JEE (ADVANCED) 2019

DATE: 27-05-2019

Questions & Solutions

PAPER – 2 **SUBJECT:CHEMISTRY**

MAX. MARKS: 186 **TIME: 3 HRS.**

PAPER-2 : INSTRUCTIONS TO CANDIDATES

- **Question paper-2 has three (03) parts : Physics, Chemistry and Mathematics.**
- Each part has a total of **eighteen (18) questions** divided into **three (03) sections (Section-1, Section-2 and Section-3).**
- Total number of questions in **Question Paper-2** are **: Fifty Four (54)** and Maximum Marks are **One Hundred Eighty Six (186).**

Type of Questions and Marking Schemes

SECTION 1 (Maximum Marks : 32)

- This section contains **EIGHT (08)** questions.
- Each question has **FOUR** options **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is(are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme.

Full Marks :	**+4** If only (all) the correct option(s) is (are) chosen.
Partial Marks :	**+3** If all the four options are correct but ONLY three options are chosen.
Partial Marks :	**+2** If three or more options are correct but ONLY two options are chosen and both of which are correct.
Partial Marks :	**+1** If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option.
Zero Marks :	0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks :	**–1** In all other cases.

SECTION 2 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks :	**+3** If ONLY the correct numerical value is entered.
Zero Marks :	**0** In all other cases.

Downloaded From ToraLabs

SECTION 3 (Maximum Marks : 12)

- This section contains **TWO (02)** List-Match sets.
- Each List-Match set has **TWO (02)** Multiple Choice Questions.
- Each List-Match set has two lists : **List-I** and **List-II**.
- **List-I** has **Four** entries (I),(II), (III) and (IV) **List-II** has **Six** entries (P),(Q), (R), (S), (T) and (U).
- **FOUR** options are given in each Multiple Choice Question based on **List-I** and **List-II** and **ONLY ONE** of these four options satisfies the condition asked in the Multiple Choice Question.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks :	**+3**	If ONLY the option corresponding to the correct combination is chosen.
Zero Marks :	**0**	If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks :	**–1**	In all other cases.

Answering Questions :

- To select the option(s), use the mouse to click on the corresponding button(s) of the option(s).
- To deselect the chosen option(s) for the questions of **SECTION-1** click on the button(s) of the chosen option(s) again or click on the **Clear Response** button to clear all the chosen options.
- To deselect the chosen option for the questions of **SECTION-3**, click on the button of the chosen option again or click on the **Clear Response** button to clear the chosen option.
- To change the option(s) of a previously answered question of **SECTION-1** and **SECTION-3** first deselect as given above and then select the new option(s)
- To answer questions of **SECTION-2** use the mouse to click on numbers (and/or symbols) on the on-screen virtual numeric keypad to enter the numerical value in the space provided for answer.
- To change the answer of a question of **SECTION-2** first click on the **Clear Response** button to clear the correct answer and then enter the new numerical value.
- To mark a question **ONLY** for review (i.e. without answering it). Click on the **Mark** for **Review & next** button.
- To mark is question for review (after answering it), click on **Mark for Review & Next** button - the answered question which is also marked for review will be evaluated.
- To save the answer click on the **Save & Next** button, the answered question will be evaluated.

Downloaded From ToraLabs

CHEMISTRY

SECTION 1 (Maximum Marks : 32)

- This section contains **EIGHT (08)** questions.
- Each question has **FOUR** options **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is(are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme.

Full Marks : **+4** If only (all) the correct option(s) is (are) chosen.
Partial Marks : **+3** If all the four options are correct but ONLY three options are chosen.
Partial Marks : **+2** If three or more options are correct but ONLY two options are chosen and both of which are correct.
Partial Marks : **+1** If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option.
Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks : **–1** In all other cases.

खंड 1 (अधिकतम अंकः 32)

- इस खंड में **आठ (08)** प्रश्न है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से **एक या एक से अधिक** विकल्प सही है(हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, दिए हुए विकल्पों में से सही उत्तर (उत्तरों) से संबधित विकल्प (विकल्पों) को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :

पूर्ण अंक : **+4** यदि केवल (सारे) सही विकल्प (विकल्पों) को चुना गया है।
आंशिक अंक : **+3** यदि चारों विकल्प सही हैं परन्तु केवल तीन विकल्पों को चुना गया है।
आंशिक अंक : **+2** यदि तीन या तीन से अधिक विकल्प सही है परन्तु केवल दो विकल्पों को चुना गया है और दोंनो चुने हुए विकल्प सही विकल्प हैं।
आंशिक अंक : **+1** यदि दो या दो से अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल एक विकल्प को चुना गया है और चुना हुआ विकल्प सही विकल्प है।
शून्य अंक : **0** यदि किसी भी विकल्प को नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है)।
ऋण अंक : **–1** अन्य सभी परिस्थितियों में।

1. Consider the following reaction (unbalanced)

Zn + hot conc. $H_2SO_4 \longrightarrow G + R + X$

Zn + conc. $NaOH \longrightarrow T + Q$

$G + H_2S + NH_4OH \longrightarrow Z$(a precipitate) $+ X + Y$

Choose the correct option(s)

(1) Bond order of Q is 1 in its ground state
(2) The oxidation state of Zn in T is +1.
(3) R is a V-shaped molecule
(4) Z is dirty white in colour

Downloaded From ToraLabs

निम्न अभिक्रियाओं (असंतुलित) पर विचार करे –

Zn + गरम सान्द्र $H_2SO_4 \longrightarrow G + R + X$

Zn + सान्द्र NaOH $\longrightarrow T + Q$

$G + H_2S + NH_4OH \longrightarrow Z$(एक अवक्षेप) $+ X + Y$

सही विकल्प(विकल्पों) को चुनिये –

(1) अपनी निम्नतम अवस्था (ground state) में Q का आबन्ध (Bond order) क्रम एक है।

(2) Z का रंग अस्वच्छ श्वेत (dirty white) है।

(3) R एक V-आकार का अणु है।

(4) T में Zn की ऑक्सीकरण अवस्था (oxidation state) +1 है।

Ans. **(1, 3 & 4)**

Sol. $Zn + \underset{\text{(Hot \& conc.)}}{H_2SO_4} \longrightarrow \underset{(G)}{ZnSO_4} + \underset{(R)}{SO_2} + \underset{(X)}{H_2O}$

$Zn + \text{conc. NaOH} \longrightarrow \underset{(T)}{Na_2ZnO_2} + \underset{(Q)}{H_2}$

$\underset{(G)}{ZnSO_4} + H_2S + NH_4OH(aq) \longrightarrow \underset{(Z)}{ZnS\downarrow} + \underset{(Y)}{(NH_4)_2SO_4} + \underset{(X)}{H_2O}$

2. The cyanide process of gold extraction involes leaching out gold from its ore with CN^- in the presence of Q in water to form R. Subsequently, R is treated with T to obtain Au and Z. Choose the correct option(s)

(1) R is $[Au(CN)_4]^-$ (2) T is Zn (3) Q is O_2 (4) Z is $[Zn(CN)_4]^{2-}$

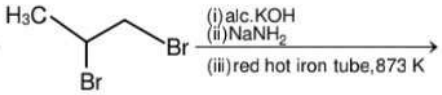
सायनाइड प्रक्रम (cyanide process) से सोने के निष्कर्षण (extraction) में उसके अयस्क से CN^- द्वारा पानी में Q की उपस्थिति में निक्षालन (leaching) पर R बनता है। इसके पश्चात् R का T से विवेचन पर Au और Z प्राप्त होते है। निम्न में से सही विकल्प (विकल्पों) को चुनिये।

(1) R है $[Au(CN)_4]^-$ (2) T है Zn (3) Q है O_2 (4) Z है $[Zn(CN)_4]^{2-}$

Ans. **(2, 3 & 4)**

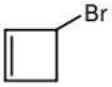
Sol. $Au \xrightarrow{NaCN+O_2} \underset{(R)}{[Au(CN)_2]^{\ominus}} \xrightarrow{Zn(T)} \underset{(Z)}{[Zn(CN)_4]^{2-}} + Au$

3. Choose the correct option(s) that give(s) an aromatic compound as the major product

(1) 

(2)

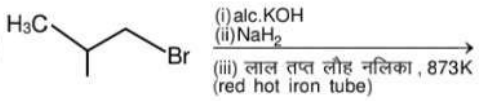
(3) + Cl_2 (excess) $\xrightarrow{UV, 500K}$

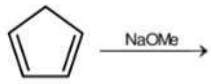
(4) 

$\xrightarrow{NaOEt}$

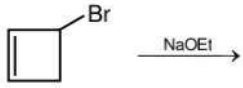
Downloaded From ToraLabs

सही विकल्प(विकल्पों) को चुनिये जिसमें(जिनमें) ऐरोमेटिक (aromatic) उत्पाद मुख्य है(हैं)

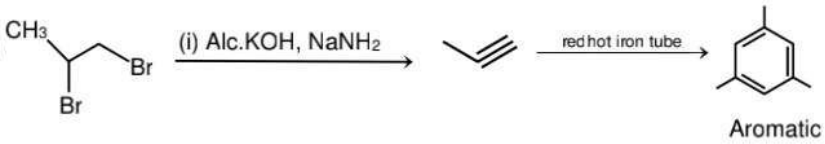
(1) 

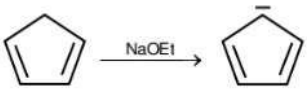
(2) 

(3)

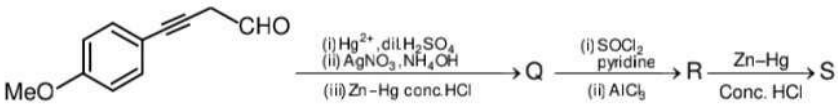
(4) 

Ans. **(1 & 2)**

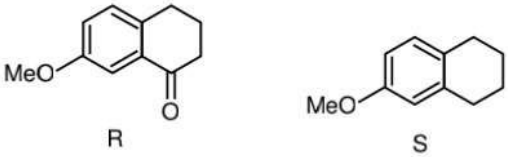
Sol. (1) 

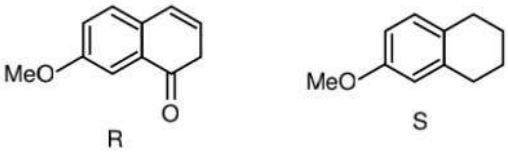
(2) 

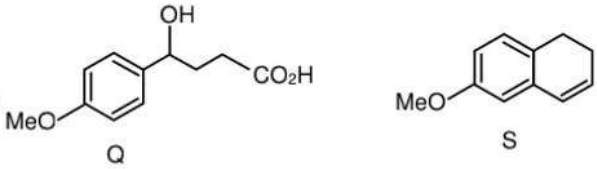
4. Choose the correct option(s) for the following reaction sequence

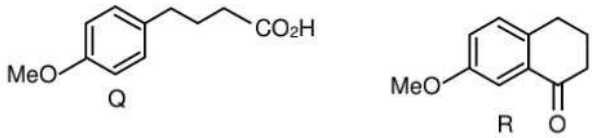


Consider Q, R and S as major products

(1) 

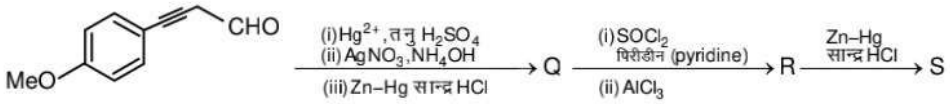
(2) 

(3) 

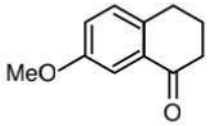
(4) 

Downloaded From ToraLabs

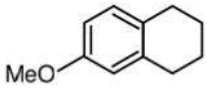
निम्न अभिक्रिया क्रम के लिए सही विकल्प (विकल्पों) को चुनिए–



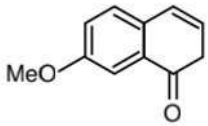
Q, R तथा S को मुख्य उत्पाद मानें।

(1) 

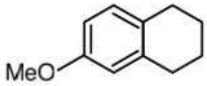
R



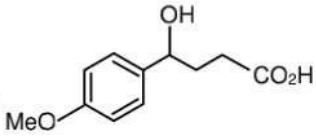
S

(2) 

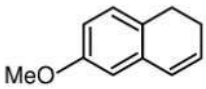
R



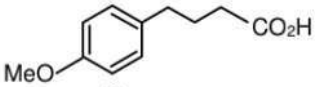
S

(3) 

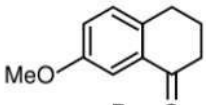
Q



S

(4) 

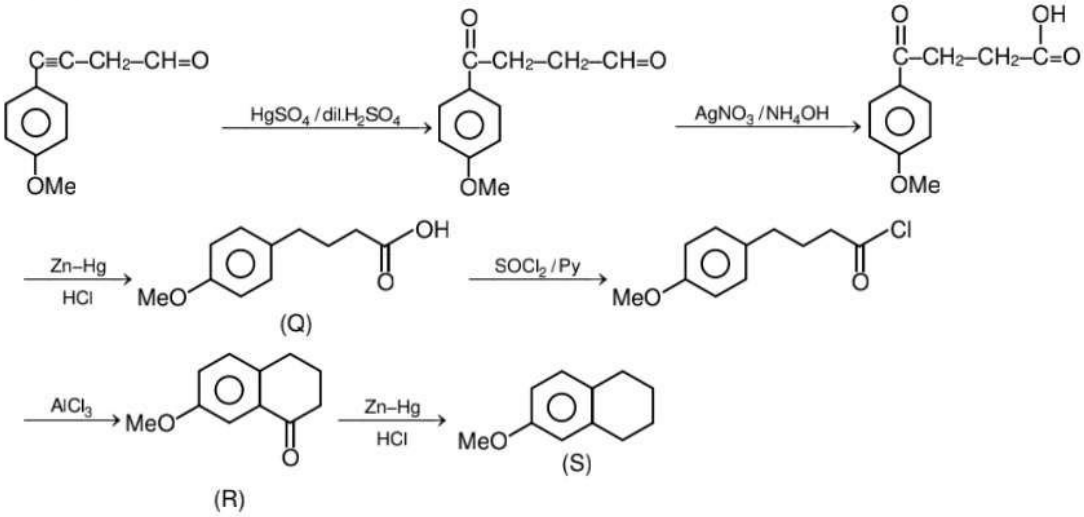
Q



R

Ans. **(1 & 4)**

Sol.



Downloaded From ToraLabs

5. With reference to *aqua regia*, choose the correct option(s)

(1) Reaction of gold with *aqua regia* produces NO_2 in the absence of air

(2) The yellow colour of *aqua regia* is due to the presence of NOCl and Cl_2.

(3) *Aqua regia* is prepared by mixing conc. HCl and conc. HNO_3 in 3 : 1 (v/v) ratio.

(4) Reaction of gold with *aqua regia* produces an anion having Au in +3 oxidation state.

एक्वा रेजिया (aqua regia) के संदर्भ में सही विकल्प/विकल्पों का चयन कीजिए :

(1) सोने की एक्वा रेजिया के साथ वायु की अनुपस्थिति में अभिक्रिया कराने पर NO_2 उत्पादित होता है।

(2) एक्वा रेजिया का पीला रंग NOCl तथा Cl_2 की उपस्थिति के कारण है।

(3) एक्वा रेजिया को सांद्रित HCl तथा सांद्रित HNO_3 के 3 : 1 आयतनिक मात्रा (v/v) के मिश्रण से बनाया जाता है।

(4) एक्वा रेजिया की सोने के साथ अभिक्रिया पर एक ऋणायन (anion) उत्पादित होता है जिसमें Au की ऑक्सीकरण अवस्था (oxidation state) +3 है।

Ans. **(2, 3 & 4)**

Sol. $Au + 4H^+ + NO_3^- + 4Cl^- \longrightarrow [AuCl_4]^{\ominus} + NO + 2H_2O$

(2) NOCl/NO is formed.

(4) $[AuCl_4]^-$ gets formed; Au(+3).

Sol. $Au + 4H^+ + NO_3^- + 4Cl^- \longrightarrow [AuCl_4]^{\ominus} + NO + 2H_2O$

(2) NOCl/NO बनता है।

(4) $[AuCl_4]^-$ बनता है Au(+3).

6. The ground state energy of hydrogen atom is –13.6 eV. Consider an electronic state Ψ of He^+ whose energy, azimuthal quantum number and magnetic quantum number are –3.4 eV, 2 and 0, respectively. Which of the following statement(s) is(are) true for the state Ψ ?

(1) It is a 4d state

(2) The nuclear charge experienced by the electron in this state is less than 2e, where e is the magnitude of the electronic charge

(3) It has 3 radial nodes

(4) It has 2 angular nodes

हाइड्रोजन परमाणु की निम्नतम अवस्था (ground state) की ऊर्जा–13.6 eV है। मान लीजिये कि He^- की एलेक्ट्रोनिक अवस्था Ψ की ऊर्जा, दिगंशी क्वान्टम संख्या (azimuthal quantum number) तथा चुम्बकीय क्वान्टम संख्या (magnetic quantum number) क्रमशः –3.4 eV, 2 तथा 0 हैं। दिये गए कथनों में से अवस्था Ψ के संदर्भ में सही कथन कौनसा/कौनसे है/हैं ?

(1) यह एक 4d अवस्था है।

(2) इस अवस्था में इलेक्ट्रॉन 2e से कम नाभिकीय आवेश (nuclear charge) अनुभव करता है, जहाँ e इलेक्ट्रोनिक आवेश (electronic charge) का परिमाण है।

(3) इसमें 3 त्रिज्य नोड (radial nodes) हैं।

(4) इसमें 2 कोणीय नोड (angular nodes) हैं।

Ans. **(1 & 4)**

Downloaded From ToraLabs

Sol. $E_{He^+} = -13.6 \times \frac{(2)^2}{n^2} = -3.4 = \frac{-13.6}{4}$

$n^2 = 16$ so $n = 4$

quantum number are

$n = 4, \ell = 2, m = 0$

so subshell is = d.

angular node = $\ell = 2$

Radial node = $[n-\ell-1] = 4 - 2 - 1 = 1$

Sol. $E_{He^+} = -13.6 \times \frac{(2)^2}{n^2} = -3.4 = \frac{-13.6}{4}$

$n^2 = 16$ so $n = 4$

क्वान्टम संख्याएं है:

$n = 4, \ell = 2, m = 0$

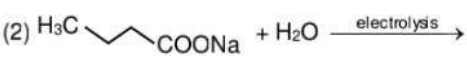
इसलिए उपकोश = d है।

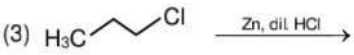
कोणीय नोड = $\ell = 2$

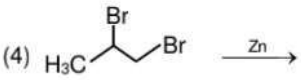
त्रिज्य नोड = $[n-\ell-1] = 4 - 2 - 1 = 1$

7. Which of the following reactions produce(s) propane as a major product ?

(1)

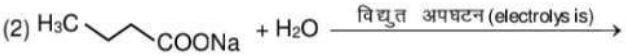
(2) 

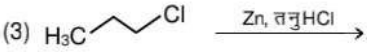
(3) 

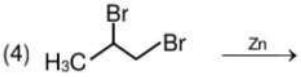
(4) 

दिये गये निम्न अभिक्रियाओं में किस (किन) अभिक्रिया (अभिक्रियाओं) में प्रोपेन (propane) एक मुख्य उत्पाद है?

