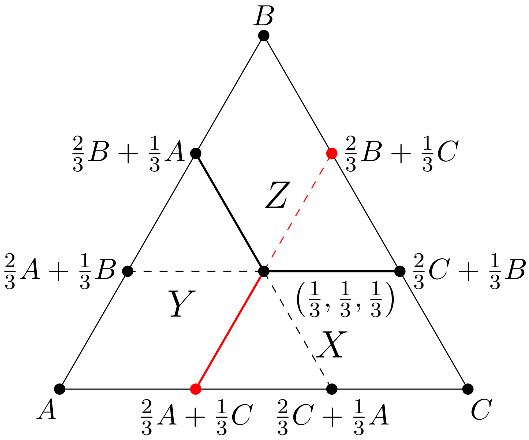
- Si el jugador 2 jugase cualquier estrategia que asigne cero de probabilidad a la estrategia A ($a = 0$), el jugador 1 preferirá X sobre Y siempre que dicha estrategia, por lo menos, asigne a C el doble de probabilidad que a B.

2 Proposición 8.D.1 de Mas-Colell *et al.* (1995)

- Si el jugador 2 jugase cualquier estrategia que asigne cero de probabilidad a la estrategia B ($b = 0$), el jugador 1 preferirá X sobre Y siempre que dicha estrategia, por lo menos, asigne a C el doble de probabilidad que a A

Con dicha información estamos obteniendo dos puntos dentro del *simplex* (en el primer caso nos ubicamos en la recta que une B y C, pues $a = 0$, a $2/3$ del camino desde C hacia B, pues B es el más probable) que pertenecen a estrategias que dejan indiferente al jugador 1 entre X e Y. Luego, cualquier combinación lineal de dichas estrategias seguirán dejando indiferente al jugador entre X e Y, por lo que podemos trazar una línea que una los dos puntos (línea roja). Por encima de dicha línea, el jugador 1 siempre preferirá X; y, por debajo de ella, siempre preferirá Y.

Utilizando el resto de información, podemos obtener el siguiente gráfico:



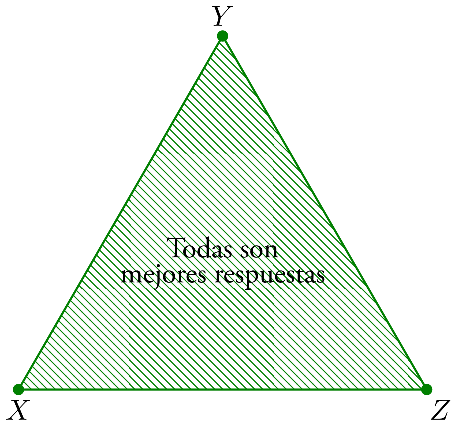
Para ver qué estrategias son mejores respuestas, debemos graficar nuevamente el *simplex* pero considerando las estrategias del jugador 1 en los vértices. En base al gráfico anterior podemos concluir:

- Si el jugador 2 juega C, la mejor respuesta del jugador 1 es jugar X.
- Si el jugador 2 juega B, la mejor respuesta del jugador 1 es jugar Z.
- Si el jugador 2 juega $2/3C + 1/3B$, la mejor respuesta del jugador 1 es cualquier aleatorización entre las estrategias Z y X.

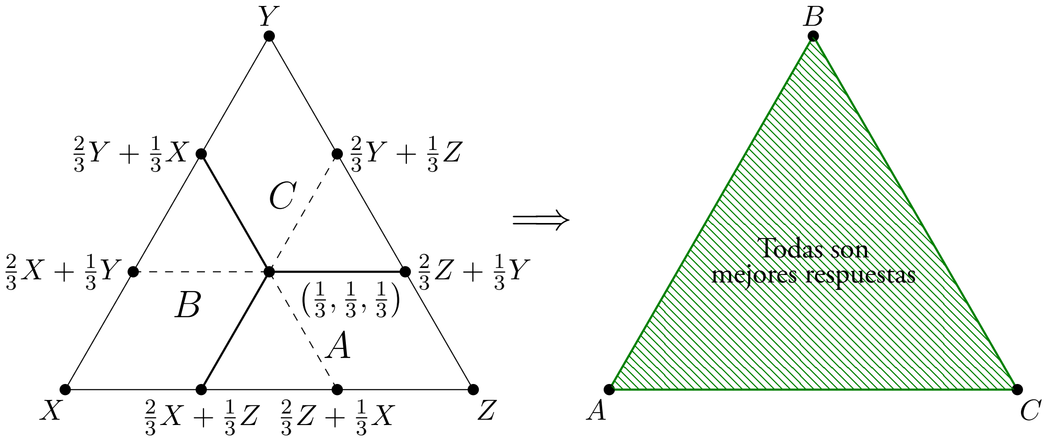
Hasta el momento, sabemos que las estrategias X, Z y $\alpha X + (1 - \alpha)Z$ son mejor respuesta ante alguna estrategia, por lo que sombreamos de verde la recta que une a X y Z. Luego,

- Si el jugador 2 juega A, la mejor respuesta del jugador 1 es jugar Y.
- Si el jugador 2 juega $2/3B + 1/3A$, la mejor respuesta del jugador 1 es jugar cualquier aleatorización entre Y y Z.
- Si el jugador 2 juega $2/3A + 1/3C$, la mejor respuesta del jugador 1 es cualquier aleatorización entre las estrategias Y y X.

Por lo tanto, sombreamos de verde todo el borde del *simplex*. Finalmente, se observa que si el jugador 2 juega $\sigma_2 = (1/3, 1/3, 1/3)$, la mejor respuesta del jugador 1 es cualquier aleatorización entre los X, Y y Z, por lo que sombreamos de verde el interior del *simplex*.



De manera análoga, se puede hallar el conjunto de mejor respuesta del jugador 2 frente a cualquier estrategia que pueda tomar el jugador 1:



Este procedimiento consiste en partir de todas las estrategias racionalizables de uno de los jugadores (jugador 1) y encontrar las mejores respuestas de del rival; luego, si la mejor respuesta del jugador a la mejor respuesta de su rival es la estrategia de la que se partió, estaríamos tratando con un equilibrio de Nash. A continuación, se muestra dicho procedimiento:

$$
\begin{array}{ccccccl}
\underline{S_1} & & \underline{MR_2} & & \underline{MR_1} & & \\
X & \Rightarrow & B & \Rightarrow & Z & \Rightarrow & \text{No es EN} \\
Y & \Rightarrow & C & \Rightarrow & X & \Rightarrow & \text{No es EN} \\
Z & \Rightarrow & A & \Rightarrow & Y & \Rightarrow & \text{No es EN} \\
XY & \Rightarrow & B & \Rightarrow & Z & \Rightarrow & \text{No es EN} \\
 & \Rightarrow & C & \Rightarrow & X & \Rightarrow & \text{No es EN} \\
 & \Rightarrow & BC & \Rightarrow & Z & \Rightarrow & \text{No es EN} \\
 & & & \Rightarrow & X & \Rightarrow & \text{No es EN} \\
 & & & \Rightarrow & ZX & \Rightarrow & \text{No es EN} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
XYZ & \Rightarrow & A & \Rightarrow & Y & \Rightarrow & \text{No es EN} \\
 & \Rightarrow & B & \Rightarrow & Z & \Rightarrow & \text{No es EN} \\
 & \Rightarrow & C & \Rightarrow & X & \Rightarrow & \text{No es EN} \\
 & \Rightarrow & AB & \Rightarrow & Y & \Rightarrow & \text{No es EN} \\
 & & & \Rightarrow & Z & \Rightarrow & \text{No es EN} \\
 & & & \Rightarrow & YZ & \Rightarrow & \text{No es EN} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
XYZ & \Rightarrow & ABC & \Rightarrow & XYZ & \Rightarrow & EN = \{(1/3, 1/3, 1/3), (1/3, 1/3, 1/3)\}
\end{array}
$$

Por lo que se concluye que existe un único equilibrio de Nash, que consiste en escoger cada estrategia con $1/3$ de probabilidad para ambos jugadores. El pago esperado para cada jugador es 0.

16. $\star\star\star$ Félix y Oscar comparten un departamento en Nueva York. Ambos tienen opiniones marcadamente distintas sobre la limpieza y, por tanto, están dispuestos a utilizar un distinto número de horas para limpiarlo. Se sabe, además, que limpiar perfectamente el departamento requiere un mínimo de 12 horas a la semana, dejarlo habitable requiere un mínimo de 9 horas a la semana y si es que deciden utilizar menos de 9 horas a la semana el departamento estará sucio. Suponga que Félix y Oscar pueden destinar 3, 6 ó 9 horas a la semana a la limpieza del mismo.

