MathBook—CJX

MathNote of VividBook

作者：陈锦溪
组织：黑龙江科技大学
时间：2025 年 7 月 21 日
版本：数学笔记项目
邮箱：sudocjx@outlook.com

世界上没有完全平坦的道路，要准备走曲折的路

目录

第一部分
分析学

第 1 部分目录

分析类的第一部分

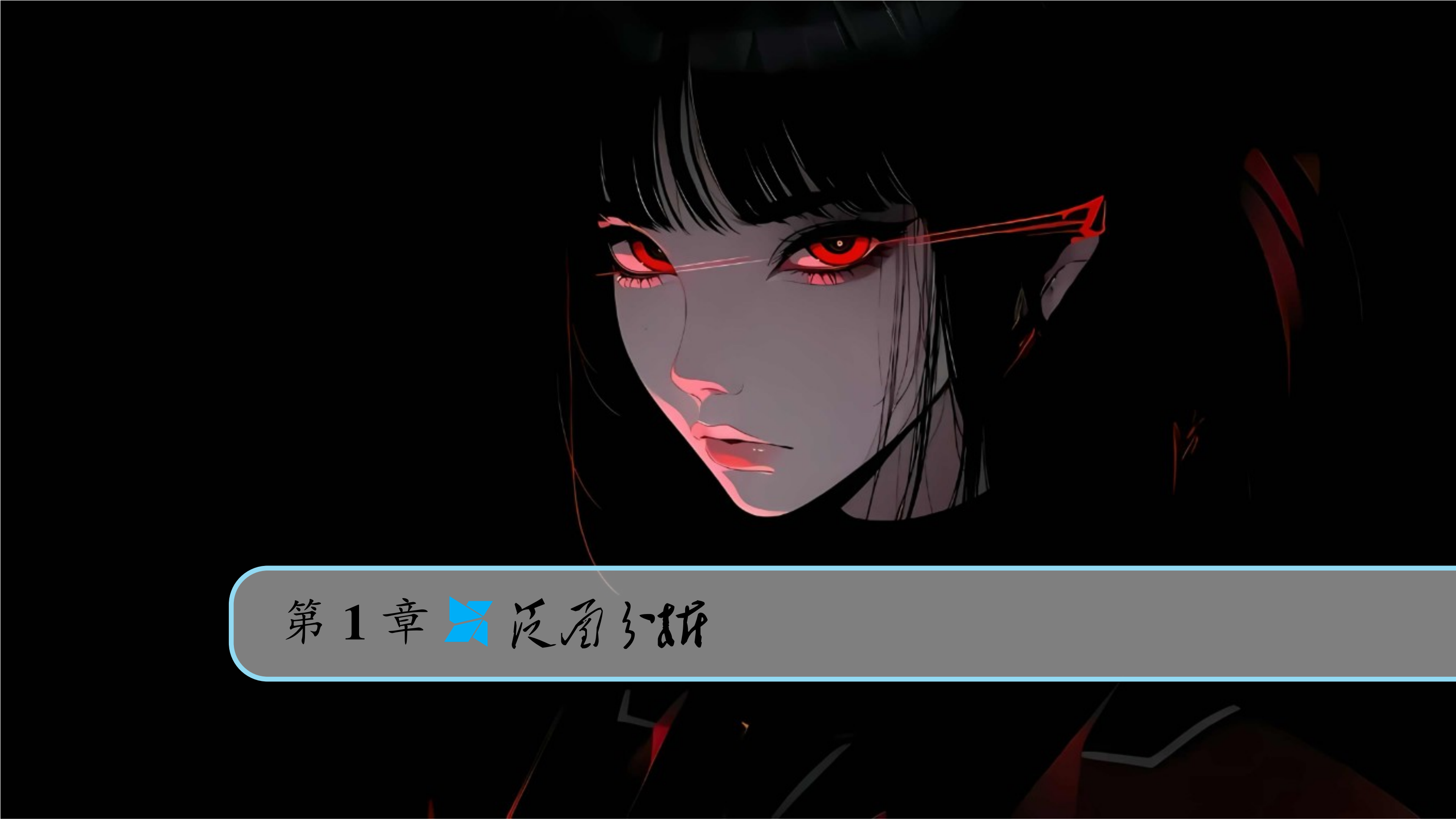
这个笔记项目几经波折，从 2024 年年底开始说想要做一个大学本科全阶段的数学项目笔记的分享，一直到 5 月 9 号才算正式的动工开始干。前面不是在摆烂，就是在找一个模板，调整模板，期间自己也设计了一个简单的数学模板，但好像效果不如人意，所以，自己开始找自己心目中一直想要的模版，还好，现在这个模板自己找到了，并且自己也熟悉了。

