JEE (Advanced) 2019

DATE: 27-05-2019

Questions & Solutions

PAPER – 1 **SUBJECT:CHEMISTRY**

MAX. MARKS: 186 **TIME: 3 HRS.**

PAPER-1 : INSTRUCTIONS TO CANDIDATES

- **Question Paper-1 has three (03) parts: Physics, Chemistry and Mathematics.**
- **Each part has a total eighteen (18) questions divided into three (03) sections (Section-1, Section-2 and Section-3)**
- **Total number of questions in Question Paper-1 are Fifty Four (54) and Maximum Marks are One Hundred Eighty Six (186)**

Type of Questions and Marking Schemes

SECTION-1 (Maximum Marks : 12)

- This section contains **FOUR (04)** questions.
- Each question has **FOUR** options **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the correct option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks	:	**+3** If ONLY the correct option is chosen.
Zero Marks	:	0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks	:	**–1** In all other cases.

SECTION-2 (Maximum Marks : 32)

- This section contains **EIGHT (08)** questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme.

Full Marks	:	**+4** If only (all) the correct option(s) is (are) chosen.
Partial Marks	:	**+3** If all the four options are correct but ONLY three options are chosen.
Partial Marks	:	**+2** If three or more options are correct but ONLY two options are chosen and both of which are correct.
Partial Marks	:	**+1** If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option.
Zero Marks	:	0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks	:	**–1** In all other cases.

Downloaded From ToraLabs

SECTION-3 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal placed.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks : **+3** If ONLY the correct numerical value is entered.

Zero Marks : **0** In all other cases.

Answering Questions :

- To select the option(s), use the mouse to click on the corresponding button(s) of the option(s).
- To deselect the chosen option for the questions of **SECTION-1**, click on the button of the chosen option again or click on the **Clear Response** button to clear the chosen option.
- To deselect the chosen option(s) for the questions of **SECTION-2**, click on the button(s) of the chosen option(s) again or click on the **Clear Response** button to clear all the chosen options.
- To change the option(s) of a previously answered question of **SECTION-1** and **SECTION-2** first deselect as given above and then select the new option(s).
- To answer questions of **SECTION-3**, use the mouse to click on numbers (and/or symbols) on the on–screen virtual numeric keypad to enter the numerical value in the space provided for answer.
- To change the answer of a question of **SECTION-3**, first click on the **Clear Response** button to clear the entered answer and then enter the new numerical value.
- To mark a question **ONLY** for review (i.e. without answering it), click on the **Mark for Review & Next** button.
- To mark a question for review (after answering it), click on **Mark for Review & Next** button – the answered question which is also marked for review will be evaluated.
- To save the answer, click on the **Save & Next** button – the answered question will be evaluated.

Downloaded From ToraLabs

CHEMISTRY

SECTION-1 (Maximum Marks : 12)

- This section contains **FOUR (04)** questions.
- Each question has **FOUR** options **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the correct option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks : **+3** If ONLY the correct option is chosen.
Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks : **–1** In all other cases.

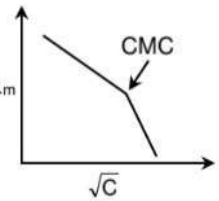
खंड 1 (अधिकतम अंकः 12)

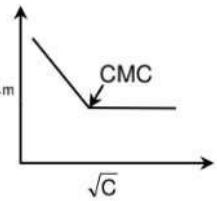
- इस खंड में चार **(04)** प्रश्न है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए सही चार विकल्प दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से **केवल एक** ही विकल्प सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए दिए हुए विकल्पों में से सही उत्तर से संबधित विकल्प को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :

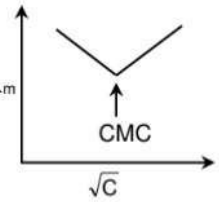
पूर्ण अंक : **+3** यदि सिर्फ सही विकल्प ही चुना गया है।
शून्य अंक : **0** यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है)।
ऋण अंक : **–1** अन्य सभी परिस्थितियों में।

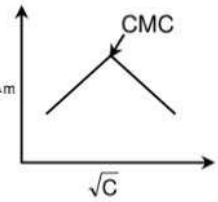
1. Molar conductivity (Λ_m) of aqueous solution of sodium stearate, which behaves as a strong electrolyte, is recorded at varying concentrations (c) of sodium stearate. Which one of the following plots provies the correct representation of micelle formation in the solution ?
(critical micelle concentration (CMC) is marked with an arrow in the figures)

सोडियम स्टिऐरेट (sodium stearate) के जलीय विलयन, जो एक प्रबल वैद्युत अपघट्य (electrolyte) जैसा व्यवहार दर्शाता है, की मोलर चालकता (Λ_m) को विभिन्न सान्द्रताओं (c) में मापा गया। निम्न चित्रों में से मिसेल विरचन (micelle formation) दर्शाने वाला सही चित्र कौनसा है? (क्रांतिक मिसेल सान्द्रता (critical micelle concentration,CMC)) को चित्रों में तीर द्वारा दर्शाया गया है)

(1) 

(2) 

(3) 

(4) 

Downloaded From ToraLabs

Ans. **(1)**

Sol. As the concentration of sodium stearate increases beyond CMC, stearate ions get clubbed together and form micelles. This abruptly causes the concentration of the current carrier anions to decreases. This is reflected by the sharp change in Λm at CMC, followed by greater rate of decrease of Λm with $\sqrt{C}$.

CMC के आगे सोडियम स्टिरिएट की सान्द्रता बढ़ने के साथ, मुक्त आयन परस्पर संगुणित हो जाते है तथा मिसेल का निर्माण करते है। इसके परिणामस्वरूप विद्युतधारा वाहक ऋणायनों की सांद्रता में कमी होती है। यह CMC पर Λm में तीक्ष्ण परिवर्तन द्वारा प्रदर्शित होता है। इसके पश्चात् $\sqrt{C}$ के साथ Λm में तीव्र दर से कमी होती है।

2. The green colour produced in the borax bead test of a chromium (III) salt is due to
क्रोमियम (III) लवण के सुहागा–मनका परीक्षण (borax bead test) में हरे रंग का कारण है।

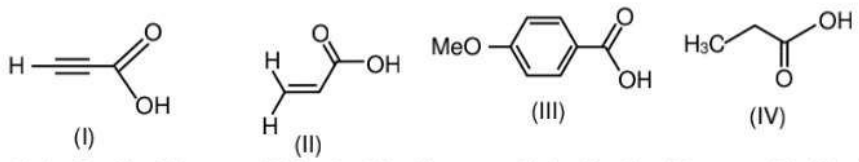
(1) CrB (2) Cr_2O_3 (3) $Cr(BO_2)_3$ (4) $Cr_2(B_4O_7)_3$

Ans. **(3)**

Sol. $Na_2B_4O_7.10H_2O \xrightarrow{\Delta} Na_2B_4O_7 \xrightarrow{\Delta} NaBO_2 + B_2O_3$

$Cr_2O_3 + B_2O_3 \xrightarrow{\Delta} \underset{\text{Green}}{Cr(BO_2)_3}$

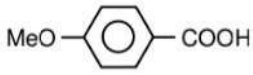
3. The correct order of acid strength of the following carboxylic acids is :
निम्न कार्बोक्सिलिक अम्लों की अम्ल प्रबलता का सही क्रम है :



(1) I > II > III > IV (2) II > I > IV > III (3) I > III > II > IV (4) III > II > I > IV

Ans. **(1)**

Sol.

	pKa
(i) $HC \equiv C–COOH$	1.89
(ii) $H_2C = CH–COOH$	4.3
(iii) 	4.5
(iv) $CH_3–CH_2–COOH$	4.87

4. Calamine, malachite, magnetite and cryolite, respectively, are
कैलामीन (Calamine), मैलाकाइट (malachite), मेग्नेटाइट (magnetite) और क्रायोलाइट (cryolite), क्रमशः है।

(1) $ZnSO_4$, $Cu(OH)_2$, Fe_3O_4, Na_3AlF_6 (2) $ZnCO_3$, $CuCO_3$, Fe_2O_3, Na_3AlF_6
(3) $ZnSO_4$, $CuCO_3$, Fe_2O_3, AlF_3 (4) $ZnCO_3$, $CuCO_3.Cu(OH)_2$, Fe_3O_4, Na_3AlF_6

Ans. **(4)**

Sol. (i) Calamine, $ZnCO_3$ (ii) Malachite, $CuCO_3.Cu(OH)_2$
(iii) Magnetite, Fe_3O_4 (iv) Cryolite, Na_3AlF_6

Sol. (i) केलामाइन, $ZnCO_3$ (ii) मेलेकाइट, $CuCO_3.Cu(OH)_2$
(iii) मैग्नेटाइट, Fe_3O_4 (iv) क्रायोलाइट, Na_3AlF_6

Downloaded From ToraLabs

SECTION-2 (Maximum Marks : 32)

- This section contains **EIGHT (08)** questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme.

Full Marks	:	**+4** If only (all) the correct option(s) is (are) chosen.
Partial Marks	:	**+3** If all the four options are correct but ONLY three options are chosen.
Partial Marks	:	**+2** If three or more options are correct but ONLY two options are chosen and both of which are correct.
Partial Marks	:	**+1** If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option.
Zero Marks	:	0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks	:	**–1** In all other cases.

खंड 2 (अधिकतम अंकः 32)

- इस खंड में **आठ (08)** प्रश्न है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से **एक या एक से अधिक** विकल्प सही है(हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, दिए हुए विकल्पों में से सही उत्तर (उत्तरों) से संबधित विकल्प (विकल्पों) को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :

पूर्ण अंक	:	**+4** यदि केवल (सारे) सही विकल्प (विकल्पों) को चुना गया है।
आंशिक अंक	:	**+3** यदि चारों विकल्प सही हैं परन्तु केवल तीन विकल्पों को चुना गया है।
आंशिक अंक	:	**+2** यदि तीन या तीन से अधिक विकल्प सही है परन्तु केवल दो विकल्पों को चुना गया है और दोंनो चुने हुए विकल्प सही विकल्प हैं।
आंशिक अंक	:	**+1** यदि दो या दो से अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल एक विकल्प को चुना गया है और चुना हुआ विकल्प सही विकल्प है।
शून्य अंक	:	**0** यदि किसी भी विकल्प को नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है)।
ऋण अंक	:	**–1** अन्य सभी परिस्थितियों में।

1. Each of the following options contains a set of four molecules, Identify the option(s) where all four molecules passes permanent dipole moment at room temperature.

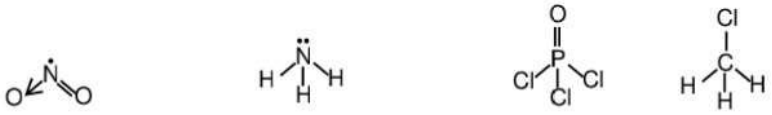
निम्न विकल्पों में चार अणुओं के समुच्चय हर विकल्प में दिये गए हैं। सामान्य ताप पर, जिस (जिन) विकल्प (विकल्पों) के सभी चार अणुओं की स्थायी द्विध्रुव–आघूर्ण (permanent dipole moment) है, उसे (उन्हें) चुनिये।

(1) NO_2, NH_3, $POCl_3$, CH_3Cl (2) BF_3, O_3, SF_6, XeF_6

(3) $BeCl_2$, CO_2, BCl_3, $CHCl_3$ (4) SO_2, C_6H_5Cl, H_2Se, BrF_5

Ans. **(1 & 4)**

Downloaded From ToraLabs

Sol. (1) 

(4) SO_2 sp^2 (2 + 1) ; C_6H_5Cl ; H_2Se ;

2. Which of the following statement(s) is(are) correct regarding the root mean square speed (U_{rms}) and average translational kinetic energy (ε_{av}) of a molecule in a gas at equilibrium ?

(1) U_{rms} is inversely proportional to the square root of its molecular mass

(2) ε_{av} is doubled when its temperature is increased four times.

(3) U_{rms} is doubled when its temperature is increased four times.

(4) ε_{av} at a given temperature does not depend on its molecular mass.

साम्यावस्था में, एक गैस अणु की वर्ग माल्य मूल गति (root mean square speed, U_{rms}) और औसत स्थानांतरण ऊर्जा (average translational kinetic energy, ε_{av}) के संदर्भ में, निम्न कथनों में से सही कथन कौन सा (से) है (है)?

(1) आण्विक द्रव्यमान के वर्गमूल पर U_{rms} व्यूत्क्रमानुपाती (inversely proportional) है।

(2) जब ताप चौगुना किया जाता है, तब ε_{av} दुगुनी हो जाती है।

(3) जब ताप चौगुना किया जाता है, तब U_{rms} दुगुनी हो जाती है।

(4) किसी दिये गये ताप पर, ε_{av} आण्विक द्रव्यमान पर निर्भर नहीं है।

Ans. **(1, 3 & 4)**

Sol. $\varepsilon_{av} = \frac{3}{2}RT$ $\quad U_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ & $U_{rms} \propto \frac{1}{\sqrt{M}}$

$\therefore \varepsilon_{av}$ doesn't depend on its molecular mass $\quad \therefore \varepsilon_{av}$ इसके आण्विक द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती है।

3. Which of the following statements(s) is(are) true ?

(1) The two six-membered cyclic hemiacetal forms of D-(+)-glucose are called anomers.

(2) Hydrolysis of sucrose gives dextrorotatory glucose and laevorotatory fructose.

(3) Monosaccharides cannot be hydrolysed to give polyhydroxy aldehydes and ketones.

(4) Oxidation of glucose with bromine water gives glutamic acid.

निम्न में सही कथन कौन सा है (से हैं) ?