    Ambos están de acuerdo en que un departamento habitable equivale a 2 útiles. Sin embargo, para Félix un departamento perfectamente limpio vale 10 útiles mientras que para

Oscar vale solo 5. Y un departamento sucio para Félix equivale a -10 útiles; y para Oscar, solo -5 útiles.

Finalmente, la función de utilidad de ambos individuos es la siguiente:

$$U_i(w_i, h_i) = w_i - h_i$$

Donde w es el bienestar obtenido por el estado del departamento y h el número de horas invertido en limpiarlo.

a) Construya la matriz de pagos del juego.

b) ¿Existen estrategias estrictamente dominantes en el juego? ¿Débilmente dominantes?

c) Halle todos los equilibrios de Nash.

<u>Solución</u>

a) De acuerdo a la información brindada, obtenemos la siguiente matriz de pagos:

		Oscar		
		$3h$	$6h$	$9h$
	$3h$	$(-13,-8)$	$(-1,-4)$	$(7,-4)$
Félix	$6h$	$(-4,-1)$	$(4,-1)$	$(4,-4)$
	$9h$	$(1,2)$	$(1,-1)$	$(1,-4)$

b) No existen estrategias estrictamente dominadas (ni dominantes); sin embargo, la estrategia $9h$ es débilmente dominada por $6h$ ($6h \succsim 9h$). Si asumimos solo racionalidad y conocimiento común de racionalidad, no podemos eliminar iteradamente estrategias débilmente dominadas.

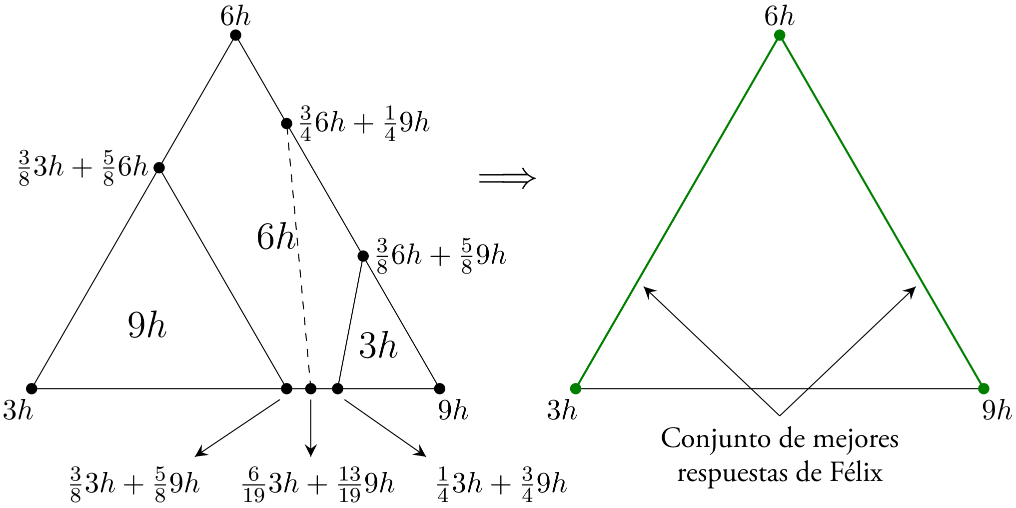
c) Para hallar todos los equilibrios utilizaremos el método del *simplex*, que nos permitirá observar todas las estrategias mixtas de ambos jugadores. Sean x, y, y z las probabilidades con las que Oscar juega $3h$, $6h$ o $9h$ respectivamente, tal que $x + y + z = 1$. Entonces, para Félix se cumple lo siguiente:

$$3h \succsim 6h \longleftrightarrow 3z \geq 9x + 5y \begin{cases} (x=0) \quad z \geq \frac{5}{3}y \quad \left(\frac{3}{8}6h + \frac{5}{8}9h\right) \\ \\ (y=0) \quad z \geq 3x \quad \left(\frac{1}{4}3h + \frac{3}{4}9h\right) \end{cases}$$

$$3h \succsim 9h \longleftrightarrow 6z \geq 13x + 2y \begin{cases} (x=0) \quad z \geq \frac{1}{3}y \quad \left(\frac{3}{4}6h + \frac{1}{4}9h\right) \\ \\ (y=0) \quad z \geq \frac{13}{6}x \quad \left(\frac{6}{19}3h + \frac{13}{19}9h\right) \end{cases}$$

$$6h \succsim 9h \longleftrightarrow 3z + 3y \geq 5x \begin{cases} (z=0) \quad y \geq \frac{5}{3}x \quad \left(\frac{3}{8}6h + \frac{5}{8}9h\right) \\ \\ (y=0) \quad z \geq \frac{5}{3}x \quad \left(\frac{3}{8}3h + \frac{5}{8}9h\right) \end{cases}$$

Con dichos datos, y utilizando el *simplex*, podemos obtener el conjunto de estrategias mixtas de Félix, podemos obtener su conjunto de mejor respuesta ante las acciones de Oscar, $B : \triangle S_2 \rightarrow \triangle S_1$:



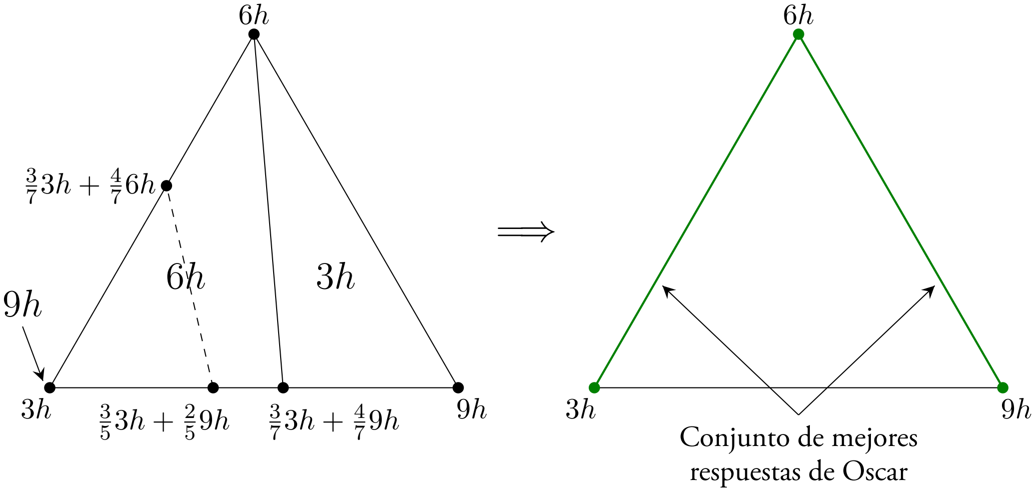
Como puede observarse en el gráfico izquierdo, ante las posibles estrategias mixtas que pudiese tomar Oscar, Felix elige la estrategia que constituye la mejor respuesta. Note que, al ser disjuntos, las estrategias $9h$ y $3h$ nunca constituyen una estrategia mixta que sea mejor respuesta a σ_{oscar} (esto puede verse en el gráfico de la derecha).

De forma análoga, se procede con Oscar. Sean a, b, y c las probabilidades con las que Félix juega $3h$, $6h$ o $9h$ respectivamente, tal que $a+b+c=1$. Entonces debe cumplirse que lo siguiente:

$$3h \succsim 6h \longleftrightarrow c \geq \frac{4}{3}a \quad \left(\frac{3}{7}3h + \frac{4}{7}9h\right)$$

$$3h \succsim 9h \longleftrightarrow 3b + 6c \geq 4a \begin{cases} (b=0) \quad c \geq \frac{2}{3}a \quad \left(\frac{3}{5}3h + \frac{2}{5}9h\right) \\ \\ (c=0) \quad b \geq \frac{4}{3}a \quad \left(\frac{3}{7}3h + \frac{4}{7}6h\right) \end{cases}$$

$$6h \succsim 9h \longleftrightarrow b + c \geq 0$$



Donde se observa que Oscar tampoco tiene como mejor respuesta cualquier estrategia mixta que asigne probabilidad positiva a $3h$ y a $9h$. Finalmente, utilizaremos la aplicación de mejor respuesta de ambas personas para encontrar todos los equilibrios de Nash:

S_F		MR_O		MR_F		
$3h$	$\Rightarrow$	$6h$	$\Rightarrow$	$6h$	$\Rightarrow$	No es EN
	$\Rightarrow$	$9h$	$\Rightarrow$	$3h$	$\Rightarrow$	$EN_1 = \{(3h, 9h)\}$
	$\Rightarrow$	$6h9h$	$\Rightarrow$	$6h$	$\Rightarrow$	No es EN
			$\Rightarrow$	$3h6h$	$\Rightarrow$	No es EN
			$\Rightarrow$	$3h$	$\Rightarrow$	$EN_2 = \{(3h, \sigma(9h) \geq 5/8 \wedge \sigma(3h) = 0)\}$
$3h6h$	$\Rightarrow$	$6h$	$\Rightarrow$	$6h$	$\Rightarrow$	No es EN
$6h$	$\Rightarrow$	$6h$	$\Rightarrow$	$6h$	$\Rightarrow$	$EN_3 = \{(6h, 6h)\}$
	$\Rightarrow$	$3h$	$\Rightarrow$	$9h$	$\Rightarrow$	No es EN
	$\Rightarrow$	$3h6h$	$\Rightarrow$	$9h$	$\Rightarrow$	No es EN
			$\Rightarrow$	$6h9h$	$\Rightarrow$	No es EN
			$\Rightarrow$	$6h$	$\Rightarrow$	$EN_4 = \{(6h, \sigma(6h) \geq 5/8 \wedge \sigma(9h) = 0)\}$
$6h9h$	$\Rightarrow$	$3h$	$\Rightarrow$	$9h$	$\Rightarrow$	No es EN
$9h$	$\Rightarrow$	$3h$	$\Rightarrow$	$9h$	$\Rightarrow$	$EN_5 = \{(9h, 3h)\}$

17. $\star\star\star$ Dado el siguiente juego:

    a) Defina el conjunto de estrategias racionalizables de ambos jugadores, R1 y R2.

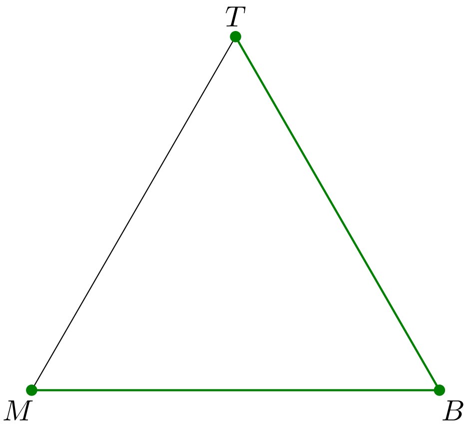
    b) Halle todos los equilibrios de Nash usando el método del *simplex*.

	L	C	R
T	$(3,3)$	$(0,0)$	$(0,2)$
M	$(0,0)$	$(3,3)$	$(0,2)$
B	$(2,2)$	$(2,2)$	$(2,0)$

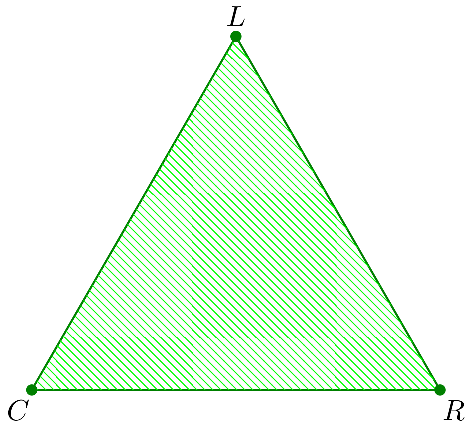
Solución

Resolvemos este ejercicio de forma análoga a los ejercicios anteriores, mediante el uso del simplex y obtendremos lo siguiente:

a) Los conjuntos de estrategias racionalizables son:



Mejores respuestas para el jugador 1



Mejores respuestas para el jugador 2

De aquí puede verse que el jugador 1 jamás querrá usar una estrategia mixta que asigne probabilidad positiva a las estrategias T y M al mismo tiempo. Por otro lado, todas las estrategias son racionalizables para el jugador 2.

b) Finalmente obtenemos que $EN = \{(T,L);(M,C);(B,\alpha C+(1-\alpha)L) \quad \forall \quad \alpha \in [1/3,2/3]\}$

18. $\star\star\star$ Considere la siguiente matriz de pagos:

	L	R
T	$(3,0)$	$(1,-2)$
B	$(5,4)$	$(-1,6)$

a) Encuentre el equilibrio de Nash α^* y el vector de pagos asociado a dicho equilibrio $u(\alpha^*)$.

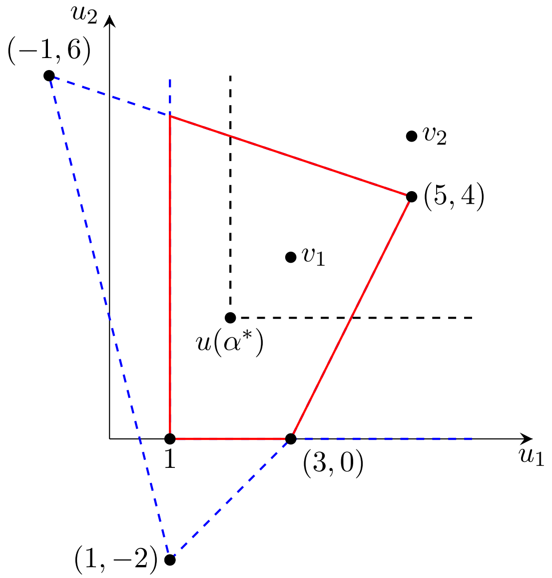
b) Grafique el conjunto FIR y ubique el vector $u(\alpha^*)$.

c) Si el juego se repite infinitas veces, ¿es posible que exista un ENPS que otorgue el vector de pagos $v_1 = (3,3)$ en cada periodo?, ¿Qué hay del vector $v_2 = (5,5)$?

Solución

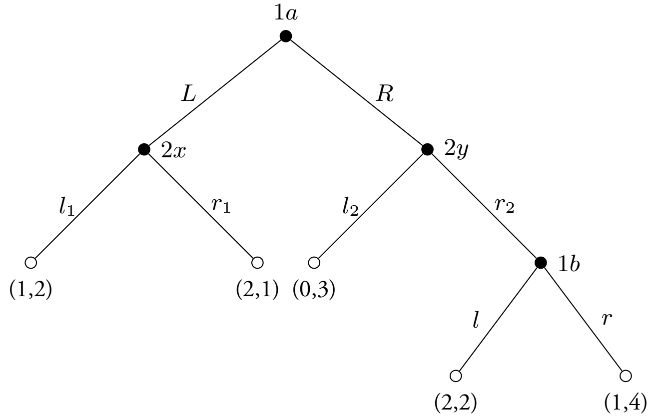
a) El único equilibrio de Nash del juego se da en estrategias mixtas, $\alpha^* = (0.5T + 0.5B, 0.5L + 0.5R)$. Luego, el vector de pagos de dicho perfil es $u(\alpha^*) = (2,2)$.

b) Note que el vector de pagos de las estrategias *minmax* en estrategias puras es (1,0). Por lo tanto, el conjunto FIR (conjunto resaltado de color rojo) podemos graficarlo de la siguiente manera:



c) Note que el vector $u(\alpha^*)$ define un subconjunto incluído en el conjunto FIR. Luego, el vector $v_1 = (3,3)$ cumple con las restricciones necesarias para el cumplimiento del teorema folclórico de reversión Nash; es decir, $v_1 > u(\alpha^*)$ y $v_1 \in FIR$, por lo que debe existir un δ a partir del cual existe un ENPS que ofrezca el vector de pagos v_1 en cada periodo. Esto no se cumple en el caso v_2, pues si bien $v_2 > u(\alpha^*)$, v_2 no es un vector de pagos factible ($v_2 \notin FIR$).

19. $\star\star\star$ Considere el siguiente juego con información perfecta:



a) Resuelva este juego mediante inducción hacia atrás. Indique los supuestos de racionalidad necesarios en cada paso.

b) Represente el juego en su forma normal.

c) A partir de la forma normal, encuentre todas las estrategias racionalizables. Justifique su respuesta.

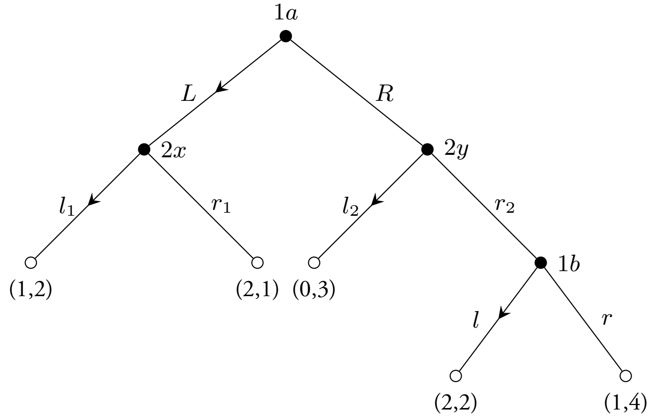
d) Compare sus respuestas en b) y c). Discuta brevemente por qué difieren los supuestos utilizados en la inducción hacia atrás de los de la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas.