(1)

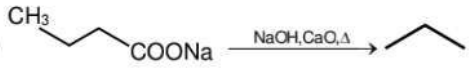
(2) 

(3) 

(4) 

Ans. **(1 & 3)**

Downloaded From ToraLabs

Sol. (1) 

(3)

8. Choose the correct option(s) from the following

(1) Teflon is prepared by heating tetrafluoroethene in presence of a persulphate catalyst at high pressure

(2) Natural rubber is polyisoprene containing *trans* alkene units

(3) Nylon-6 has amide linkages

(4) Cellulose has only α-D-glucose units that are joined by glycosidic linkages

निम्न में से सही विकल्प (विकल्पों) को चुनिये

(1) टेफलॉन (Teflon) को, टेट्राफ्लुओरोएथीन (tetrafluoroethene) को गर्म करके परसल्फेट (persulphate) उत्प्रेरक की उपस्थिति में उच्च दाब पर बनाया जाता है।

(2) प्राकृतिक रबर पॉलीआइसोप्रीन (polyisoprene) है जिसमें विपक्ष (trans) एल्कीन एकांक होते है।

(3) नाइलॉन-6 (Nylon-6) में ऐमाइड बन्ध है।

(4) सेलुलोस (Cellulose) में केवल α-D-ग्लूकोस एकांक है, जो ग्लाइकोसाइडी बन्धनों (glycosidic linkages) द्वारा जुड़े है।

Ans. (1 & 3)

Sol. (1) Teflon is prepared by heating tetrafluoroethene in presence of a persulphate catalyst at high pressure via radical addition mechanism.

(2) Natural rubber is polyisoprene containing *cis* alkene units.

(3) Nylon-6 has amide linkages. It is fact.

(4) Cellulose has only β-D-glucose units that are joined by glycosidic linkages

Sol. (1) टेफलॉन (Teflon) को, टेट्राफ्लुओरोएथीन (tetrafluoroethene) को गर्म करके परसल्फेट (persulphate) उत्प्रेरक की उपस्थिति में उच्च दाब पर मूलक योगात्मक अभिक्रिया द्वारा बनाया जाता है।

(2) प्राकृतिक रबर पॉलीआइसोप्रीन (polyisoprene) है जिसमें समपक्ष (cis) एल्कीन एकांक होते है।

(3) नाइलॉन-6 (Nylon-6) में ऐमाइड बन्ध है।

(4) सेलुलोस (Cellulose) में केवल β-D-ग्लूकोस एकांक है, जो ग्लाइकोसाइडी बन्धनों (glycosidic linkages) द्वारा जुड़े है।

Downloaded From ToraLabs

SECTION 2 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks : **+3** If ONLY the correct numerical value is entered.
Zero Marks : **0** In all other cases.

खंड 2 (अधिकतम अंकः 18)

- इस खंड में **छः (06)** प्रश्न है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक संख्यात्मक मान **(NUMERICAL VALUE)** हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर के सही संख्यात्मक मान को माउज़ (mouse) और ऑन–स्क्रीन (on–screen) वर्चुअल न्युमेरिक कीपेड (virtual numeric keypad) के प्रयोग से उत्तर के लिए चिन्हित स्थान पर दर्ज करें। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो संख्यात्मक मान को दशमलव के दो स्थानों तक **ट्रंकेट/राउंड ऑफ (truncate/round-off)** करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :–

पूर्ण अंक : **+3** यदि दर्ज किया गया संख्यात्मक मान **(Numerical value)** ही सही उत्तर है।
शून्य अंक : **0** अन्य सभी परिस्थितियों में।

1. The decomposition reaction $2N_2O_5(g) \xrightarrow{\Delta} 2N_2O_4(g) + O_2(g)$ is started in a closed cylinder under isothermal isochoric condition at an initial pressure of 1 atm. After $Y \times 10^3$ s, the pressure inside the cylinder is found to be 1.45 atm. If the rate constant of the reaction is $5 \times 10^{-4}\ s^{-1}$, assuming ideal gas behavior, the value of Y is _____

1 atm शुरूआती दबाव पर अपघटन अभिक्रिया $2N_2O_5(g) \xrightarrow{\Delta} 2N_2O_4(g) + O_2(g)$ को एक बन्द सिलेण्डर में समतापी (isothermal) समआयतनिक (isochoric) अवस्था में शुरू किया गया $Y \times 10^3$ s के पश्चात् सिलेण्डर के अन्दर का दबाव 1.45 atm पाया गया। आदर्श गैस व्यवहार मान कर, अगर इस अभिक्रिया का वेग स्थिरांक (rate constant) $5 \times 10^{-4}\ s^{-1}$ है, तब Y का मान है_____

Ans. **(2.30)**

Sol. From unit of k reaction is first order
k की इकाई से अभिक्रिया प्रथम कोटि की है

	$2N_2O_5$	$\xrightarrow{\Delta}$ $2N_2O_4$	+ O_2
t = 0	1atm	0	0
t = t	(1–P)	P	$\frac{P}{2}$
t = ∞	0	1 atm	0.5 atm

$P_0 =$ 1 atm, $P_t = 1.45$ atm $P_\infty = 1.5$ atm

$$t = \frac{1}{2K}\ln\left(\frac{P_\infty - P_0}{P_\infty - P_t}\right)$$

Downloaded From ToraLabs

$t = \frac{2.303}{2\times5\times10^{-4}} \log\left(\frac{1.5-1}{1.5-1.45}\right)$

$t = 2.303 \times 10^3 = y \times 10^3$

so y = 2.303

Answer after rounding off & truncation = 2.30.

ट्रंकेट और राउन्ड ऑफ के पश्चात् उत्तर = 2.30.

2. The Mole fraction of urea in an aqueous urea solution containing 900 g of water is 0.05. If the density of the solution is 1.2 g/cm^3, the molarity of urea solution is_____`.

(**Given data :** Molar masses of urea and water are 60 g mol^{-1} and 18 g mol^{-1}, respectively)

यूरिया के एक जलीय विलयन में, जिसमें 900 g पानी है, यूरिया का मोल–अंश (Mole fraction) 0.05 है। अगर इस विलयन का घनत्व 1.2 g/cm^3 है, तब इस यूरिया विलयन की मोलरता _____ है।

(दिया गया: यूरिया और पानी के मोलर द्रव्यमान क्रमशः 60 g mol^{-1} और 18 g mol^{-1} है।)

Ans. **(2.98)**

Sol. Mole fraction of urea in aqueous solution = 0.05

Let number of moles of solution is = 1 mole

	Mole	Mass	Volume
Solute	0.05	3 g	
Solvent	0.95	17.1g	
Solution	1	20.1g	20.1/1.2 cm^3

$\text{Molarity} = \frac{n_{solute}}{V_{solution\ (inmL)}} \times 1000$

$= \frac{0.05\times1.2}{20.1}\times1000 = \frac{60}{20.1} = 2.985$

Answer after rounding off = 2.98

Answer after truncation = 2.98

Sol. जलीय विलयन में यूरिया का मोल अंश = 0.05

माना विलयन के मोलो की संख्या = 1 mole

	मोल	द्रव्यमान	आयतन
विलेय	0.05	3 g	
विलायक	0.95	17.1g	
विलयन	1	20.1g	20.1/1.2 cm^3

$\text{मोलरता} = \frac{n_{\text{विलेय}}}{V_{\text{विलयन (mL में)}}} \times 1000$

$= \frac{0.05\times1.2}{20.1}\times1000 = \frac{60}{20.1} = 2.985$

राउन्ड ऑफ के पश्चात् उत्तर = 2.98

ट्रंकेट के पश्चात् उत्तर = 2.98

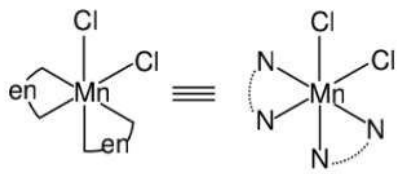
Downloaded From ToraLabs

3. Total number of cis N–Mn–Cl bond angles (that is, Mn–N and Mn–Cl bonds in cis position) present in a molecule of cis $[Mn(en)_2Cl_2]$ complex is_____ (en = $NH_2CH_2CH_2NH_2$)

समपक्ष (cis) – $[Mn(en)_2Cl_2]$ कॉम्प्लेक्स (complex) के एक अणु में समपक्षी N-Mn–Cl आबंध कोणों [अर्थात् Mn–N तथा Mn–Cl आबंध समपक्षीय (cis) हों] की कुल संख्या है _____ (en = $NH_2CH_2CH_2NH_2$)

Ans. **(6)**

Sol.



4. The amount of water produced (in g) in the oxidation of 1 mole of rhombic sulphur by conc. HNO_3 to a compound with the highest oxidation state of sulphur is_____

(Given data : Molar mass of water = 18 g mol^{-1})

1 मोल विषमलंबाक्ष सल्फर (rhombic sulphur) की सान्द्र HNO_3 द्वारा ऑक्सीकरण पर पानी और एक यौगिक, जिसमें सल्फर की ऑक्सीकरण अवस्था उच्चतम है, उत्पादित होता है। उत्पादित पानी की मात्रा (g में) _____ है।

(दिया गया: पानी का मोलर द्रव्यमान = 18 g mol^{-1})

Ans. **(288)**

Sol.

$$32H_2O + S_8 \longrightarrow 8H_2SO_4 + 48H^{\oplus} + 48e^{\ominus}$$

$$[e^{\ominus} + H^{\oplus} + HNO_3 \longrightarrow NO_2 + H_2O] \times 48$$

$$S_8 + 48HNO_3 \longrightarrow 8H_2SO_4 + 48NO_2 + 16H_2O$$

1 mol 16mol

$\Rightarrow$ mass of H_2O formed = (16) (18)g = 288 g

$\Rightarrow$ निर्मित H_2O का द्रव्यमान = (16) (18)g = 288 g

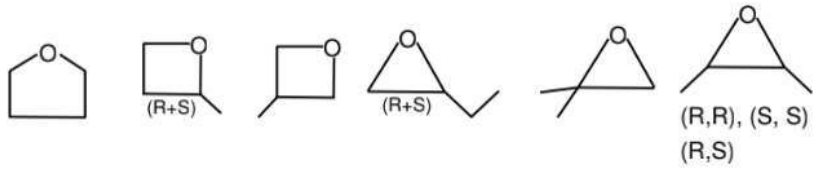
5. Total number of isomers considering both structural and stereoisomers, of cyclic ethers with the molecular formula C_4H_8O is_____

C_4H_8O अणुसूत्र के कुल चक्रीय ईथर (त्रिविम सहित) की गणना कीजिए।

Ans. **(10)**

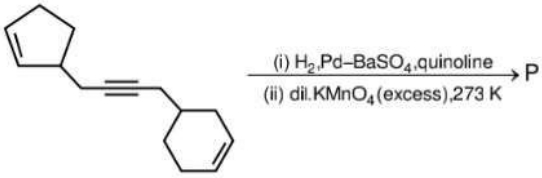
Downloaded From ToraLabs

Sol.

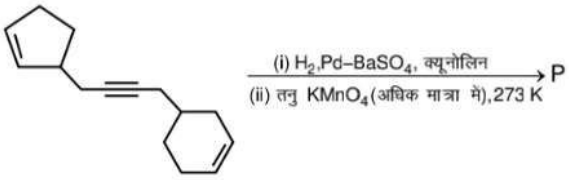


= 10

6. Total number of hydroxyl groups present in a molecule of the major product P is_____

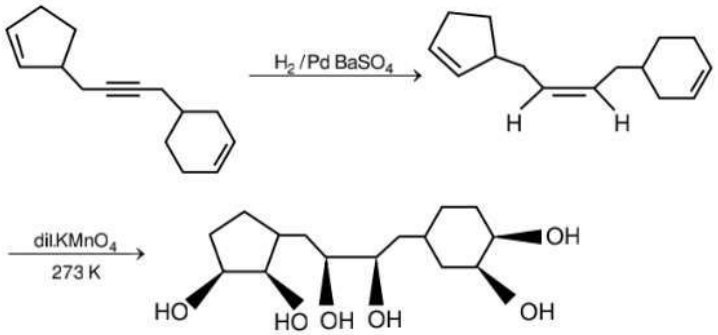


मुख्य उत्पाद 'P' के एक अणु में हाइड्रोक्सिल समूहों की कुल संख्या _____ है।



Ans. (06)

Sol.



Downloaded From ToraLabs

SECTION 3 (Maximum Marks : 12)

- This section contains **TWO (02)** List-Match sets.
- Each List-Match set has **TWO (02)** Multiple Choice Questions.
- Each List-Match set has two lists : **List-I** and **List-II**.
- **List-I** has **Four** entries (I),(II), (III) and (IV) **List-II** has **Six** entries (P),(Q), (R), (S), (T) and (U).
- **FOUR** options are given in each Multiple Choice Question based on **List-I** and **List-II** and **ONLY ONE** of these four options satisfies the condition asked in the Multiple Choice Question.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks : **+3** If ONLY the option corresponding to the correct combination is chosen.
Zero Marks : **0** If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks : **–1** In all other cases.

खंड 3 (अधिकतम अंकः 12)

- इस खंड में **दो (02)** सूची–सुमेलन (List-Match) सेट्स (sets) है।
- प्रत्येक सूची–सुमेलन सेट (set) में **दो (02)** एकाधिक विकल्प प्रश्न (Multiple Choice Question) है।
- प्रत्येक सूची–सुमेलन सेट में दो सूचियाँ है : **सूची-I** और **सूची-II**
- **सूची-I** में चार प्रविष्टियाँ (I),(II),(III) और (IV) है एवं **सूची-II** में **छः** प्रविष्टियाँ (P),(Q),(R),(S),(T) और (U) है।
- प्रत्येक एकाधिक विकल्प प्रश्न में सूची-I और सूची-II पर आधारित चार विकल्पों में से केवल एक विकल्प ही एकाधित विकल्प प्रश्न की शर्त को पूरा करता है।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नयोजना के अनुसार होगाः–

पूर्ण अंक : **+3** यदि सिर्फ सही विकल्प ही चुना गया हैं।
शून्य अंक : **0** यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है)।
ऋण अंक : **–1** अन्य सभी परिस्थितियों में

Answer the following by appropriately matching the lists based on the information given in the paragraph.

Consider the Bohr's model of a one-electron atom where the electron moves around the nucleus. In the following List-I contains some quantities for the nth orbit of the atom and List-II contains options showing how they depend on n.

	List-I		List-II
(I)	Radius of the nth orbit	(P)	$\propto n^{-2}$
(II)	Angular momentum of the electron in the nth orbit	(Q)	$\propto n^{-1}$
(III)	Kinetic energy of the electron in the nth orbit	(R)	$\propto n^{0}$
(IV)	Potential energy of the electron in the nth orbit	(S)	$\propto n^{1}$
		(T)	$\propto n^{2}$
		(U)	$\propto n^{1/2}$

Downloaded From ToraLabs

अनुच्छेद में दी गई जानकारी के आधार पर सूचियों का उचित मिलान करके प्रश्न का उत्तर दें।

एक इलेक्ट्रॉन परमाणु के बोर के मॉडल (Bohr's model) का विचार कीजिये, जहां इलेक्ट्रॉन एक नाभिक के चारों ओर घूम रहा है। निम्न में सूची-I में n^{th} कक्षक के कुछ परिमाण दिये गए है तथा सूची-II में उनकी n पर निर्भरता दी गयी है।

	सूची-I		सूची-II
(I)	n^{th} कक्षक की त्रिज्या	(P)	$\propto n^{-2}$
(II)	n^{th} कक्षक में इलेक्ट्रॉन का कोणीय संवेग (angular momentum)	(Q)	$\propto n^{-1}$
(III)	n^{th} कक्षक में इलेक्ट्रॉन की गतिक ऊर्जा (Kinetic energy)	(R)	$\propto n^{0}$
(IV)	n^{th} कक्षक में इलेक्ट्रॉन की स्थितिज ऊर्जा (Potential energy)	(S)	$\propto n^{1}$
		(T)	$\propto n^{2}$
		(U)	$\propto n^{1/2}$

1. Which of the following has the correct combination considering List-I and List-II ?
सूची-I तथा सूची-II का विचार करते हुए निम्न में से किस विकल्प में सही मेल दिया गया है?

(1) (III), (S) (2) (IV), (Q) (3) (III), (P) (4) (IV), (U)

Ans. **(3)**

2. Which of the following options has the correct combination considering List-I and List-II ?
सूची-I तथा सूची-II का विचार करते हुए निम्न में से किस विकल्प में सही मेल दिया गया है?

(1) (II), (R) (2) (II), (Q) (3) (I), (P) (4) (I), (T)

Ans. **(4)**

Sol. $r_n = 0.529\left(\frac{n^2}{Z}\right)\text{Å} \Rightarrow r_n \propto n^2$

Angular momentum कोणीय संवेग $(\ell) = \left(\frac{nh}{2\pi}\right) \Rightarrow \ell \propto n^1$

$$\text{K.E.} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[2.18\times10^6\,\frac{Z}{n}\right]^2$$

$$\Rightarrow \text{K.E.} \propto \frac{Z^2}{n^2} \Rightarrow \text{K.E.} \propto n^{-2}$$

$$\text{P.E.} = -2\text{K.E.} \quad \Rightarrow \text{P.E.} \propto \frac{Z^2}{n^2}$$

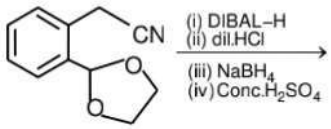
$$\Rightarrow \text{P.E.} \propto n^{-2}$$

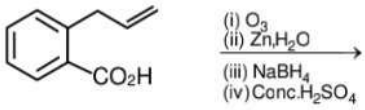
Downloaded From ToraLabs

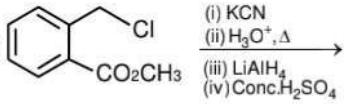
Answer the following by appropriately matching the lists based on the information given in the paragraph.