(1) D-(+)-ग्लूकोस के दो छः सदस्यीय चक्रीय हैमिऐसीटैल (hemiacetal) रूपों को ऐनोमर (anomers) कहते है।

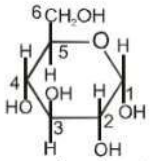
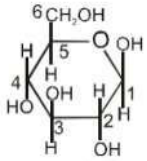
(2) सुक्रोस (sucrose) के जलअपघटन पर दक्षिण ध्रूवण–घूर्णक (dextrorotatory) और वाम ध्रूवण–घूर्णक (laevorotatory) फ्रक्टोज (fructose) प्राप्त होते है।

(3) मोनोसेकैराइडों (Monosaccharides) के जलअपघटन कराने पर पालीहाइड्रोक्सी ऐल्डीहाइड (polyhydroxy aldehydes) और कीटोन (ketones) प्राप्त नहीं होते है।

(4) ब्रोमीन (bromine) जल द्वारा ग्लूकोस (glucose) अम्ल प्राप्त होता है।

Ans. **(1, 2 & 3)**

Downloaded From ToraLabs

Sol. **(1)**  & तथा  are anomers of each other. (एक दूसरे के एनोमर है)

$\alpha^o = (112^o)$ $\alpha^o = (19^o)$

α-D-glucopyranose β-D-glucopyranose

α-D-ग्लूकोपायरेनोस **β-D-**ग्लूकोपायरेनोस

(2) Sucrose $\xrightarrow[\text{Hydrolysis}]{\overset{+}{H}H_2O}$ D(+)Glucose + D(+)Fructose
[Dextrorotatory] [Laevorotatory]

(4) Oxidation of glucose with bromine water gives gluconic acid.

4. In the decay sequence,

$${}^{238}_{92}U \xrightarrow{-x_1} {}^{234}_{90}Th \xrightarrow{-x_2} {}^{234}_{91}Pa \xrightarrow{-x_3} {}^{234}Z \xrightarrow{-x_4} {}^{230}_{90}Th$$

x_1, x_2, x_3 and x_4, are particles/radiation emitted by the respective isotopes. The correct options(s) is(are):

(1) x_1 will deflect towards negatively charged plate.

(2) x_2 is β^-

(3) x_3 is γ-ray

(4) z is an isotope of uranium

दिये गये क्षय क्रम में,

$${}^{238}_{92}U \xrightarrow{-x_1} {}^{234}_{90}Th \xrightarrow{-x_2} {}^{234}_{91}Pa \xrightarrow{-x_3} {}^{234}Z \xrightarrow{-x_4} {}^{230}_{90}Th$$

x_1, x_2, x_3 और x_4, क्रमानुसार प्रत्येक समस्थानीक (isotope) से उत्सर्जित कण/विकिरण है। सही विकल्प है(हैं):

(1) x_1 ऋणावेशित प्लेट (negatively charged plate) की तरफ विक्षेपित होगा।

(2) x_2 है, β^-

(3) x_3 है, γ- किरण

(4) z यूरेनियम (uranium) का एक समस्थानिक है।

Ans. **(1, 2 & 4)**

Sol. $x_1 = \alpha$

$X_2 = \beta$

$X_3 = \beta$

$X_4 = \alpha$

5. A tin chloride Q undergoes the following reaction (not balanced)

$Q + Cl^- \rightarrow X$

$Q + Me_3N \rightarrow Y$

$Q + CuCl_2 \rightarrow Z + CuCl$

X is monoanion having pyramidal geometry. Both Y and Z are neutral compounds. Choose the correct options(s)

(1) The central atom in X is sp^3 hybridized.

(2) There is a coordinate bond in Y

(3) The oxidation state of the central atom in Z is +2

(4) The central atom in Z has one lone pair of electrons.

Downloaded From ToraLabs

एक टिन क्लोराइड Q, निम्न अभिक्रियाएँ (असंतुलित) दर्शाता है।

$Q + Cl^- \rightarrow X$

$Q + Me_3N \rightarrow Y$

$Q + CuCl_2 \rightarrow Z + CuCl$

X एक पिरामिडिय ज्यामिति (pyramidal geometry) दर्शाने वाला ऋणायन (monoanion) है। Y और Z दोनों उदासीन यौगिक हैं। सही विकल्प (विकल्पों) को चुनिये।

(1) X में केन्द्रिय परमाणु का संकरण (hybridization) sp^3 है।

(2) Y में समन्वयी आबन्ध (coordinate bond) है।

(3) Z में ऑक्सीकरण अवस्था (oxidation state) +2 है।

(4) Z में केन्द्रिय परमाणु पर एक एकाकी इलेक्ट्रॉन युग्म (lone pair of electrons) है।

Ans. **(1 & 2)**

Sol. $\underset{(P)}{SnCl_2} + Cl^- \longrightarrow \underset{(X)}{SnCl_3^-}$

$\underset{(P)}{SnCl_2} + Me_3N \longrightarrow \underset{(Y)}{SnCl_2[N(CH_3)_3]}$

$\underset{(P)}{SnCl_2} + 2CuCl_2 \longrightarrow \underset{(Z)}{SnCl_4} + CuCl$

6. Choose the reaction(s) from the following options, for which the standard enthalpy of reaction is equal to the standard enthalpy of formation

निम्न विकल्पों में से वो अभिक्रिया (अभिक्रियाएँ) जिसकी (जिनकी) मानक अभिक्रिया एन्थेल्पी (standard enthalpy of reaction) अपने मानक विरचन एन्थैल्पी (standard enthalpy of formation) के समान हो, उसे (उन्हें) चुनिये।

(1) $\frac{1}{8}S_8(s) + O_2(g) \rightarrow SO_2(g)$

(2) $2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(l)$

(3) $\frac{3}{2}O_2(g) \rightarrow O_3(g)$

(4) $2C(g) + 3H_2(g) \rightarrow C_2H_6(g)$

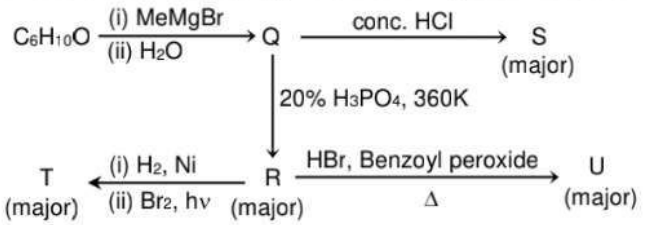
Ans. **(1 & 3)**

Sol. **Standard enthalpy of formation :** "The standard enthalpy of formation of a compound is the change in the standard enthalpy when one mole of the compound is formed starting from the requisite amounts of elements in their stable state of aggregation".

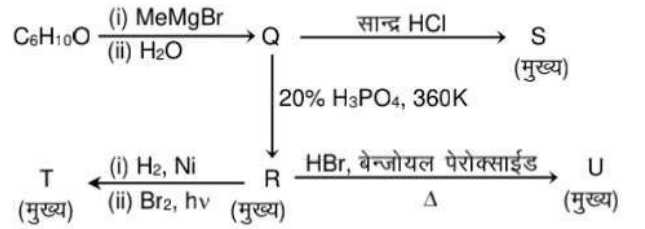
सम्भवन की मानक एन्थैल्पी : पदार्थ या यौगिक की मानक संभवन उष्मा, मानक उष्मा में परिवर्तन जब एक मोल यौगिक, अपने प्रारम्भिक तत्वों की आवश्यक मात्रा से इसकी स्थायी संगुणीत अवस्था में बनता है।

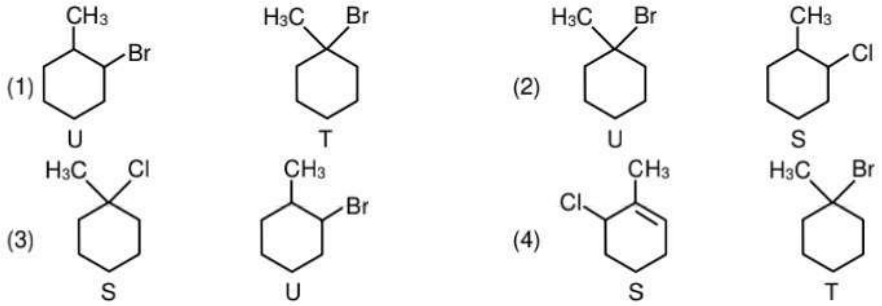
Downloaded From ToraLabs

7. Choose the correct option(s) for the following set of reactions



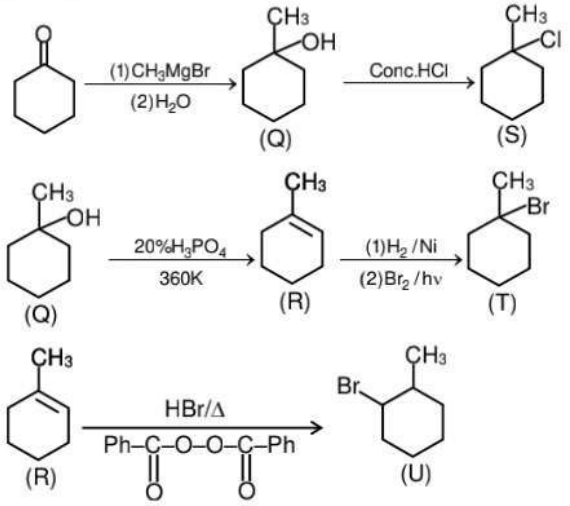
दिये गये अभिक्रिया क्रमों के लिए सही विकल्प (विकल्पों) को चुनिये।





Ans. **(1 & 3)**

Sol.



Downloaded From ToraLabs

8. Fusion of MnO_2, with KOH in presence of O_2 produces a salt W. Alkaline solution of W upon electrolytic oxidation yields another salt X. The manganese containing ions present in W and X, respectively are Y and Z. Correct statement(s) is (are)

O_2 की उपस्थिति में MnO_2 का KOH के साथ संगलन पर एक लवण W उत्पादित होता है W के क्षारीय विलयन का विद्युत अपघटनीय ऑक्सीकरण (electrolytic oxidation) पर एक अन्य लवण X उत्पादित होता है W और X में उपस्थित मैंगनीज रहने वाला आयन क्रमशः Y और Z है। सही कथन है (हैं)

(1) In both Y and Z, π-bonding occurs between p-orbitals of oxygen and d-orbitals of manganese

(2) Both Y and Z are coloured and have tetrahedral shape

(3) In aqueous acidic solution, Y undergoes disproportionation reaction to give Z and MnO_2

(4) Y is diamagnetic in nature while Z is paramagnetic

(1) Y और Z दोनों में, π-आबन्ध ऑक्सीजन के p-कक्षकों एवं मैंगनीज के d-कक्षकों के बीच है।

(2) Y और Z दोनों रंगीन और चतुष्फलकीय (tetrahedral) आकार के है।

(3) जलीय अम्लीय घोल में Y असमानुपातन अभिक्रिया (disproportionation reaction) के पश्चात् Z और MnO_2 देता है।

(4) Y प्रतिचुम्बकीय (diamagnetic) स्वभाव और Z अनुचुम्बकीय (paramagnetic) स्वभाव के है।

Ans. **(1, 2 & 3)**

Sol.

$$MnO_2 \xrightarrow[O_2]{KOH} \underset{(Y)}{MnO_4^{2-}} \xrightarrow[\text{Oxidation}]{\text{electrolytic}} \underset{(Z)}{MnO_4^-}$$

$$MnO_4^{2-} \xrightarrow{\text{acidic medium}} MnO_4^- + MnO_2$$

Sol.

$$MnO_2 \xrightarrow[O_2]{KOH} \underset{(Y)}{MnO_4^{2-}} \xrightarrow[\text{ऑक्सीकरण}]{\text{वैद्युत अपघटनीय}} \underset{(Z)}{MnO_4^-}$$

$$MnO_4^{2-} \xrightarrow{\text{अम्लीय माध्यम}} MnO_4^- + MnO_2$$

Downloaded From ToraLabs

SECTION-3 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal placed.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks : **+3** If ONLY the correct numerical value is entered.
Zero Marks : **0** In all other cases.

खंड 3 (अधिकतम अंकः 18)

- इस खंड में **छः (06)** प्रश्न है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक संख्यात्मक मान **(NUMERICAL VALUE)** हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर के सही संख्यात्मक मान को माउज (mouse) और ऑन–स्क्रीन (on–screen) वर्चुअल नुमेरिक कीपेड (virtaul numeric keypad) के प्रयोग से उत्तर के लिए चिन्हित स्थान पर दर्ज करें। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है , तो संख्यात्मक मान को दशमलव के दो स्थानों तक **ट्रंकेट/राउंड ऑफ (truncate/round-off)** करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :–

पूर्ण अंक : **+3** यदि दर्ज किया गया संख्यात्मक मान **(Numerical value)** ही सही उत्तर है।
शून्य अंक : **0** अन्य सभी परिस्थितियों में।

1. For the following reaction, equilibrium constant K_c at 298 K is 1.6×10^{17}

$Fe^{2+}(aq) + S^{2-}(aq) \rightleftharpoons FeS(s)$

When equal volume of 0.06 M $Fe^{+2}(aq)$ and 0.2 M $S^{-2}(aq)$ solution are mixed, then equilibrium concentration of $Fe^{+2}(aq)$ is found to be $Y \times 10^{-17}$ M . The value of Y is_____

298 K पर, निम्न अभिक्रिया का साम्यावस्था स्थिरांक K_c (equilibrium constant) 1.6×10^{17} है।

$Fe^{2+}(aq) + S^{2-}(aq) \rightleftharpoons FeS(s)$

जब 0.06 M $Fe^{2+}(aq)$ और 0.2 M $S^{2-}(aq)$ के समान आयतनों का मिश्रण किया गया, तब $Fe^{2+}(aq)$ की साम्य सांद्रता (equilibrium concentration) $Y \times 10^{-17}$ M पायी गयी। Y का मान है _____

Ans. **(8.92)**

Sol.