Solución

a) Primero se toma el subjuego que comienza en el nodo $1b$, y asumiendo que el jugador 1 es secuencialmente racional, se elimina la acción r por ser condicionalmente dominada por l.

De la misma forma se actúa para el subjuego que inicia en el nodo $2x$, donde, asumiendo que el jugador 2 es secuencialmente racional, se descarta las acciones r_1 por ser condicionalmente dominada por l_1. Para el subjuego que comienza en $2y$ se requiere un supuesto adicional: 2 sabe que 1 es secuencialmente racional. Dado dicho supuesto, 2 puede preveer que 1 jugará l en el último subjuego, por lo que jugar r_2 le dará un pago de 2. Luego, preferirá l_2 porque le da un mayor pago.

Finalmente, si asumimos que (i) 1 es secuencialmente racional, (ii) 1 sabe que 2 es secuencialmente racional, y (iii) 1 sabe que 2 sabe que él sabe que es secuencialmente racional, podemos concluir que en el subjuego que comienza en $1a$ se elimina la acción R. Esto ocurre porque (ii) y (iii) conllevan a 1 a concluir que 2 jugará l_1 y l_2, y entonces por (i) juega L. Lo descrito, puede representarse mediante flechas en la representación extensa del juego:



b) Cada jugador posee cuatro estrategias puras:

$$S_1 = \{Ll, Lr, Rl, Rr\} \quad \wedge \quad S_2 = \{l_1l_2, l_1r_2, r_1l_2, r_1r_2\}$$

Por lo tanto, el juego puede representarse de la siguiente manera:

	l_1l_2	l_1r_2	r_1l_2	r_1r_2
Ll	$(1,2)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,1)$
Lr	$(1,2)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,1)$
Rl	$(0,3)$	$(2,2)$	$(0,3)$	$(2,2)$
Rr	$(0,3)$	$(1,4)$	$(0,3)$	$(1,4)$

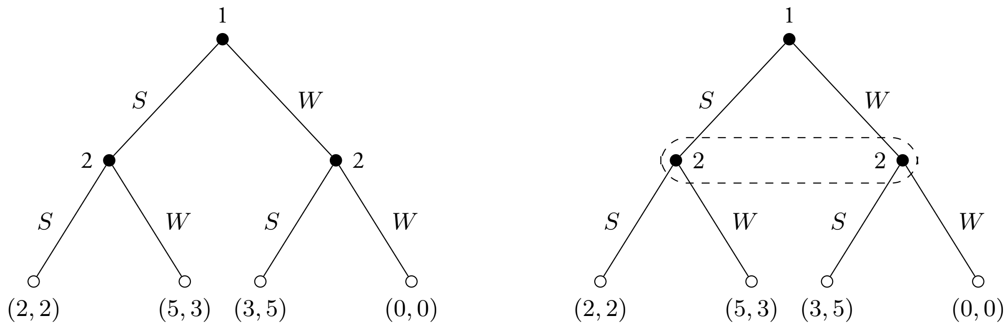
c) Si asumimos que ambos agentes son racionales, podemos eliminar Rr, pues está estrictamente dominada por la estrategia mixta $0.5Ll + 0.5Rl$, por lo que 1 nunca lo jugará. Luego, si asumimos que existe conocimiento común de racionalidad, se puede eliminar r_1r_2 porque, en ausencia de Rr, está estrictamente dominada por l_1l_2. Por lo que el juego se reduce a:

	l_1l_2	l_1r_2	r_1l_2
Ll	$(1,2)$	$(1,2)$	$(2,1)$
Lr	$(1,2)$	$(1,2)$	$(2,1)$
Rl	$(0,3)$	$(2,2)$	$(0,3)$

Donde es posible ver que ya no existen más estrategias estrictamente dominadas. Por lo tanto, todas los perfiles restantes son racionalizables.

d) La inducción hacia atrás nos da una predicción mucho más precisa en comparación a la que nos da la racionalidad. Esto ocurre porque la noción de secuencialidad racional es mucho más fuerte que la racionalidad *per se*.

20. ⋆⋆⋆ Considere los dos juegos en forma extensiva mostrados debajo:



a) Describa los conjuntos de estrategias puras de ambos jugadores y exprese los juegos en forma estratégica. ¿Por qué las matrices difieren entre sí?

b) Halle todos los EN de ambos juegos.

c) Halle todos los ENPS y compárelos con los EN antes hallados. Explique sus resultados

Solución

En el primer caso, podemos ver que se trata de un juego secuencial. Por tal motivo, se deben especificar todas las posibles estrategias, aun así el jugador 2 no llegue a ellas.$S_1 = S, W$, $S_2 = SS, SW, WS, WW$. Luego, la forma normal y los pagos asociados son como sigue:

	SS	SW	WS	WW
S	$(2, \underline{2})$	$(\underline{2}, \underline{2})$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
W	$(\underline{3}, \underline{5})$	$(\underline{0}, 0)$	$(\underline{3}, \underline{5})$	$(\underline{0}, 0)$

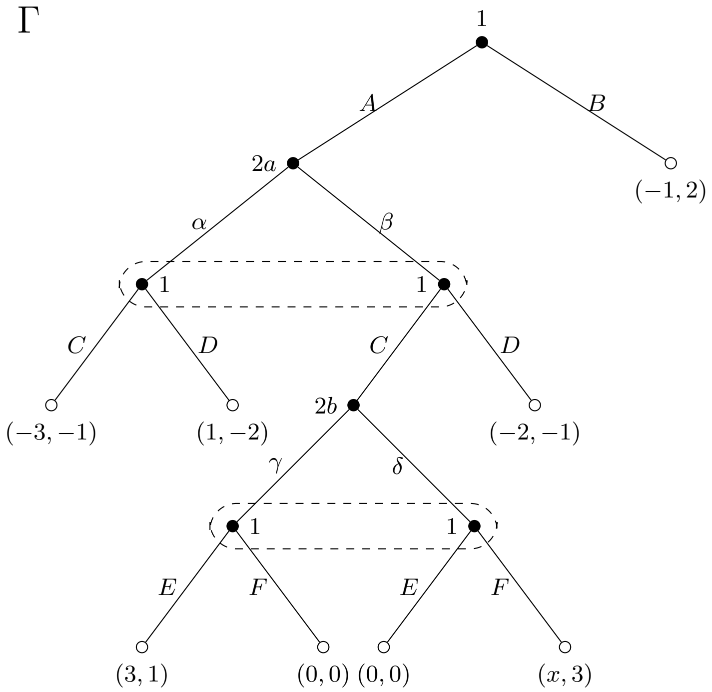
donde $EN = \{(S, WS), (W, SS), (W, WS)\}$. De ellos es posible notar que solo el primero de ellos es perfecto en subjuegos.

Por otro lado, el segundo juego es estático. La línea punteada denota simultaneidad entre las jugadas de ambos jugadores y, por ende, existe un único subjuego.

	S	W
S	$(2, \underline{2})$	$(\underline{2}, \underline{2})$
W	$(\underline{3}, \underline{5})$	$(0, 0)$

Donde $EN = \{(W, S), (S, \alpha W + (1-\alpha)S)\}$, para todo $\alpha \in [0, 2/3]$. Al ser el juego estático un subjuego en sí mismo, todos esos Equilibrios de Nash son también ENPS.

21. $\star\star\star$ Considere el siguiente juego en forma extensiva, con información imperfecta:



a) Muestre los conjuntos de estrategias puras de ambos jugadores y transforme el juego a su forma normal, $G(\Gamma)$.

b) Halle todos los Equilibrios de Nash Perfectos en Subjuegos cuando (i) $x < 0$, (ii) $x = 0$, y (iii) $x > 0$.