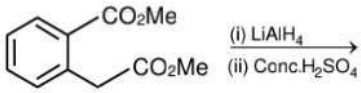
List-I includes starting materials and reagents of selected chemical reactions. List-II gives strutures of compounds that may be formed as intermediate products and/or final products from the reactions of List-I.

Column-I

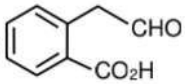
(I) 

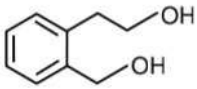
(II) 

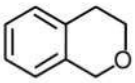
(III) 

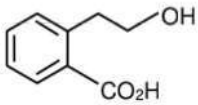
(IV) 

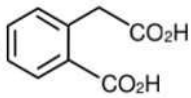
Column-II

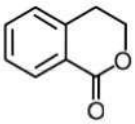
(P) 

(Q) 

(R) 

(S) 

(T) 

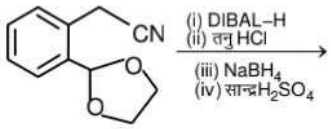
(U) 

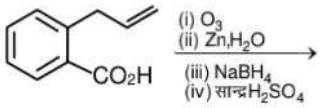
Downloaded From ToraLabs

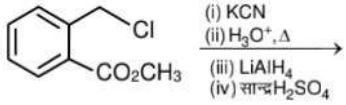
अनुच्छेद में दी गई जानकारी के आधार पर सूचियों का उचित मिलान करके प्रश्न का उत्तर दें।

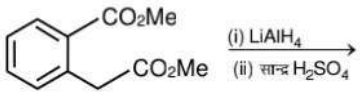
सूची-I में कुछ चुनिंदा रासायनिक अभिक्रियाओं कें प्रारम्भिक पदार्थ तथा अभिकर्मक दिये गये है। सूची-II में कुछ यौगिको की संरचना दी गयी है। जो सूची-I की अभिक्रियाओं से मध्यवर्ती उत्पाद एवं/या अंतिम उत्पाद के रूप में निर्मित हो सकते है।

सूची-I

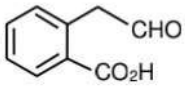
(I) 

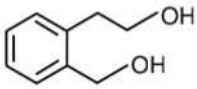
(II) 

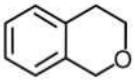
(III) 

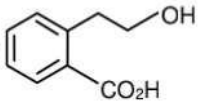
(IV) 

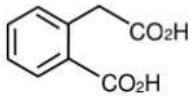
सूची-II

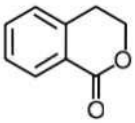
(P) 

(Q) 

(R) 

(S) 

(T) 

(U) 

Downloaded From ToraLabs

3. Which of the following options has correct combination considering List-I and List-II
सूची-I और सूची-II का विचार करते हुए निम्न में से किस विकल्प में सही मेल दिया गया है?

(1) (II), (P), (S), (U) (2) (I), (S), (Q), (R) (3) (II), (P), (S), (T) (4) (I), (Q), (T), (U)

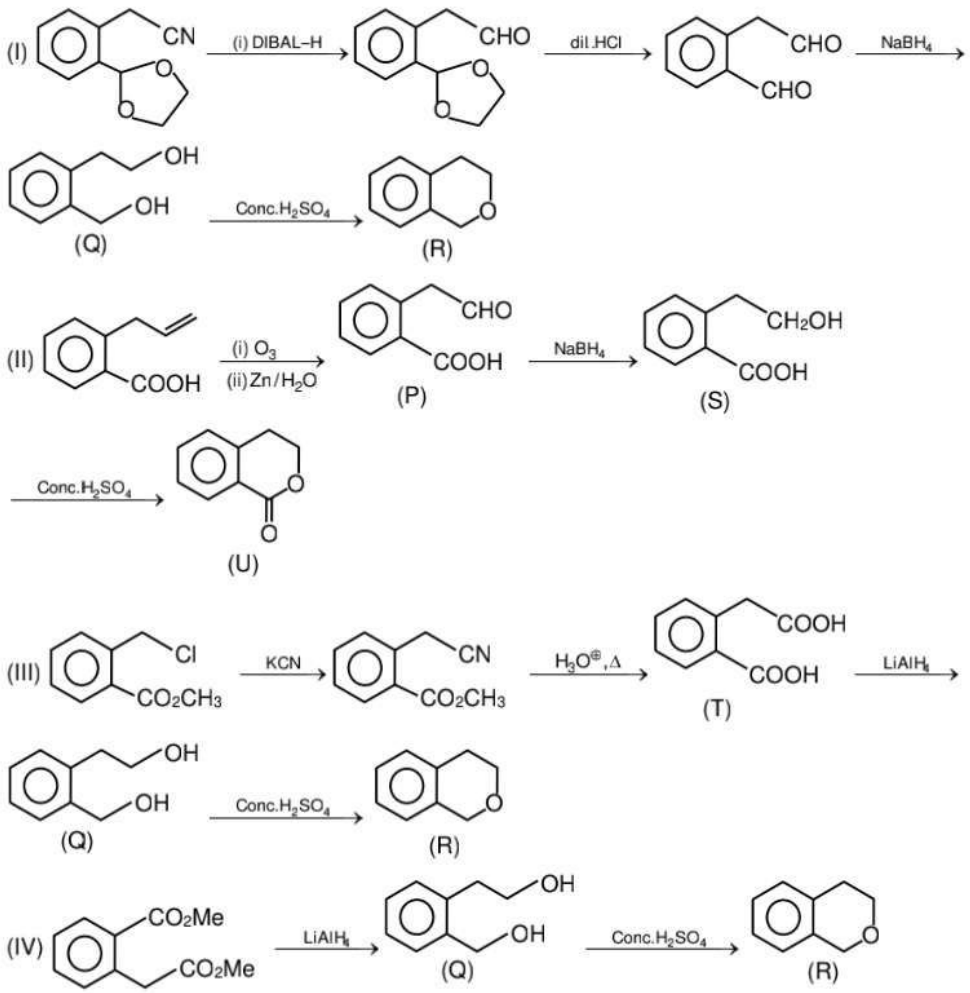
Ans. **(1)**

4. Which of the following options has correct combination considering List-I and List-II
सूची-I और सूची-II का विचार करते हुए निम्न में से किस विकल्प में सही मेल दिया गया है?

(1) (III), (S), (R) (2) (IV), (Q), (U) (3) (IV), (Q), (R) (4) (III), (T), (U)

Ans. **(3)**

Sol. **(3 & 4)**



Downloaded From ToraLabs

JEE (ADVANCED) 2019

DATE: 27-05-2019

Questions & Solutions

PAPER – 2 **SUBJECT:MATHEMATICS**

MAX. MARKS: 186 **TIME: 3 HRS.**

PAPER-2 : INSTRUCTIONS TO CANDIDATES

- **Question paper-2 has three (03) parts : Physics, Chemistry and Mathematics.**
- Each part has a total of **eighteen (18) questions** divided into **three (03) sections (Section-1, Section-2 and Section-3).**
- Total number of questions in **Question Paper-2** are **: Fifty Four (54)** and Maximum Marks are **One Hundred Eighty Six (186).**

Type of Questions and Marking Schemes

SECTION 1 (Maximum Marks : 32)

- This section contains **EIGHT (08)** questions.
- Each question has **FOUR** options **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is(are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme.

Full Marks :	**+4** If only (all) the correct option(s) is (are) chosen.
Partial Marks :	**+3** If all the four options are correct but ONLY three options are chosen.
Partial Marks :	**+2** If three or more options are correct but ONLY two options are chosen and both of which are correct.
Partial Marks :	**+1** If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option.
Zero Marks :	0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks :	**–1** In all other cases.

SECTION 2 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks :	**+3** If ONLY the correct numerical value is entered.
Zero Marks :	**0** In all other cases.

Downloaded From ToraLabs

SECTION 3 (Maximum Marks : 12)

- This section contains **TWO (02)** List-Match sets.
- Each List-Match set has **TWO (02)** Multiple Choice Questions.
- Each List-Match set has two lists : **List-I** and **List-II**.
- **List-I** has **Four** entries (I),(II), (III) and (IV) **List-II** has **Six** entries (P),(Q), (R), (S), (T) and (U).
- **FOUR** options are given in each Multiple Choice Question based on **List-I** and **List-II** and **ONLY ONE** of these four options satisfies the condition asked in the Multiple Choice Question.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks :	**+3**	If ONLY the option corresponding to the correct combination is chosen.
Zero Marks :	**0**	If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks :	**–1**	In all other cases.

Answering Questions :

- To select the option(s), use the mouse to click on the corresponding button(s) of the option(s).
- To deselect the chosen option(s) for the questions of **SECTION-1** click on the button(s) of the chosen option(s) again or click on the **Clear Response** button to clear all the chosen options.
- To deselect the chosen option for the questions of **SECTION-3**, click on the button of the chosen option again or click on the **Clear Response** button to clear the chosen option.
- To change the option(s) of a previously answered question of **SECTION-1** and **SECTION-3** first deselect as given above and then select the new option(s)
- To answer questions of **SECTION-2** use the mouse to click on numbers (and/or symbols) on the on-screen virtual numeric keypad to enter the numerical value in the space provided for answer.
- To change the answer of a question of **SECTION-2** first click on the **Clear Response** button to clear the correct answer and then enter the new numerical value.
- To mark a question **ONLY** for review (i.e. without answering it). Click on the **Mark** for **Review & next** button.
- To mark is question for review (after answering it), click on **Mark for Review & Next** button - the answered question which is also marked for review will be evaluated.
- To save the answer click on the **Save & Next** button, the answered question will be evaluated.

Downloaded From ToraLabs

PART-III : MATHEMATICS

SECTION 1 (Maximum Marks : 32)

- This section contains **EIGHT (08)** questions.
- Each question has **FOUR** options **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is(are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme.

Full Marks :	**+4** If only (all) the correct option(s) is (are) chosen.
Partial Marks :	**+3** If all the four options are correct but ONLY three options are chosen.
Partial Marks :	**+2** If three or more options are correct but ONLY two options are chosen and both of which are correct.
Partial Marks :	**+1** If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option.
Zero Marks :	0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks :	**–1** In all other cases.

खंड 1 (अधिकतम अंकः 32)

- इस खंड में **आठ (08)** प्रश्न है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से **एक या एक से अधिक** विकल्प सही है(हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, दिए हुए विकल्पों में से सही उत्तर (उत्तरों) से संबधित विकल्प (विकल्पों) को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :

पूर्ण अंक	: **+4** यदि केवल (सारे) सही विकल्प (विकल्पों) को चुना गया है।
आंशिक अंक	: **+3** यदि चारों विकल्प सही हैं परन्तु केवल तीन विकल्पों को चुना गया है।
आंशिक अंक	: **+2** यदि तीन या तीन से अधिक विकल्प सही है परन्तु केवल दो विकल्पों को चुना गया है और दोंनो चुने हुए विकल्प सही विकल्प हैं।
आंशिक अंक	: **+1** यदि दो या दो से अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल एक विकल्प को चुना गया है और चुना हुआ विकल्प सही विकल्प है।
शून्य अंक	: **0** यदि किसी भी विकल्प को नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है)।
ऋण अंक	: **–1** अन्य सभी परिस्थितियों में।

1. Let $f : R \to R$ be given by $f(x) = (x-1)(x-2)(x-5)$. Define $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt,\ x > 0$. Then which of the following options is/are correct ?

(1) F(x) has a local maximum at x = 2
(2) F(x) has a local minimum at x = 1
(3) F(x) has two local maxima and one local minimum in $(0, \infty)$
(4) $F(x) \neq 0$, for all $x \in (0, 5)$

माना कि $f : R \to R$, $f(x) = (x-1)(x-2)(x-5)$ द्वारा दिया गया है। परिभाषित करें $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt,\ x > 0$.

तब निम्न में से कौन सा (से) विकल्प सही है(हैं) ?

(1) F का एक स्थानीय उच्चतम (local maximum) x = 2 पर है।
(2) F का एक स्थानीय निम्नतम (local minimum) x = 1 पर है।
(3) F के दो स्थानीय उच्चतम और एक स्थानीय निम्नतम, $(0, \infty)$ मे हैं।
(4) सभी $x \in (0, 5)$ के लिए $F(x) \neq 0$ है।

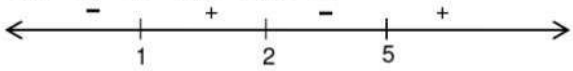
Ans. **(1,2,4)**

Downloaded From ToraLabs

Sol. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-5)$

$F(x) = \int_0^x f(t)dt$ as F(1) is negative and F(2) is also negative so F(x) cannot be zero for $x \in (0, 5)$. So option (A) is correct.

$\therefore F'(x) = f(x) = (x-1)(x-2)(x-5)$



$\Rightarrow$ F(x) has two local minima points at x = 1 and x = 5
F(x) has one local maxima point at x = 2

2. Three lines

$L_1 : \vec{r} = \lambda\hat{i}$, $\lambda \in R$

$L_2 : \vec{r} = \hat{k} + \mu\hat{j}$, $\mu \in R$ and

$L_3 : \vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \nu\hat{k}$, $\nu \in R$.

are given. For which point(s) Q on L_2 can we find a point P on L_1 and a point R on L_3 so that P,Q and R are collinear.

तीन रेखाएं

$L_1 : \vec{r} = \lambda\hat{i}$, $\lambda \in R$

$L_2 : \vec{r} = \hat{k} + \mu\hat{j}$, $\mu \in R$ तथा

$L_3 : \vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \nu\hat{k}$, $\nu \in R$.

दी गयीं है। L_2 के किस बिन्दु (किन बिन्दुओ) Q के लिए हम L_1 पर एक बिन्दु P, और L_3 पर एक बिन्दु R प्राप्त कर सकते हैं। ताकि P, Q और R सरेख (collinear) हो जाएँ ?

(1) $\hat{k} + \frac{1}{2}\hat{j}$ (2) $\hat{k} + \hat{j}$ (3) $\hat{k}$ (4) $\hat{k} - \frac{1}{2}\hat{j}$

Ans. **(1,4)**

Sol. $P(\lambda, 0, 0)$
$Q(0, \mu, 1)$
$R(1, 1, \gamma)$

$\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{PR}$ $\Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda-1} = \frac{-\mu}{-1} = \frac{-1}{-\gamma}$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\lambda-1} = \mu = \frac{1}{\gamma}$ $\Rightarrow \mu$ cannot take value of 1 and 0

Downloaded From ToraLabs

3. Let $x \in R$ and let

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 2 & x & x \\ 0 & 4 & 0 \\ x & x & 6 \end{bmatrix} \text{ and } R = PQP^{-1}.$$

Then which of the following is/are correct

(1) there exists a real number x such that PQ= QP

(2) $\det R = \det \begin{bmatrix} 2 & x & x \\ 0 & 4 & 0 \\ x & x & 5 \end{bmatrix} + 8$ for all $x \in R$

(3) For x = 1 there exists a unit vector $\alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}$ for which are $R\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(4) For x = 0 if $R\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix}$ then a + b = 5

माना कि $x \in R$ और मानाकि

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 2 & x & x \\ 0 & 4 & 0 \\ x & x & 6 \end{bmatrix}$$ तथा $R = PQP^{-1}$ तो निम्न में से कौन सा (से) विकल्प सही है (हैं)–

(1) एक ऐसी वास्तविक संख्या x सम्भव है जिसके लिए PQ= QP

(2) सभी $x \in R$ के लिए $\det R = \det \begin{bmatrix} 2 & x & x \\ 0 & 4 & 0 \\ x & x & 5 \end{bmatrix} + 8$

(3) x = 1 के लिए, एक इकाई सदिश $\alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}$ सम्भव है, जिसके लिए $R\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(4) x = 0 के लिए यदि $R\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix}$, तो a + b = 5

Ans. **(2, 4)**

Sol. $\det R = \det P \times \det Q \times \det (P^{-1})$

$\Rightarrow$ $\det R = \det Q = 4(12 - x^2) = 48 - 4x^2$

Now $\begin{vmatrix} 2 & x & x \\ 0 & 4 & 0 \\ x & x & 5 \end{vmatrix} = 4(10 - x^2) = 40 - 4x^2$

$\Rightarrow$ $\det R = \det \begin{pmatrix} 2 & x & x \\ 0 & 4 & 0 \\ x & x & 5 \end{pmatrix} + 8\ \forall\ x \in R$

At x = 1, det Q = 48 – 4 = 44 = det R

Because $\det R \neq 0$ so

Downloaded From ToraLabs

$$R\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

So $\quad \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}$ is not a unit vector

$$P = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}, Q(x = 0) = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

$R = P\,Q\,P^{-1}$

$$= \begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 8 & 12\\ 0 & 0 & 18\end{bmatrix} \frac{1}{6}\begin{bmatrix}6 & -3 & 0\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}12 & 6 & 4\\ 0 & 24 & 8\\ 0 & 0 & 36\end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix}2 & 1 & 2/3\\ 0 & 4 & 4/3\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

$$(R - 6I)\begin{pmatrix}1\\ a\\ b\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 1 & 2/3\\ 0 & -2 & 4/3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\ a\\ b\end{pmatrix}$$

$$-4 + a + \frac{2b}{3} = 0$$

$$-2a + \frac{4}{3}b = 0$$

$$-8 + \frac{8}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 3$$

$a = 2$

$PQ = QP \quad \Rightarrow \quad a_{12}$ for both are same

$\Rightarrow \quad x + 4 + x = 2 + 2x + 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \phi \quad \Rightarrow$ No value exist

4. For non-negative integer n, let

$$f(n) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right)\sin\left(\frac{k+2}{n+2}\pi\right)}{\sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right)}$$

Assuming $\cos^{-1}x$ takes values in $[0, \pi]$ which of the following options is/are correct?