	$Fe^{2+}_{(aq)}$ +	$S^{2-}_{(aq)}$ $\rightleftharpoons$ FeS(s)	$K_C = 1.6 \times 10^{17}$
	0.06 M	0.2 M	
After mixing (मिलाने के पश्चात्)	0.03 M	0.1 M	
	?	0.07 M	

$$1.6 \times 10^{17} = \frac{1}{[Fe^{2+}] \times 0.07}$$

$$\text{or } [Fe^{2+}] = \frac{10^{-17}}{1.6 \times 0.07} = \frac{10^{-15}}{11.2} = \frac{100}{11.2} \times 10^{-17} = 8.928 \times 10^{-17} = Y \times 10^{-17}$$

Answer after rounding is = 8.93
Answer after truncation is = 8.92

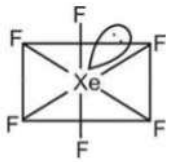
Downloaded From ToraLabs

2. At 143 K, the reaction of XeF_4 with O_2F_2 produces a xenon compound Y. The total number of lone pair(s) electrons present on the whole molecule of Y is _____

143 K पर, XeF_4 और O_2F_2 की अभिक्रिया से एक जिनॉन (xenon) यौगिक Y उत्पादित होता है। सम्पूर्ण अणु Y में एकाकी इलेक्ट्रॉन युग्म (युग्मों) (lone pair(s) of electrons) की कुल संख्या है _____

Ans. **(19)**

Sol. $XeF_4 + O_2F_2 \longrightarrow \underset{(Y)}{XeF_6} + O_2$

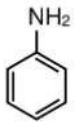


(3 lp on each F and 1 lp on Xe)

(प्रत्येक F पर 3 lp तथा Xe पर 1 lp)

3. Schemes 1 and 2 describe the conversion of P to Q and R to S, respectively. Scheme 3 describes the synthesis of T from Q and S. the total number of Br atoms in a molecule of T is _____

Scheme 1:



P

$\xrightarrow[\text{iv) } H_3O^{\oplus},\Delta \quad \text{v) } SOCl_2\text{, pyridine}]{\text{i) } Br_2\text{(excess), } H_2O \quad \text{ii) } NaNO_2\text{, HCl, 273 K} \quad \text{iii) CuCN/KCN}}$ Q (major)

Scheme 2:

R

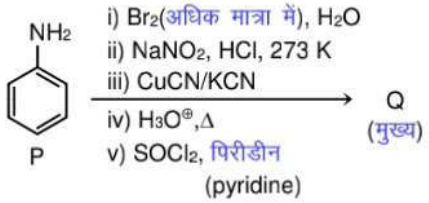
$\xrightarrow[\text{iii) } H^+ \quad \text{iv) } Br_2\text{, } CS_2\text{, 273 K}]{\text{i) Oleum} \quad \text{ii) NaOH,}\Delta}$ S (major)

Scheme 3: S $\xrightarrow[\text{ii) Q}]{\text{i) NaOH}}$ T (major)

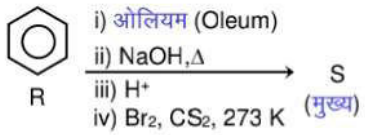
Downloaded From ToraLabs

योजनायें 1 और 2 (Schemes 1 and 2) क्रमशः P से Q तक, तथा R से S तक का रूपान्तरण दर्शाते हैं। योजना 3 में T का संश्लेषण Q और S से दर्शाया गया है। T के एक अणु में Br परमाणुओं की कुल संख्या है_____

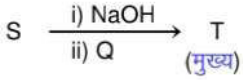
योजना **1:**



योजना **2:**

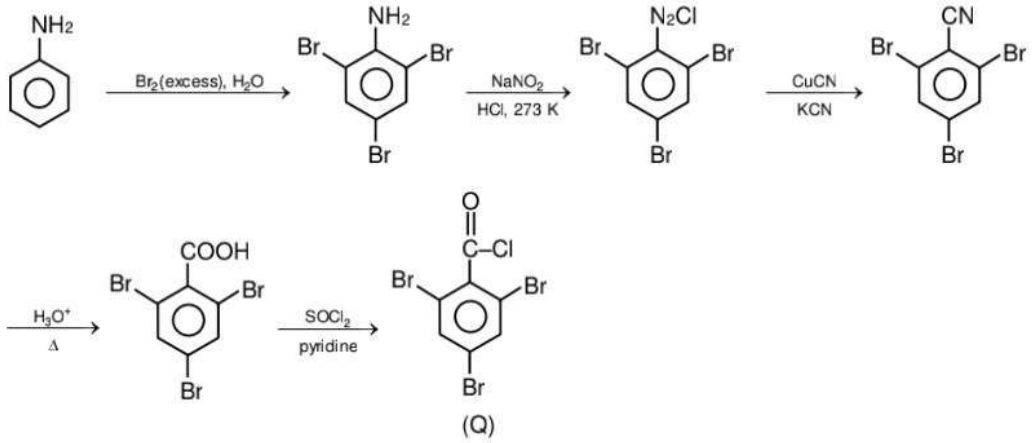


योजना **3:**

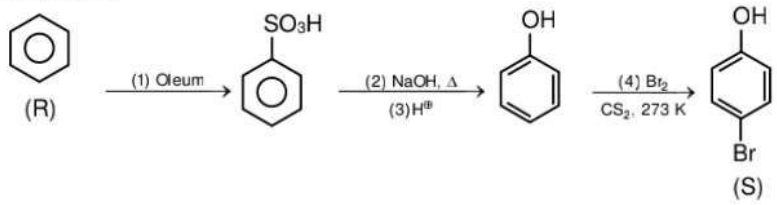


Ans. **(4.00)**

Sol. **Scheme 1:**

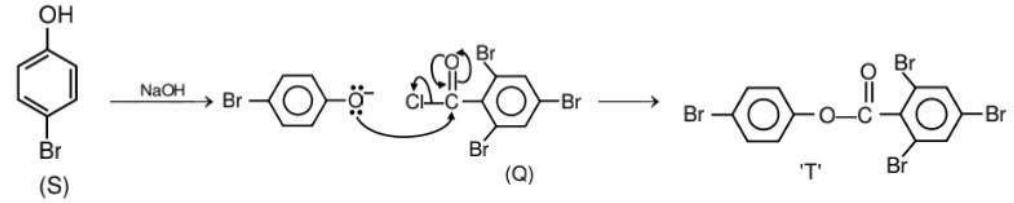


Scheme 2:



Downloaded From ToraLabs

Scheme 3:

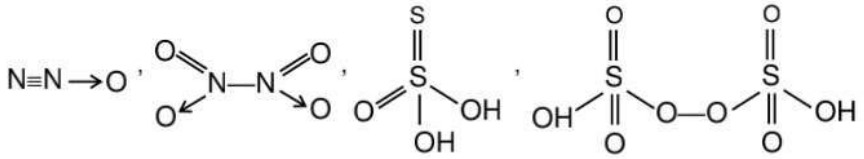


4. Among B_2H_6, $B_3N_3H_6$, N_2O, N_2O_4, $H_2S_2O_3$ and $H_2S_2O_8$, the total number of molecules containing covalent bond between two atoms of the same kind is _____

B_2H_6, $B_3N_3H_6$, N_2O, N_2O_4, $H_2S_2O_3$ और $H_2S_2O_8$, में से जिन अणुओं में दो समान परमाणुओं के बीच सहसंयोजक (covalent) आबंध है, उनकी कुल संख्या हैं _____

Ans. **(4)**

Sol. N_2O_4, $H_2S_2O_3$, N_2O, $H_2S_2O_8$



5. Consider the kinetic date given in the following table for the reaction A + B + C → product.

Experiment No.	[A] (mol dm^{-3})	[B] (mol dm^{-3})	[C] (mol dm^{-3})	Rate of reaction (mol dm^{-3} s^{-1})
1	0.2	0.1	0.1	6.0×10^{-5}
2	0.2	0.2	0.1	6.0×10^{-5}
3	0.2	0.1	0.2	1.2×10^{-4}
4	0.3	0.1	0.1	9.0×10^{-5}

The rate of the reaction for [A] = 0.15 mol dm^{-3}, [B] = 0.25 mol dm^{-3} and [C] = 0.15 mol dm^{-3} is found to be Y × 10^{-5} mol dm^{-3}s^{-1}. The value of Y is _____

निम्न सारणी में, A + B + C → उत्पाद की अभिक्रिया के बलगतिकी आँकड़ों पर गौर कीजिए।

प्रयोग संख्या	[A] (mol dm^{-3})	[B] (mol dm^{-3})	[C] (mol dm^{-3})	अभिक्रिया गति (mol dm^{-3} s^{-1})
1	0.2	0.1	0.1	6.0×10^{-5}
2	0.2	0.2	0.1	6.0×10^{-5}
3	0.2	0.1	0.2	1.2×10^{-4}
4	0.3	0.1	0.1	9.0×10^{-5}

जब [A] = 0.15 mol dm^{-3}, [B] = 0.25 mol dm^{-3} और [C] = 0.15 mol dm^{-3} है, तब अभिक्रिया गति Y × 10^{-5} mol dm^{-3}s^{-1} पायी गयी। Y का मान है _____

Ans. **(6.75)**

Downloaded From ToraLabs

Sol. $r = k\,[A]^a\,[B]^b\,[C]^c$

by experiment no. 1 & 2 $b = 0$

by experiment no. 1 & 3 $c = 1$

by experiment no. 1 & 4 $a = 1$

$r = K\,[A]^1\,[B]^0\,[C]^1$

From Ex. no.1 $6 \times 10^{-5} = k\,(0.2)\,(0.1)$

$k = 3 \times 10^{-3}$

Given $[A] = 0.15$ $[B] = 0.25$ $[C] = 0.15$

$r = k\,[A]^1\,[B]^0\,[C]^1$

$= 3 \times 10^{-3} \times 0.15 \times 1 \times 0.15$

$= 3 \times 0.025 \times 10^{-3}$

$= 6.75 \times 10^{-5}$ mol L^{-1} sec^{-1}

$Y = 6.75$

Sol. $r = k\,[A]^a\,[B]^b\,[C]^c$

प्रयोग संख्या 1 तथा 2 से $b = 0$

प्रयोग संख्या 1 तथा 3 से $c = 1$

प्रयोग संख्या 1 तथा 4 से $a = 1$

$r = K\,[A]^1\,[B]^0\,[C]^1$

प्रयोग संख्या 1 से $6 \times 10^{-5} = k\,(0.2)\,(0.1)$

$k = 3 \times 10^{-3}$

दिया है $[A] = 0.15$ $[B] = 0.25$ $[C] = 0.15$

$r = k\,[A]^1\,[B]^0\,[C]^1$

$= 3 \times 10^{-3} \times 0.15 \times 1 \times 0.15$

$= 3 \times 0.025 \times 10^{-3}$

$= 6.75 \times 10^{-5}$ mol L^{-1} sec^{-1}

$Y = 6.75$

6. On dissolving 0.5 g of a non-volatile non-ionic solute to 39 g of benzene, its vapor pressure decreases from 650 mm Hg to 640 mm Hg. The depression of freezing point of benzene (in K) upon addition of the solute is _____

(Given date : Molar mass and the molal freezing point depression constant of benzene are 78 g mol^{-1} and 5.12 K kg mol^{-1}, respectively)

0.5 g अवाष्पशील अनायनिक विलेय (non-volatile non-ionic solute) को 39 g बेन्जीन (benzene) में घोलने पर, उसका वाष्प दाब 650 mm Hg से 640 mm Hg हो गया। इस विलेय को बेन्जीन में मिलाने के उपरांत, बेन्जीन के हिमांक का अवनमन (depression of freezing point) (K में) है_____

(दिया गया : बेन्जीन का मोलर द्रव्यमान 78 g mol^{-1} और बेन्जीन का मोलल अवनमन स्थिरांक (molal freezing point depression constant) 5.12 K kg mol^{-1} है।)

Ans. **(1.02)**

Sol. $\dfrac{P^0 - P_s}{P_s} = i\left[\dfrac{n_{solute}}{n_{solvent}}\right]$ $\dfrac{P^0 - P_s}{P_s} = i\,\dfrac{n_{\text{विलेय}}}{n_{\text{विलायक}}}$

$\dfrac{650-640}{640} = 1 \times \dfrac{0.5 \times 78}{M \times 39} \Rightarrow M_{solute} = 64$ gm

$\Delta T_f = K_f \times m = 5.12 \times \dfrac{0.5 \times 1000}{64 \times 39} \Rightarrow \Delta T_f = 1.02$

Downloaded From ToraLabs

JEE (ADVANCED) 2019

DATE: 27-05-2019

Questions & Solutions

PAPER – 1 **SUBJECT:MATHEMATICS**

MAX. MARKS: 186 **TIME: 3 HRS.**

PAPER-1 : INSTRUCTIONS TO CANDIDATES

- **Question Paper-1 has three (03) parts: Physics, Chemistry and Mathematics.**
- **Each part has a total eighteen (18) questions divided into three (03) sections (Section-1, Section-2 and Section-3)**
- **Total number of questions in Question Paper-1 are Fifty Four (54) and Maximum Marks are One Hundred Eighty Six (186)**

Type of Questions and Marking Schemes

SECTION-1 (Maximum Marks : 12)

- This section contains **FOUR (04)** questions.
- Each question has **FOUR** options **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the correct option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks	:	**+3** If ONLY the correct option is chosen.
Zero Marks	:	0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks	:	**–1** In all other cases.