Solución

a) El jugador 1 cuenta con tres conjuntos de información, cada uno con dos acciones y el jugador 2 cuenta con dos conjuntos de información, cada uno con dos acciones. Por lo tanto, se tendrá que $S_1 = C_1^1 \times C_1^2 \times C_1^3$ y $S_2 = C_2^1 \times C_2^2$:

$$S_1 = \{ACE, ACF, ADE, ADF, BCE, BCF, BDE, BDF\}$$
$$S_2 = \{\alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta\}$$

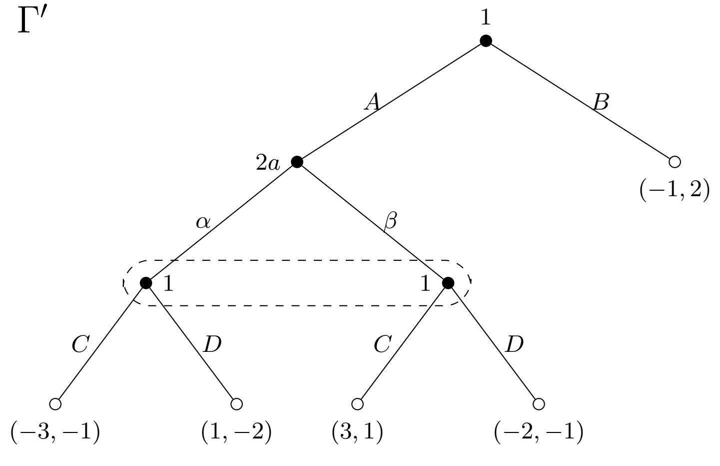
Luego, el juego en forma normal es:

	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$	$\beta\gamma$	$\beta\delta$
ACE	$(-3,-1)$	$(-3,-1)$	$(3,1)$	$(0,0)$
ACF	$(-3,-1)$	$(-3,-1)$	$(0,0)$	$(x,3)$
ADE	$(1,-2)$	$(1,-2)$	$(-2,-1)$	$(-2,-1)$
ADF	$(1,-2)$	$(1,-2)$	$(-2,-1)$	$(-2,-1)$
BCE	$(-1,2)$	$(-1,2)$	$(-1,2)$	$(-1,2)$
BCF	$(-1,2)$	$(-1,2)$	$(-1,2)$	$(-1,2)$
BDE	$(-1,2)$	$(-1,2)$	$(-1,2)$	$(-1,2)$
BDF	$(-1,2)$	$(-1,2)$	$(-1,2)$	$(-1,2)$

b) Se observa que si $x < 0$, entonces en el último subjuego (subjuego que inicia en el nodo $2b$), puede representarse de forma normal $G(\Gamma_{2b})$:

	γ	δ
E	$(\underline{3},\underline{1})$	$(\underline{0},0)$
F	$(0,0)$	$(x,\underline{3})$

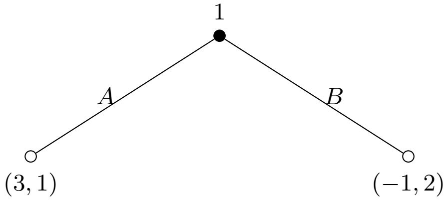
Donde el único equilibrio de Nash sería el perfil (E,γ). Luego, el subjuego se reduce a Γ', donde el subjuego Γ_{2b} fue reemplazado por su pago en equilibrio:



Luego, el subjuego que comienza en el nodo $2a$, Γ_{2a}, puede representarse de la siguiente manera $G(\Gamma_{2a})$:

	α	β
C	$(-3,-1)$	$(\underline{3},\underline{1})$
D	$(\underline{1},-2)$	$(-2,\underline{-1})$

Donde el único equilibrio de Nash posible es el perfil (C,β). Finalmente, despues de reemplazar el subjuego Γ_{2a} por su pago en equilibrio, tenemos el nodo inicial:



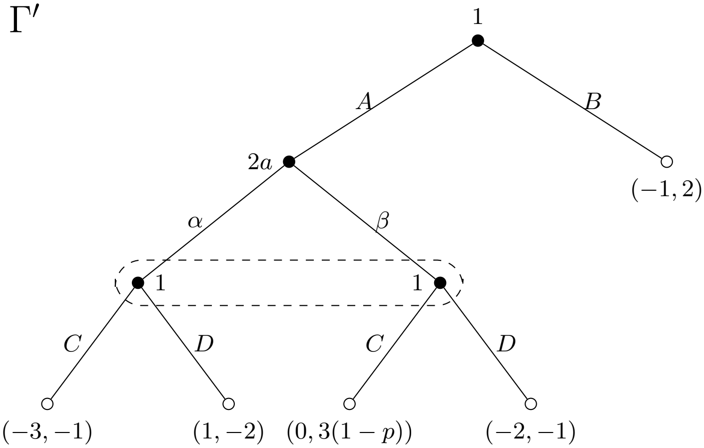
de donde se desprende que el equilibrio perfecto en subjuegos es único: $ENPS = \{ACE, \beta\gamma\}$.

Por otro lado, si $x = 0$, el conjunto de equilibrios de Nash en el último subjuego es $EN = \{(E,\gamma), (pE + (1-p)F, \delta)\ \forall p \in [0, 3/4]\}$. Ya se sabe que el perfil (E,γ) de dicho juego forma parte de un ENPS, por lo que analizaremos qué pasa con las estrategias mixtas.

Dado el perfil $(pE + (1-p)F, \delta)$ para algún $p \in [0, 3/4]$, obtenemos los pagos:

$$u_1 = 0 \quad \wedge \quad u_2 = 3(1-p)$$

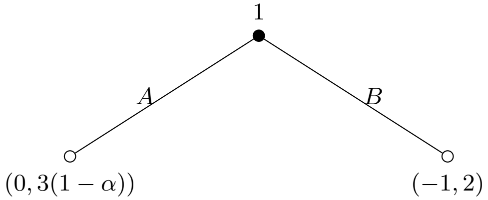
Luego, el juego se reduce a Γ':



Luego, el subjuego que empieza en 2a, Γ_{2a}, cuya representación normal $G(\Gamma_{2a})$ es:

	α	β
C	$(-3,-1)$	$(\underline{0},\underline{3(1-p)})$
D	$(\underline{1},-2)$	$(-2,\underline{-1})$

Donde el perfil (C,β) es el único EN. Por lo tanto, el juego se reduce a:



Donde se observa que existen infinitos ENPS, que contemplan las estrategias mixtas del último subjuego: $ENPS = \{(AC(pE+(1-p)F), \beta\delta)\}$ para todo $p \in [0, 3/4]$.

Entonces, el conjunto de ENPS sería:

$$ENPS = \{(ACE, \beta\gamma); (AC(pE+(1-p)F), \beta\delta)\ \forall p \in [0,3/4])\}$$

Por último, si $x > 0$, se procede de forma análoga, y obtenemos:

$$ENPS = \left\{ (ACE, \beta\gamma), (ACF, \beta\delta), \left(AC\left(\frac{3}{4}E + \frac{1}{4}F\right), \beta\left(\frac{x}{3+x}\gamma + \frac{3}{3+x}\delta\right)\right)\right\}$$

22. ⋆⋆ Usted se encuentra de paseo pero ya es muy tarde y desea descansar. Sin embargo, Limapampa es una ciudad peligrosa y se conoce que sólo una proporción p de los taxistas son honrados.

    Los pagos (en términos de felicidad) son los siguientes:

    - Para usted: 10 si descansa en casa, 5 si lo hace en el hotel de la esquina y 0 si le roban.
    - Taxista honesto: 8 si realiza un servicio y 3 si no lo hace.
    - Taxista "amigo de lo ajeno": 10 si consigue una víctima y 5 si no lo hace.

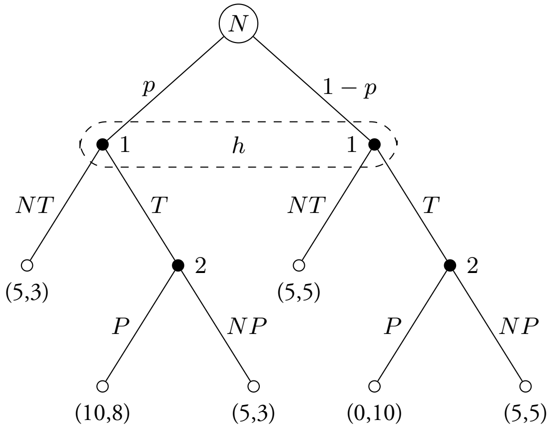
    Aún se encuentra indeciso y se acerca un taxi. Si usted decide levantar el brazo, el taxista podría parar o ignorarlo.

    a) Represente el juego en su forma extensiva.

    b) Si $p = 1/2$, represente el juego en forma normal y halle los Equilibrios Bayesianos de Nash estáticos en estrategias puras.

Solución

a) El juego puede representarse de la siguiente manera:



b) Si el taxista fuese honrado, el juego sería:

	P	NP
T	(10,8)	(5,3)
NT	(5,3)	(5,3)

Si el taxista es un ladrón se tendría que:

	P	NP
T	(0,10)	(5,5)
NT	(5,5)	(5,5)

Dado que $p = 1/2$ podemos representar el juego en forma normal (utilizando los pagos esperados). Para esto primero debemos especificar las estrategias de cada uno de los jugadores:

$$S_1 = \{T, NT\}$$

$$S_2 = \{(P \text{ si } H, P \text{ si } L); (P \text{ si } H, NP \text{ si } L); (NP \text{ si } H, P \text{ si } L); (NP \text{ si } H, NP \text{ si } L)\}$$

Luego, tenemos lo siguiente:
por lo que los Equilibrios Bayesianos de Nash en estrategias puras son:

$$EBN = \{(T; P, P), (NT; P, P), (NT; NP, P), (NT; NP, NP)\}$$

	P,P	P,NP	NP,P	NP,NP
T	(5,9)	(7.5,6.5)	(2.5,6.5)	(5,4)
NT	(5,4)	(5,4)	(5,4)	(5,4)

,

23. ⋆⋆ El grupo de José y Aquiles tiene que entregar su trabajo final mañana en la tarde. Como no tuvieron tiempo de coordinar, ambos se enfrentan al dilema de amanecerse hoy y hacer el trabajo por su cuenta o de rezar para que el otro lo haga.

