Ch 6

1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $U(0,\theta)$로부터의 랜덤샘플일 때 $X_{(n)}$의 극한분포를 구하여라.

2. $X_n \sim \chi^2(n)$일 때, $(X_n - n)/\sqrt{2n}$의 극한분포를 구하여라.

3. $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$일 때, X_n의 극한분포를 구하여라.

4. 확률변수 X가 Poisson(625)를 따를 때, 중심극한정리와 다음 표를 이용하여 $P(597.5 < X < 667.5)$의 근사값을 구하여라.

z	$P(Z \le z)$	z	$P(Z \le z)$
1.0	0.8413	1.5	0.9332
1.1	0.8643	1.6	0.9452
1.2	0.8849	1.7	0.9554
1.3	0.9032	1.8	0.9641
1.4	0.9192	1.9	0.9713

5. $X_1, \ldots, X_n$이 Unif$(0,\theta)$로부터의 랜덤샘플일 때, $n(\theta - X_{(n)})$의 극한분포를 구하여라. 단, $X_{(n)} = \max_{1\le i\le n} X_i$이다.

6. $X_1, \ldots, X_n$이 Beta$(1,\theta)$로부터의 랜덤샘플일 때, $n^{1/\theta}(1-X_{(n)})$의 극한분포를 구하여라. 단, $X_{(n)} = \max_{1\le i\le n} X_i$이다.

7. $X_1, \ldots, X_n$이 Exp(1)로부터의 랜덤샘플일 때, $X_{(n)} - \log n$의 극한분포를 구하여라. 단, $X_{(n)} = \max_{1\le i\le n} X_i$이다.

Ch 7

1. 확률변수 X가 확률밀도함수가 $f(\cdot;\theta)$인 분포를 따를 때, θ에 대한 충분통계량의 정의를 기술하여라.

2. 확률변수 X가 확률밀도함수가 $f(\cdot;\theta)$인 분포를 따를 때, θ에 대한 완비통계량의 정의를 기술하여라.

3. 확률밀도함수(또는 확률질량함수)가 다음과 같이 나타낼 수 있을 때 이 확률분포의 모임을 k차 지수족이라 한다.

$$f(x;\theta) = \exp\left(\sum_{j=1}^{k} c_j(\theta)T_j(x) + d(\theta) + S(x)\right) I_A(x)$$

   - 이항분포 Bin(m,θ)가 지수족임을 보여라.
   - 포아송분포 Poisson(θ)가 지수족임을 보여라.
   - 감마분포 Gamma(α,β)가 2차 지수족임을 보여라.

- 정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$가 2차 지수족임을 보여라.

4. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Poisson(θ)으로부터의 랜덤샘플일 때 $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$가 θ에 대한 완비충분통계량임을 보여라.

5. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Ber(θ)으로부터의 랜덤샘플일 때 $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$가 θ에 대한 완비충분통계량임을 보여라.

6. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Exp(θ)으로부터의 랜덤샘플일 때 $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$가 θ에 대한 완비충분통계량임을 보여라.

7. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $N(\mu, \sigma^2)$으로부터의 랜덤샘플일 때 $T(\mathbf{X}) = (\sum_{i=1}^n X_i^2, \sum_{i=1}^n X_i)$는 (μ, σ^2)에 대한 완비충분통계량임을 보여라.

8. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Unif$(0, \theta)$로부터의 랜덤샘플일 때 $T(\mathbf{X}) = X_{(n)}$은 θ에 대한 완비충분통계량임을 보여라.

9. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 확률밀도함수가 $f(x; \theta) = \exp(-(x - \theta)), x \geq \theta$인 분포로부터 얻은 랜덤샘플일 때 $T(\mathbf{X}) = X_{(1)}$은 θ에 대한 충분통계량임을 보여라.

10. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Unif$(-\theta, \theta)$로부터의 랜덤샘플일 때 $T(\mathbf{X}) = \max_{1 \leq i \leq n} |X_i|$은 θ에 대한 완비충분통계량임을 보여라.

Ch 8

1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Bin(m, θ)로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 적률추정량은?

2. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Poisson(θ)로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 적률추정량은?

3. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Gamma$(5, \theta)$로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 적률추정량은?

4. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 확률밀도함수가 $f(x; \theta) = \exp(-(x - \theta)), x \geq \theta$인 분포로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 적률추정량은?

5. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 확률밀도함수가 $f(x; \theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-|x|/\theta}, -\infty < x < \infty$인 분포로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 적률추정량은?

6. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $N(\mu, \sigma^2)$로부터의 랜덤샘플일 때 μ와 σ^2의 적률추정량은?

7. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Gamma(α, λ)로부터의 랜덤샘플일 때 α와 λ의 적률추정량은?

8. 모수 θ는 θ_1, θ_2 또는 θ_3 중 하나의 값을 갖는다고 한다. 각 모수의 값에서 이산형 확률변수 X_1, X_2의 확률분포가 다음과 같을 때 X_1, X_2를 이용하여 모수 θ의 최대가능도추정량을 구하여라.

x	1	2	3	4
$f(x;\theta_1)$	0.4	0.3	0.2	0.1
$f(x;\theta_2)$	0.1	0.2	0.5	0.2
$f(x;\theta_3)$	0.1	0.4	0.2	0.3

9. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Ber(θ)로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 최대가능도추정량은?

Cont.

10. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Poisson(θ)로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 최대가능도추정량은?

11. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Poisson(θ)로부터의 랜덤샘플일 때 $P(X_1 = 1)$의 최대가능도추정량은?

12. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 확률밀도함수가 $f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta}e^{-|x|/\theta}, -\infty < x < \infty$인 랜덤샘플일 때 θ의 최대가능도추정량은?

13. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $N(\mu, \sigma^2)$로부터의 랜덤샘플일 때 $\theta = (\mu, \sigma^2)$의 최대가능도추정량은?

14. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $N(\mu, \sigma^2)$로부터의 랜덤샘플일 때 μ/σ의 최대가능도추정량은?

15. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 확률밀도함수가 $f(x;\theta) = \exp(-(x-\theta)), x \geq \theta$인 랜덤샘플일 때 θ의 최대가능도추정량은?

16. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Unif($0, \theta$)로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 최대가능도추정량은?

17. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $N(\mu, \sigma^2)$으로부터의 랜덤샘플일 때 다음과 같은 μ와 σ^2의 추정량의 평균제곱오차는?

18. Ber(θ)에 대한 피셔 정보는?

19. Poisson(θ)에 대한 피셔 정보는?

20. $N(\mu, \sigma^2)$에 대한 피셔 정보 행렬은?

21. Beta($\theta, 1$)에 대한 피셔 정보는? Hint. Beta($\theta, 1$)의 pdf는 $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} I(0 < x < 1)$이다.

22. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Ber(θ)으로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 최대가능도추정량에 대한 점근적 분포를 구하여라.

23. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Poisson(θ)으로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 최대가능도추정량에 대한 점근적 분포를 구하여라.

24. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Beta($\theta, 1$)으로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 최대가능도추정량에 대한 점근적 분포를 구하여라. Hint. Beta($\theta, 1$)의 pdf는 $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} I(0 < x < 1)$이다.

25. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $N(\mu, \sigma^2)$으로부터의 랜덤샘플일 때 $\theta = (\mu, \sigma^2)^\top$의 최대가능도추정량에 대한 점근적 분포를 구하여라.

26. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Bin(m, θ)로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 최소분산비편향추정량은?

27. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Poisson(θ)로부터의 랜덤샘플일 때
    - θ의 최소분산비편향추정량은?
    - θ^2의 최소분산비편향추정량은?

28. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Unif($0, \theta$)로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 최소분산비편향추정량은?

29. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Unif($-\theta, \theta$)로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 최소분산비편향추정량은?

30. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $N(\mu, \sigma^2)$으로부터의 랜덤샘플일 때
    - μ의 최소분산비편향추정량은?

- σ^2의 최소분산비편향추정량은?
- σ의 최소분산비편향추정량은?
- μ/σ의 최소분산비편향추정량은?
- $p \in (0,1)$일때, $p = P(X_1 \le u)$를 만족하는 u의 최소분산비편향추정량은?

31. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Ber(θ)로부터의 랜덤샘플일 때
    - θ의 최소분산비편향추정량은?
    - $\theta(1-\theta)$의 최소분산비편향추정량은? Hint. $X_1(1-X_2)$는 $\theta(1-\theta)$의 불편추정량이다.
32. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Exp(θ)로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 최소분산비편향추정량은?
33. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $N(\theta, 1)$으로부터의 랜덤샘플일 때 상수 $c \in \mathbb{R}$에 대하여 $P(X_1 > c)$의 최소분산비편향추정량은? Hint. $I(X_1 > c)$는 $P(X_1 > c)$의 불편추정량이다.
34. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Beta$(\theta, 1)$로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 최소분산비편향추정량은? Hint. Beta$(\theta, 1)$의 pdf는 $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} I(0 < x < 1)$이다.

Ch 9

1. 가설 검정 $\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0$ vs $\mathcal{H}_1 : \theta = \theta_1$에 대해서 유의수준 α에서 최강력검정의 정의를 기술하여라.
2. 가설 검정 $\mathcal{H}_0 : \theta \in \Theta_0$ vs $\mathcal{H}_1 : \theta \in \Theta_1$에 대해서 유의수준 α에서 균일최강력검정의 정의를 기술하여라.
3. X의 확률분포가 다음과 같다.

	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x;\theta_0)$	0.4	0.2	0.1	0.1	0.1	0.05	0.05
$f(x;\theta_1)$	0.05	0.05	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

   $\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0$ vs $\mathcal{H}_1 : \theta = \theta_1$일 때, 다음 세 가지 검정법을 비교하여라.
   - 검정법 1: 기각역이 $\{0, 1, 2, 3\}$인 검정법
   - 검정법 2: 기각역이 $\{-3, -2, -1\}$인 검정법
   - 검정법 3: 기각역이 $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$인 검정법
4. 이산형 확률변수 X의 확률분포가 다음과 같을 때 X를 이용하여 다음 가설에 대한 검정을 하려고 한다.

$$\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : \theta = \theta_1$$

   (a) 유의수준 0.05에서 최강력검정법은?
   (b) 유의수준 0.1에서 최강력검정법은?

Cont.

	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x;\theta_0)$	0.4	0.2	0.1	0.1	0.1	0.05	0.05
$f(x;\theta_1)$	0.05	0.05	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

(c) 유의수준 0.075에서 최강력검정법은?

5. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Ber(θ)로부터의 랜덤샘플이고, 다음과 같은 가설을 검정한다.

$$\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : \theta = \theta_1 \qquad (\text{단}, \theta_1 > \theta_0)$$

이 때, 최강력검정법의 기각역의 형태는? $n = 10$이고 $\theta_0 = 0.5$일 때 유의수준 $\alpha = 0.5^{10}$, $\alpha = 0.5^{10} + 10(0.5)^{10}$, $\alpha = 0.5^{10} + 5(0.5)^{10}$에서 최강력검정법은?

6. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Poisson(θ)로부터의 랜덤샘플일 때 다음 가설에 대한 유의수준 α에서 최강력검정법의 기각역은?

$$\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : \theta = \theta_1 \qquad (\text{단}, \theta_1 > \theta_0)$$

7. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $N(\theta, 1)$로부터의 랜덤샘플일 때 다음 가설에 대한 유의수준 α에서 최강력검정법의 기각역은?

$$\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : \theta = \theta_1 \qquad (\text{단}, \theta_1 > \theta_0)$$

8. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Exp(θ)로부터의 랜덤샘플일 때 다음 가설에 대한 유의수준 α에서 최강력검정법의 기각역은?

$$\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : \theta = \theta_1 \qquad (\text{단}, \theta_1 > \theta_0)$$

9. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $N(0, \sigma^2)$로부터의 랜덤샘플일 때 다음 가설에 대한 유의수준 α에서 최강력검정법의 기각역은?

$$\mathcal{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 \qquad (\text{단}, \sigma_1^2 > \sigma_0^2)$$

10. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Poisson(θ)로부터의 랜덤샘플일 때 다음 가설에 대한 유의수준 α에서 균일최강력검정법의 기각역은?

$$\mathcal{H}_0 : \theta \le \theta_0 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0$$

11. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $N(\theta, 1)$로부터의 랜덤샘플일 때 다음 가설에 대한 유의수준 α에서 균일최강력검정법의 기각역은?

$$\mathcal{H}_0 : \theta \le \theta_0 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0$$

12. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Exp(θ)로부터의 랜덤샘플일 때 다음 가설에 대한 유의수준 α에서 균일최강력검정법의 기각