SECTION-2 (Maximum Marks : 32)

- This section contains **EIGHT (08)** questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme.

Full Marks	:	**+4** If only (all) the correct option(s) is (are) chosen.
Partial Marks	:	**+3** If all the four options are correct but ONLY three options are chosen.
Partial Marks	:	**+2** If three or more options are correct but ONLY two options are chosen and both of which are correct.
Partial Marks	:	**+1** If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option.
Zero Marks	:	0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks	:	**–1** In all other cases.

Downloaded From ToraLabs

SECTION-3 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal placed.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks : **+3** If ONLY the correct numerical value is entered.

Zero Marks : **0** In all other cases.

Answering Questions :

- To select the option(s), use the mouse to click on the corresponding button(s) of the option(s).
- To deselect the chosen option for the questions of **SECTION-1**, click on the button of the chosen option again or click on the **Clear Response** button to clear the chosen option.
- To deselect the chosen option(s) for the questions of **SECTION-2**, click on the button(s) of the chosen option(s) again or click on the **Clear Response** button to clear all the chosen options.
- To change the option(s) of a previously answered question of **SECTION-1** and **SECTION-2** first deselect as given above and then select the new option(s).
- To answer questions of **SECTION-3**, use the mouse to click on numbers (and/or symbols) on the on–screen virtual numeric keypad to enter the numerical value in the space provided for answer.
- To change the answer of a question of **SECTION-3**, first click on the **Clear Response** button to clear the entered answer and then enter the new numerical value.
- To mark a question **ONLY** for review (i.e. without answering it), click on the **Mark for Review & Next** button.
- To mark a question for review (after answering it), click on **Mark for Review & Next** button – the answered question which is also marked for review will be evaluated.
- To save the answer, click on the **Save & Next** button – the answered question will be evaluated.

Downloaded From ToraLabs

PART-III : MATHEMATICS

SECTION-1 (Maximum Marks : 12)

- This section contains **FOUR (04)** questions.
- Each question has **FOUR** options **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the correct option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks	:	**+3** If ONLY the correct option is chosen.
Zero Marks	:	0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks	:	**–1** In all other cases.

खंड 1 (अधिकतम अंकः 12)

- इस खंड में चार **(04)** प्रश्न है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए सही चार विकल्प दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से **केवल एक** ही विकल्प सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए दिए हुए विकल्पों में से सही उत्तर से संबधित विकल्प को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :

  पूर्ण अंक : **+3** यदि सिर्फ सही विकल्प ही चुना गया है।

  शून्य अंक : **0** यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है)।

  ऋण अंक : **–1** अन्य सभी परिस्थितियों में।

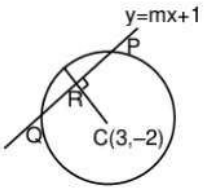
1. A line $y = mx + 1$ intersect the circle $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$ at points P and Q. If the midpoint of the line segment PQ has x-coordinate $-\frac{3}{5}$, then which one of the following options is correct

एक रेखा $y = mx + 1$ वृत्त $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$ को बिन्दुओं P आरूैर Q पर प्रतिच्छेद करती है। अगर रेखाखण्ड (line segment) PQ के मध्यबिन्दु का x-निर्देशांक (x-corrdinate) $-\frac{3}{5}$ है, तब निम्नलिखित में से कौनसा एक विकल्प सही है ?

(1) $6 \le m < 8$ (2) $2 \le m < 4$ (3) $4 \le m < 6$ (4) $-3 \le m < -1$

Ans. **(2)**

Sol.



For point R, $x = -\frac{3}{5} \Rightarrow y = 1 - \frac{3m}{5}$ $\quad R\left(-\frac{3}{5}, 1 - \frac{3m}{5}\right)$

Downloaded From ToraLabs

slope of CR = $\dfrac{1-\dfrac{3m}{5}+2}{-\dfrac{3}{5}-3} = -\dfrac{1}{m} \Rightarrow \quad \dfrac{15-3m}{-3-15} = -\dfrac{1}{m}$

$15m - 3m^2 = 18$

$m^2 - 5m + 6 = 0$

$m = 2, 3$

$2 \le m \le 4$

2. Let $M = \begin{bmatrix} \sin^4\theta & -1-\sin^2\theta \\ 1+\cos^2\theta & \cos^4\theta \end{bmatrix} = \alpha I + \beta M^{-1}$

Where $\alpha = \alpha\ (\theta)$ and $\beta = \beta(\theta)$ are real numbers and I is the 2 × 2 identity matrix.

If α^* = is the minimum of the set $\{a(\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$ and

β^* = is the minimum of the set $\{\beta(\theta) : \theta \in [0, 2\pi)\}$

Then the value of $\alpha^* + \beta^*$ is

माना कि $M = \begin{bmatrix} \sin^4\theta & -1-\sin^2\theta \\ 1+\cos^2\theta & \cos^4\theta \end{bmatrix} = \alpha I + \beta M^{-1}$

जहाँ $\alpha = \alpha\ (\theta)$ और $\beta = \beta(\theta)$ वास्तविक (real) संख्याएँ है, और I एक 2 × 2 तत्समक-आव्यूह (2 × 2 identity matrix) है। यदि

समुच्चय $\{a(\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$ का निम्नतम (minimum) α^* है और

समुच्चय $\{\beta(\theta) : \theta \in [0, 2\pi)\}$ का निम्नतम (minimum) β^* है,

तो $\alpha^* + \beta^*$ का मान है -

(1) $\dfrac{-37}{16}$ (2) $\dfrac{-29}{16}$ (3) $\dfrac{-31}{16}$ (4) $\dfrac{-17}{16}$

Ans. **(2)**

Sol. $m = \sin^4\theta \,.\, \cos^4\theta + (1 + \sin^2\theta)(1 + \cos^2\theta)$

$2 + \sin^4\cos^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta$

$$\begin{bmatrix} \sin^4\theta & -(1+\sin^2\theta) \\ 1+\cos^2\theta & \cos^4\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \beta = \frac{1}{|m|}\begin{bmatrix} \cos^4\theta & 1+\sin^2\theta \\ -1-\cos^2\theta & \sin^4\theta \end{bmatrix}$$

$\sin^4\theta = \dfrac{\alpha+\beta}{|m|}\cos^4\theta$, $-1 - \sin^2\theta = \dfrac{\beta}{|m|}(1 + \sin^2\theta)$

$\beta = -|m|$

$\beta = -[\sin^4\theta\cos^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta + 2] = -[t^2 + t + 2] \Rightarrow \quad \beta_{min} = -\dfrac{37}{16}$

Downloaded From ToraLabs

$\alpha = \sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{2}(\sin^2 2\theta) \quad \Rightarrow \quad \min\alpha = \frac{1}{2}$

$\alpha + \beta = -\frac{37}{16} + \frac{1}{2} = -\frac{37}{16} + \frac{8}{16} = -\frac{29}{16}$

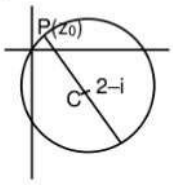
3. Let S be the set of all complex numbers z satisfying $|z - 2 + i| \geq \sqrt{5}$. If the complex number z_0 is such that $\frac{1}{|z_0 - 1|}$ is the maximum of the set $\left\{\frac{1}{|z-1|} : z \in s\right\}$, then the principal argument of $\frac{4 - z_0 - \bar{z}_0}{z_0 - \bar{z}_0 + 2i}$ is

माना कि S उन सभी सम्मिश्र संख्याओं (complex numbers) z का समुच्चय (set) है जो $|z - 2 + i| \geq \sqrt{5}$ को संतुष्ट करती है। यदि एक सम्मिश्र संख्या z_0 ऐसी है जिससे $\frac{1}{|z_0 - 1|}$ समुच्चय $\left\{\frac{1}{|z-1|} : z \in s\right\}$ का उच्चतम (maximum) है, तब $\frac{4 - z_0 - \bar{z}_0}{z_0 - \bar{z}_0 + 2i}$ का मुख्य कोणांक (principal argument) है

(1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{3\pi}{4}$ (3) $-\frac{\pi}{2}$ (4) $\frac{\pi}{2}$

Ans. **(3)**

Sol.



$|z - (2 - i)| \geq \sqrt{5}$

For $|z_0 - 1|$ to be minimum, $z_0 = x_0 + iy_0$ is at point P as shown in figure

$\arg\left(\frac{4 - (z_0 + \bar{z}_0)}{z_0 - \bar{z}_0 + 2i}\right) = \arg\left(\frac{4 - 2x}{2iy + 2i}\right) = \arg\left(\frac{-i(2-x)}{y+2}\right) = \arg(-i\lambda) = -\frac{\pi}{2} \quad (\because \lambda > 0)$

4. The area of the region $\{(x, y) : xy \leq 8, 1 \leq y \leq x^2\}$ is

क्षेत्र $\{(x, y) : xy \leq 8, 1 \leq y \leq x^2\}$ का क्षेत्रफल (area) है -

(1) $16 \log_e 2 - 6$ (2) $8 \log_e 2 - \frac{7}{3}$ (3) $16 \log_e 2 - \frac{14}{3}$ (4) $8 \log_e 2 - \frac{14}{3}$

Ans. **(3)**

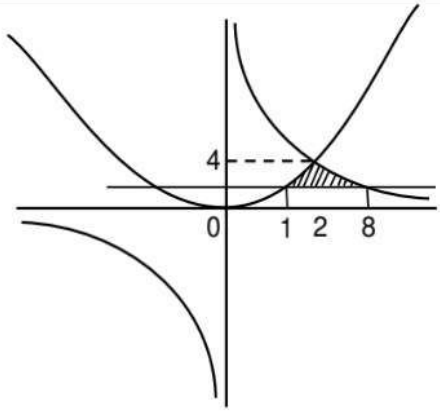
Sol. $xy \leq 8$

$1 \leq y \leq x^2$

$x^2 . x = 8$

$x = 2$

Downloaded From ToraLabs



$$\text{Required Area} = \int_1^4 \left(\frac{8}{y} - \sqrt{y}\right) dy = \left[8\ell n\, y - \frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 = 8\,\ell n4 - \frac{2}{3}\,.\,8 - 0 + \frac{2}{3} = 16\ell n2 - \frac{14}{3}$$

SECTION-2 (Maximum Marks : 32)

- This section contains **EIGHT (08)** questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme.

Full Marks :	**+4** If only (all) the correct option(s) is (are) chosen.
Partial Marks :	**+3** If all the four options are correct but ONLY three options are chosen.
Partial Marks :	**+2** If three or more options are correct but ONLY two options are chosen and both of which are correct.
Partial Marks :	**+1** If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option.
Zero Marks :	0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks :	**–1** In all other cases.

खंड 2 (अधिकतम अंकः 32)

- इस खंड में **आठ (08)** प्रश्न है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से **एक या एक से अधिक** विकल्प सही है(हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, दिए हुए विकल्पों में से सही उत्तर (उत्तरों) से संबधित विकल्प (विकल्पों) को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :

पूर्ण अंक	: **+4** यदि केवल (सारे) सही विकल्प (विकल्पों) को चुना गया है।
आंशिक अंक	: **+3** यदि चारों विकल्प सही हैं परन्तु केवल तीन विकल्पों को चुना गया है।
आंशिक अंक	: **+2** यदि तीन या तीन से अधिक विकल्प सही है परन्तु केवल दो विकल्पों को चुना गया है और दोंनो चुने हुए विकल्प सही विकल्प हैं।
आंशिक अंक	: **+1** यदि दो या दो से अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल एक विकल्प को चुना गया है और चुना हुआ विकल्प सही विकल्प है।
शून्य अंक	: **0** यदि किसी भी विकल्प को नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है)।
ऋण अंक	: **–1** अन्य सभी परिस्थितियों में।

Downloaded From ToraLabs

1. Define the collectionss $\{E_1, E_2, E_3, ...\}$ of ellipses and $\{R_1, R_2, R_3, ...\}$ of rectangles of follows :

$E_1 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1;$

R_1 : rectangle of largest area with sides parallel to the axes, inscribed in E_1:

E_n : ellipse $\frac{x^2}{a_n^2} + \frac{y^2}{b_n^2} = 1$ of largest area inscribed in R_{n-1}, $n > 1$

R_n : rectangle of largest area, with sides parallel to the axes, inscribed in E_n, $n > 1$

Then which of the following options is/are correct ?

(1) The eccentricities of E_{18} and E_{19} are NOT equal

(2) The length of latus rectum of E_9 is $\frac{1}{6}$

(3) $\sum_{n=1}^{N}(\text{area of } R_n) < 24$, for each positive integer N

(4) The distance of a focus from the centre in E_9 is $\frac{\sqrt{5}}{32}$

दीर्घवृत्तों (Ellipses) $\{E_1, E_2, E_3, ...\}$ और आयतों (rectangles) $\{R_1, R_2, R_3, ...\}$ के संग्रहों को निम्न प्रकार से परिभाषित करें :

$E_1 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1;$

R_1 : अधिकतम क्षेत्र (largest area) का आयत, जिसकी भुजाएं अक्षों (axes) के समान्तर है, और जो E_1 में अंतर्स्थित (inscribed) है

E_n : अधिकतम क्षेत्र वाला दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a_n^2} + \frac{y^2}{b_n^2} = 1$ जो R_{n-1}, $n > 1$ में अंतरिर्स्थत है

R_n : अधिकतम क्षेत्र का आयत, जिसकी भुजाएं अक्षों के समान्तर है, और जो E_n, $n > 1$ में अंतर्स्थित है।

तब निम्न में से कौनसा (से) विकल्प सही है (है) ?