Sabemos que cada estudiante tiene el tipo θ_i, que son independientes y que reflejan cuán mal tienen su promedio hasta ahora. Además sabemos que $\theta_i \sim U(0,1)$.

La utilidad que ellos obtendrían de hacer el trabajo es θ_i^2 y como a ninguno de ellos les gusta trasnocharse, de hacerlo, perderían $c \in (0,1)$ de utilidad.

Halle el EBN si José y Aquiles saben su propio tipo pero no conocen el de su compañero.

Solución

Definamos $S_i(\theta_i)$ como la acción del alumno i. Dicha variable es igual a 1 si realiza la tarea e igual a 0 si no la hace.

La utilidad esperada del alumno i es:

$$\begin{array}{ll} \theta_i^2 - c, & \text{si hace la tarea} \\ \theta_i^2 Pr(S_{-i}(\theta_{-i}) = 1), & \text{si no hace la tarea} \end{array}$$

Por lo tanto, para que el alumno i realice la tarea se debe cumplir lo siguiente:

$$\theta_i^2 - c \geq \theta_i^2 Pr(S_{-i}(\theta_{-i}) = 1) \quad \Rightarrow \quad \theta_i \geq \left[\frac{c}{1 - Pr(S_{-i}(\theta_{-i}) = 1)}\right]^{1/2} \tag{.1}$$

Para los EBN necesitamos asumir que existe el umbral $\tilde{\theta}_i \in (0,1)$[3], tal que la mejor respuesta del individuo i es hacer la tarea cuando $\theta_i \geq \tilde{\theta}_i$ y no hacerla cuando $\theta_i < \tilde{\theta}_i$. Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

$$Pr(S_{-i}(\theta_{-i}) = 1) = Pr(\theta_{-i} \geq \tilde{\theta}_{-i}) = 1 - \tilde{\theta}_{-i}$$

Luego, reemplazando dicho resultado en (1) tenemos:

$$\tilde{\theta}_i^2 \tilde{\theta}_{-i} = c \quad \Rightarrow \quad \theta^* = \sqrt[3]{c}$$

Finalmente el $EBN = \{\text{Hacer tarea si } \theta_1 \geq \sqrt[3]{c}, \text{Hacer tarea si } \theta_2 \geq \sqrt[3]{c}\}$.

3 Notar que $\tilde{\theta}_i$ no puede ser 0 o 1. Basta con notar que si eso ocurre, el EBN debería ser uno en el cual el individuo i hace la tarea siempre y $-i$ no la hace nunca. Sin embargo, dado que el jugador $-i$ sabría que el individuo i tiene incentivos a desviarse cuando $\theta_i < \sqrt{c}$, tendría incentivos a desviarse a la estrategia de hacer la tarea cuando $\theta_{-i} \geq \sqrt{c}$ y no hacerla en el resto de casos

24. $\star\star$ En la industria de cerveza, tenemos la función de demanda inversa $P = 2 - x_1 - x_2$, donde x_i es la producción de la empresa i. Es de conocimiento común que el costo total de la empresa 1 es igual al cuadrado de su nivel de producción, pero el costo total de la empresa 2 es información privada.

    Si bien la empresa 1 no sabe cuáles son los costos de la empresa 2, sabe que pueden ser bajos (x_2) con probabilidad μ o altos (${x_2}^2$) con probabilidad $(1-\mu)$. Encontrar el EBN.

    Solución

    Datos:

    - $P = 2 - x_1 - x_2$
    - $CT_1 = {x_1}^2$
    - La empresa 2 puede ser de dos tipos: θ_B con probabilidad μ y θ_A con probabilidad $1-\mu$:

    $$CT_2 = x_2 \quad \text{Si } E_2 \text{ es de tipo } \theta_B$$
    $$CT_2 = {x_2}^2 \quad \text{Si } E_2 \text{ es de tipo } \theta_A$$

    La empresa 1 tendrá la siguiente función objetivo:

    $$\pi_1 = \mu[(2 - x_1 - x_2^*(\theta_B))x_1 - {x_1}^2] + (1-\mu)[(2 - x_1 - x_2^*(\theta_A))x_1 - {x_1}^2]$$

    De aquí, tenemos que:

    $$x_1^* = \frac{2 - \mu x_2^*(\theta_B) - (1-\mu)x_2^*(\theta_A)}{4} \tag{.2}$$

    Para encontrar el EBN, debemos tener en cuenta que si E_2 es de tipo θ_B, entonces $x_2^*(\theta_B) = \frac{1-x_1^*}{2}$ y si es de tipo θ_A, entonces $x_2^*(\theta_A) = \frac{2-x_1^*}{4}$. Por lo tanto, reemplazando en (2), obtenemos:

    $$x_1^* = \frac{6}{15-\mu}$$

    Luego, podemos obtener $x_2^*(\theta_B)$ y $x_2^*(\theta_A)$:

    $$x_2^*(\theta_B) = \frac{9-\mu}{30-2\mu} \qquad \wedge \qquad x_2^*(\theta_A) = \frac{12-\mu}{30-2\mu}$$

    Finalmente, $EBN = \{\frac{6}{15-\mu}; (\frac{9-\mu}{30-2\mu} \text{ si } \theta_B, \frac{12-\mu}{30-2\mu} \text{ si } \theta_A)\}$

25. $\star\star\star$ Considere el duopolio de Cournot en donde las dos empresas producen a costo cero, $c = 0$, y la empresa i se enfrenta a la función de demanda $p_i = \theta_i - q_i - q_{-i}$ para $i \in 1, 2$. Es de conocimiento común que $\theta_1 = 1$ pero θ_2 es información privada. Si θ_2

puede tomar dos valores, $\theta^L = 1$ o $\theta^H = 2$, cada uno con probabilidad $1/2$, encuentre el equilibrio Bayesiano en estrategias puras.

Solución

La empresa 2 se enfrentará al siguiente problema de optimización:

$$\max_{q_2} \pi_2 = q_2(\theta_2 - q_2 - q_1)$$

y de la condición de primer orden, $\partial\pi_2/\partial q_2 = 0$ obtenemos la función de reacción:

$$q_2 = \frac{\theta_2 - q_1}{2}$$

Sin embargo, la empresa 1 no conoce el tipo de la empresa 2, por lo que busca maximizar sus beneficios esperados:

$$\max_{q_1} \pi_1^E = \frac{1}{2}q_1(1 - q_1 - q_2^L) + \frac{1}{2}q_1(2 - q_1 - q_2^H)$$

y de la condición de primer orden, $\partial\pi_1^E/\partial q_1 = 0$ obtenemos:

$$\frac{\partial\pi_1^E}{\partial q_1} = \frac{1}{2}(3 - 4q_1 - q_2^L - q_2^H) = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = \frac{3 - q_2^L - q_2^H}{4} \tag{.3}$$

Luego, si la empresa 2 fuese del tipo θ_2^L:

$$q_2^L = \frac{1 - q_1}{2} = \frac{1 - \frac{3 - q_2^L - q_2^H}{4}}{2} = \frac{1 + q_2^L + q_2^H}{8} \quad \Rightarrow \quad q_2^L = \frac{1 + q_2^H}{7} \tag{.4}$$

Mientras que, si fuese del tipo θ_2^H, tenemos:

$$q_2^H = \frac{2 - q_1}{2} = \frac{2 - \frac{3 - q_2^L - q_2^H}{4}}{2} = \frac{5 + q_2^L + q_2^H}{8} \quad \Rightarrow \quad q_2^H = \frac{5 + q_2^L}{7} \tag{.5}$$

Finalmente, si incluimos .5 en .4 obtenemos que $q_2^L = 1/4$ y $q_2^H = 3/4$, por lo que, usando .3, obtenemos que $q_1 = 1/2$. Podemos expresar este equilibrio como:

$$EBN = \{q_1 = 1/2; (q_2 = 1/4 \text{ si } \theta_2 = 1, q_2 = 3/4 \text{ si } \theta_2 = 2)\}$$

26. $\star \star \star$ En una subasta de sobre cerrado al primer precio participan I personas, cuyas valoraciones "v_i"son independientes y siguen una distribución uniforme $v_i \sim U(0,1)$. Si suponemos que cada participante observa su propia valoración antes de anotar su oferta, entonces se pide:

    a) Derive el EBN simétrico del juego (*Pista: buscar la estrategia del individuo i que sea una función lineal y estrictamente creciente de su valoración*).

b) Especifique qué pasa cuando $I = 2$ y cuando $I \to \infty$. Explique por qué se dan esos resultados.