(1) $f(4) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) If $\alpha = \tan(\cos^{-1} f(6))$, then $\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$

(3) $\sin(7\cos^{-1} f(5)) = 0$

(4) $\lim_{n\to\infty} f(n) = \frac{1}{2}$

Downloaded From ToraLabs

अऋणात्मक पूर्णांकों (non-negative integers) n के लिए माना कि

$$f(n) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right)\sin\left(\frac{k+2}{n+2}\pi\right)}{\sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right)}$$

माना कि $\cos^{-1}x$ का मान $[0, \pi]$ में है, तब निम्न में से कौन सा (से) कथन सत्य है (हैं)–

(1) $f(4) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) यदि $\alpha = \tan(\cos^{-1} f(6))$, तब $\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$

(3) $\sin(7\cos^{-1} f(5)) = 0$

(4) $\lim_{n\to\infty} f(n) = \frac{1}{2}$

Ans. **(1,2,3)**

Sol. $$f(n) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right)\sin\left(\frac{k+2}{n+2}\pi\right)}{\sum_{k=0}^{n} 2\sin^2\left(\frac{k+1}{n+2}\right)\pi} = \frac{\sum_{k=0}^{n}\left(\cos\frac{\pi}{n+2} - \cos\left(\frac{2k+3}{n+2}\right)\pi\right)}{\sum_{k=0}^{n} 2\sin^2\left(\frac{k+1}{n+2}\right)\pi}$$

$$= \frac{(n+1)\cos\frac{\pi}{(n+2)} - \frac{\cos\left(\frac{n+3}{n+2}\right)\pi \sin\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\pi}{\sin\frac{\pi}{n+2}}}{(n+1) - \frac{\cos\pi.\sin\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\pi}{\sin\frac{\pi}{n+2}}}$$

$$= \frac{(n+1)\cos\frac{\pi}{(n+2)} + \cos\left(\frac{n+3}{n+2}\right)\pi}{(n+1)+1} = \frac{(n+1)\cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right)}{n+2} = \cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right)$$

(1) $f(4) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ correct

(2) $\alpha = \tan(\cos^{-1} f(6)) = \tan|\cos^{-1}(\cos\frac{\pi}{8})| = \tan\frac{\pi}{8}$

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}} \Rightarrow 1 = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2} \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0 \qquad \text{(A) correct}$$

(3) $\sin(7\cos^{-1} f(5)) = \sin(7\cos^{-1}(\cos\frac{\pi}{7})) = \sin\pi = 0$ correct

(A), (C), (D) correct

(4) $\lim_{n\to\infty} f(n) = \cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right) = 1$ (B) Incorrect

Downloaded From ToraLabs

5. Let $f : R \to R$ be a function we say that f has

PROPERTY 1 if $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{\sqrt{|h|}}$ exist and is finite and

PROPERTY 2 if $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h^2}$ exist and is finite.

Then which of the following options is/are correct?

(1) $f(x) = x^{2/3}$ has property 1
(2) $f(x) = \sin x$ has property 2
(3) $f(x) = |x|$ has property 1
(4) $f(x) = x|x|$ has property 2

माना कि $f : R \to R$ एक फलन है। हम कहते हैं कि f में

गुण 1 है यदि $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{\sqrt{|h|}}$ का अस्तित्व है और वह परिमित है,

गुण 2 है यदि $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h^2}$ का अस्तित्व है और वह परिमित है।

तब निम्न में से कौन सा (से) विकल्प सही है (हैं)–

(1) $f(x) = x^{2/3}$, गुण 1 को प्रदर्शित करता है
(2) $f(x) = \sin x$, गुण 2 को प्रदर्शित करता है
(3) $f(x) = |x|$, गुण 1 को प्रदर्शित करता है
(4) $f(x) = x|x|$, गुण 2 को प्रदर्शित करता है

Ans. **(1,3)**

Sol. (1) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{h^{2/3}-0}{\sqrt{|h|}} = 0$

(2) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin h-0}{h^2}$ does not exist

(3) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{|h|-0}{\sqrt{|h|}} = 0$

(4) $f(X) = x|x|$

$\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h^2} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h|h|-0}{h^2}$ does not exist

6. For $a \in R$, $|a| > 1$, let

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt[3]{2}+.....+\sqrt[3]{n}}{n^{7/3}\left(\frac{1}{(na+1)^2}+\frac{1}{(na+2)^2}+.....+\frac{1}{(na+n)^2}\right)} = 54.$$ Then possible value(s) a is/are –

माना कि $a \in R$, $|a| > 1$ के लिए

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt[3]{2}+.....+\sqrt[3]{n}}{n^{7/3}\left(\frac{1}{(na+1)^2}+\frac{1}{(na+2)^2}+.....+\frac{1}{(na+n)^2}\right)} = 54,$$ तब a का (के) संभावित मान है (हैं)–

(1) 8 (2) –9 (3) 7 (4) –6

Ans. **(1,2)**

Downloaded From ToraLabs

Sol. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{r}{n}\right)^{1/3}}{\frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{(na+1)^2}+\frac{n^2}{(na+2)^2}\cdots\cdots\frac{1}{(na+1)^2}\right)}=$$

$$\frac{\int_0^1 x^{1/3}dx}{\int_0^1\frac{dx}{(a+x)^2}}=\frac{\left[\frac{3}{4}X^{4/3}\right]_0^1}{\left[-\frac{1}{a+x}\right]_0^1}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}}=54$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}=\frac{3}{4\times 54} \qquad \Rightarrow \frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{72}$$

$a = 8$ or $a = -9$

7. Let

$$P_1 = I = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\quad P_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$P_4=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\quad P_5=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad P_6=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},$$

$$\text{and } X=\sum_{k=1}^{6}P_k\begin{bmatrix}2&1&3\\1&0&2\\3&2&1\end{bmatrix}P_k^T.$$

Where P_k^T denotes the transpose of matrix P_k. Then which of the following options is/are correct ?

(1) X is a symmetric matrix

(2) The sum of diagonal entries of X is 18.

(3) If $X\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, then $\alpha = 30$

(4) $X - 30I$ is an invertible matrix

माना कि

$$P_1 = I = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\quad P_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$P_4=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\quad P_5=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad P_6=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},$$

और $$X=\sum_{k=1}^{6}P_k\begin{bmatrix}2&1&3\\1&0&2\\3&2&1\end{bmatrix}P_k^T$$

Downloaded From ToraLabs

जहाँ आव्यूह (matrix) P_k के परिवर्त (transpose) को P_k^T से दर्शाया गया है। तब निम्न में से कौनसा (से) विकल्प सही है (हैं)–

(1) X एक सममित आव्यूह है।

(2) X के विकर्णो के अवयवों का योग 18 होगा।

(3) यदि $X\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, तो $\alpha = 30$

(4) $X - 30I$ एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह होगा।

Ans. **(1,2,3)**

Sol. Clearly $P_1 = P_1^T = P_1^{-1}$

$P_2 = P_2^T = P_2^{-1}$

.

.

.

$P_6 = P_6^T = P_6^{-1}$

and $A^T = A$, where $A = \begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 0 & 2\\3 & 2 & 1\end{bmatrix}$

Using formula $(A + B)^T = A^T + B^T$

$X^T = \left(P_1AP_1^T + \ldots\ldots + P_6AP_6^T\right)^T = P_1A^TP_1^T + \ldots\ldots + P_6A^TP_6^T = X$ $\Rightarrow$ X is symmetric.

Let $B = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$XB = P_1AP_1^TB + P_2AP_2^TB + \ldots. + P_6AP_6^TB = P_1AB + PAB + \ldots\ldots + P_6AB$

$XB = (P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_6)\begin{bmatrix}6\\3\\6\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}6\times2+3\times2+6\times2\\6\times2+3\times2+6\times2\\6\times2+3\times2+6\times2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}30\\30\\30\end{bmatrix} = 30B$ $\Rightarrow \alpha = 30$

since $X\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 30\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $(X - 30I)B = 0$ has a non trivial solution $B = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $|X - 30I| = 0$

$X = P_1AP_1^T + \ldots\ldots + P_6AP_6^T$

trace (x) $= t_r(P_1AP_1^T) + \ldots\ldots\ldots + t_r\left(P_6AP_6^T\right) = (2 + 0 + 1) + \ldots. + (2 + 0 + 1) = 3 \times 6 = 18$

Downloaded From ToraLabs

8. Let

$$f(x) = \frac{\sin \pi x}{x^2}, x > 0.$$

Let $x_1 < x_2 < x_3 .... < x_n < .....$ be all points of local maximum of f
and $y_1 < y_2 < y_3 < ..... < y_n < .....$ be all the points of local minimum of f
Then which of the following options is/are correct ?

(1) $|x_n - y_n| > 1$ for every n
(2) $x_1 < y_1$
(3) $x_{n+1} - x_n > 2$ for every n
(4) $x_n \in \left(2n, 2n + \frac{1}{2}\right)$ for every n

माना

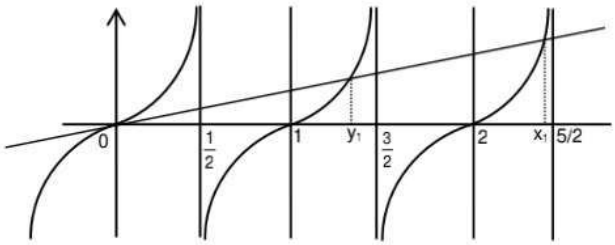
$$f(x) = \frac{\sin \pi x}{x^2}, x > 0.$$

माना कि f के सभी स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु $x_1 < x_2 < x_3 .... < x_n < .....$ है और f के सभी स्थानीय न्यूनतम बिन्दु $y_1 < y_2 < y_3 < ..... < y_n < .....$ हैं। तब निम्न में से कौन सा(से) विकल्प सही है (हैं)–

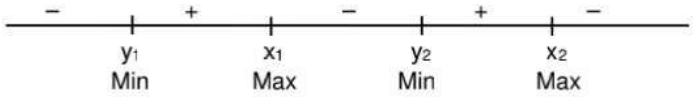
(1) $|x_n - y_n| > 1$, प्रत्येक n के लिए
(2) $x_1 < y_1$
(3) $x_{n+1} - x_n > 2$, प्रत्येक n के लिए
(4) $x_n \in \left(2n, 2n + \frac{1}{2}\right)$, प्रत्येक n के लिए

Ans. **(1,3,4)**

Sol. $f'(x) = \dfrac{2x\cos \pi x\left(\frac{\pi x}{2} - \tan \pi x\right)}{x^4}$



For f'(x)



Downloaded From ToraLabs

SECTION 2 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks : **+3** If ONLY the correct numerical value is entered.

Zero Marks : **0** In all other cases.

खंड 2 (अधिकतम अंक: 18)

- इस खंड में **छः (06)** प्रश्न है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक संख्यात्मक मान **(NUMERICAL VALUE)** हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर के सही संख्यात्मक मान को माउज़ (mouse) और ऑन–स्क्रीन (on–screen) वर्चुअल न्युमेरिक कीपेड (virtual numeric keypad) के प्रयोग से उत्तर के लिए चिन्हित स्थान पर दर्ज करें। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो संख्यात्मक मान को दशमलव के दो स्थानों तक **ट्रंकेट/राउंड ऑफ (truncate/round-off)** करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :–

पूर्ण अंक : **+3** यदि दर्ज किया गया संख्यात्मक मान **(Numerical value)** ही सही उत्तर है।

शून्य अंक : **0** अन्य सभी परिस्थितियों में।

1. Suppose

$$\det\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n} k & \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k k^2 \\ \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k k & \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k 3^k \end{bmatrix} = 0$$

holds for some positive integer n. Then $\sum_{k=0}^{n} \frac{{}^nC_k}{k+1}$ equals.

मानाकि

किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए

$$\det\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n} k & \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k k^2 \\ \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k k & \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k 3^k \end{bmatrix} = 0 \text{, तो } \sum_{k=0}^{n} \frac{{}^nC_k}{k+1} \text{ का मान है–}$$

Ans. **(6.20)**

Sol. $$\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} \\ n2^{n-1} & 4^n \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2}{4} - \frac{n^2(n-1)}{8} = 0$$

$n = 0$ or $4(n + 1) - 2n - n(n - 1) = 0$

Downloaded From ToraLabs

$4n + 4 - 2n - n^2 + n = 0$

$3n - n^2 + 4 = 0 \Rightarrow \quad n^2 - 3n - 4 = 0$

$(n-4)(n+1) = 0$

$n = 4$

$$\sum_{r=0}^{4} \frac{{}^4C_r}{r+1} = \sum_{r=0}^{4} \frac{{}^5C_{r+1}}{5} = \frac{2^5-1}{5} = \frac{31}{5} = 6.20$$

2. The value of

$$\sec^{-1}\left(\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{10}\sec\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)\sec\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)\right) \text{ in the interval } \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \text{ equals}$$

अन्तराल $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ में $\sec^{-1}\left(\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{10}\sec\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)\sec\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)\right)$ का मान है–

Ans. **(0.00)**

Sol. Evaluate $\sec^{-1}\left[\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{10}\sec\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{k\pi}{12}\right)\sec\left(\frac{7\pi}{12}+(k+1)\frac{\pi}{2}\right)\right]$

Given exp $= \sec^{-1}\left[-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{10}\sec\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{k\pi}{12}\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)\right]$

$$= \sec^{-1}\left[-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{10}\frac{2}{\sin\left(\frac{7\pi}{6}+k\pi\right)}\right] = \sec^{-1}\left[-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{10}\frac{1}{(-1)^{k+1}\sin\frac{\pi}{6}}\right] = \sec^{-1}\left(-\sum_{k=0}^{10}\frac{1}{(-1)^{k+1}}\right) = \sec^{-1}(1) = 0$$

3. Let $\vec{a} = 2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ be two vectors. Consider a vector $\vec{c} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, $\alpha, \beta \in R$. If the projection of $\vec{c}$ on the vector $(\vec{a}+\vec{b})$ is $3\sqrt{2}$, then the minimum value of $(\vec{c}-(\vec{a}\times\vec{b})).\vec{c}$ equal to

यदि $\vec{a} = 2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ दो सदिश दिये हुए है माना एक सदिश $\vec{c}$ इस प्रकार है कि $\vec{c} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, $\alpha, \beta \in R$. यदि सदिश $\vec{c}$ का सदिश $(\vec{a}+\vec{b})$ पर प्रक्षेप $3\sqrt{2}$ है तो $(\vec{c}-(\vec{a}\times\vec{b})).\vec{c}$ का न्यूनतम मान होगा–

Ans. **(18.00)**

Sol. $\vec{c} = \alpha(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}) + \beta(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$

$\Rightarrow \quad \vec{c} = (2\alpha+\beta)\hat{i} + (\alpha+2\beta)\hat{j} + (\beta-\alpha)\hat{k}$

$\frac{\vec{c}.(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \quad 9(\alpha+\beta) = 18 \quad \Rightarrow \quad \alpha+\beta = 2$

$(\vec{c}-\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} = (\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-\vec{a}\times\vec{b}) . (\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}) = 6\alpha^2 + 6\alpha\beta + 6\beta^2 = 6[\alpha^2 + \alpha(2-\alpha) + (2-\alpha)^2]$

$= 6(\alpha^2 - 2\alpha + 4) =$ min value 18

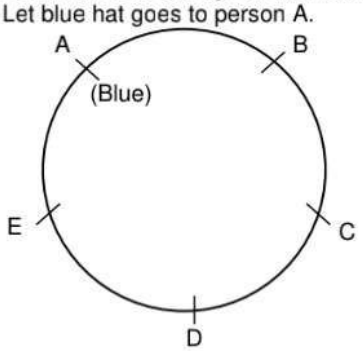
4. Five persons A,B,C,D and E are seated in a circular arrangement. If each of them is given a hat of one of the three colours red, blue and green, then the numbers of ways of distributing the hats such that the person seated in adjacent seats get different coloured hats is

पाँच व्यक्तियों A,B,C,D तथा E को वृत्तीय क्रम मे बैठाया जाता है। यदि प्रत्येक व्यक्ति को तीन रंगो (लाल, नीला तथा हरा) में से एक रंग की टोपी दी जाती है, तो टोपियों को कितने तरीकों से बाँटा जा सकता है जबकि पास–पास बैठे व्यक्तियों के पास भिन्न–भिन्न रंग की टोपियाँ हो–

Ans. **(30.00)**

Downloaded From ToraLabs

Sol. Maximum number of hats used of same colour are 2. They can not be 3 otherwise atleast 2 hats of same colour are consecutive.
Now, Let hats used are R, R, G, G, B
(Which can be selected in 3 ways. It can be RGGBB or RRGBB also)
Now, numbers of ways of distributing blue hat (single one) in 5 person equal to 5
Let blue hat goes to person A.



Now either position B & D are filled by green hats and C & E are filled by Reds hats
Or B & D are filled by Red hats and C & E are filled by Green hats
$\Rightarrow$ 2 ways are possible
Hence total number of ways = 3 × 5 × 2 = 30 ways

5. The value of the integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{3\sqrt{\cos\theta}}{(\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta})^5}\,d\theta$$

equals

समाकलन $\int_0^{\pi/2} \frac{3\sqrt{\cos\theta}}{(\sqrt{\sin\theta}+\sqrt{\cos\theta})^5}\,d\theta$ का मान है–

Ans. **(0.50)**

Sol. $I = 3\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos\theta}\,d\theta}{\left(\sqrt{\sin\theta}+\sqrt{\cos\theta}\right)^5} = 3\int_0^{\pi/2} \frac{3\sqrt{\sin\theta}\,d\theta}{\left(\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta}\right)^5}$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{3\sqrt{\cos\theta}\,d\theta}{(\sqrt{\sin\theta}+\sqrt{\cos\theta})^5} = 3\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin\theta}\,d\theta}{(\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta})^5} \Rightarrow 2I = 3\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(\sqrt{\sin\theta}+\sqrt{\cos\theta})^4}$

$\frac{2I}{3} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\theta d\theta}{(\sqrt{\tan\theta}+1)^4}$

let $\tan\theta = t^2 \Rightarrow \sec^2\theta d\theta = 2tdt$

$\Rightarrow \frac{2I}{3} = \int_0^{\infty} \frac{2tdt}{(t+1)^4} \Rightarrow \frac{I}{3} = \int_0^{\infty}\left[\frac{1}{(t+1)^3} - \frac{1}{(t+1)^4}\right]dt$

$\Rightarrow I = \left|\frac{-3}{2(t+1)^2} + \frac{1}{(t+1)^3}\right|_0^{\infty} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

Downloaded From ToraLabs

6. Let |X| denote the number of elements in a set X. Let S = {1,2,3,4,5,6} be a sample space, where each element is equally likely to occur. If A and B are independent events associated with S, then the number of ordered pairs (A,B) such that $1 \le |B| < |A|$ equals

एक समुच्चय S इस प्रकार है कि S = {1,2,3,4,5,6}. |X| किसी समुच्चय X मे अवयवों की सख्या को दर्शाता है। समुच्चय S के उपसमुच्चय A तथा B इस प्रकार चुने जाते है कि S का प्रत्येक अवयव समान प्रायिकता से चुना जा सकता है तथा यदि A और B, S के साथ स्वतंत्र घटनाऐं है, तब $1 \le |B| < |A|$ तो क्रमित युग्म (A, B) की संख्या होगी–

Ans. **(422)**

Sol. **A and B are independent events**

$P(A)\,P(B) = P(A \cap B) \Rightarrow \frac{a}{6} \times \frac{b}{6} = \frac{c}{6} \Rightarrow ab = 6c$

$|A| = a,\ |B| = b,\ |A \cap B| = c$

(a, b, c) =(3, 2, 1)	so	${}^6C_1\,{}^5C_2\,{}^3C_1 = 180$
=(4, 3, 2)	so	${}^6C_2\,{}^4C_2\,{}^2C_1 = 180$
=(6, 1, 1)	so	${}^6C_1 = 6$
=(6, 2, 2)	so	${}^6C_2 = 15$
=(6, 3, 3)	so	${}^6C_3 = 20$
=(6, 4, 4)	so	${}^6C_4 = 15$
=(6, 5, 5)	so	${}^6C_5 = 6$

Total = 360 + 62 = 422

SECTION 3 (Maximum Marks : 12)

- This section contains **TWO (02)** List-Match sets.
- Each List-Match set has **TWO (02)** Multiple Choice Questions.
- Each List-Match set has two lists : **List-I** and **List-II**.
- **List-I** has **Four** entries (I),(II), (III) and (IV) **List-II** has **Six** entries (P),(Q), (R), (S), (T) and (U).
- **FOUR** options are given in each Multiple Choice Question based on **List-I** and **List-II** and **ONLY ONE** of these four options satisfies the condition asked in the Multiple Choice Question.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks : **+3** If ONLY the option corresponding to the correct combination is chosen.
Zero Marks : **0** If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks : **–1** In all other cases.