现在正是开始的好时候了。

—陈锦涛, 2025.05.09

泛函分析部分骨架是在自学完一遍泛函分析之后开始搭建的，很多的概念还是不熟悉加上遗忘和投递夏令营和自身的一定程度的摆烂，对一小部分的进行整理，敲 Latex 还是不快，可能还是对自己重定义的一些键不熟悉和遗忘吧。争取在毕业前能完成自己的构想。

—陈锦涛, 2025.06.09



第 1 章 泛函分析

《泛函分析》是"更广泛、更一般化的"《数学分析》，将分析中的具体问题抽象到一种更加纯粹的代数、拓扑的形式中加以研究，综合运用分析、代数、几何的观点与方法，研究无限维空间上的函数、算子和极限理论，解决分析学中的问题.

❤在学习中要敢于做减法，减去前人已经解决的部分，看看还有那些问题没有解决，需要我们去探索解决。❤

—华罗庚

我们认为要真正理解泛函分析中的一些重要的概念和理论，灵活运用这一强有力的工具，其唯一的途径就是深入了解它们的来源和背景，注重研究一些重要的、一般性定理的深刻的、具体的含义. 不然的话，如果只是从概念到概念，纯形式地理解抽象定理的推演，那么学习泛函分析的结果只能是"**如宝山而空返，一无所获.**"

—张恭庆院士

1.1 距离空间

1.1.1 距离空间的基本概念

只需要在集合 X $\mathbb{X}$ 上能定义衡量接近的程度计算方式，就可以基于这个方式来定义极限，从而有完备、紧性、微分，积分，级数......

1.1.1.1 基本概念

定义 1.1.1 (距离空间)

设 X 是任一非空集合，$\forall x, y \in \mathbb{X}, \exists d(x, y) \in \mathbb{R}$ 并且满足

1) 非负性：$d(x, y) \geq 0, \Leftrightarrow x = y \rightarrow d(x, y) = 0$,

2) 对称性：$\forall x, y \in \mathbb{X}, d(x, y) = d(y, x)$

3) 三角不等性（可由 1,2 推出）：$\forall x, y, z \in \mathbb{X}, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

称 $d(x,y)$ 为 $\mathbb{X}$ 定义的一个距离，定义了距离 d 的这样一个集合记作 $(\mathbb{X},d)$，也叫距离空间，不要求是线性空间。

总结 一些常见的距离空间

要想证明一个集合是距离空间，只需要证明定义的 d 符合上述三个性质：**非负正定、正齐次性、三角不等式**

(1) n 维度欧氏空间，$\mathbb{R}^n = \{(\epsilon_1,\epsilon_2,...\epsilon_n),\epsilon_i \in \mathbb{K}\}$，要证明这个需要证明 Cauchy 不等式（Switch 不等式）。n 维复数空间 $\mathbb{C}^n$ 也可以，需要取模就行。

(2) **C[a,b]**, 其中 $d(x,y) = \max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|, \forall x(t), y(t) \in \mathrm{C}()$

(3) **空间** s : 实数列 ξ_k 的全体。设 $x=\{\xi_k\} y=\{\eta_k\}$ 是两个实数列，定义 $d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}$. 上式右边的 $\frac{1}{2^k}$ 是一个收敛因子，保证级数收敛

(4) **空间** S : E 是一个有限 Lebesgue 可测集，，E 上几乎处处有穷的可测函数全体，其中凡几乎处处相等的函数看成是同一元,$d(x,y)=\int_E\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}dt$.