Solución

a) Sea $b(v_i)$ la puja que realiza el individuo i cuando tiene la valoración v_i, entonces la probabilidad de ganar puede definirse como $Pr(b(v_i) > b(v_{-i}))$. Dado que $b(.)$ es lineal y estrictamente creciente, lo anterior será cierto si y sólo si $Pr(v_i > v_{-i})$. Luego, como las valoraciones son independientes, la probabilidad de ganar de i para algún valor de v_i, digamos x_i, sería $Pr(x_i > v_{-i}) = x_i^{I-1}$.

Por lo tanto, si el individuo i decidiera comportarse como si su valoración fuese x_i y la verdadera realización de v_i fuese θ_i, el beneficio esperado del individuo i sería:

$$\pi_i = x_i^{I-1}(\theta_i - b(x_i)) = \theta_i {x_i}^{I-1} - {x_i}^{I-1} b(x_i)$$

Luego, cada individuo maximizará sus beneficios eligiendo x_i. Por lo tanto, las CPO serían:

$$(I-1)\theta_i {x_i}^{I-2} - (I-1){x_i}^{I-2} b(x_i) - {x_i}^{I-1} b'(x_i) = 0$$

Sin embargo, en un equilibrio Bayesiano las estrategias deben depender del tipo del individuo. Por lo tanto, el individuo maximiza cuando $x_i = \theta_i$, por lo que puede hallarse $b(.)$:

$$(I-1){\theta_i}^{I-1} - (I-1){\theta_i}^{I-2} b(\theta_i) - {\theta_i}^{I-1} b'(\theta_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad b(\theta_i) = \frac{I-1}{I}\theta_i + \frac{k}{{\theta_i}^{I-1}}$$

Donde k es una constante de integración. Luego, para que $b(.)$ sea bien comportada se necesita que $b(\theta_i) \leq \theta_i$ para todo θ_i, por lo que se puede inferir que $k = 0$. Finalmente, se define el EBN como:

$$EBN = \left\{ \frac{I-1}{I}\theta_1 \text{ si } v_1 = \theta_1, \frac{I-1}{I}\theta_2 \text{ si } v_2 = \theta_2, ..., \frac{I-1}{I}\theta_I \text{ si } v_I = \theta_I \right\}.$$

b) Notar que si $I = 2$, tenemos que:

$$b(\theta_i) = \frac{\theta_i}{2}$$

Mientras que si $I \to \infty$, tenemos que:

$$b(\theta_i) = \theta_i$$

El primer resultado es conocido para la subasta entre 2 personas. Como cada uno sabe que aún tendría probabilidad de ganar si pujase menos que su valoración, entonces tiene incentivos a hacerlo (maximiza su beneficio esperado cuando puja la mitad de su valoración).

Sin embargo, el individuo i sabe que su probabilidad de ganar al pujar menos que su valoración tiende a cero conforme $I \to \infty$, y en dicho escenario no tendrá incentivos a hacerlo.

27. $\star\star\star$ En una subasta de sobre cerrado al primer precio participan sólo dos personas, cuyas valoraciones "v_i" son independientes y siguen una distribución uniforme, $v_i \sim U(0,1)$. Si suponemos que cada participante observa su propia valoración antes de anotar su oferta, derive el EBN simétrico del juego. (*Pista: considere un equilibrio en el que la puja del individuo i sea una función lineal y estrictamente creciente de su valoración*)

    Solución

    Sea $b(v_i)$ la puja que realiza el individuo i cuando tiene la valoración v_i[4], entonces la probabilidad de ganar puede definirse como $Pr(b(v_i) > b(v_{-i}))$. Dado que $b(.)$ es lineal y estrictamente creciente, lo anterior será cierto si y sólo si $Pr(v_i > v_{-i})$.

    Luego, como v_1 y v_2 son independientes, si el individuo i decide algún valor para v_i, digamos x_i[5], su probabilidad de ganar sería $Pr(x_i > v_{-i}) = x_i$.

    Por lo tanto, si el individuo i decidiera comportarse como si su valoración fuese x_i y la verdadera realización de v_i fuese θ_i, el beneficio esperado del individuo i sería:

$$\pi_i = x_i(\theta_i - b(x_i)) + (1 - x_i)0 = \theta_i x_i - x_i b(x_i)$$

    Luego, cada individuo maximizará sus beneficios eligiendo x_i. Por lo tanto, las CPO serían:

$$\theta_i - x_i b'(x_i) - b(x_i) = 0$$

    Sin embargo, en un EBN las estrategias deben depender del tipo del individuo. Por lo tanto, el individuo maximiza cuando $x_i = \theta_i$, por lo que puede hallarse $b(.)$ resolviendo la ecuación diferencial:

$$\theta_i - \theta_i b'(\theta_i) - b(\theta_i) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b(\theta_i) = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\theta_i} + \theta_i\right)$$

    Donde c es una constante de integración. Luego, para que $b(.)$ sea bien comportada se necesita que $b(\theta_i) \leq \theta_i$ para todo θ_i (pues se espera que nadie puje un monto mayor

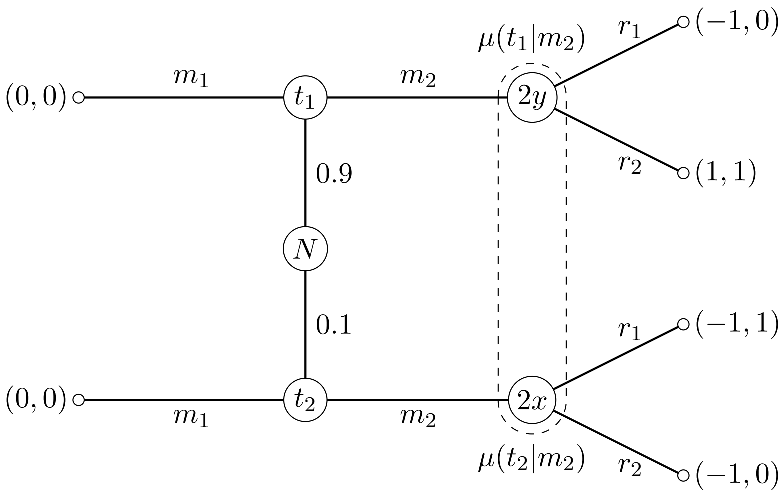
4 Note que la función b(.) es la misma para ambos individuos.

5 Interprete esto como si el individuo i decidiese comportarse como si su valoración fuese x_i

que su valoración), por lo que se puede inferir que $c = 0$. Finalmente, se define el EBN como:

$$EBN = \left(\frac{\theta_1}{2} \text{ si } v_1 = \theta_1, \frac{\theta_2}{2} \text{ si } v_2 = \theta_2 \right).$$

28. $\star\star$ Se tiene el siguiente juego de señales:



Halle los equilibrios del juego propuesto.

<u>Solución</u>

En cualquier equilibrio secuencial, para el tipo 2 del jugador 1 (t_2) siempre es preferible jugar m_1 en vez de m_2 (pues $0 > 1$), por lo que $\sigma_1(m_1|t_2) = 1$. Para el caso del tipo 1, $m_1 \succsim m_2$ si $0 \geq -\sigma_2(r_1) + (1 - \sigma_2(r_1))$, lo que ocurre siempre que $\sigma_2(r_1) \geq 1/2$. Por otro lado, para el jugador 2, $r_1 \succsim r_2$ si $0(\mu_x) + (1 - \mu_x) \geq \mu_x + 0(1 - \mu_x)$, lo que ocurre sólo cuando $\mu(t_1|m_2) \leq 1/2$.

Luego, analizaremos los posibles equilibrios:

- Eq. Agrupador: $(m_1|t_1, m_1|t_2, r_1)$ con $\mu(t_1|m_2) < 1/2$. En este equilibrio, dadas sus creencias, el jugador 2 juega r_1 con probabilidad 1 si el jugador 1 manda el mensaje m_2, por lo que el jugador 1 nunca tiene incentivos a desviarse del equilibrio.