खंड 3 (अधिकतम अंकः 12)

- इस खंड में **दो (02)** सूची–सुमेलन (List-Match) सेट्स (sets) है।
- प्रत्येक सूची–सुमेलन सेट (set) में **दो (02)** एकाधिक विकल्प प्रश्न (Multiple Choice Question) है।
- प्रत्येक सूची–सुमेलन सेट में दो सूचियाँ है : **सूची-I** और **सूची-II**
- **सूची-I** में चार प्रविष्टियाँ (I),(II),(III) और (IV) है एवं **सूची-II** में **छः** प्रविष्टियाँ (P),(Q),(R),(S),(T) और (U) है।
- प्रत्येक एकाधिक विकल्प प्रश्न में सूची-I और सूची-II पर आधारित चार विकल्पों में से केवल एक विकल्प ही एकाधित विकल्प प्रश्न की शर्त को पूरा करता है।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नयोजना के अनुसार होगाः–

पूर्ण अंक : **+3** यदि सिर्फ सही विकल्प ही चुना गया हैं।
शून्य अंक : **0** यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है)।
ऋण अंक : **–1** अन्य सभी परिस्थितियों में

Downloaded From ToraLabs

MATCH TYPE

Let $f(x) = \sin(\pi\cos x)$ and $g(x) = \cos(2\pi \sin x)$ be two functions defined for $x > 0$. Define the following sets whose elements are written in increasing order

$X = \{x : f(x) = 0\}$, $Y = \{x : f'(x) = 0\}$

$Z = \{x : g(x) = 0\}$, $W = \{x : g'(x) = 0\}$

List-I contains sets X,Y,Z and W List-II contains some information regarding these set.

List - I		**List - II**
(I)	X	(P) $\supseteq \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 4\pi, 7\pi\right\}$
(II)	Y	(Q) an arithmetic progression
(III)	Z	(R) NOT an arithmetic progression
(IV)	W	(S) $\supseteq \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right\}$
		(T) $\supseteq \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$
		(U) $\supseteq \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

अनुच्छेद में दी गई जानकारी के आधार पर सूचियों का उचित मिलान करके प्रश्न का उत्तर दें।

माना कि $f(x) = \sin(\pi\cos x)$ and $g(x) = \cos(2\pi \sin x)$ दो फलन (function) हैं जो $x > 0$. में परिभाषित हैं। निम्नलिखित समुच्चय (sets) जिनके तत्वों को बढ़ते हुए क्रम में लिखा गया है, इस प्रकार परिभाषित हैं।

$X = \{x : f(x) = 0\}$, $Y = \{x : f'(x) = 0\}$

$Z = \{x : g(x) = 0\}$, $W = \{x : g'(x) = 0\}$

सूची– I(List-I) में I X, Y, Z और W समुच्चय हैं। सूची I(List-II) में इन समुच्चयों के बारे में कुछ सूचनाएं है।

List - I		**List - II**
(I)	X	(P) $\supseteq \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 4\pi, 7\pi\right\}$
(II)	Y	(Q) समान्तर श्रेणी (an arithmetic progression)
(III)	Z	(R) समान्तर श्रेणी नहीं है NOT an arithmetic progression
(IV)	W	(S) $\supseteq \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right\}$
		(T) $\supseteq \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$
		(U) $\supseteq \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

Downloaded From ToraLabs

1. Which of the following is the only correct combination ?
निम्न में से कौन सा एक मात्र संयोजन सही हैं ?
(1) IV – (Q), (T)
(2) III – (R), (U)
(3) III – (P), (Q), (U)
(4) IV – (P), (R), (S)

Ans. **(4)**

2. Which is the following is only CORRECT combination ?
निम्न में से कौनसा मिलान सही है–
(1) I – (Q), (U)
(2) I – (P), (R)
(3) II – (Q), (T)
(4) II – (R), (S)

Ans. **(3)**

Sol. **(1 to 2)**

$f(x) = 0 \Rightarrow \sin(\pi \cos x) = 0$

$\Rightarrow \pi \cos x = n\pi \quad \Rightarrow \cos x = n$

$\Rightarrow \cos x = -1, 0, 1 \qquad \Rightarrow X = \{n\pi, (2n+1)\frac{\pi}{2}\} = \{n\frac{\pi}{2}, n \in I\}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos(\pi \cos x)(-\pi \sin x) = 0$

$\Rightarrow \pi \cos x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ or $x = n\pi$

$\Rightarrow \cos x = n + \frac{1}{2}$ or $x = n\pi$

$\Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2}$ or $x = n\pi$

$\Rightarrow Y = \left\{2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n\pi, n \in I\right\}$

$= \left\{\ldots\ldots -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \ldots\ldots\right\}$ which is an arithmetic progression

$g(x) = 0 \qquad \Rightarrow \cos(2\pi \sin x) = 0 \qquad \Rightarrow 2\pi \sin x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin x = \frac{2n+1}{4} = \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}$

$\Rightarrow Z = \left\{n\pi \pm \sin^{-1}\frac{1}{4}, n\pi \pm \sin^{-1}\frac{3}{4}, n \in I\right\}$

$g'(x) = 0 \qquad \Rightarrow -\sin(2\pi \sin x)(2\pi \cos x) = 0$

$\Rightarrow 2\pi \sin x = n\pi$ or $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin x = \frac{n}{2} = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ or $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow W = \left\{n\pi, (2n+1)\frac{\pi}{2}, n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in I\right\}$

Downloaded From ToraLabs

MATCH TYPE

Let the circle C_1: $x^2 + y^2 = 9$ and C_2: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ intersect at the points X and Y. Suppose that another circle C_3: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ satisfies the following conditions.
(i) centre of C_3 is collinear with the centres of C_1 & C_2,
(ii) C_1 & C_2 both lie inside C_3 and
(iii) C_3 touches C_1 at M and C_2 at N
Let the line through X and Y intersect C_3 at Z and W and let a common tangent of C_1 & C_3 be a tangent to the parabola $x^2 = 8\alpha y$
There are some expressions given in the list-I, whose values are given in list-II below :

	List-I		List-II
(I)	$2h + k$	(P)	6
(II)	$\frac{\text{length of ZW}}{\text{length of XY}}$	(Q)	$\sqrt{6}$
(III)	$\frac{\text{Area of } \Delta MZN}{\text{Area of } \Delta ZMW}$	(R)	$\frac{5}{4}$
(IV)	α	(S)	$\frac{21}{5}$
		(T)	$2\sqrt{6}$
		(U)	$\frac{10}{3}$

स्तम्भ मिलान कीजिए–

माना वृत्त C_1: $x^2 + y^2 = 9$ तथा वृत्त C_2 : $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ बिन्दु X तथा Y पर प्रतिच्छेद करते है। माना एक वृत्त C_3 : $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ निम्न प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करता है–
(i) C_3 का केन्द्र, C_1 और C_2 के केन्द्रों के साथ संरेख है।
(ii) C_1 तथा C_2 दोनों, C_3 के अन्दर उपस्थित है।
(iii) C_3 , C_1 को बिन्दु M तथा C_2 को बिन्दु N पर स्पर्श करता है।
यदि X तथा Y से गुजरने वाली रेखा C_3 को Z तथा W पर प्रतिच्छेद करती है और C_1 तथा C_3 की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा परवलय $x^2 = 8\alpha y$ की भी स्पर्श रेखा है।

	सूची-I		सूची-II
(I)	$2h + k$	(P)	6
(II)	$\frac{\text{ZW की लम्बाई}}{\text{XY की लम्बाई}}$	(Q)	$\sqrt{6}$
(III)	$\frac{\text{MZN का क्षेत्रफल}}{\text{ZMW का क्षेत्रफल}}$	(R)	$\frac{5}{4}$
(IV)	α	(S)	$\frac{21}{5}$
		(T)	$2\sqrt{6}$
		(U)	$\frac{10}{3}$

3. Which of the following is the only correct combination?
निम्न में से कौनसा मिलान सही है–
(1) (II) - (T)
(2) (I) - (S)
(3) (II) - (Q)
(4) (I) - (U)

Ans. **(3)**

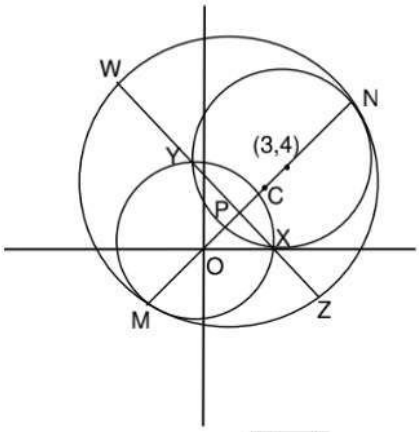
Downloaded From ToraLabs

4. Which of the following is the only Incorrect combination?
निम्न में से कौनसा मिलान गलत है–

(1) (IV) - (S)
(2) (I) - (P)
(3) (III) - (R)
(4) (IV) - (U)

Ans. **(1)**

Sol. **3 to 4**



(I) $2r = MN = 3 + \sqrt{3^2+4^2} + 4 = 12 \quad \Rightarrow \quad r = 6$

centre C of circle C_3 lies on $y = \frac{4}{3}x$

Let $C\left(h, \frac{4}{3}h\right)$

$OC = MC - OM = \frac{12}{2} - 3 = 3$

$\therefore \quad \sqrt{h^2 + \frac{16}{9}h^2} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{5h}{3} = 3 \Rightarrow \quad h = \frac{9}{5}$

$k = \frac{4}{3}h = \frac{12}{5}$

$\therefore \quad 2h + k = \frac{18}{5} + \frac{12}{5} = 6$

(II) Equation of line ZW

$C_1 = C_2$

$\Rightarrow \quad 3x + 4y = 9$

Distance of ZW from (0, 0)

$$\frac{|-9|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{9}{5}$$

Length of XY = $2\sqrt{3^2 - \left(\frac{9}{5}\right)^2} = \frac{24}{5}$

Distance of ZW from C

$$\frac{\left|\frac{3\times 9}{5} + 4\times\frac{12}{5} - 9\right|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{6}{5}$$

Downloaded From ToraLabs

Length of ZW = $2\sqrt{6^2 - \frac{6^2}{5^2}} = \frac{24\sqrt{6}}{5}$

$\therefore \quad \frac{\text{lengthof ZW}}{\text{lengthof XY}} = \sqrt{6}$

(III) Area of $\Delta MZN = \frac{1}{2} \cdot NM\left(\frac{1}{2}ZW\right) = \frac{72\sqrt{6}}{5}$

Area of $\Delta ZMW = \frac{1}{2} \cdot ZW\,(OM + OP) = \frac{1}{2}\,\frac{24\sqrt{6}}{5} \cdot \left(3 + \frac{9}{5}\right) = \frac{288\sqrt{6}}{25}$

$\therefore \quad \frac{\text{Area of } \Delta MZN}{\text{Area of } \Delta ZMW} = \frac{5}{4}$

(IV) Slop of tangent to C_1 at M = $\frac{-1}{4/3} = -\frac{3}{4}$

$\therefore$ Equation of tangent $y = mx - 3\sqrt{1+m^2}$

$y = -\frac{3}{4}x - 3\sqrt{1+\frac{9}{16}}$

$y = \frac{-3x}{4} - \frac{15}{4} \Rightarrow \quad x = -\frac{4y}{3} - 5 \quad ....(i)$

tangent to $x^2 = 4(2\alpha)y$ is

$x = m'y + \frac{2\alpha}{m'} \quad ....(ii)$

Compare (i) and (ii)

$m' = -\frac{4}{3}$ and $\frac{2\alpha}{m'} = -5 \Rightarrow \quad \alpha = \frac{10}{3}$

Downloaded From ToraLabs

JEE (ADVANCED) 2019

DATE: 27-05-2019

Questions & Solutions

PAPER – 2 **SUBJECT:PHYSICS**

MAX. MARKS: 186 **TIME: 3 HRS.**

PAPER-2 : INSTRUCTIONS TO CANDIDATES

- **Question paper-2 has three (03) parts : Physics, Chemistry and Mathematics.**
- Each part has a total of **eighteen (18) questions** divided into **three (03) sections (Section-1, Section-2 and Section-3).**
- Total number of questions in **Question Paper-2** are **: Fifty Four (54)** and Maximum Marks are **One Hundred Eighty Six (186).**

Type of Questions and Marking Schemes

SECTION 1 (Maximum Marks : 32)

- This section contains **EIGHT (08)** questions.
- Each question has **FOUR** options **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is(are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme.

Full Marks :	**+4** If only (all) the correct option(s) is (are) chosen.
Partial Marks :	**+3** If all the four options are correct but ONLY three options are chosen.
Partial Marks :	**+2** If three or more options are correct but ONLY two options are chosen and both of which are correct.
Partial Marks :	**+1** If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option.
Zero Marks :	0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks :	**–1** In all other cases.

SECTION 2 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks :	**+3** If ONLY the correct numerical value is entered.
Zero Marks :	**0** In all other cases.

Downloaded From ToraLabs

SECTION 3 (Maximum Marks : 12)

- This section contains **TWO (02)** List-Match sets.
- Each List-Match set has **TWO (02)** Multiple Choice Questions.
- Each List-Match set has two lists : **List-I** and **List-II**.
- **List-I** has **Four** entries (I),(II), (III) and (IV) **List-II** has **Six** entries (P),(Q), (R), (S), (T) and (U).
- **FOUR** options are given in each Multiple Choice Question based on **List-I** and **List-II** and **ONLY ONE** of these four options satisfies the condition asked in the Multiple Choice Question.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks :	**+3**	If ONLY the option corresponding to the correct combination is chosen.
Zero Marks :	**0**	If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks :	**–1**	In all other cases.

Answering Questions :

- To select the option(s), use the mouse to click on the corresponding button(s) of the option(s).
- To deselect the chosen option(s) for the questions of **SECTION-1** click on the button(s) of the chosen option(s) again or click on the **Clear Response** button to clear all the chosen options.
- To deselect the chosen option for the questions of **SECTION-3**, click on the button of the chosen option again or click on the **Clear Response** button to clear the chosen option.
- To change the option(s) of a previously answered question of **SECTION-1** and **SECTION-3** first deselect as given above and then select the new option(s)
- To answer questions of **SECTION-2** use the mouse to click on numbers (and/or symbols) on the on-screen virtual numeric keypad to enter the numerical value in the space provided for answer.
- To change the answer of a question of **SECTION-2** first click on the **Clear Response** button to clear the correct answer and then enter the new numerical value.
- To mark a question **ONLY** for review (i.e. without answering it). Click on the **Mark** for **Review & next** button.
- To mark is question for review (after answering it), click on **Mark for Review & Next** button - the answered question which is also marked for review will be evaluated.
- To save the answer click on the **Save & Next** button, the answered question will be evaluated.

Downloaded From ToraLabs

PART-I : PHYSICS

SECTION 1 (Maximum Marks : 32)

- This section contains **EIGHT (08)** questions.
- Each question has **FOUR** options **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is(are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme.

Full Marks :	**+4** If only (all) the correct option(s) is (are) chosen.
Partial Marks :	**+3** If all the four options are correct but ONLY three options are chosen.
Partial Marks :	**+2** If three or more options are correct but ONLY two options are chosen and both of which are correct.
Partial Marks :	**+1** If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option.
Zero Marks :	0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks :	**–1** In all other cases.

खंड **1** (अधिकतम अंक: **32**)

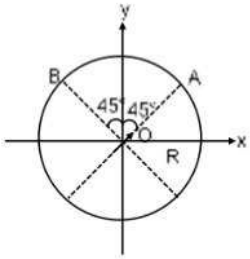
- इस खंड में आठ **(08)** प्रश्न है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही है(हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, दिए हुए विकल्पों में से सही उत्तर (उत्तरों) से संबधित विकल्प (विकल्पों) को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :

पूर्ण अंक	: **+4** यदि केवल (सारे) सही विकल्प (विकल्पों) को चुना गया है।
आंशिक अंक	: **+3** यदि चारों विकल्प सही हैं परन्तु केवल तीन विकल्पों को चुना गया है।
आंशिक अंक	: **+2** यदि तीन या तीन से अधिक विकल्प सही है परन्तु केवल दो विकल्पों को चुना गया है और दोंनो चुने हुए विकल्प सही विकल्प हैं।
आंशिक अंक	: **+1** यदि दो या दो से अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल एक विकल्प को चुना गया है और चुना हुआ विकल्प सही विकल्प है।
शून्य अंक	: **0** यदि किसी भी विकल्प को नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है)।
ऋण अंक	: **–1** अन्य सभी परिस्थितियों में।

Downloaded From ToraLabs

1. An electric dipole with dipole moment $\frac{p_0}{\sqrt{2}}(\hat{i}+\hat{j})$ is held fixed at the origin O in the presence of an uniform electric field of magnitude E_0. If the potential is constant on a circle of radius R centered at the origin as shown in figure, then the correct statement(s) is/are: ($\in_0$ is permittivity of free space. R>>dipole size)

द्विध्रुव आघूर्ण (dipole moment) $\frac{p_0}{\sqrt{2}}(\hat{i}+\hat{j})$ के एक विद्युत द्विध्रुव (electric field) को मूलबिन्दु O पर परिमाण E_0 के एकसमान विद्युत क्षेत्र में दृढ़ रखते हैं। यदि, चित्रानुसार, मूलबिन्दु O पर केन्द्रित एक R त्रिज्या वाले वृत्त पर विभव नियत रहता है तब निम्नलिखित कथनों में से कौन सा(से) सही हैं ? (मुक्त आकाश का परावैद्युतांक $\in_0$ है तथा R>> द्विध्रुव आकार)



(1) The magnitude of total electric field on any two points of the circle will be same.