(5) 离散空间 D : $d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$

(6) 测度空间 $L^p(\Omega,S,m)$ 上的 p 次幂 L-可积函数空间 $L^p(\Omega,S,m)$,$1\le p<\infty$, 简记为 $L^p(\Omega)$; p 次幂可和的数列空间 $\ell^p, 1\le p<\infty, \ell^p=\{\{\epsilon_n\}, \sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n<\infty\}$

(7) 几乎处处有界可测函数空间 $L^\infty(\Omega,S,m)$, 简记为 $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$。有界数列空间 ℓ^∞

定义 1.1.2 (距离空间的收敛)

设 $(\mathbb{X},d)$ 为距离空间，$\{x_n\}\in\mathbb{X}$ 为点列，若 $\exists x_0\in\mathbb{X}, d(x_n,x_0)\to 0$，则称 $\{x_n\}$ 依距离收敛到 x_0 收敛的性质和一般的数分定义一致，极限若存在，必唯一，且所有子列都收敛于同一个极限。

定理 1.1.1

(X,d) 为距离空间，则有 $|d(x,y)-d(x_1,y_1)|\le|d(x,x_1)|+|d(y,y_1)|\ x,y,x_1,y_1\in X$
说明一点：当$x_n\to x_0$ and $y_n\to y_o$, 必有$d(x_n,y_n)\to d(x_0,y_0)$

$C[a,b]$ 的收敛是函数列在 $[a,b]$ 上的**一致收敛**
空间 S 的收敛等价于函数列依测度收敛
离散空间中，$x_n\to x_0 \Leftrightarrow x_n == x_0\ n>n_0$

定义 1.1.3 (连续映射，等距)

1) $(X,d),(X_1,d_1)$, $fX\to X_1$; $x_0\in X,\forall\epsilon>0,\exists\delta>0, d(x,x_0)\le\delta\Leftarrow\forall x\in X, d_1(f(x),f(x_0))<\epsilon$ 称 f 在 x_0 连续，若 f 在 X 上任意一点都连续，则称 f 在 X 上连续

2) 等距映射 $\forall x,y\in X\ d_1(f(x),f(y))=d(x,y)$ 一个等距映射一定是一个连续映射并且是一一映上的，但不一定是映上的

要称俩空间等距，需要俩空间的距离的函数之间存在有一个映上的等距映射

1.1.1.2 点集

定义（点的定义）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

$$\lim_{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

1.1.1.3 完备化—距离空间

1.1.2 开集、闭集及连续映射

1.1.3 稠密与可分

1.1.4 完备性，barie 纲定理

1.1.5 列紧与紧

1.1.6 Banach 压缩映射原理

1.2 赋范线性空间和 Banach 空间

证明 L^p 空间完备可分.