(1) E_{18} और E_{19} की उत्केन्द्रतायें (eccentricities) समान **नहीं** है

(2) E_9 के नाभिलम्ब (latus rectum) की लम्बाई $\frac{1}{6}$ है

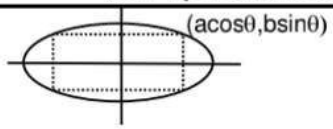
(3) प्रत्येक पूर्णांक N के लिए $\sum_{n=1}^{N}$ (R_n का क्षेत्रफल) < 24 है

(4) E_9 में केन्द्र से एक नाभि (focus) की दूरी $\frac{\sqrt{5}}{32}$ है

Ans. **(2,3)**

Downloaded From ToraLabs

Sol.



Area Max when $\theta = 45°$

	a	b
E_1	3	2
E_2	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$
E_3	$\frac{3}{(\sqrt{2})^2}$	$\frac{2}{(\sqrt{2})^2}$
⋮	⋮	⋮
E_9	$\frac{3}{(\sqrt{2})^8}$	$\frac{2}{(\sqrt{2})^8}$

(A) $E_1 + E_2 + \ldots + E_m$

when $m \to \infty$ $\dfrac{2ab}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}} = 4ab = 4.3.2 = 24$

(B) Length of LR is ellipse $= \dfrac{2b^2}{a} = 2.\dfrac{4.2^4}{2^8.3} = \dfrac{1}{6}$

(C) distance between focus and center of ellipse $= a_9\, e_9 = \dfrac{3}{2^4}.\dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{16}$

2. In a non-right-angled triangle ΔPQR, Let p, q, r denote the lengths of the sies opposite to the angles at P, Q, R respectively. The median form R meets the side PQ at S, the perpendicualr4 from P meets the side QR at E, and RS and PE intersect at O. If $p = \sqrt{3}$, $q = 1$, and the radius of the circumcircle of the ΔPQR equals 1, then which of the following options is/are correct ?

(1) Length of RS $= \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ (2) Area of $\Delta SOE = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$

(3) Radius of incircle of $\Delta PQR = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})$ (4) Length of OE $= \dfrac{1}{6}$

एक असमकोणीय त्रिभुज (non-right-angled) ΔPQR के लिए, माना कि p, q, r क्रमशः कोण P, Q, R के सामने वाली भुजाओं की लम्बाइयाँ दर्शायी है। R से खींची गयी माध्यिका (median) भुजा PQ से S पर मिलती है, P से खींचा गया अभिलम्ब (perpendicular) भुजा QR से E पर मिलता है तथा RS और PE एक दूसरे को O पर काटती है। यदि $p = \sqrt{3}$, $q = 1$ और ΔPQR के परिवृत्त (circumcircle) की त्रिज्या (radius) 1 है, तब निम्न में से कौन सा (से) विकल्प सही है (हैं) ?

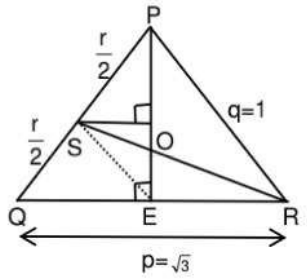
(1) RS की लम्बाई $= \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ (2) ΔSOE का क्षेत्रफल (area) $= \dfrac{\sqrt{3}}{12}$

(3) ΔPQR के अंतर्वृत (incircle) की त्रिज्या $= \dfrac{\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})$ (4) OE की लम्बाई $= \dfrac{1}{6}$

Downloaded From ToraLabs

Ans. (1,3,4)

Sol.



$$\frac{p}{\sin P} = \frac{q}{\sin Q} = 2(1) \quad \Rightarrow \quad \sin P = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin Q = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \quad \angle P = 60°$ or $120°$ and $\angle Q = 30°$ or $150°$

because $\angle P + \angle Q$ must be less than 180° but not equal to 90°

$\angle P = 120°$ and $\angle Q = 30°$ and $\angle R = 30°$ $\qquad \frac{r}{\sin R} = 2 \Rightarrow r = 1$

Now length of median $RS = \frac{1}{2}\sqrt{2p^2 + 2q^2 - r^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6+2-1} = \frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow$ option (A) is correct

$$\text{Inradius} = \frac{2\Delta}{p+q+r} = \frac{\frac{2pqr}{4\times(1)}}{p+q+r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1\times1\times\sqrt{3}}{1+1+\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{1}\right) \Rightarrow \text{option (C) is correct}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times PE = \frac{pqr}{4(1)} \text{ (equal area of } \Delta) \quad \Rightarrow \quad PE = \frac{1\times1\times\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad OE = \frac{2(\text{Area of } \Delta OQR)}{QR} = \frac{2\times\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}.1.\sqrt{3}\sin 30°\right)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}$$

3. Let $f : R \to R$ be given by

$$f(x) = \begin{cases} x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 3x + 1, & x < 0 \\ x^2 - x + 1 & 0 \le x < 1 \\ (2/3)x^3 - 4x^2 + 7x - (8/3) & 1 \le x < 3 \\ (x-2)\ell n(x-2) - x + (10/3) & x \ge 3 \end{cases}$$

Then which of the following options is/are Correct ?

(1) f' is NOT differentiable at $x = 1$

(2) f is increasing on $(-\infty, 0)$

(3) f is onto

(4) f' has a local maximum at $x = 1$

Downloaded From ToraLabs

माना कि $f : R \to R$ निम्न प्रकार से दिया है

$$f(x) = \begin{cases} x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 3x + 1, & x < 0 \\ x^2 - x + 1 & 0 \le x < 1 \\ (2/3)x^3 - 4x^2 + 7x - (8/3) & 1 \le x < 3 \\ (x-2)\ell n(x-2) - x + (10/3) & x \ge 3 \end{cases}$$

तब निम्न में से कौन सा (से) विकल्प सही है (हैं) ?

(1) $x = 1$ पर f' अवकलनीय **नहीं** (NOT differentiable) है।

(2) f अंतराल $(-\infty,0)$ में वर्धमान (increasing) है

(3) f आच्छादक (onto) है।

(4) f' का एक स्थानीय उच्चतम (local maximum) $x = 1$ पर है

Ans. **(1,3,4)**

Sol. $$f(x) = \begin{cases} x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 3x + 1 & x < 0 \\ x^2 - x + 1 & 0 \le x < 1 \\ \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 7x - \frac{8}{3} & 1 \le x < 3 \\ (x-2)\ln(x-2) - x + \frac{10}{3} & x \ge 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 5(x+1)^4 - 2 & x < 0 \\ 2x - 1 & 0 \le x < 1 \\ 2x^2 - 8x + 7 & 1 \le x < 3 \\ \ln(x-2) & x \ge 3 \end{cases}$$

$x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 3x + 1$ takes value between $-\infty$ to 1

Also $(x-2)\ln(x-2) - x + \frac{10}{3}$ takes value between $\frac{1}{3}$ to ∞

So, range of f(x) is R. So option (A) is correct

$f''(1^-) = 2$ and $f''(1^+) = -4$

so $f'(x)$ is non-diff at $x = 1$ so option (B) is correct

$f'(x)$ has local maxima at $x = 1$ so option (C) is correct

4. Let α and β be the roots of $x^2 - x - 1 = 0$ with $\alpha > \beta$. For alll postive integers n. define

$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, n \ge 1$

$b_1 = 1$ and $b_n = a_n = a_{n-1} + a_{n+1}, n \ge 2$

the which of the follwing options is/are correct ?

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \frac{10}{89}$

(2) $b_n = \alpha^n + \beta^n$ for all $n \ge 1$

(3) $a_1 + a_2 + \ldots a_n = a_{n+2} - 1$ for all $n \ge 1$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n} = \frac{8}{89}$

Downloaded From ToraLabs

माना कि $x^2 - x - 1 = 0$ के मूल (roots) α और β हैं, जहाँ $\alpha > \beta$ है। सभी धनात्मक पूर्णांकों n के लिए निम्न को परिभाषित किया गया है

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, n \geq 1$$

$b_1 = 1$ और $b_n = a_n = a_{n-1} + a_{n+1}, n \geq 2$

तब निम्न में से कौनसा (से) विकल्प सही है (हैं)-

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \frac{10}{89}$

(2) प्रत्येक $n \geq 1$ के लिए, $b_n = \alpha^n + \beta^n$

(3) प्रत्येक $n \geq 1$ के लिए, $a_1 + a_2 + \ldots a_n = a_{n+2} - 1$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n} = \frac{8}{89}$

Ans. **(1,2,3)**

Sol. (1) $$b_n = a_{n+1} + a_{n-1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n-1}(\alpha^2 + 1) - \beta^{n-1}(\beta^2 + 1)}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha^{n-1}(\alpha + 2) - \beta^{n-1}(\beta + 2)}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n-1}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) - \beta^{n-1}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\sqrt{5}\alpha^{n-1}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) - \sqrt{5}\beta^{n-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\alpha - \beta} = \frac{\sqrt{5}(\alpha^n + \beta^n)}{\alpha - \beta} = \alpha^n + \beta^n \qquad \because \quad \alpha - \beta = \sqrt{5}$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n} = \sum\left(\frac{\alpha}{10}\right)^n + \sum\left(\frac{\beta}{10}\right)^n = \frac{\frac{\alpha}{10}}{1 - \frac{\alpha}{10}} + \frac{\frac{\beta}{10}}{1 - \frac{\beta}{10}} = \frac{\alpha}{10 - \alpha} + \frac{\beta}{10 - \beta}$$

$$= \frac{10(\alpha + \beta) - 2\alpha\beta}{100 - 10(\alpha + \beta) + \alpha\beta} = \frac{10 + 2}{89} = \frac{12}{89}$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum \frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha - \beta)10^n} = = \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{\frac{\alpha}{10}}{1 - \frac{\alpha}{10}} - \frac{\frac{\beta}{10}}{1 - \frac{\beta}{10}}\right) \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{\alpha}{10 - \alpha} - \frac{\beta}{10 - \beta}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta} \cdot \frac{(10(\alpha - \beta) - \alpha\beta + \alpha\beta)}{100 - 10(\alpha + \beta) + \alpha\beta} = \frac{10}{89}$$ Option (C) is correct.

(4) $$a_1 + a_2 + \ldots a_n = \Sigma a_i = \frac{\Sigma\alpha^i - \Sigma\beta^i}{\alpha - \beta} = \frac{\frac{\alpha(1 - \alpha^n)}{(1 - \alpha)} - \frac{\beta(1 - \beta^n)}{(1 - \beta)}}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{(\alpha + 1)(1 - \alpha^n) - (\beta + 1)(1 - \beta^n)}{(1 - \alpha)(1 - \beta)(\alpha - \beta)} = \frac{\alpha^2 - \alpha^{n+2} - \beta^2 + \beta^{n+2}}{(1 - \alpha)(1 - \beta)(\alpha - \beta)} = \frac{\sqrt{5} + \beta^{n+2} - \alpha^{n+2}}{\beta - \alpha} = -1 + a_{n+2}$$

Downloaded From ToraLabs

5. Let L_1 and L_2 denote the lines $\vec{r} = \hat{i} + \lambda(-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}), \lambda \in R$ and $\vec{r} = \mu(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}), \mu \in R$ respectively. If L_3 is a line which is perpendicular to both L_1 and L_2 and cuts both of them, then which of the following options describe(s) L_3 ?

माना कि L_1 और L_2 क्रमशः निम्न रेखाएं है : $\vec{r} = \hat{i} + \lambda(-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}), \lambda \in R$ और $\vec{r} = \mu(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}), \mu \in R$ यदि L_3 एक रेखा है जो L_1 और L_2 दोनों के लम्बवत है और दोनों को काटती है, तब निम्नलिखित विकलपों में से कौन सा (से) L_3 को निरूपित करता (करते) है (हैं) ?

(1) $\vec{r} = \frac{1}{3}(2\hat{i} + \hat{k}) + t(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}), t \in R$

(2) $\vec{r} = \frac{2}{9}(4\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) + t(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}), t \in R$

(3) $\vec{r} = \frac{2}{9}(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + t(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}), t \in R$

(4) $\vec{r} = t(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}), t \in R$

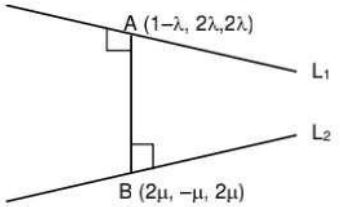
Ans. **(1,2,3)**

Sol. Both given lines are skew lines.

So direction ratios of any line perpendicular to these lines are $6\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$

<2, 2, –1>

Points at shortest distance between given lines are



$\overrightarrow{AB} \perp$ line L_1

$\overrightarrow{AB} \perp$ line L_2

So $A\left(\frac{8}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right)$

Now equation of required line $\vec{r} = \left(\frac{8}{9}\hat{i} + \frac{2}{9}\hat{j} + \frac{2}{9}\hat{k}\right) + \alpha\left(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}\right)$

Now by option B, C, D are correct.

Downloaded From ToraLabs

6. There are three bags B_1, B_2 and B_3. The bag B_1 contains 5 red and 5 green balls. B_2 contains 3 red and 5 green balls and B_3 contains 5 red and 3 green balls. Bags B_1, B_2 and B_3 have probabilities 3/10, 3/10 and 4/10 respectively of being chosen. A bag is selected at random and a ball is chosen at random from the bag. Then which of the following options is/are correct ?