(2) Total electric field at point A is $\vec{E}_A = \sqrt{2}E_0(\hat{i}+\hat{j})$

(3) $R = \left(\frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 E_0}\right)^{1/3}$

(4) Total electric field at point B is $\vec{E}_B = 0$

(1) दिये गये वृत्त पर किन्हीं दो बिन्दुओं पर कुल विद्युत क्षेत्र का परिमाण एकसमान है।

(2) बिन्दु A पर कुल विद्युत क्षेत्र $\vec{E}_A = \sqrt{2}E_0(\hat{i}+\hat{j})$

(3) $R = \left(\frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 E_0}\right)^{1/3}$

(4) बिन्दु B पर कुल विद्युत क्षेत्र $\vec{E}_B = 0$ है।

Ans. **(3,4)**

Sol. R ≫ dipole size

circle is equipotential

So, E_{net} Should be ⊥ to surface so $\frac{kp_0}{r^3} = E_0 \Rightarrow r = \left(\frac{kp_0}{E_0}\right)^{1/3}$

At point B net electric field will be zero.

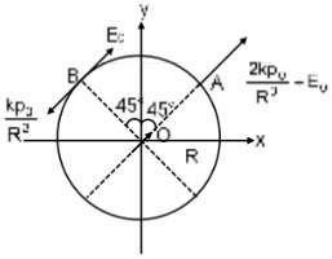
$E_B = 0$

$(E_A)_{Net} = \frac{2kp_0}{r^3} + E_0 = 3E_0$

Downloaded From ToraLabs

Electric field at point A $\vec{E}_A = \frac{3}{\sqrt{2}} E_0[\hat{i} + \hat{j}]$

$(E_B)_{Net} = 0$



2. A thin and uniform rod of mass M and length L is held vertical on a floor with large friction. The rod is released from rest so that it falls by rotating about its contact-point with the floor without slipping. Which of the following statement(s) is/are correct, when the rod makes an angle 60° with vertical?
[g is the acceleration due to gravity]

लम्बाई L एवं द्रव्यमान M की एकसमान पतली छड़ को आधिक घर्षण वाले तल पर लम्बवत् रखते हैं। इसको स्थिर अवस्था में छोड़ने पर यह तल के संपर्क बिन्दु के परितः घूमते हुए बिना फिसले गिरती है। जब यह छड़ ऊर्ध्वाधर से 60° कोण बनाती हे तब निमनलिखित कथनों में से कौन सा(से) सही है(हैं) [g गुरूत्वीय त्वरण है]

(1) The angular acceleration of the rod will be $\frac{2g}{L}$

(2) The normal reaction force from the floor on the rod will be $\frac{Mg}{16}$

(3) The radial acceleration of the rod's center of mass will be $\frac{3g}{4}$

(4) The angular speed of the rod will be $\sqrt{\frac{3g}{2L}}$

(1) छड़ का कोणीय त्वरण $\frac{2g}{L}$ होगा।

(2) तल के लम्बवत् छड़ पर प्रतिक्रिया (normal reaction) बल $\frac{Mg}{16}$ होगा।

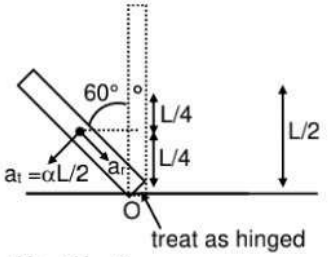
(3) छड़ के द्रव्यमान केन्द्र (center of mass) का त्रिज्य त्वरण (radial acceleration) $\frac{3g}{4}$ होगा।

(4) छड की कोणीय गति $\sqrt{\frac{3g}{2L}}$ होगी

Ans. **(2,3,4)**

Downloaded From ToraLabs

Sol.



$\Delta K + \Delta U = 0$

$\frac{1}{2} I_0 \omega^2 = -\Delta U$

$\frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\omega^2 = -\left(-mg\frac{L}{4}\right)$

$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$

$\Rightarrow \quad a_{radial} = \omega^2 \frac{L}{2} = \frac{3g}{2L}\frac{L}{2} = \frac{3g}{4} \quad \Rightarrow \quad \tau = I_0\alpha$

$\alpha = \frac{mg\frac{L}{2}\sin 60^\circ}{m\frac{L^2}{3}} = \frac{3\sqrt{3}g}{4L} \quad \Rightarrow \quad a_v = \left(\alpha\frac{L}{2}\right)\sin 60^\circ + \omega^2\frac{L}{2}\cos 60^\circ$

$\Rightarrow \quad a_v = \frac{3\sqrt{3}g}{8}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3g}{8} \quad \Rightarrow \quad a_v = \frac{9g}{16} + \frac{6g}{16}$

$\Rightarrow \quad mg - N = ma_v \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{16}$

3. A free hydrogen atom after absorbing a photon of wavelength λ_a gets excited from the state n = 1 to the state n = 4. Immediately after that the electron jumps to n = m state by emitting a photon of wavelength λ_e. Let the change in momentum of atom due to the absorption and the emission are Δp_a and Δp_e respectively. If $\lambda_a/\lambda_e = 1/5$, which of the option(s) is/are correct?
[Use hc = 1242 eV nm ; 1 nm = 10^{-9} m, h and c are Plank's constant and speed of light, respectively]

एक स्वतन्त्र हाइड्रोजन परमाणु λ_a तरंगदेर्ध्य के एक फोटान को अवशोषित करके n = 1 अवस्था से n = 4 अवस्था में चला जाता है। इसके तुरंत पश्चात् परमाणु λ_e तरंगदैर्ध्य का फोटानउत्सर्जनकरते हुए n = m अवस्था में आ जाता है। मान लीजिये कि अवशोषण तथा उत्सर्जन के दौरान परमाणु के संवेग में परिवर्तन क्रमशः Δp_a तथा Δp_e हैं। यदि $\lambda_a/\lambda_e = 1/5$ है, तब निम्नलिखित विकल्पों में कौन सा(से) ही हैं (हैं)?
[दिया है hc = 1242 eV nm ; 1 nm = 10^{-9} m, जहाँ h प्लांक नियतांक और c प्रकाश की गति है]

(1) The ratio of kinetic energy of the electron in the state n = m to the state n = 1 is 1/4
(2) m = 2
(3) $\Delta p_a/\Delta p_e = 1/2$
(4) $\lambda_e = 418$ nm

(1) इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जाओं का अवस्था n = m से अवस्था n = 1 में अनुपात ¼ है।
(2) m = 2
(3) $\Delta p_a/\Delta p_e = 1/2$
(4) $\lambda_e = 418$ nm

Ans. **(1,2)**

Downloaded From ToraLabs

Sol. $\frac{\lambda_a}{\lambda_e} = \frac{E_4 - E_m}{E_4 - E_1} = \frac{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{1}{5}$

on solving

हल करने पर

$m = 2$

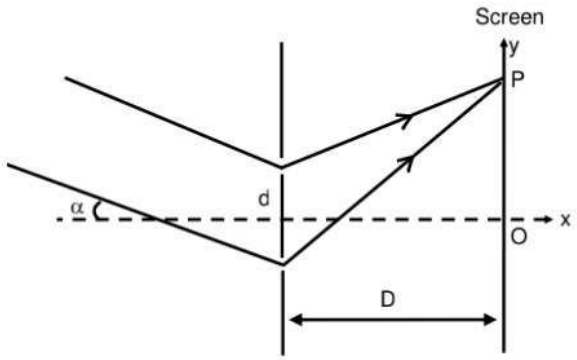
$\lambda_e = \frac{1242 \times 16}{13.6 \times 3} \approx 487$ nm

$\frac{K_2}{K_1} = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$ as kinetic energy is proportional to $\frac{1}{n^2}$

$\frac{K_2}{K_1} = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$ चूंकि गतिज ऊर्जा $\frac{1}{n^2}$ के समानुपाती है।

4. In a Young's double slit experiment, the slit separation d is 0.3 mm and the screen distance D is 1 m. A parallel beam of light of wavelength 600 nm is incident on the slits at angle α as shown in figure. On the screen, the point O is equidistant from the slits and distance PO is 11.0 mm. Which of the following statement(s) is/ are correct?

एक यंग के द्विझिर्री प्रयोग में झिर्रियों के बीच की दूरी d =0.3 mm तथा पर्दे की दूरी D = 1 m है। एक समांतर प्रकाश पुंज जिसका तरंगदैर्ध्य 600 nm है झिर्रियों पर α कोण से आपतित होता है जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। पर्दे पर बिन्दु O झिर्रियों से समान दूरी पर है तथा PO =11.0 mm है। निम्नलिखित कथनों में से कौन सा(से) सही है(हैं)?



(1) For $\alpha = 0$, there will be constructive interference at point P.

(2) For $\alpha = \frac{0.36}{\pi}$ degree, there will be destructive interference at point P.

(3) For $\alpha = \frac{0.36}{\pi}$ degree, there will be destructive interference at point O.

(4) Fringe spacing depends on α.

(1) $\alpha = 0$ के लिए बिन्दु P पर विनाशी व्यतिकरण होगा।

(2) $\alpha = \frac{0.36}{\pi}$ डिग्री के लिए बिन्दु P पर विनाशी व्यतिकरण होगा।

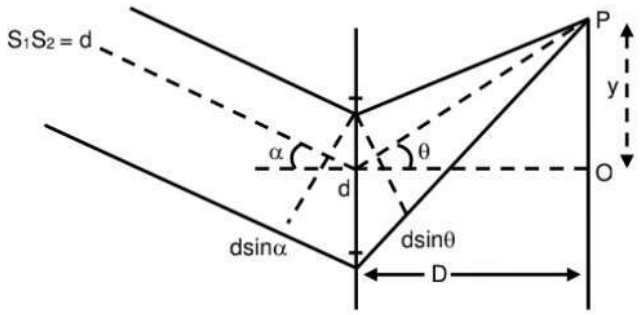
(3) $\alpha = \frac{0.36}{\pi}$ डिग्री के लिये बिन्दु O पर विनाशी (destructive) व्यतिकरण होगा।

(4) फ्रिंजों के बीच की दूरी α पर निर्भर करती है।

Ans. **(2)**

Downloaded From ToraLabs

Sol.



$\Delta x = d\sin\alpha + d\sin\theta$

θ, α : small angle $\sin\theta \simeq \tan\theta = \frac{y}{b}$

$\Delta x = d\alpha + \frac{dy}{D}$

(1) $\alpha = 0$ $\quad \therefore\ \Delta x = dy/D = \frac{0.3 \times 11}{1000} = 33 \times 10^{-4}$ mm

Δx in terms of $\lambda = \frac{33 \times 10^{-4}}{600 \times 10^{-6}}\lambda = \frac{11\lambda}{2}$

as $\Delta x = (2n-1)\frac{\lambda}{2}$

There will be destructive interference.

(2) $\Delta x = 0.3\text{mm} \times \frac{0.36}{\pi} \times \frac{\pi}{180} + \frac{0.3\text{mm} \times 11\text{mm}}{1000} = 39 \times 10^{-4}\text{mm}$

$39 \times 10^{-4} = (2n-1) \times \frac{600 \times 10^{-9} \times 10^{3}}{2}$

$n = 7$

There will be destructive interference

(3) $\Delta x = 3\text{mm} \times \frac{0.36}{\pi} \times \frac{\pi}{180} + 0 = 600\text{nm}$

$600 \text{ nm} = n\lambda$

$n = 1$

Constructive interference सम्पोषी यतिकरण

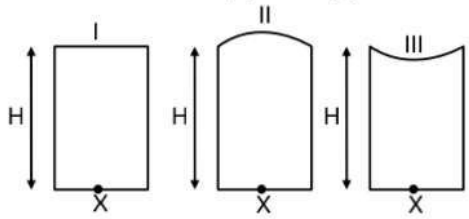
(4) Fringe width does not depend on α.

फ्रिन्ज चौड़ाई परिवर्तित नहीं होगी।

Downloaded From ToraLabs

5. Three glass cylinders of equal height H = 30 cm and same refractive index n = 1.5 are placed on a horizontal surface as shown in figure. Cylinder I has a flat top, cylinder II has a convex top and cylinder III has a concave top. The radii of curvature of the two curved tops are same (R = 3m). If H_1, H_2 and H_3 are the apparent depths of a point X on the bottom of the three cylinders, respectively, the correct statement(s) is/are:

चित्रानुसार तीन काँच के बेलन जिनकी ऊँचाई H = 30 cm तथा अपवर्तनांक n = 1.5 है को एक क्षैतिज सतह पर रखा गया है। बेलन I की ऊपरी समतल, बेलन II की ऊपरी सतह उत्तल तथा बेलन III की ऊपरी सतह अवतल है। दोनों वक्रीय सतहों की वक्रता त्रिज्या समान तथा R = 3m है। यदि तीनों बेलनों के नीचे उपस्थित एक बिन्दु X की आभासी गहराइयाँ H_1, H_2 तथा H_3 हैं तो निम्नलिखित कथनों में से कौनसा(से) सही है (हैं) ?

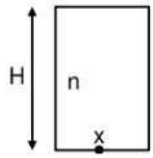


(1) $H_2 > H_1$ (2) $H_3 > H_1$

(3) $0.8\text{ cm} < (H_2 - H_1) < 0.9\text{ cm}$ (4) $H_2 > H_3$

Ans. **(1,4)**

Sol. **Case-I :**

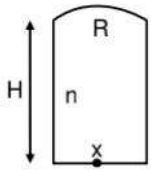


H = 30 cm

n = 3/2

$H_1 = H/n \Rightarrow \frac{30\times 2}{3} = 20\text{ cm}$

Case-II :



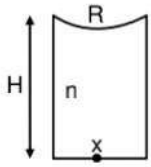
R = 300 cm

$\frac{n_2}{v} - \frac{n_1}{u} = \frac{n_2 - n_1}{R}$

$\frac{1}{-H_2} - \frac{3}{-2\times 30} = \frac{1-\frac{3}{2}}{-300}$

$H_2 = \frac{600}{29} = 20.684\text{cm}$

Case-III :



$\frac{n_2}{v} - \frac{n_1}{u} = \frac{n_2 - n_1}{R}$; $\frac{1}{-H_3} - \frac{3}{-2\times 30} = \frac{1-\frac{3}{2}}{300}$

; $H_3 = \frac{600}{31} = 19.354\text{cm}$

Downloaded From ToraLabs

6. A mixture of ideal gas containing 5 moles of monatomic gas and 1 mole of rigid diatomic gas is initially at pressure P_0, volume V_0 and temperature T_0. If the gas mixture is adiabatically compressed to a volume $V_0/4$, then the correct statement(s) is/are,

(Given $2^{1.2} = 2.3$; $2^{3.2} = 9.2$; R is gas constant)

5 मोल (mole) एकपरमाणुक तथा 1 मोल दृढ़ द्विपरमाणुक आदर्श गैस के मिश्रण का आरम्भ में दाब P_0, आयतन V_0 और तापमान T_0 है। यदि गैस के मिश्रण को रूद्धोष्म (adiabatic) प्रक्रम से इतना संपीडित किया जाता है कि आयतन $V_0/4$ हो जाए तब निम्नलिखित कथनों में से कौन सा(से) सही है(हैं) (दिया है $2^{1.2} = 2.3$; $2^{3.2} = 9.2$; R गैस नियतांक है)

(1) The final pressure of the gas mixture after compression is in between $9P_0$ and $10P_0$.

(2) The average kinetic energy of the gas mixture after compression is in between $18RT_0$ and $19RT_0$

(3) Adiabatic constant of the gas mixture is 1.6

(4) The work $|W|$ done during the process is $13RT_0$

(1) संपीडन के पश्चात् अंतिम दाब $9P_0$ तथा $10P_0$ के बीच है।

(2) संपीडन के बाद गैस की औसत गतिज ऊर्जा का मान $18RT_0$ और $19RT_0$ के बीच है।

(3) गैस के मिश्रण का रूद्धोष्म नियतांक 1.6 है।

(4) प्रक्रम में किया गया कार्य $|W| = 13RT_0$ है।

Ans. **(1,3,4)**

Sol. $\gamma_{mix} = \dfrac{n_1C_{P1} + n_2C_{P2}}{n_1C_{V1} + n_2C_{V2}} = \dfrac{8}{5}$

$W = \dfrac{P_1V_1 - P_2V_2}{\gamma - 1}$

$P_0V_0^{8/5} = P_2\left(\dfrac{V_0}{4}\right)^{8/5}$

$P_2 = 9.2P_0$

$W = \dfrac{P_0V_0 - 9.2P_0\dfrac{V_0}{4}}{3/5} = -13RT_0$

$\therefore \quad |W| = 13RT_0$

(2) $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$

$T_2 = T_1(2)^{6/5} = 2.3T_0$

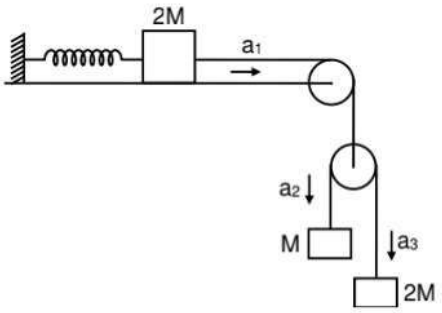
Average kinetic energy of gas mixture = $nC_{V_{mix}}T_2$

$= 23RT_0$

Downloaded From ToraLabs

7. A block of mass 2M is attached to a massless spring with spring–constant k. This block is connected to two other blocks of masses M and 2M using two massless pulleys and strings. The accelerations of the blocks are a_1, a_2 and a_3 as shown in the figure. The system is released from rest with the spring in its unstretched state. The maximum extension of the spring is x_0. Which of the following option(s) is/are correct ? [g is the acceleration due to gravity. Neglect friction]

2M द्रव्यमान का एक गुटका एक भारहीन स्प्रिंग, जिसका स्प्रिंग नियतांक k है, से सम्बद्ध है। यह गुटका दो अन्य M और 2M द्रव्यमान के गुटकों से दो भारहीन पुलियों एवं डोरियों द्वारा जुड़ा है। गुटकों का त्वरण a_1, a_2 और a_3 है जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। इस निकाय को स्थिर तथा स्प्रिंग की अवितान्य (unstretched) अवस्था से छोड़ा जाता है। स्प्रिंग का अधिकतम खिंचाव (extension) x_0 है। निम्नलिखित कथनों में से कौन सा(से) सही है(हैं) ?[g गुरूत्वीय त्वरण है। घर्षण उपेक्षणीय है]



(1) At an extension of $\frac{x_0}{4}$ of the spring. The magnitude of acceleration of the block connected to the spring is $\frac{3g}{10}$

(2) $x_0 = \frac{4Mg}{k}$

(3) When spring achieves an extension of $\frac{x_0}{2}$ for the first time, the speed of the block connected to the spring is $3g\sqrt{\frac{M}{5k}}$

(4) $a_2 - a_1 = a_1 - a_3$

(A) जब स्प्रिंग का खिंचाव $\frac{x_0}{4}$ है तब स्प्रिंग से जुड़े हुए गुटके के त्वरण का परिमाण $\frac{3g}{10}$ होता है।

(B) $x_0 = \frac{4Mg}{k}$

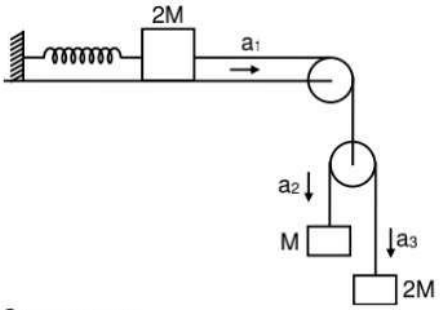
(C) जब स्प्रिंग का खिंचाव पहली बार $\frac{x_0}{2}$ होता है तब स्प्रिंग से जुड़े हुए गुटके की गति का मान $3g\sqrt{\frac{M}{5k}}$ होता है।

(D) $a_2 - a_1 = a_1 - a_3$

Ans. **(4)**

Downloaded From ToraLabs

Sol.