1.2.1 赋范线性空间的基本概念

1.2.2 有限维赋范线性空间的同构

1.2.3 Banach 空间的几何性质

1.3 内积空间和 Hilbert 空间

Hilbert 空间的性质，内积的定义和性质

1.3.1 内积空间的基本概念

1.3.2 正交与正交分解

1.3.3 标准正交基

1.4 有界线性算子

这个涉及到的是最基础的算子理论

1.4.1 有界线性算子的基本概念

1.4.2 开映射定理

1.4.3 闭图像定理

1.4.4 一致有界原理

1.5 共轭空间和共轭算子

1.5.1 Hahn-Banach 延拓定理

1.5.2 共轭空间-自反空间

1.5.3 共轭算子

1.5.4 弱收敛

1.5.5 弱 * 收敛

1.6 谱理论与算子代数

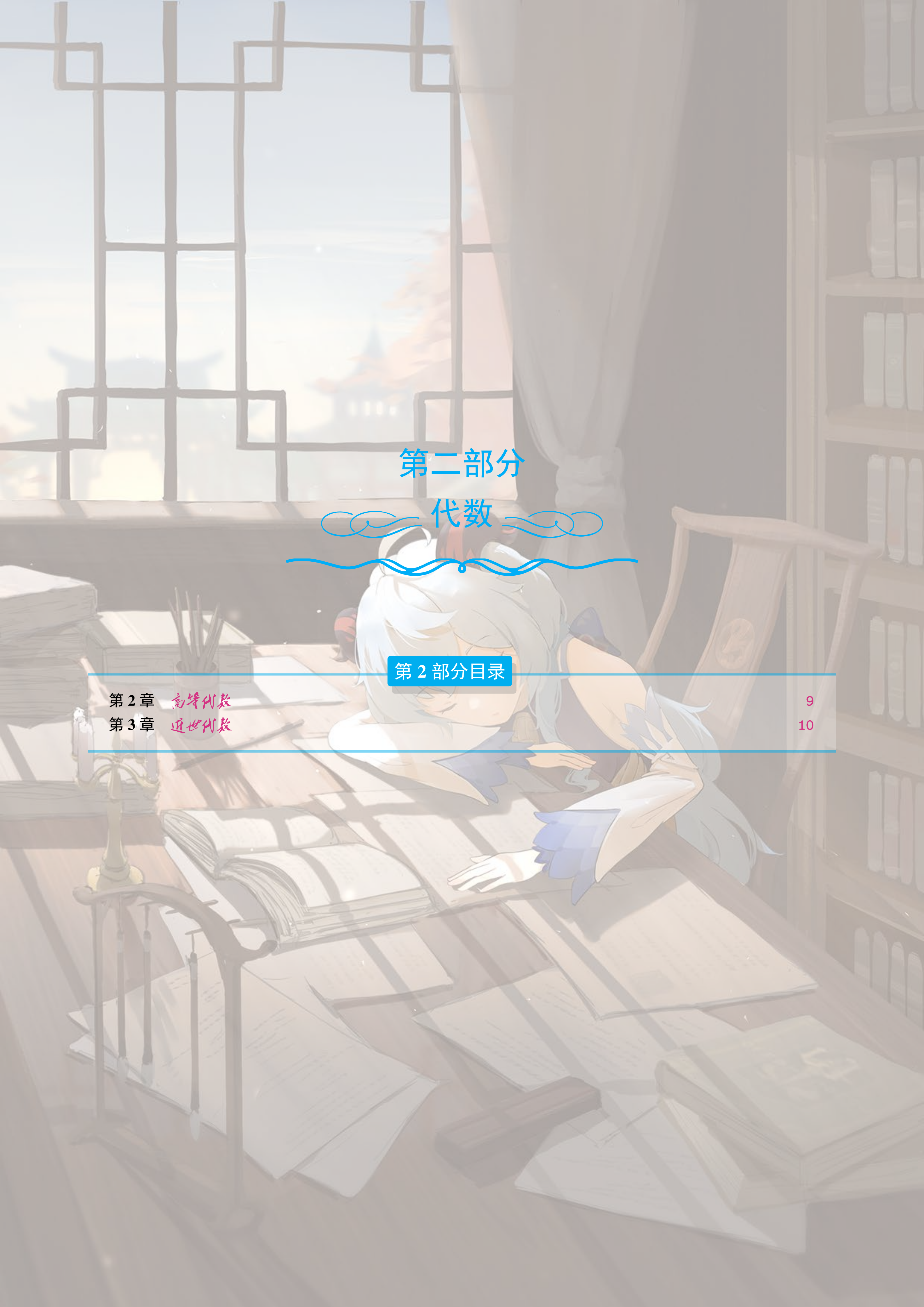
这个不知道怎么开始

1.6.1 线性算子的谱理论

1.6.2 有界共轭线性算子的谱

1.6.3 紧算子与紧算子的谱

1.6.4 Banach 代数



第二部分

代数

第 2 部分目录

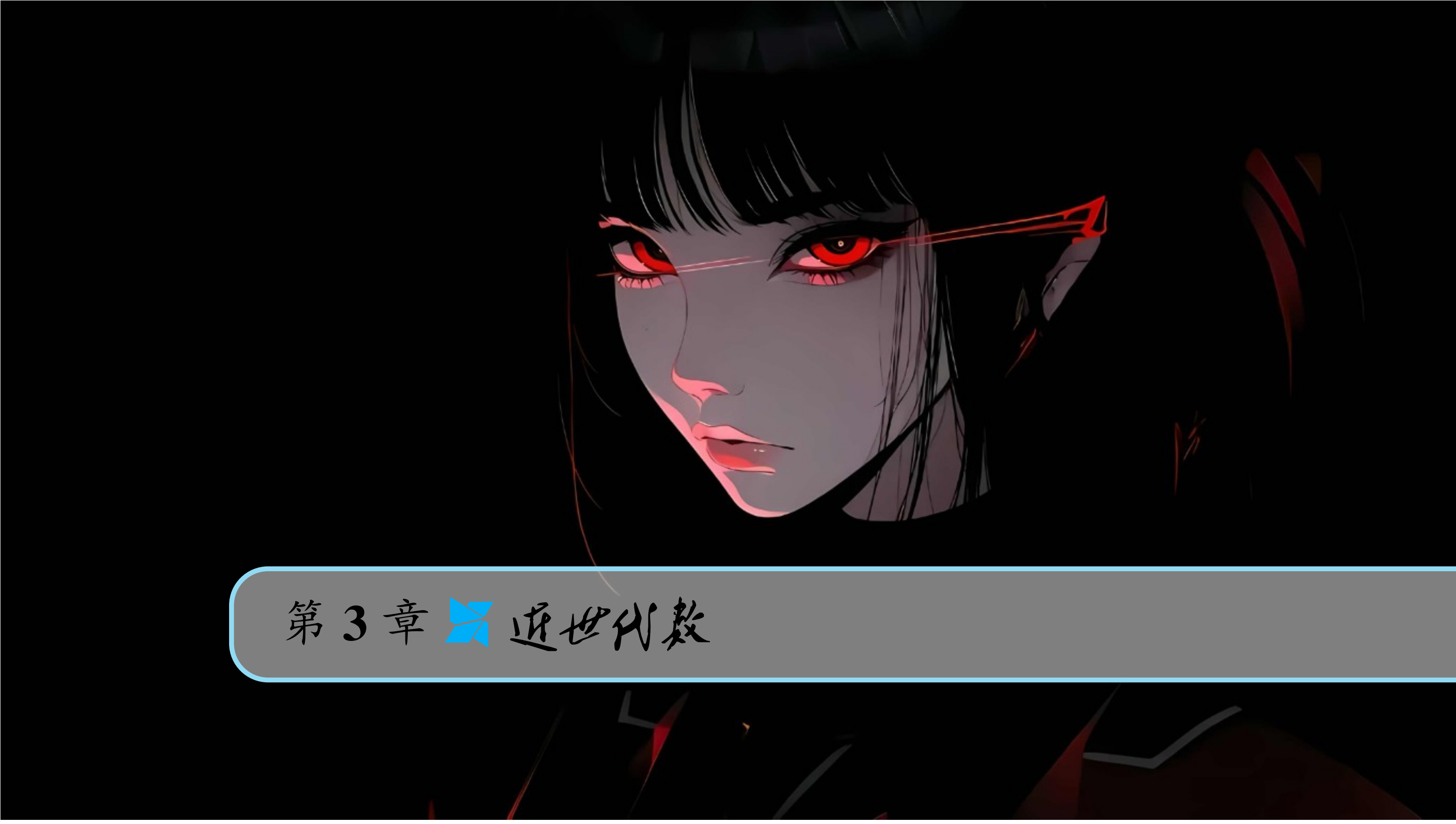
代数类笔记项目

这个是介绍代数这一块的内容笔记

—陈锦湘，2025.05.09

第 2 章 高等代数

❤在学习中要敢于做减法，减去前人已经解决的部分，看看还有那些问题没有解决，需要我们去探索解决。❤



第 3 章 近世代数

❤在学习中要敢于做减法，减去前人已经解决的部分，看看还有那些问题没有解决，需要我们去探索解决。❤