(1) Probability that the chosen ball is green, given that the selected bag is B_3, equals $\frac{3}{8}$

(2) Probability that the selected bag is B_3, given that the chosen ball is green, equals $\frac{5}{13}$

(3) Probability that the chosen ball is green equals $\frac{39}{80}$

(4) Probability that the selected bag is B_3, given that the chosen ball is green, equals $\frac{3}{10}$

तीन थैले (bags) B_1, B_2 और B_3 है। B_1 थैले में 5 लाल (red) और 5 हरी (green) गेंदे हैं, B_2 में 3 लाल ओर 5 हरी गेंदे है, और B_3 में 5 लाल और 3 हरी गेंदे है। थैले B_1, B_2 और B_3 के चुने जाने की प्रायिकतायें क्रमशः 3/10, 3/10 और 4/10 हैं। एक थैला यादृच्छिक (at random) लिया जाता है और एक गेंद उस थैले में से यादृच्छिया चुनी जाती है। तब निम्न में से कौनसा (से) विकलप सही है (है) ?

(1) चुनी गयी गेंद के हरे होने की प्रायिकता $\frac{3}{8}$ है, जब यह ज्ञात है कि चुना हुआ थैला B_3 है

(2) चुने हुए थैले के B_3 होने की प्रायिकता $\frac{5}{13}$ है, जब यह ज्ञात है कि चुनी गयी गेंद हरी है

(3) चुनी गयी गेंद के हरे होने की प्रायिकता $\frac{39}{80}$ है

(4) चुने हुए थैले के B_3 होने के साथ साथ गेंद के हरे होने की प्रायिकता $\frac{3}{10}$ है

Ans. **(1,3)**

Sol.

	Bag_1	Bag_2	Bag_3
Red Balls	5	3	5
Green Balls	5	5	3
Total	10	8	8

(1) $P(\text{Ball is Green}) = P(B_1)P(G/B_1) + P(B_2)P(G/B_2) + P(B_3)P(G/B_3)$

$$= \frac{3}{10}\times\frac{5}{10} + \frac{3}{10}\times\frac{5}{8} + \frac{4}{10}\times\frac{3}{8} = \frac{39}{80}$$

(2) $P(\text{Ball chosen is Green/ Ball is from } 3^{rd} \text{ Bag}) = \frac{3}{8}$

(3,4) $P(\text{Ball is from } 3^{rd} \text{ Bag / Ball chosen is Green}) = \dfrac{P(B_3)P(G/B_3)}{P(B_1)P(G/B_1) + P(B_2)P(G/B_2) + P(B_3)P(G/B_3)}$

$P(B_1) = \frac{3}{10}$

$P(B_2) = \frac{3}{10}$

$$P(B_3) = \frac{4}{10} = \frac{\frac{4}{10}\times\frac{3}{8}}{\frac{3}{10}\times\frac{5}{10} + \frac{3}{10}\times\frac{5}{8} + \frac{4}{10}\times\frac{3}{8}} = \frac{4}{13}$$

Downloaded From ToraLabs

7. Let Γ denote a curve $y = f(x)$ which is in the first quadrant and let the point (1, 0) lie on it. Let the tangent to Γ at a point P intersect the y-axis at Y_P. If PY_p has length 1 for each point P on Γ. Then which of the following options is/are correct?

माना कि Γ एक वक्र $y = f(x)$ है जो प्रथम चतुर्थांश (first quadrant) में है ओर माना कि बिन्दु (1, 0) उस पर स्थित है। माना कि Γ के बिन्दु P पर खींची गयी स्पर्श रेखा (tangent) y-अक्ष को Y_P. पर प्रतिच्छेद (intersect) करती है। यदि Γ के प्रत्येक बिन्दु P के लिए PY_p की लम्बाई 1 है, तब निम्न में से कौन सा (से) कथन सही है (है) ?

(1) $y = -\ell n\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + \sqrt{1-x^2}$

(2) $xy' + \sqrt{1-x^2} = 0$

(3) $xy' - \sqrt{1-x^2} = 0$

(4) $y = \ell n\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \sqrt{1-x^2}$

Ans. **(2,4)**

Sol. $(a, f(a)) \equiv r$

$f'(x)$ be differentiation of $f(x)$ equation of tangent

$(y - f(a)) = f'(a)(x - a)$

put $x = 0$

$y - f(a) = -af'(a)$

$y = f(a) - af'(a)$

$y_p = (0, f(a) - af'(a))$

$py_p = \sqrt{a^2 + (af'(a))^2} = 1$

$a^2 + a^2 (f'(a))^2 = 1$

$(f'(a))^2 = \frac{1-a^2}{a^2}$

$\int (f'(x)) = \pm\int \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}$

put $\sqrt{1-x^2} = t$

$\Rightarrow \quad y = \pm\int \frac{-t^2dt}{1-t^2} = \pm\left(t - \frac{1}{2}\ell n\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right) + c = \pm\left(t - \frac{1}{2}\ell n\frac{(1+t)^2}{1-t^2}\right) + c = \pm\left(\sqrt{1-x^2} - \ell n\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + c$

$\Rightarrow \quad$ Put $x = 1$ and $y = 0 \Rightarrow c = 0$

Downloaded From ToraLabs

8. Let $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & b & 1 \end{bmatrix}$ and $\text{adj } M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

where a and b are real numbers. Which of the following options is/are correct ?

(1) $\det(\text{adj } M^2) = 81$ (2) $a + b = 3$

(3) If $M\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, then $\alpha - \beta + \gamma = 3$ (4) $(\text{adj } M)^{-1} + \text{adj } M^{-1} = -M$

माना कि $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & b & 1 \end{bmatrix}$ और $\text{adj } M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ (real numbers) है। निम्न में से कौन सा (से) विकल्प सही है (है) ?

(1) $\det(\text{adj } M^2) = 81$ (2) $a + b = 3$

(3) यदि $M\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, तब $\alpha - \beta + \gamma = 3$ (4) $(\text{adj } M)^{-1} + \text{adj } M^{-1} = -M$

Ans. **(2,3,4)**

Sol. $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & b & 1 \end{bmatrix}$ and और $\text{adj } M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

$(\text{adj}M)_{11} = 2 - 3b$, $(\text{adj}M)_{22} = -3a$

$\Rightarrow 2 - 3b = -1$

$\Rightarrow b = 1$ & $-3a = -6 \Rightarrow a = 2$

$|\text{adj}M| = -1(6 - 6) - 1(-8 + 10) - 1(24 - 30) = 4$

$\det\{\text{adj}(M^2)\} = |\det(\text{adj}M)|^2 = 16$

Now अब $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \beta + 2\gamma = 1,\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 2,\ 3\alpha + \beta + \gamma = 3$

On solving $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 1$ so $\alpha - \beta + \gamma = 3$

Now $(\text{adj } M)^{-1} + (\text{adj } M)^{-1} = 2(\text{adj } M)^{-1} = \dfrac{2\text{adj}(\text{adj}M)}{|\text{adj } M|} = \dfrac{1}{2}|M|^{3-2}M = -M$

Downloaded From ToraLabs

SECTION-3 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal placed.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks : **+3** If ONLY the correct numerical value is entered.

Zero Marks : **0** In all other cases.

खंड 3 (अधिकतम अंकः 18)

- इस खंड में **छः (06)** प्रश्न है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक संख्यात्मक मान **(NUMERICAL VALUE)** हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर के सही संख्यात्मक मान को माउज (mouse) और ऑन–स्क्रीन (on–screen) वर्चुअल नुमेरिक कीपेड (virtaul numeric keypad) के प्रयोग से उत्तर के लिए चिन्हित स्थान पर दर्ज करें। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है , तो संख्यात्मक मान को दशमलव के दो स्थानों तक **ट्रंकेट/राउंड ऑफ (truncate/round-off)** करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :–

पूर्ण अंक : **+3** यदि दर्ज किया गया संख्यात्मक मान **(Numerical value)** ही सही उत्तर है।

शून्य अंक : **0** अन्य सभी परिस्थितियों में।

1. Three lines are given by

$$\vec{r} = \lambda\hat{i},\ \lambda \in R$$

$$\vec{r} = \mu(\hat{i}+\hat{j}),\ n \in R \text{ and } \vec{r} = \nu(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}),\ \nu \in R$$

Let the lines cut the plane $x + y + z = 1$ at he points A, B and C respectively. If the area of the triangle ABC is Δ then the value of $(6\underline{\Delta})^2$ equals .....

तीन रेखाएं क्रमशः

$$\vec{r} = \lambda\hat{i},\ \lambda \in R$$

$$\vec{r} = \mu(\hat{i}+\hat{j}),\ n \in R \text{ and } \vec{r} = \nu(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}),\ \nu \in R$$

द्वारा दी गयी हैं। माना कि रेखाएं समतल (plane) $x + y + z = 1$ को क्रमशः बिन्दुओं A, B और C पर काटती हैं। यदि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल Δ है तब $(6\underline{\Delta})^2$ का मान बराबर .....

Ans. **(0.75)**

Downloaded From ToraLabs

Sol. Put $(\lambda, 0, 0)$ in $x + y + z = 1$ $\Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow P(1, 0, 0)$

Put $(\mu, \mu, 0)$ $\Rightarrow 2\mu = 1$ $\Rightarrow Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

Put (γ, γ, γ) $\Rightarrow \gamma = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow R\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Area of triangle PQR $= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{\hat{i} - \hat{j}}{2}\right) \times \left(\frac{2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}}{3}\right)\right| = \frac{1}{12}\left|\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right| = \frac{\sqrt{3}}{12} \Rightarrow (6\Delta)^2 = 0.75$

2. Let S be the sample space of all 3×3 matrices with entries from the set $\{0, 1\}$. Let the events

$E_1 = \{A \in S : \det A = 0\}$ and

$E_2 = \{A \in S : \text{Sum of entries of A is } 7\}$

If a matrix is chosen at random from S, then the conditional probability $P(E_1|E_2)$ equals _____

माना कि S ऐसे 3×3 आव्यूहों (matrices) का प्रतिदर्श समिष्ट (sample space) है जिनकी प्रविष्टियाँ (entries) समुच्चय $\{0, 1\}$ से है। माना कि घटनाएँ E_1 एवं E_2 निम्न हैं

$E_1 = \{A \in S : \det A = 0\}$ और

$E_2 = \{A \in S :$ A की प्रतिष्टियों का कुल योग 7 है$\}$

यदि एक आव्यूह S से यादृच्छिक (randomly) चुना जाजा है तब सप्रतिबंध प्रायिकता (conditional probability) $P(E_1|E_2)$ बराबर _____

Ans. **(0.50)**

Sol. E_2 : Sum of elements of A = 7 $\Rightarrow$ These are 7 ones and 2 zeros

Number of such matrices = ${}^9C_2 = 36$.

Out of all such matrices ; E_1 will be those when both zeros lie in the same row or in the same colume

eg. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$n(E_1 \cap E_2) = 2 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2 = 18$

$\uparrow \quad \uparrow$

So $n(E1/E2) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(E_2)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

Downloaded From ToraLabs

3. That $\omega \neq 1$ be a cube root of unity. Then the minimum of the set $\{|a + b\omega + c\omega^2|^2;$ a, b, c are distinct non zero integers$\}$ equals _____.

माना कि $\omega \neq 1$ एकक का एक घनमूल (a cube root of unity) है। तब समुच्चय (set)

$\{|a + b\omega + c\omega^2|^2;$ a, b, c भिन्न अशून्य पूर्णांक (distinct non zero integers)$\}$ का निम्नतम (minimum) बराबर _____.

Ans. **(3.00)**

Sol. $|a + b\omega + c\omega^2|^2 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$

it will be minimum when a,b,c are consecutive integers

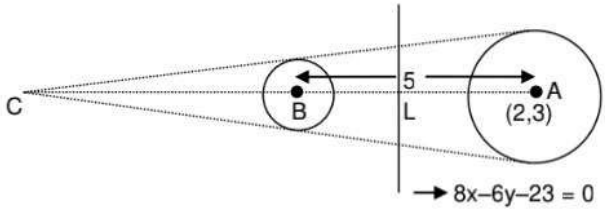
so minimum value is 3.

4. Let the point B be the reflection of the point A(2, 3) with respect to the line $8x - 6y - 23 = 0$. Let Γ_A and Γ_B be circles of radii 2 and 1 with centres A and B respectively. Let T be a common tangent to the circles Γ_A and Γ_B such that both the circles are on the same side of T. If C is the point of intersection of T and the line passing through A and B, then the length of the line segment AC is.....

माना कि बिन्दु B रेखा $8x - 6y - 23 = 0$ के सापेक्ष बिन्दु A(2, 3) का प्रतिबिम्ब (reflection) है। माना कि Γ_A और Γ_B क्रमशः त्रिज्याएं 2 और 1 वाले वृत्त हैं, जिनके केन्द्र क्रमशः A और B हैं। माना कि वृत्तों Γ_A और Γ_B की एक ऐसी उभयनिष्ठ स्पर्श (common tangent) रेखा T हैं, दोनो वृत्त जिसके एक ही तरफ हैं। यदि C बिन्दुओं A और B से जाने वाली रेखा और T का प्रतिच्छेद बिन्दु है, तब रेखाखण्ड (line segment) AC की लम्बाई है_____

Ans. **(10.00)**

Sol.



$$AL = \left|\frac{16-18-23}{10}\right| = \frac{5}{2}$$

$$\frac{CB}{CA} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CA-5}{CA} = \frac{1}{2}$$

$CA = 10$

Downloaded From ToraLabs

5. Let AP (a, d) denote the set of all the term of an infinite arithmetic progression with first term a and common difference d > 0. If

$AP(1, 3) \cap AP(2, 5) \cap AP(3, 7) = AP(a, d)$

then a + d equals.....