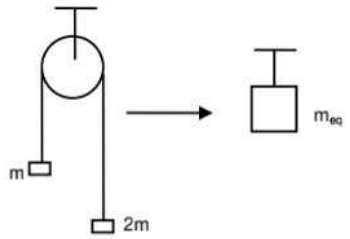


$2a_1 = a_2 + a_3$

$a_1 - a_3 = a_2 - a_1$

for other options use m equivalent

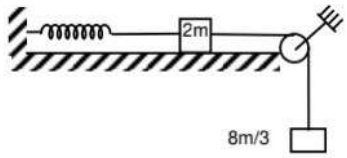
अन्य विकल्प के लिए तुल्य m का प्रयोग करते है।



$$\frac{T}{g'} = \frac{2(2m)(m)}{2m+m} = \frac{4m}{3}$$

$$\frac{2T}{g'} = \frac{8m}{3}$$

$$m_{eq.} = \frac{4m(2m)}{m+2m} = \frac{8m}{3}$$



$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{8mg}{3}x_0$$

$$x_0 = \frac{16mg}{3k}$$

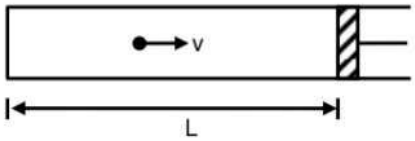
$$V_{\frac{x_0}{2}} = v_{max} = \frac{x_0}{2}\omega = \frac{x_0}{2}\sqrt{\frac{k}{2m+\frac{8m}{3}}} = \frac{x_0}{2}\sqrt{\frac{3k}{14m}} = g\sqrt{\frac{32}{21k}}$$

$$a_{\frac{x_0}{4}} = \frac{x_0}{4}\omega^2 = \frac{x_0}{4}\frac{3k}{14m} = \frac{3kx_0}{42m} = \frac{8g}{21}$$

Downloaded From ToraLabs

8. A small particle of mass m moving inside a heavy, hollow and straight tube along the tube axis undergoes elastic collision at two ends. The tube has no friction and it is closed at one end by a flat surface while the other end is fitted with a heavy movable flat piston as shown in figure. When the distance of the piston from closed end is $L = L_0$ the particle speed is $v = v_0$. The piston is moved inward at a very low speed V such that $V << \frac{dL}{L}v_0$. Where dL is the infinitesimal displacement of the piston. Which of the following statement(s) is/are correct ?

एक भारी, खोखली और सीधी नलिका के अक्ष की दिशा में एक m द्रव्यमान का छोटा कण गतिशील है और वह नलिका के दोनों सिरों से प्रत्यास्थी संघट्ट (elastic collision) करता है। नलिका की सतह पर कोई घर्षण नहीं है और इसका एक सिरा एक समतल सतह से बंद है जबकि दूसरे सिरे पर एक समतल सतह वाला भारी चलायमान पिस्टन है जैसा कि चित्र में दर्शाया है। जब पिस्टन बंद सिरे से $L = L_0$ की दूरी पर है तब कण की गति $v = v_0$ है।. पिस्टन को अंदर की ओर बहुत कम गति $V << \frac{dL}{L}v_0$ से चलाते हैं। जहाँ dL पिस्टन का अतिसूक्ष्म (infinitesimal) विस्थापन है। निम्नलिखित कथनों में से कौन सा (से) सही है(हैं)?



(1) After each collision with the piston, the particle speed increases by 2V.

(2) If the piston moves inward by dL, the particle speed increases by $2v\frac{dL}{L}$

(3) The particle's kinetic energy increases by a factor of 4 when the piston is moved inward from L_0 to $\frac{1}{2}L_0$

(4) The rate at which the particle strikes the piston is v/L

(1) पिस्टन से प्रत्येक संघट्ट के बाद कण की गति 2V से बढ़ जाती है।

(2) यदि पिस्टन अंदर की तरफ dL दूरी चलता है तब कण की गति $2v\frac{dL}{L}$ से बढ़ जाती है।

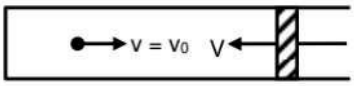
(3) जब पिस्टन L_0 से $\frac{1}{2}L_0$ तक जाता है तब कण की गतिज ऊर्जा 4 गुणा अधिक हो जाती है।

(4) कण के पिस्टन से टकराने की दर v/L है।

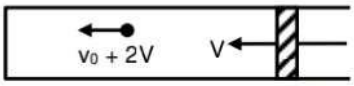
Ans. **(1, 3)**

Downloaded From ToraLabs

Sol.



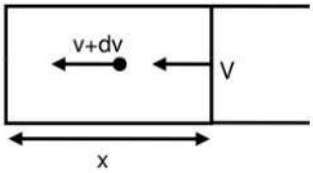
before collision संघट्ट से पहले



After Collision संघट्ट के बाद

Therefore change in speed अतः चाल में परिवर्तन $= (2V + v_0 - v_0) = 2V$

In every collision it acquires 2V



Rate at which the particle strike the piston = $f = \frac{v}{2x}$

If x = L then $f = \frac{v}{2L}$

Rate of change of speed of particle = $\frac{dv}{dt} = f \times 2V$

$dv = \frac{v}{2x} 2Vdt$

$dv = \frac{v}{2x} 2(-dx)$

$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = \int_{\ell}^{x} \frac{-dx}{x}$

$\Rightarrow \ell n \frac{v}{v_0} = -\ell n \frac{x}{\ell}$

$\Rightarrow v = \frac{v_0 \ell}{x}$

When $x = \frac{L_0}{2}$, then $v = \frac{v_0 L_0 \times 2}{L_0} = 2v_0$

KE at $x = \frac{L_0}{2} = K_f = \frac{1}{2} \times m \times 4 v_0^2$

KE at $x = L_0 = K_i = \frac{1}{2} m v_0^2$

$\therefore \frac{k_f}{k_i} = 4$

Downloaded From ToraLabs

SECTION 2 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks : **+3** If ONLY the correct numerical value is entered.

Zero Marks : **0** In all other cases.

खंड **2** (अधिकतम अंक: **18**)

- इस खंड में छः **(06)** प्रश्न है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक संख्यात्मक मान **(NUMERICAL VALUE)** हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर के सही संख्यात्मक मान को माउज़ (mouse) और ऑन–स्क्रीन (on–screen) वर्चुअल न्युमेरिक कीपेड (virtual numeric keypad) के प्रयोग से उत्तर के लिए चिन्हित स्थान पर दर्ज करें। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो संख्यात्मक मान को दशमलव के दो स्थानों तक ट्रंकेट/राउंड ऑफ **(truncate/round-off)** करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :–

पूर्ण अंक : **+3** यदि दर्ज किया गया संख्यात्मक मान **(Numerical value)** ही सही उत्तर है।

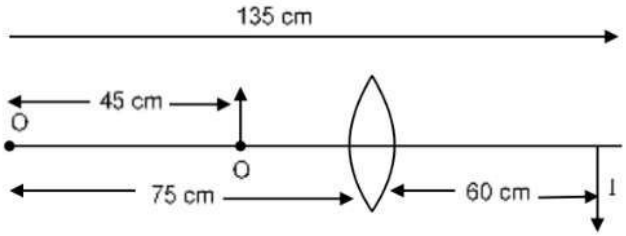
शून्य अंक : **0** अन्य सभी परिस्थितियों में।

1. An optical bench has 1.5 m long scale having four equal divisions in each cm. While measuring the focal length of a convex lens, the lens is kept at 75 cm mark of the scale and the object pin is kept at 45 cm mark. The image of the object pin on the other side of the lens overlaps with image pin that is kept at 135 cm mark. In this experiment, the percentage error in the measurement of the focal length of the lens is ____.

एक प्रकाशीय बेंच में एक 1.5 m लंबा पैमाना है जिसका प्रत्येक cm चार बराबर भागों में विभाजित है। एक पतले उत्तल लैंस की फोकस दूरी के माप के दौरान लेंस तथा वस्तु पिन को पैमाने पर क्रमशः 75 cm तथा 45 cm के चिन्हों पर रखा जाता है। लेंस के दूसरी तरफ वस्तु पिन का प्रतिबिंब 135 cm चिन्ह पर रखी प्रतिबिंब पिन से मिलता है। इस प्रेयाग में लेंस के फोकस दूरी के मापन में प्रतिशत त्रुटि ____ है।

Ans. **0.69**

Sol. $\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$



$-\frac{1}{v^2}\Delta v+\frac{1}{u^2}\Delta u=-\frac{1}{f^2}\Delta f$

$\left(\frac{\Delta f}{f^2}\right)_{max}=\frac{\Delta v}{v^2}+\frac{\Delta u}{u^2}$

$\frac{\Delta f}{(20)^2}=\frac{1}{4(60\times 60)}+\frac{1}{4(30)(30)}$

$\Delta f=\frac{5}{36}$

$\frac{\Delta f}{f}=\frac{5}{36}\times\frac{1}{20}$

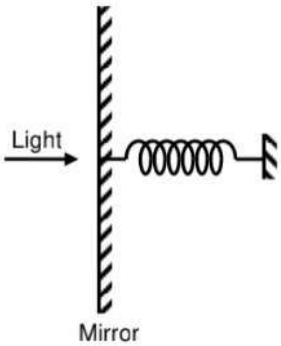
$\frac{\Delta f}{f}\times 100\%=\frac{5}{36}\times\frac{1}{20}\times 100\% = \frac{25}{36}\% = 0.69\%$

Ans. **0.69**

Downloaded From ToraLabs

2. A perfectly reflecting mirror of mass M mounted on a spring constitutes a spring–mass system of angular frequency Ω such that $\frac{4\pi M\Omega}{h} = 10^{24}\ m^{-2}$ with h as Planck's constant. N photons of wavelength $\lambda = 8\pi \times 10^{-6}$ m strike the mirror simultaneously at normal incidence such that the mirror gets displaced by $1\mu m$. If the value of N is $x \times 10^{12}$, then the value of x is _____. [Consider the spring as massless]

एक M द्रव्यमान वाला पूर्ण परावर्तन दर्पण एक स्प्रिंग से जुड़ा हुआ है। इस स्प्रिंग–द्रव्यमाननिकाय की कोणीय आवृत्ति Ω इस प्रकार है कि $\frac{4\pi M\Omega}{h} = 10^{24}\ m^{-2}$ जहाँ h प्लांक नियतांक है। तरंगदैर्ध्य $\lambda = 8\pi \times 10^{-6}$ m के N फोटोन एक साथ दर्पण पर लम्बवत् आपतित होते हैं जिससे दर्पण $1\mu m$ से विस्थापित होता है। यदि N का मान $x \times 10^{12}$ है तब x का मान _____ है। [स्प्रिंग को द्रव्यमानहीन मानें]



Ans. 1

Sol. Momentum transferred on mirror दर्पण को स्थानान्तरित संवेग = $\frac{2Nh}{\lambda}$

$$\frac{2Nh}{\lambda} = MV_{(mean\ position)}$$

$V_{(mean\ position)} = \Omega A$ (where जहाँ $A = 1\ \mu M$)

$\frac{2Nh}{\lambda} = M\Omega A$ (where जहाँ $\lambda = 8\pi \times 10^{-6}$)

$$N = \frac{M\Omega(10^{-6})\lambda}{2h} = \frac{M\Omega 8\pi \times 10^{-6} \times 10^{-6}}{2h}$$

$$N = \frac{4\pi M\Omega}{h} \times 10^{-12}$$

$= 10^{24} \times 10^{-12}$

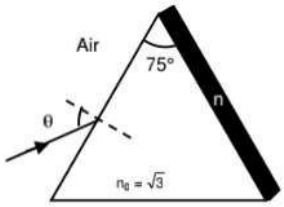
$N = 1 \times 10^{12}$

$x = 1$

Downloaded From ToraLabs

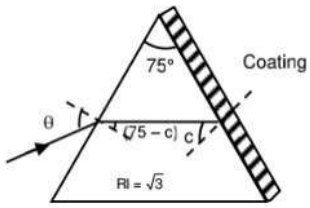
3. A monochromatic light is incident from air on a refracting surface of a prism of angle 75° and refractive index $n_0 = \sqrt{3}$. The other refracting surface of the prism is coated by a thin film of material of refractive index n as shown in figure. The light suffers total internal reflection at the coated prism surface for an incidence angle of $\theta \le 60°$. The value of n^2 is _____.

एक प्रिज्म जिसका प्रिज्म कोण 75° तथा अपवर्तनांक $n_0 = \sqrt{3}$ है के अपवर्ती पृष्ठ पर वायु से एकवर्णी (monochromatic) प्रकाश आपतित होता है। चित्रानुसार प्रिज्म का दूसरी अपवर्ती पृष्ठ पर किसी एक पदार्थ की कलई (coating) की गयी है, जिसका अपवर्तनांक n है। आपतित कोण $\theta \le 60°$ के लिए प्रकाश की किरण का कलई किए गए पृष्ठ पर पूर्ण आंतरिक परावर्तन होता है। n^2 का मान _____ है।



Ans. 1.5

Sol.



For T.I.R at coating

फिल्म पर T.I.R के लिये

$\text{sinc} = \frac{n}{\sqrt{3}}$

Appling snell's law at first surface

प्रथम सतह पर स्नेल के नियम से

$\sin\theta = \sqrt{3}\sin(75 - c)$

for limiting condition, at $\theta = 60°$

सीमान्त स्थिति के लिये, $\theta = 60°$ पर

$\sin 60 = \sqrt{3}\sin(75 - c)$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sin(75 - c)$

$\frac{1}{2} = \sin(75 - c) \Rightarrow \sin 30 = \sin(75 - c)$

$30 = 75 - c \Rightarrow c = 45°$

$\frac{n}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow n^2 = \frac{3}{2} = 1.50$

Downloaded From ToraLabs

4. Suppose a $^{226}_{88}Ra$ nucleus at rest and in ground state undergoes α–decay to a $^{222}_{86}Rn$ nucleus in its excited state. The kinetic energy of the emitted α particle is found to be 4.44 MeV. $^{222}_{86}Rn$ nucleus then goes to its ground state by γ–decay. The energy of the emitted γ photon is _____keV.

[Given : atomic mass of $^{226}_{88}Ra$ = 226.005u, atomic mass of $^{222}_{88}Rn$ = 222.000 u, atomic mass of α particle = 4.000 u, 1u = 931 MeV/c^2, c is speed of light]

माना कि एक स्थिर $^{226}_{88}Ra$ नाभिक अपनी निम्नतम अवस्था (ground state) से α–क्षय करके एक उत्तेजित अवस्था वाले (excited state) $^{222}_{86}Rn$ नाभिक में क्षयित होता है। उत्सर्जित होने वाले α–कण की गतिज ऊर्जा 4.44 MeV है। $^{222}_{86}Rn$ नाभिक फिर γ–क्षय करके अपनी निम्नतम अवस्था में आता है। उत्सर्जित γ फोटोन की ऊर्जा _____keV है।

[दिया है : $^{226}_{88}Ra$ का परमाण्विक द्रव्यमान (atomic mass)= 226.005u, $^{222}_{88}Rn$ का परमाण्विक द्रव्यमान= 222.000 u, α कण का परमाण्विक द्रव्यमान= 4.000 u, 1u = 931 MeV/c^2, c प्रकाश की गति है।]

Ans. **135**

Sol. Mass defect द्रव्यमान क्षयΔm = 226.005 – 222.000 – 4.000

= 0.005 amu

$\therefore$ Q value मान = 0.005 × 931.5 = 4.655 MeV

Also $\dfrac{K.E_\alpha}{K.E_{Rn}} = \dfrac{m_{Rn}}{m_\alpha}$

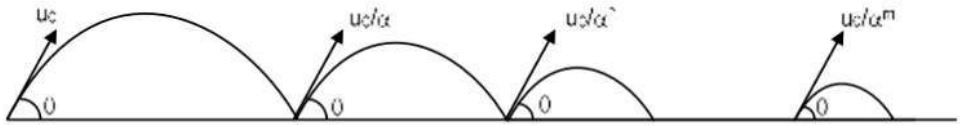
$\Rightarrow$ $K.E_{Rn} = \dfrac{m_\alpha}{m_{Rn}} \cdot K.E_\alpha = \dfrac{4}{222} \times 4.44 = 0.08$ MeV

$\therefore$ Energy of γ – Photon (γ –फोटोन की ऊर्जा) = 4.655 – (4.44 + 0.08)

= 0.135 MeV = 135 KeV

5. A ball is thrown from ground at an angle θ with horizontal and with an initial speed u_0. For the resulting projectile motion, the magnitude of average velocity of the ball up to the point when it hits the ground for the first time is V_1. After hitting the ground, the ball rebounds at the same angle θ but with a reduced speed of u_0/α. Its motion continues for a long time as shown in figure. If the magnitude of average velocity of the ball for entire duration of motion is 0.8 V_1, the value of α is _____