  Note que en caso que $\mu(t_1|m_2) = 1/2$, el jugador 2 es indiferente entre jugar r_1 o r_2, por lo que, para que éste sea un equilibrio agrupador, necesitamos que

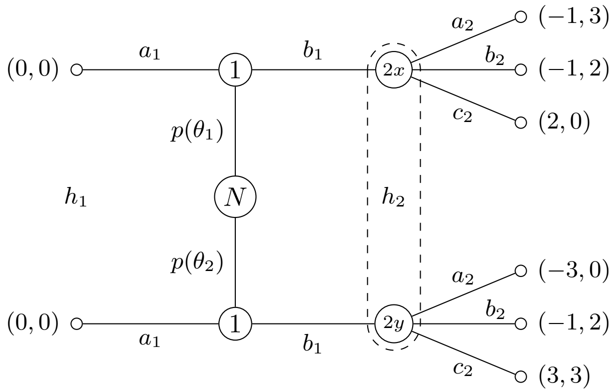
$\sigma_2(r_2) \leq 1/2$, con lo cual el jugador 1 no tendría incentivos de desviarse de m_1 unilateralmente.

Ningún equilibrio en el que el jugador 2 juegue r_2 puede ser equilibrio pues el jugador 1 tendría incentivos a desviarse unilateralmente si es del tipo 1.

- Eq. Separador: Como hemos visto que al jugador 1 del tipo 2 jamás querría jugar m_2 analizaremos únicamente el equilibrio en el que 1 juega $(m_2|t_1, m_1|t_1)$. En este caso, note que las creencias se deben actualizar de manera bayesiana, por lo que $\mu(t_1|m_2) = 1$.

  Gracias a esas creencias, el jugador 2 querrá jugar r_2 siempre, y ningún jugador del tipo 1 querrá desviarse unilateralmente del equilibrio.

29. $\star\star\star$ Se tiene el siguiente juego de señales:



a) Encontrar todos los EBP del juego.

b) Mostrar que el criterio intuitivo es insuficiente para descartar los equilibrios agrupadores encontrados.

Solución

a) Candidatos a equilibrio (en base a las señales del jugador 1 acerca de su tipo):

Separadores: "a_1 si θ_1, b_1 si θ_2", "b_1 si θ_1, a_1 si θ_2".

Agrupadores: "a_1 si θ_1, a_1 si θ_2", "b_1 si θ_1, b_1 si θ_2".

- "a_1 si θ_1, b_1 si θ_2":

  Las creencias de 2 se derivan de dicha estrategia: $\mu(2y) = 1$. Por lo tanto, la estrategia óptima de 2 dependerá de la acción de 1: c_2 si b_1.

Dada la estrategia de 2 se observa que la estrategia de 1 no es óptima, pues de ser de tipo θ_2, J1 preferiría desviarse. Este no es un EBP.

- "b_1 si θ_1, a_1 si θ_2":

  Las creencias de 2 se derivan de dicha estrategia: $\mu(2x) = 1$. Por lo tanto, la estrategia óptima de 2 dependerá de la acción de 1: a_2 si b_1.

  Dada la estrategia de 2 se observa que la estrategia de 1 no es óptima, pues de ser de tipo θ_1, J1 preferiría desviarse. Este no es un EBP.

- "a_1 si θ_1, a_1 si θ_2":

  Dada que la probabilidad de jugar a_1 es 1 bajo esta estrategia, la creencia $\mu(2x)$ puede tomar cualquier valor. Sin embargo, para que este se trate de un eq., el J1 no debe tener incentivos a desviarse (por lo que J2 no debe jugar nunca c_2).

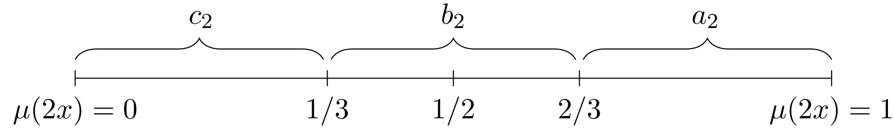
  Para ver qué haría J2 en caso J1 jugase b_1 necesitamos conocer sus mejores respuestas ante diferentes creencias que pudiera tener acerca del tipo del jugador 1:

$$a \succsim b \leftrightarrow \mu(2x) \geq 2/3$$

$$a \succsim c \leftrightarrow \mu(2x) \geq 1/2$$

$$b \succsim c \leftrightarrow \mu(2x) \geq 1/3$$

  Gráficamente se tiene (notar que una mixta entre a_2 y c_2 nunca es una mejor respuesta):



  Luego, podemos obtener el siguiente equilibrio:

$$EBP^1 = \{(a_1 si\theta_1, a_1 si\theta_2), pa_2 + (1-p)b_2, \mu(2x) > 1/3\} \text{ con } p \in [0,1]$$

  Cuando $\mu(2x) = 1/3$, J2 es indiferente entre b_2 y c_2. Las estrategias mixtas que elija 2 serán parte de un eq. si no incentivan a que cualquiera de los tipos de J1 se desvíe de su estrategia original. Por lo que es fácil verificar que la estrategia mixta de 2 debe considerar que $\sigma_2(b) \geq 3/4$. Finalmente, $EBP^2 = \{(a_1 si\theta_1, a_1 si\theta_2), pb_2 + (1-p)c_2 sib_1, \mu(2x) = 1/3\}$ con $p \in [3/4, 1]$.

- "b_1 si θ_1, b_1 si θ_2":

  Dada esta estrategia, la probabilidad de jugar b_1 es 1, por lo que, por la regla de bayes, las creencias del jugador 2 son $\mu(2x) = p(\theta_1)$ y $\mu(2y) = 1 - p(\theta_1) = p(\theta_2)$ y la estrategia de 2 dependerá del valor que tome $\mu(2x)$ de acuerdo al simplex de la pregunta anterior.

  En este equilibrio, para que J1 no se desvíe, es necesario que J2 juegue c_2 o alguna mixta entre b_2 y c_2. Entonces, para que este sea un equilibrio, es necesario que la naturaleza haya asignado una probabilidad menor o igual a $1/3$ a que J1 sea del tipo θ_1.
  Así, obtenemos que:

  $EBP^3 = \{(b_1 si\theta_1, b_1 si\theta_2), c_2 sib_1, \mu(2x) < 1/3\}$

  $EBP^4 = \{(b_1 si\theta_1, b_1 si\theta_2), pb_2{+}(1{-}p)c_2 sib_1, \mu(2x) = 1/3\}$ con $p \in [0, 2/3]$

b)

- Sea el Eq. agrupador $EBP^1 = \{(a_1 si\theta_1, a_1 si\theta_2), pa_2 + (1-p)b_2, \mu(2x) > 1/3\}$ con $p \in [0, 1]$.

  Formalmente:

  $$u_1^*(\theta_1) = u_1(a^*(\theta_1), s^*(a^*(\theta_1)), \theta_1) = u_1(a_1; pa_2{+}(1{-}p)b_2 sib_1 \quad \forall p \in [0,1]), \theta_1) =$$

  $$u_1^*(\theta_2) = u_1(a^*(\theta_2), s^*(a^*(\theta_2)), \theta_2) = u_1(a_1; pa_2{+}(1{-}p)b_2 sib_1 \quad \forall p \in [0,1]), \theta_2) =$$

  Luego, obtenemos el mejor pago que obtendría de realizar la acción b_1 y comparamos:

  $$Max_{s \in S^*(\Theta, b_1)} u_1(b_1, s, \theta_1) = 2 \qquad Max_{s \in S^*(\Theta, b_1)} u_1(b_1, s, \theta_2) = 3$$

  Por lo tanto observamos que la acción b_2 no es equilibrio dominada para ninguno de los dos tipos, por lo que $\Theta^*(b_2) = \{\theta_1, \theta_2\}$, que justifica que el equilibrio considere que $\mu(2x), \mu(2y) \geq 0$, por lo que es razonable. Notar que esto también aplica para EBP^2 y EBP^4.

- Sea el Eq. agrupador $EBP^3 = \{(b_1 si\theta_1, b_1 si\theta_2), c_2 sib_1, \mu(2x) < 1/3\}$

  En este caso, la estrategia a_1 es equilibrio-dominada por ambos tipos de jugadores, por lo que los conjuntos $\Theta^*(a_1)$ son vacíos y no puede realizarse el análisis normalmente.

  $$u_1^*(\theta_1) = u_1(a^*(\theta_1), s^*(a^*(\theta_1)), \theta_1) = u_1(b_1; c_2 sib_1, \theta_1) = 2$$

$$u_1^*(\theta_2) = u_1(a^*(\theta_2), s^*(a^*(\theta_2)), \theta_2) = u_1(b_1; c_2 sib_1, \theta_2) = 3$$

Luego, obtenemos el mejor pago que obtendría de realizar la acción a_1 y comparamos:

$$u_1(a_1, s, \theta_1) = 0 \qquad u_1(a_1, s, \theta_2) = 0$$

Por lo que la acción a_1 es equilibrio dominada para ambos tipos, entonces $\Theta^*(a_1) = \{\emptyset\}$.

Referencias

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., y Green, J. R. (1995). *Microeconomic theory.* New York: Oxford University Press.