माना कि AP (a, d) एक अनंत समान्तर श्रेणी (infinite arithmetic progression) के पदों का समुच्चय (set) है जिसका प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर (common difference) d > 0 है। यदि

$AP(1, 3) \cap AP(2, 5) \cap AP(3, 7) = AP(a, d)$

है, तब a + d बराबर.....

Ans. **(157.00)**

Sol. First series is {1, 4, 7, 10, 13,.....}

Second series is {2, 7, 12, 17, ...}

Third series is {3, 10, 17, 24, ...}

See the least number in the third series which leaves remainder 1 on dividing by 3 and leaves remainder 2 on dividing by 5.

$\Rightarrow$ 52 is the least number of third series which leaves remainder 1 on dividing by 3 and leaves remainder 2 on dividing by 5

Now, A = 52

D is L.C. M. of (3, 5, 7) = 105

$\Rightarrow A + D = 52 + 105 = 157$

6. $I = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{(1+e^{\sin x})(2-\cos 2x)}$ then find $27I^2$ equals .....

यदि $I = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{(1+e^{\sin x})(2-\cos 2x)}$ तब $27I^2$ बराबर है

Ans. **(4.00)**

Sol. $$I = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \frac{dx}{(1+e^{\sin x})(2-\cos 2x)} \quad ....(1)$$

by a + b – x property

$$I = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \frac{dx}{(1+e^{-\sin x})(2-\cos 2x)} = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \frac{e^{\sin x}dx}{(1+e^{\sin x})(2-\cos 2x)}dx \quad .....(2)$$

adding (1) and (2)

$$2I = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \frac{(1+e^{\sin x})}{(1+e^{\sin x})(2-\cos 2x)}dx \Rightarrow \quad I = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \frac{1}{2-(2\cos^2 x-1)}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \frac{\sec^2 x}{3\sec^2 x-2}dx$$

put $\tan x = t, \sec^2 x dx = dt$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{3t^2+1} = \frac{2}{3\pi}\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}\left(\tan^{-1}\left(\frac{t}{1/\sqrt{3}}\right)\right)_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}\pi}\left(\tan^{-1}(\sqrt{3})-\tan^{-1}(0)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Now $27I^2 = 27 \times \frac{4}{27} = 4$

Downloaded From ToraLabs

JEE (ADVANCED) 2019

DATE: 27-05-2019

Questions & Solutions

PAPER – 1 **SUBJECT:PHYSICS**

MAX. MARKS: 186 **TIME: 3 HRS.**

PAPER-1 : INSTRUCTIONS TO CANDIDATES

- **Question Paper-1 has three (03) parts: Physics, Chemistry and Mathematics.**
- **Each part has a total eighteen (18) questions divided into three (03) sections (Section-1, Section-2 and Section-3)**
- **Total number of questions in Question Paper-1 are Fifty Four (54) and Maximum Marks are One Hundred Eighty Six (186)**

Type of Questions and Marking Schemes

SECTION-1 (Maximum Marks : 12)

- This section contains **FOUR (04)** questions.
- Each question has **FOUR** options **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the correct option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks	:	**+3** If ONLY the correct option is chosen.
Zero Marks	:	0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks	:	**–1** In all other cases.

SECTION-2 (Maximum Marks : 32)

- This section contains **EIGHT (08)** questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme.

Full Marks	:	**+4** If only (all) the correct option(s) is (are) chosen.
Partial Marks	:	**+3** If all the four options are correct but ONLY three options are chosen.
Partial Marks	:	**+2** If three or more options are correct but ONLY two options are chosen and both of which are correct.
Partial Marks	:	**+1** If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option.
Zero Marks	:	0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks	:	**–1** In all other cases.

Downloaded From ToraLabs

SECTION-3 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal placed.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks : **+3** If ONLY the correct numerical value is entered.

Zero Marks : **0** In all other cases.

Answering Questions :

- To select the option(s), use the mouse to click on the corresponding button(s) of the option(s).
- To deselect the chosen option for the questions of **SECTION-1**, click on the button of the chosen option again or click on the **Clear Response** button to clear the chosen option.
- To deselect the chosen option(s) for the questions of **SECTION-2**, click on the button(s) of the chosen option(s) again or click on the **Clear Response** button to clear all the chosen options.
- To change the option(s) of a previously answered question of **SECTION-1** and **SECTION-2** first deselect as given above and then select the new option(s).
- To answer questions of **SECTION-3**, use the mouse to click on numbers (and/or symbols) on the on–screen virtual numeric keypad to enter the numerical value in the space provided for answer.
- To change the answer of a question of **SECTION-3**, first click on the **Clear Response** button to clear the entered answer and then enter the new numerical value.
- To mark a question **ONLY** for review (i.e. without answering it), click on the **Mark for Review & Next** button.
- To mark a question for review (after answering it), click on **Mark for Review & Next** button – the answered question which is also marked for review will be evaluated.
- To save the answer, click on the **Save & Next** button – the answered question

Downloaded From ToraLabs

PART-I : PHYSICS

SECTION-1 (Maximum Marks : 12)

- This section contains **FOUR (04)** questions.
- Each question has **FOUR** options **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the correct option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks	:	**+3** If ONLY the correct option is chosen.
Zero Marks	:	0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks	:	**–1** In all other cases.

खंड **1** (अधिकतम अंक: **12**)

- इस खंड में चार **(04)** प्रश्न है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए सही चार विकल्प दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से केवल एक ही विकल्प सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए दिए हुए विकल्पों में से सही उत्तर से संबधित विकल्प को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :

पूर्ण अंक : **+3** यदि सिर्फ सही विकल्प ही चुना गया है।

शून्य अंक : **0** यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है)।

ऋण अंक : **–1** अन्य सभी परिस्थितियों में।

1. A thin spherical insulating shell of radius R carries a uniformly distributed charge such that the potential at its surface is V_0. A hole with small area $\alpha 4\pi R^2$ (α <<1) is made on the shell without affecting the rest of the shell. Which one of the following statement is correct.

R त्रिज्या का एक पतला अचालक खोखले गोले पर आवेश इस प्रकार से आवेशित है कि इसकी सतह पर वैद्युत विभव V_0 है। $\alpha 4\pi R^2$ (α <<1) क्षेत्रफल का एक छोटा छेद इस गोले पर इस प्रकार से बनाया गया है कि शेष भाग की स्थिति अपरिवर्तित है। निम्नलिखित में से कौनसे कथन सही होंगे।

(1) The ratio of the potential at the center of the shell to that of the point at $\frac{1}{2}R$ from center towards the hole will be $\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}$

(2) The potential at the centre of shell is reduced by $2\alpha v_0$.

(3) The magnitude of electric field at the center of the shell is reduced by $\frac{\alpha v_0}{2R}$

(4) The magnitude of electric field at a point, located on a line passing through the hole and shell's center, on a distance 2R from the center of the spherical shell will be reduced by $\frac{\alpha v_0}{2R}$

(1) गोले के केन्द्र तथा छेद से गुजरने वाली केन्द्र से 2R दूरी पर स्थित बिन्दु पर वैद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ का परिमाण $\frac{\alpha v_0}{2R}$ से कम हो जायेगा।

(2) गोले के केन्द्र पर वैद्युत विभव $2\alpha v_0$ से कम हो जायेगा।.

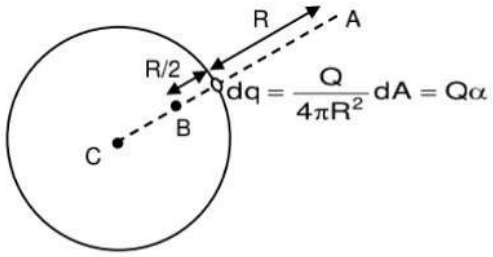
(3) गोले के केन्द्र पर वैद्युत क्षेत्र का परिमाण $\frac{\alpha v_0}{2R}$ से कम हो जायेगा।

(4) गोले के केन्द्र पर वैद्युत विभव तथा छिद्र से $\frac{1}{2}$ R दूरी केन्द्र की ओर बिन्दु पर वैद्युत विभव का अनुपात $\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}$

Ans. **(1)**

Downloaded From ToraLabs

Sol.



Given V at surface

$V_0 = \frac{KQ}{R}$

V at C

$V_C = \frac{KQ}{R} - \frac{K\alpha Q}{R} = V_0\ (1-\alpha)$

V at B

$V_B = \frac{KQ}{R} - \frac{K(\alpha Q)}{R/2} = V_0\,(1-2\alpha)$

$\therefore\ \frac{V_C}{V_B} = \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}$

E at A

$E_A = \frac{KQ}{(2R)^2} - \frac{K\alpha Q}{R^2} = \frac{KQ}{4R^2} - \frac{\alpha V_0}{R}$

So reduced by $\frac{\alpha V_0}{R}$

E at C

$E_C = \frac{K(\alpha Q)}{R^2} = \frac{\alpha V_0}{R}$

so increased by $\frac{\alpha V_0}{R}$

Ans. (1)

2. In a radioactive sample $^{40}_{19}K$ nuclei either decay into stable $^{40}_{20}Ca$ nuclei with decay constant 4.5×10^{-10} per year or into stable $^{40}_{18}Ar$ nuclei with decay constant 0.5×10^{-10} per year. Given that in this sample all the stable $^{40}_{20}Ca$ and $^{40}_{18}Ar$ nuclei are produced by the $^{40}_{19}K$ nuclei only. In time $t \times 10^9$ years, if the ratio of the sum of stable $^{40}_{20}Ca$ and $^{40}_{18}Ar$ nuclei to the radioactive $^{40}_{19}K$ nuclei is 99, the value of t will be. [Given : ln 10 = 2.3]

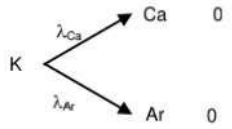
एक रेडियोएक्टिव नमूने में $^{40}_{19}K$ नाभिकों का क्षय $^{40}_{20}Ca$ अथवा $^{40}_{18}Ar$ थिर नाभिकों में होता है, जिनके क्षय नियताक (decay constant) क्रमशः 4.5×10^{-10} वर्ष (per year) तथा 0.5×10^{-10} प्रति वर्ष है। दिया है कि इस नमूने में सभी $^{40}_{20}Ca$ और $^{40}_{18}Ar$ नाभिक केवल $^{40}_{19}K$ नाभिकों से बनते हैं। यदि $t \times 10^9$ वर्षों में स्थिर नाभिकों $^{40}_{20}Ca$ और $^{40}_{18}Ar$ की संख्या के कुल योग एवं रेडियोएक्टिव नाभिकों $^{40}_{19}K$ की संख्या का अनुपात 99 है तो t का मान होगा [दिया है। ln 10 = 2.3]

(1) 9.2 (2) 1.15 (3) 4.6 (4) 2.3

Ans. (1)

Sol.

Downloaded From ToraLabs



$t = 0$

$$\frac{dN}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2) \times N$$

$$\log_e\left(\frac{N}{N_0}\right) = -(\lambda_1 + \lambda_2)t$$

$$2.3 \times \log_{10}\left(\frac{N_0}{N_0/100}\right) = 5\times10^{-10}t$$

$$\frac{2.303\times2}{5\times10^{-10}} = t$$

$2.303 \times 0.4 \times 10^{10} = t$

$t = 9.2 \times 10^9$ Year

3. A current carrying wire heats a metal rod. The wire provides a constant power (P) to the rod. The metal rod is enclosed in an insulated container. It is observed that the temperature (T) in the metal rod changes with time (t) as

$$T(t) = T_0(1 + \beta t^{1/4})$$

where β is a constant with appropriate dimension while T_0 is a constant with dimension of temperature. The heat capacity of metal is :

एक धारावाही तार एक धातु की छड़ को गर्म करता है। तार छड़ को एक नियत शक्ति प्रदान करता है। छड़ कुचालक बर्तन में रखी हुई है। देखा जाता है कि छड़ का ताप समय (t) पर $T(t) = T_0(1 + \beta t^{1/4})$ जहाँ β एक उपयुक्त नियतांक है, छड़ की ऊष्मा धारिता है :

(1) $\frac{4P(T(t)-T_0)^4}{\beta^4T_0^5}$ (2) $\frac{4P(T(t)-T_0)^3}{\beta^4T_0^4}$ (3) $\frac{4P(T(t)-T_0)}{\beta^4T_0^2}$ (4) $\frac{4P(T(t)-T_0)^2}{\beta^4T_0^3}$

Ans. **(2)**

Sol. $dQ = HdT$

$$\frac{dQ}{dt} = H\frac{dT}{dt}$$

$$P = H.\,T_0\,.\,\beta.\,\frac{1}{4}.\,t^{-3/4}$$

$$\frac{4P}{T_0.\beta} = t^{-3/4}\,.\,H$$

Now $T - T_0 = T_0\,\beta t^{1/4}$

So $t^{3/4} = \left(\frac{T-T_0}{T_0\beta}\right)^3$ $\therefore$ $H = \frac{4P(T-T_0)^3}{T_0^4\beta^4}$

Correct option 2

Downloaded From ToraLabs

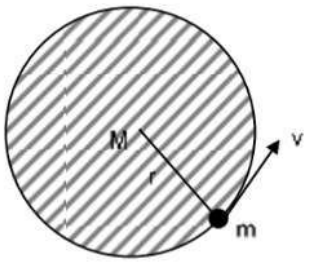
4. Consider a spherical gaseous cloud of mass density $\rho(r)$ in a free space where r is the radial distance from its centre. The gaseous cloud is made of particles of equal mass m moving in circular orbits about their common centre with the same kinetic energy K. The force acting on the particles is their mutual gravitational force. If $\rho(r)$ is constant in time. The particle number density $n(r) = \rho(r)/m$ is : (G = universal gravitational constant)

मुक्त आकाश में $\rho(r)$ द्रव्यमान घनत्व का एक गोलाकार गैसीय बादल की कल्पना करें। जहाँ r केन्द्र से त्रिज्यीय दूरी है। गैसीय बादल समान द्रव्यमान m के कणों से मिलकर बना है जो उभयनिष्ठ केन्द्र के सापेक्ष वृत्ताकार पथों में समान गतिज ऊर्जा K से गतिशील है। कणों पर लगने वाला बल अन्योन्य गुरूत्वीय बल है। यदि $\rho(r)$ समय के साथ नियत है तो कणों का संख्यात्मक घनत्व $n(r) = \rho(r)/m$ is : (G = सार्वत्रिक गुरूत्वीय नियतांक)

(1) $\frac{K}{6\pi r^2 m^2 G}$ (2) $\frac{K}{\pi r^2 m^2 G}$ (3) $\frac{3K}{\pi r^2 m^2 G}$ (4) $\frac{K}{2\pi r^2 m^2 G}$

Ans. **(4)**

Sol.