एक गेंद को क्षैतिज से θ काण पर प्रारम्भिक वेग u_0 से फेंका जाता है। यह गेंद, प्रक्षेप्य गति के कारण जब भूतल से पहली बार टकराती है तब उस समय तक के उसके औसत वेग का परिमाण V_1 होता है। भूतल से अकराने के उपरांत गेंद उसी θ कोण से किन्तु u_0/a की क्षीण गति से उछलती है। चित्रानुसार उसकी गति लंबे समयान्तराल तक रहती है। इस लम्बे अंतराल के दौरान गेंद के औसत वेग का परिमाण 0.8 V_1 पाया जाता है, तब α का मान _____ है।



Ans. **4**

Downloaded From ToraLabs

Sol. For first projectile प्रथम प्रक्षेप्य के लिये

$$< V > = \frac{R}{T} = U_x = v_1$$

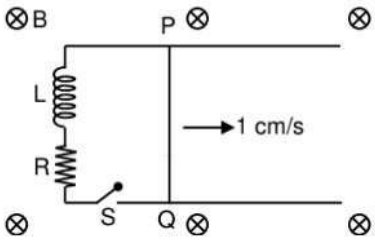
For journey गति के दौरान

$$< V >_{1-n} = \frac{R_1 + R_2 + ... + R_n}{T_1 + T_2 + ... + T_n} = \frac{\frac{2u_{x_1}u_{y_1}}{g} + \frac{2u_{x_2}u_{y_2}}{g} + ... + \frac{2u_{x_n}u_{y_n}}{g}}{\frac{2u_{y_1}}{g} + \frac{2u_{y_2}}{g} + ... \frac{2u_{y_n}}{g}}$$

$$U_x\left[\frac{1+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^4}+.....\frac{1}{\alpha^{2n}}}{1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+....+\frac{1}{\alpha^n}}\right] = 0.8\ v_1 \Rightarrow \frac{v_0\left[\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha^2}}\right]}{\left[\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}\right]} = 0.8v_1 \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{1+\alpha} = 0.8 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4$$

6. A 10 cm long perfectly conducting wire PQ is moving with a velocity 1 cm/s on a pair of horizontal rails of zero resistance. One side of the rails is connected to an inductor L = 1 mH and a resistance R = 1Ω as shown in figure. The horizontal rails, L and R lie in the same plane with a uniform magnetic field B = 1T perpendicular to the plane. If the key S is closed at certain instant, the current in the circuit after 1 millisecond is $x \times 10^{-3}$A, where the value of x is _____.
[Assume the velocity of wire PQ remains constant (1 cm/s) after key S is closed. Given : $e^{-1} = 0.37$, where e is base of the natural logarithm]

दो क्षैतिज समांतर रेलों जिनका प्रतिरोध शून्य है पर एक 10 cm लंबा सुचालक (perfectly conducting) तार PQ 1 cm/s के वेग से चल रहा है। रेलों के एक सिरे पर L = 1 mH प्रेरक (inductor) तथा R = 1Ω प्रतिरोधक चित्रानुसार जुड़ा है। दोनों क्षैतिज रेलें, L तथा R एक ही तल में हैं और तल के लम्बवत् एक समान चुंबकीय क्षेत्र B = 1T लगा हुआ है। यदि S कुंजी को किसी क्षण बंद करें तब परिपथ में 1 millisecond के पश्चात् धारा $x \times 10^{-3}$A है, जहाँ x का मान _____ होगा। [कुंजी S बंद करने के पश्चात् तार PQ का वेग नियत (1 cm/s) मानें। दिया है: $e^{-1} = 0.37$, जहाँ e प्राकृतिक लघुगणक [natural logarithm] का आधार है।



Ans. **0.63**

Sol. $\varepsilon = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\vec{\ell} = Bv\ell = 10^{-2} \times 1 \times 10^{-1}$

$\varepsilon = 10^{-3}$ volt

$$i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) = \frac{10^{-3}}{1}(1 - e^{-1})$$

$i = 10^{-3}\ (1 - 0.37)$

$I = 0.63$ mA

Downloaded From ToraLabs

SECTION 3 (Maximum Marks : 12)

- This section contains **TWO (02)** List-Match sets.
- Each List-Match set has **TWO (02)** Multiple Choice Questions.
- Each List-Match set has two lists : **List-I** and **List-II**.
- **List-I** has **Four** entries (I),(II), (III) and (IV) **List-II** has **Six** entries (P),(Q), (R), (S), (T) and (U).
- **FOUR** options are given in each Multiple Choice Question based on **List-I** and **List-II** and **ONLY ONE** of these four options satisfies the condition asked in the Multiple Choice Question.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks : **+3** If ONLY the option corresponding to the correct combination is chosen.

Zero Marks : **0** If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).

Negative Marks : **–1** In all other cases.

खंड **3** (अधिकतम अंकः **12**)

- इस खंड में दो **(02)** सूची–सुमेलन (List-Match) सेट्स (sets) है।
- प्रत्येक सूची–सुमेलन सेट (set) में दो **(02)** एकाधिक विकल्प प्रश्न (Multiple Choice Question) है।
- प्रत्येक सूची–सुमेलन सेट में दो सूचियाँ है : सूची-**I** और सूची-**II**
- सूची-**I** में चार प्रविष्टियाँ (I),(II),(III) और (IV) है एवं सूची-**II** में छः प्रविष्टियाँ (P),(Q),(R),(S),(T) और (U) है।
- प्रत्येक एकाधिक विकल्प प्रश्न में सूची-I और सूची-II पर आधारित चार विकल्पों में से केवल एक विकल्प ही एकाधित विकल्प प्रश्न की शर्त को पूरा करता है।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नयोजना के अनुसार होगाः–

पूर्ण अंक : **+3** यदि सिर्फ सही विकल्प ही चुना गया हैं।

शून्य अंक : **0** यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है)।

ऋण अंक : **–1** अन्य सभी परिस्थितियों में

Downloaded From ToraLabs

Answer the following by appropriately matching the lists based on the information given in the paragraph.

अनुच्छेद में दी गई जानकारी के आधार पर सूचियों का उचित मिलान करके प्रश्न का उत्तर दें।

A musical instrument is made using four different metal strings 1, 2, 3 and 4 with mass per unit length μ, 2μ, 3μ and 4μ respectively. The instrument is played by vibrating the strings by varying the free length in between the range L_0 and $2L_0$. It is found that in string-1(μ) at free length L_0 and tension T_0 the fundamental mode frequency is f_0.

एक वाद्य यंत्र को चार भिन्न धातु की तरों 1, 2, 3 और 4 से बनाया गया है, जिनके एकांक लम्बाई के द्रव्यमान (mass per unit length) क्रमशः μ, 2μ, 3μ तथा 4μ हैं। इस यंत्र के तारों को मुक्त लम्बाई L_0 से $2L_0$ के बीच परवर्तित करते हुए कंपित करके बजाया जाता है। पाया जाता है कि तार-1(μ) की मुक्त लम्बाई L_0 पर तनाव T_0 के कारण मूल विधा की आवृत्ति f_0 है।

List सूची **-I**		**List** सूची **-II**	
(I)	String तार-1 (μ)	(P)	1
(II)	String तार-2 (2μ)	(Q)	1/2
(III)	String तार-3 (3μ)	(R)	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
(IV)	String तार -4 (4μ)	(S)	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
		(T)	3/16
		(U)	1/16

1. If the tension in each string is T_0, the correct match for the highest fundamental frequency in f_0 units will be :

प्रत्येक तार का तनाव T_0 है तब उच्चतम मूल आवृत्ति का f_0 इकाई में सही मिलान होगा :

(1) I $\rightarrow$ P, II $\rightarrow$ Q, III $\rightarrow$ T, IV $\rightarrow$ S
(2) I $\rightarrow$ P, II $\rightarrow$ R, III $\rightarrow$ S, IV $\rightarrow$ Q
(3) I $\rightarrow$ Q, II $\rightarrow$ S, III $\rightarrow$ R, IV $\rightarrow$ P
(4) I $\rightarrow$ Q, II $\rightarrow$ P, III $\rightarrow$ R, IV $\rightarrow$ T

Ans. **(2)**

Sol. Fundamental frequency is maximum when length is minimum i.e. L_0,

मूल आवृत्ति उस समय अधिकतम होती है जब लम्बाई निम्नतम है अर्थात् L_0,

Case 1. $L = L_0$, $T = T_0$, $f = f_0$; $f_1 = \frac{1}{2L_0}\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$

Case 2. $f_2 = \frac{1}{L_0}\sqrt{\frac{T_2}{2\mu}} = \frac{f_0}{\sqrt{2}}$

Case 3. $f_3 = \frac{1}{L_0}\sqrt{\frac{T_2}{3\mu}} = \frac{f_0}{\sqrt{3}}$

Case 4. $f_4 = \frac{1}{L_0}\sqrt{\frac{T_2}{4\mu}} = \frac{f_0}{2}$

Downloaded From ToraLabs

2. The length of the strings 1, 2, 3 and 4 are kept fixed at L_0, $\frac{3L_0}{2}$, $\frac{5L_0}{4}$ and $\frac{7L_0}{4}$, respectively. Strings 1, 2, 3 and 4 are vibrated at their 1st, 3rd, 5th and 14th harmonics, respectively such that all the strings have same frequency. The correct match for the tension in the four strings in the units of T_0 will be :

तार 1, 2, 3 और 4 की लम्बाईयों का मान क्रमश L_0, $\frac{3L_0}{2}$, $\frac{5L_0}{4}$ तथा $\frac{7L_0}{4}$ है। तार 1, 2, 3 और 4 को क्रमशः उनकी प्रथम (1st), तृतीय (3rd), पंचम (5th) तथा चौदहवी (14th) गुणावृत्तियों पर इस तरह से कंपित करते है कि सभी तारों की आवृत्तियां समान रहती है। चारों तारों के तनाव का T_0 इकाई में सही मिलान होगा :

(1) $I \to P, II \to R, III \to T, IV \to U$
(2) $I \to P, II \to Q, III \to R, IV \to T$
(3) $I \to P, II \to Q, III \to T, IV \to U$
(4) $I \to T, II \to Q, III \to R, IV \to U$

Ans. **(3)**

Sol.

Case 1. $L = L_o, T = T_o, f = f_o$

$$f_1 = \frac{1}{2L_0}\sqrt{\frac{T_o}{\mu}}$$

Case 2. $L = \frac{3L_o}{2}$

$$f_2 = \frac{3}{2\times\frac{3L_o}{2}}\sqrt{\frac{T_2}{2\mu}} = f_o \Rightarrow f_o = \frac{1}{\sqrt{2}L_o}\sqrt{\frac{T_2}{\mu}} \Rightarrow T_2 = \frac{T_o}{2}$$

Case 3. $L = \frac{5L_o}{4}$

$$f_3 = \frac{5}{2\times\frac{5L_o}{4}}\sqrt{\frac{T_3}{3\mu}} = f_o$$

$$\Rightarrow \quad f_o = \frac{2}{\sqrt{3}L_o}\sqrt{\frac{T_3}{\mu}} \Rightarrow T_3 = \frac{3T_o}{16}$$

Case 4. $L = \frac{7L_o}{4}$

$$\Rightarrow \quad f_4 = \frac{14}{2\times\frac{7L_o}{4}}\sqrt{\frac{T_4}{4\mu}} = f_o$$

$$\Rightarrow \quad f_o = \frac{2}{L_o}\sqrt{\frac{T_4}{\mu}} \Rightarrow T_4 = \frac{T_o}{16}$$

Downloaded From ToraLabs

Answer the following by appropriately matching the lists based on the information given in the paragraph.

अनुच्छेद में दी गई जानकारी के आधार पर सूचियों का उचित मिलान करके प्रश्न का उत्तर दें।

In a thermodynamic process on an ideal monoatomic gas, the infinitesimal heat absorbed by the gas is given by $T\Delta X$, where T is temperature of the system and ΔX is the infinitesimal change in a thermodynamic quantity X of the system. For a mole of monatomic ideal gas $X = \frac{3}{2}R\ell n\left(\frac{T}{T_A}\right) + R\ell n\left(\frac{V}{V_A}\right)$. Here, R is gas constant, V is volume of gas. T_A and V_A are constants.

The List-I below gives some quantities involved in a process and List-II gives some possible values of these quantities.

एक आदर्श एकपरमाणुक गैस के एक ऊष्मागतिकी प्रक्रम में गैस द्वारा अतिसूक्ष्म ऊष्मा का अवशोषण $T\Delta X$ से दिया गया है जहाँ T निकाय का तापमान तथा ΔX निकाय की एक ऊष्मागतिकी मात्रा X में अतिसूक्ष्म परिवर्तन है। एक मोल एकपरमाणुक आदर्श गेस के लिए $X = \frac{3}{2}R\ell n\left(\frac{T}{T_A}\right) + R\left(\frac{V}{V_A}\right)$ है। यहाँ V गैस का आयतन, R गैस का नियतांक । T_A तथा V_A नियतांक है।

सूची-I एक प्रक्रिया में सम्मिलित कुछ मात्राओं को दर्शाती है। सूची –II में इन्ही मात्राओं का संभावित मान दिया गया है।

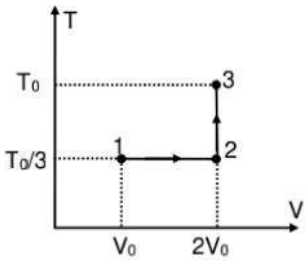
List-I		**List-II**
(I)	Work done by the system in process $1 \to 2 \to 3$	(P) $\frac{1}{3}RT_0\ell n2$
(II)	Change in internal energy in process $1 \to 2 \to 3$	(Q) $\frac{1}{3}RT_0$
(III)	Heat absorbed by the system in process $1 \to 2 \to 3$	(R) RT_0
(IV)	Heat absorbed by the system in process $1 \to 2$	(S) $\frac{4}{3}RT_0$
		(T) $\frac{1}{3}RT_0(3+\ell n2)$
		(U) $\frac{5}{6}RT_0$

सूची-I		सूची -II
(I)	निकाय के द्वारा प्रक्रम $1 \to 2 \to 3$ में किया गया कार्य	(P) $\frac{1}{3}RT_0\ell n2$
(II)	प्रक्रम $1 \to 2 \to 3$ में आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन	(Q) $\frac{1}{3}RT_0$
(III)	निकाय $1 \to 2 \to 3$ में निकाय द्वारा अवशोषित ऊष्मा	(R) RT_0
(IV)	प्रक्रम $1 \to 2$ में निकाय द्वारा अवशोषित ऊष्मा	(S) $\frac{4}{3}RT_0$
		(T) $\frac{1}{3}RT_0(3+\ell n2)$
		(U) $\frac{5}{6}RT_0$

Downloaded From ToraLabs

3. If the process on one mole of monatomic ideal gas is as shown in the TV-diagram with $P_0V_0 = \frac{1}{3}RT_0$, the correct match is,

यदि एक मोल एकपरमाणुक आदर्श गैस पर चित्र में दिखाये गये TV-ग्राफ चित्र में अनुसार, जहाँ $P_0V_0 = \frac{1}{3}RT_0$ हैं, प्रक्रम किया जाता है तब सही मिलान है,



(1) I → P, II → R, III → T, IV → S
(2) I → P, II → T, III → Q, IV → T
(3) I → S, II → T, III → Q, IV → U
(4) I → P, II → R, III → T, IV → P

Ans. **(4)**

Sol. 1-2 process is isothermal and 2-3 process is isochoric.

(I) $W_{1\to2} = nRT\ell n\frac{V_f}{V_i} = 1\times R\frac{T_0}{3}\ell n\frac{V_2}{V_1} = \frac{RT_0}{3}\ell n\frac{2V_0}{V_0} = \frac{RT_0}{3}\ell n2$

$W_{2\to3} = 0$ (Isochoric process)

$W_{1\to2\to3} = W_{1\to2} + W_{2\to3} = \frac{RT_0}{3}\ell n2$ (I → P)

(II) $\Delta U = \frac{f}{2}nR(T_f - T_i)$

$\Delta U_{1\to2\to3} = \frac{3}{2}\left[1\times R\left(T_0 - \frac{T_0}{3}\right)\right]$

$= RT_0$ (II → R)

(III) $Q_{1\to2\to3} = \Delta U_{1\to2\to3} + W_{1\to2\to3}$ (First law of thermodynamics)

$= RT_0 + \frac{RT_0}{3}\ell n2$

$= \frac{RT_0}{3}[3 + \ell n2]$ (III → T)

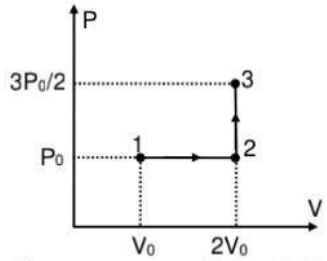
(IV) $Q_{1\to2} = \Delta U_{1\to2} + W_{1\to2}$

$= 0 + \frac{RT_0}{3}\ell n2 = \frac{RT_0}{3}\ell n2$ (IV → P)

Downloaded From ToraLabs

4. If the process carried out on one mole of monoatomic ideal gas is as shown in figure in the PV-diagram with $P_0V_0 = \frac{1}{3}RT_0$, the correct match is

यदि एक मोल एकपरमाणुक आदर्श गैस पर चित्र में दिखाये गये TV-ग्राफ चित्र में अनुसार, जहाँ $P_0V_0 = \frac{1}{3}RT_0$ हैं, प्रक्रम किया जाता है तब सही मिलान है,



(1) I → S, II → R, III → Q, IV → T
(2) I → Q, II → R, III → P, IV → U
(3) I → Q, II → S, III → R, IV → U
(4) I → Q, II → R, III → S, IV → U

Ans. **(4)**

Sol. (I) $W_{1\to2\to3} = W_{1\to2} + W_{2\to3}$

$= P_0[2V_0 - V_0] + 0 = P_0V_0$

$W_{1\to2\to3} = P_0V_0$

$= \frac{RT_0}{3}$ (I → Q)

(II) $U_{1\to2\to3} = \frac{3}{2}\left[\frac{3P_0}{2}\times 2V_0 - P_0V_0\right]$

$= \frac{3}{2}\times 2P_0V_0 = 3P_0V_0 = RT_0$ (II → R)

(III) $Q_{1\to2\to3} = U_{1\to2\to3} + W_{1\to2\to3}$

$= RT_0 + \frac{RT_0}{3} = \frac{4RT_0}{3}$ (III → S)

(IV) $Q_{1\to2} = nC_P\Delta T$

$= n\frac{5}{2}R(T_2 - T_1)$

$= \frac{5}{2}[P_0 2V_0 - P_0V_0]$

$= \frac{5}{2}P_0V_0 = \frac{5}{2}\frac{RT_0}{3}$

$= \frac{5}{6}R_0T_0$ (IV → U)

Downloaded From ToraLabs