역은?

$$\mathcal{H}_0 : \theta \le \theta_0 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0$$

13. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $N(0, \sigma^2)$로부터의 랜덤샘플일 때 다음 가설에 대한 유의수준 α에서 균일최강력검정법의 기각역은?

$$\mathcal{H}_0 : \sigma^2 \le \sigma_0^2 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

14. Poisson(μ)에서 크기가 $n = 10$인 랜덤샘플 $X_1, \ldots, X_{10}$을 추출하여 다음의 가설을 검정하려고 한다.

$$\mathcal{H}_0 : \mu = 0.5 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : \mu > 0.5.$$

(a) 기각역의 형태가 $X_1 + \cdots + X_{10} \ge c$일 때, 유의수준이 $\alpha = 0.05$이기 위한 가장 작은 정수 c의 값을 구하여라.

(b) (a)의 결과를 이용하여 제1종 오류의 확률이 5%인 랜덤화 검정을 구하여라.

(c) (b)에서 구한 검정의 검정력함수 $\gamma(\mu)$를 구하여라.

15. 성공확률이 p이고 서로 독립인 베르누이 시행을 $n = 7$회 한 결과 $X_1, \ldots, X_7$을 이용하여 다음의 가설을 검정하려고 한다.

$$\mathcal{H}_0 : p = 0.5 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : p > 0.5.$$

(a) 기각역의 형태가 $X_1 + \cdots + X_7 \ge c$일 때, 유의수준이 $\alpha = 0.1$이기 위한 가장 작은 정수 c의 값을 구하여라.

(b) (a)의 결과를 이용하여 제1종 오류의 확률이 10%인 랜덤화 검정을 구하여라.

(c) (b)에서 구한 검정의 검정력함수 $\gamma(p)$를 구하여라.

16. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Exp(θ)로부터의 랜덤샘플일 때 다음 가설에 대한 유의수준 α에서 최대가능도비 검정의 기각역은?

$$\mathcal{H}_0 : \theta \le \theta_0 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0$$

17. 확률밀도함수가

$$f(x; \theta) = \theta x^{-\theta - 1}, \quad 1 < x < \infty.$$

인 파레토 분포 Pareto$(1, \theta)$로부터의 랜덤샘플 $X_1, X_2, \ldots, X_n$을 이용하여

$$\mathcal{H}_0 : \theta = 1 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : \theta \ne 1$$

를 검정할 때, 유의수준 α에서 최대가능도비 검정의 기각역은?

18. 확률밀도함수가

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1.$$

인 베타 분포 Beta$(\theta, 1)$로부터의 랜덤샘플 $X_1, X_2, \ldots, X_n$을 이용하여

$$\mathcal{H}_0 : \theta \leq 1 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : \theta > 1$$

를 검정할 때, 유의수준 α에서 최대가능도비 검정의 기각역은?

19. $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$과 $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$이 각각 정규 분포 $N(\mu_1, \sigma^2)$과 $N(\mu_2, \sigma^2)$로부터의 랜덤샘플일 때 다음 가설에 대한 유의수준 α에서 최대가능도비 검정의 기각역은?

$$\mathcal{H}_0 : \mu_1 \leq \mu_2 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : \mu_1 > \mu_2$$

20. $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$과 $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$이 각각 정규 분포 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$과 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$로부터의 랜덤샘플일 때 다음 가설에 대한 유의수준 α에서 최대가능도비 검정의 기각역은?

$$\mathcal{H}_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

21. 확률밀도함수가

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}, \quad \mu \geq x < \infty.$$

인 두개의 모수를 갖는 지수분포 Exp(μ, σ)로부터의 랜덤샘플 $X_1, X_2, \ldots, X_n$을 이용하여

$$\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : \mu \neq \mu_0$$

를 검정할 때, 유의수준 α에서 최대가능도비 검정의 기각역은?

22. 확률밀도함수가

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}, \quad \mu \geq x < \infty.$$

인 두개의 모수를 갖는 지수분포 Exp(μ, σ)로부터의 랜덤샘플 $X_1, X_2, \ldots, X_n$을 이용하여

$$\mathcal{H}_0 : \sigma = \sigma_0 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : \sigma \neq \sigma_0$$

를 검정할 때, 유의수준 α에서 최대가능도비 검정의 기각역은?

The End.