Задачи для подготовки к контрольной работе №1 по линейной алгебре – 2 семестр

1. Определить, при каких значениях параметра система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_5 = -1 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -1 \\ 6x_1 - 16x_2 + 2x_3 + 4x_4 = \alpha \end{cases}$ совместна, и найти ее общее решение (представить решение как сумму частного решения и линейной комбинации фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы).

2. Составить систему однородных линейных уравнений, задающую линейную оболочку векторов $a_1 = (2,-4,3,-1)^t, a_2 = (1,1,-2,3)^t, a_3 = (5,-1,-3,8)^t$ в $\mathbb{R}^4$.
3. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств $L_1 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, L_2 = \langle b_1, b_2 \rangle$ в $\mathbb{R}^4$, где $a_1 = (1,-1,2,0)^t, a_2 = (-1,0,1,2)^t, a_3 = (1,-1,3,-1)^t, b_1 = (1,-2,5,2)^t, b_2 = (0,-1,3,2)^t$. (одно подпространство может быть задано системой уравнений).
4. Найти матрицу линейного отображения, переводящего векторы $a_1 = (-2,1,-1)^T, a_2 = (1,-1,3)^T, a_3 = (1,2,-1)^T$ соответственно в векторы $b_1 = (3,4)^T, b_2 = (-2,1)^T, b_3 = (1,5)^T$. Указать базисы и размерности ядра и образа (ранг) этого отображения.

5. Линейное преобразование φ в базисе $v: v_1 = (-7,-4)^t, v_2 = (2,1)^t$ имеет матрицу $A_v = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти его матрицу в базисе $u: u_1 = (5,2)^t, u_2 = (2,1)^t$.

6. Найти базис ядра и базис образа линейного преобразования $\varphi: R^4 \to R^4$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Является ли оно инъективным, сюръективным?