$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$= \frac{2}{r}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$\Rightarrow \quad \frac{GMm}{r^2} = \frac{2K}{r} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{2Kr}{Gm}$

$\Rightarrow \quad dM = \frac{2K}{Gm}dr \quad \Rightarrow \quad 4\pi r^2 dr\rho = \frac{2K}{Gm}dr \quad \therefore \quad \rho = \frac{K}{2\pi Gmr^2}$

$\Rightarrow \quad \frac{\rho}{m} = \frac{K}{2\pi Gm^2 r^2}$ **Alternative :**

$\frac{GM(r)}{r^2} = \frac{V^2}{r}$ where M(r) = total mass upto radius (r)

जहाँ M(r) = (r) त्रिज्या तक कुल द्रव्यमान

$\Rightarrow \quad K = \frac{GMm}{2r} \quad \Rightarrow \quad M(r) = \frac{2Kr}{Gm}$

$\Rightarrow \quad dM(r) = \frac{2K}{Gm}dr = \rho dV = \rho 4\pi r^2 dr$

$\Rightarrow \quad \rho = \frac{K}{G2\pi r^2 m} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho}{m} = \frac{K}{2\pi Gm^2 r^2}$

Correct option 4

Downloaded From ToraLabs

SECTION-2 (Maximum Marks : 32)

- This section contains **EIGHT (08)** questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme.

Full Marks :	**+4** If only (all) the correct option(s) is (are) chosen.
Partial Marks :	**+3** If all the four options are correct but ONLY three options are chosen.
Partial Marks :	**+2** If three or more options are correct but ONLY two options are chosen and both of which are correct.
Partial Marks :	**+1** If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option.
Zero Marks :	0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks :	**–1** In all other cases.

खंड **2** (अधिकतम अंक: **32**)

- इस खंड में आठ **(08)** प्रश्न है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही है(हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, दिए हुए विकल्पों में से सही उत्तर (उत्तरों) से संबधित विकल्प (विकल्पों) को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :

पूर्ण अंक	: **+4** यदि केवल (सारे) सही विकल्प (विकल्पों) को चुना गया है।
आंशिक अंक	: **+3** यदि चारों विकल्प सही हैं परन्तु केवल तीन विकल्पों को चुना गया है।
आंशिक अंक	: **+2** यदि तीन या तीन से अधिक विकल्प सही है परन्तु केवल दो विकल्पों को चुना गया है और दोंनो चुने हुए विकल्प सही विकल्प हैं।
आंशिक अंक	: **+1** यदि दो या दो से अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल एक विकल्प को चुना गया है और चुना हुआ विकल्प सही विकल्प है।
शून्य अंक	: **0** यदि किसी भी विकल्प को नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है)।
ऋण अंक	: **–1** अन्य सभी परिस्थितियों में।

1. Let us consider a system of units in which mass and angular momentum are dimensionless. If length has dimension of L, which of the following in statement(s) is/are correct?

(1) The dimension of force is L^{-3}

(2) The dimension of power is L^{-5}

(3) The dimension of energy is L^{-2}

(4) The dimension of linear momentum is L^{-1}

मान लीजिये कि एक इकाई प्रणाली में द्रव्यमान तथा कोणीय संवेग विमा रहित (dimensionless) है। यदि लंबाई की विमा L हो तब निम्नलिखित कथनों में से कौन सा(से) सही है(हैं)?

(1) बल की विमा (dimension) L^{-3} है।

(2) शक्ति की विमा (dimension) L^{-5} है।

(3) ऊर्जा की विमा (dimension) L^{-2} है

(4) रेखीय की विमा (dimension) L^{-1} है

Ans. **(1, 3, 4)**

Sol. $[M] = [Mass] = [M^0L^0T^0]$

Downloaded From ToraLabs

$[J] = [\text{Angular momentum}] = [ML^2T^{-1}]$

$[L] = [\text{Length}]$

Now ; $[ML^2T^{-1}] = [M^0L^0T^0]$

$\therefore [L^2] = [T]$

Power $[P] = [MLT^{-2}.\ LT^{-1}]$

$= [ML^2T^{-3}]$

$= [L^2 L^{-6}]$

$[P] = [L^{-4}]$

Energy/Work $[W] = [MLT^{-2}\ .\ L]$

$= [L^2 L^{-4}]$

$= [L^{-2}]$

Force $[F] = [MLT^{-2}] = [L\ .\ L^{-4}] = [L^{-3}]$

Linear momentum $[p] = [MLT^{-1}] = [L\ .\ L^{-2}]$

$[p] = [L^{-1}]$

Sol. $[M] = [\text{द्रव्यमान}] = [M^0L^0T^0]$

$[J] = [\text{कोणीय संवेग}] = [ML^2T^{-1}$

$[L] = [\text{लम्बाई}]$

अब ; $[ML^2T^{-1}] = [M^0L^0T^0]$ $\therefore$ $[L^2] = [T]$

शक्ति $[P] = [MLT^{-2}\ .\ LT^{-1}]$

$= [ML^2T^{-3}]$

$= [L^2 L^{-6}]$

$[P] = [L^{-4}]$

ऊर्जा/कार्य $[W] = [MLT^{-2}\ .\ L]$

$= [L^2 L^{-4}] = [L^{-2}]$

बल $[F] = [MLT^{-2}] = [L\ .\ L^{-4}] = [L^{-3}]$

रेखीय संवेग $[p] = [MLT^{-1}] = [L\ .\ L^{-2}]$

$[p] = [L^{-1}]$

Ans. **1, 3, 4**

Downloaded From ToraLabs

2. Two identical moving coil galvanometers have 10 Ω resistance and full scale deflection at $2\mu A$ current. One of them is converted into a voltmeter of 100 mV full scale reading and the other into an Ammeter of 1mA full scale current using appropriate resistors. These are then used to measure the voltage and current in the Ohm's law experiment with R = 1000Ω resistor by using an ideal cell. Which of the following statement(s) is/are correct ?

(1) The resistance of the Voltmeter will be 100 kΩ

(2) The resistance of the Ammeter will be 0.02 Ω (round off to 2nd decimal place)

(3) If the ideal cell is replaced by a cell having internal resistance of 5Ω then the measured value of R will be more than 1000 Ω

(4) The measured value of R will be $978\Omega < R < 982\ \Omega$

दो एकसमान चलकुंडली धारामापी (galvanometers) जिनके प्रतिरोध 10 Ω हैं तथा इनमें $2\mu A$ पर पूर्णस्केल विक्षेप (full scale deflection) मिलता है। इनमें से एक को 100 mV पूर्णस्केल मापन योग्य वोल्टमीटर तथा दूसरे 1mA पूणस्केल मापन योग्य अमीटर में उपयुक्त प्रतिरोधों का प्रयोग करते हुए परिवर्तित करते है। ओम का नियम (Ohm's law) प्रयोग में R = 1000Ω प्रतिरोध एवं एक आदर्श सेल के साथ इन दोनों का उपयो विभव और धारा को मापने के लिये किया जाता है। निम्नलिखित कथनों में से कौनसा (से) सही है(हैं)?

(1) वोल्टमीटर के प्रतिरोध का मान 100 kΩ होगा

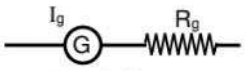
(2) अमीटर के प्रतिरोध का मन 0.02 Ω होगा (दशमलव के द्वितीय स्थान तक राउंड ऑफ)

(3) यदि आदर्श सेल को दूसरे सेल जिसका आंतरिक प्रतिरोध 5Ω से बदला जाये तब प्रतिरोध R का मापा गया मान 1000 Ω से अधिक होगा।

(4) R का मापा गया मान $978\Omega < R < 982\ \Omega$ होगा।

Ans. **(2, 4)**

Sol.

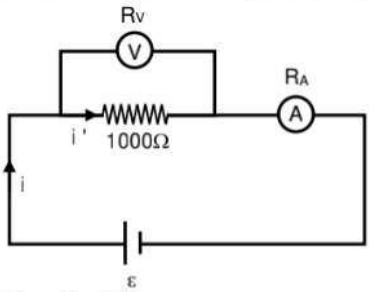


$v = 100 \times 10^{-3} v$

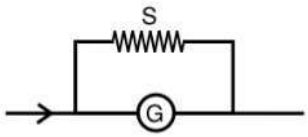
$v = I_g(R_g + R_v)$

$$\frac{10^{-1}}{2\times10^{-6}} = R_g + R_v$$

$5 \times 10^4\ \Omega \approx R_v$ $\quad (R_v < 10^5\ \Omega)$



$I_gR_g = (I - I_g)S$



$$S = \frac{2\times10^{-6}\times10}{10^{-3} - 2\times10^{-6}}$$

Downloaded From ToraLabs

$S = 2 \times 10^{-5} \times 10^{3}$

$\Rightarrow \quad 2 \times 10^{-2}$

$\Rightarrow \quad 20 m\Omega$

$$R_A = \frac{20 \times 10^{-3} \times 10}{10} = 20 \times 10^{-3}\,\Omega$$

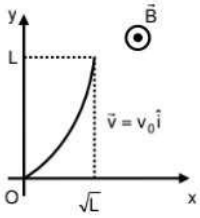
$$i = \frac{\varepsilon}{\left(\frac{1000 \times 50 \times 10^{3}}{51 \times 10^{3}}\right)} = \frac{51\varepsilon}{5 \times 10^{4}} \left(\because R_A \to 0\right)$$

$$i' = i\left(\frac{R_v}{51 \times 10^{3}}\right) = \frac{\varepsilon}{1000}$$

measured resistance $\therefore R_m = \frac{i' \times 1000}{i} = \frac{\varepsilon}{51\varepsilon} \times 5 \times 10^{4} = \frac{5 \times 10^{4}}{51} = 980.4\Omega$

3. A conducting wire of parabolic shape, $y = x^2$, is moving with velocity $\vec{V} = V_0\hat{i}$ in a non-uniform magnetic field $\vec{B} = B_0\left(1 + \left(\frac{y}{L}\right)^{\beta}\right)\hat{k}$, as shown in figure. If V_0, B_0, L and β are positive constants and $\Delta\phi$ is the potential difference developed between the ends of the wire, then the correct statements(s) is/are :

परवलयाकार $y = x^2$ का चालक तार वेग $\vec{v} = v_0\hat{i}$ से असमरूप चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B} = B_0\left(1 + \left(\frac{y}{L}\right)^{\beta}\right)\hat{k}$ में चित्रानुसार गतिशील है। यदि V_0, B_0, L व B धनात्मक नियतांक एवं $\Delta\phi$ तार के सिरों पर उत्पन्न विभवान्तर हो तो सही विकल्प/विकल्पों का चयन कीजिए –



(1) $|\Delta\phi| = \frac{4}{3}B_0V_0L$ for $\beta = 2$

(2) $|\Delta\phi|$ remains same if the parabolic wire is replaced by a straight wire, $y = x$, initially, of length $\sqrt{2}\ell$

(3) $|\Delta\phi| = \frac{1}{2}B_0V_0L$ for $\beta = 0$

(4) $|\Delta\phi|$ is proportional to the length of wire projected on y-axis

(1) $|\Delta\phi| = \frac{1}{2}B_0V_0L$, $\beta = 0$ के लिए

(2) $|\Delta\phi| = \frac{4}{3}B_0V_0L$, $\beta = 2$ के लिए

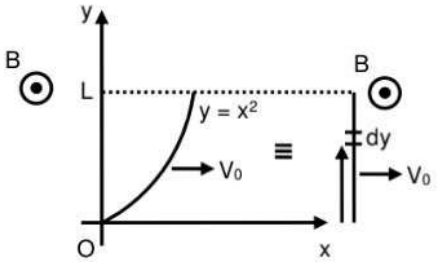
(3) $|\Delta\phi|$, y-अक्ष पर तार की लम्बाई के प्रक्षेप के समानुपाती होगी

(4) $|\Delta\phi|$, अपरिवर्तित रहेगा यदि परवलयाकार तार को $\sqrt{2}\ell$ लम्बाई के सीधे तार $y = x$ के द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है।

Ans. **(1, 2, 4)**

Downloaded From ToraLabs

Sol.



For calculating the motional emf across the length of the wire, let us project wire such that $\vec{B}, \vec{v}, \vec{\ell}$ becomes mutually orthogonal. Thus

तार की की लम्बाई के सिरो पर गतिक emf ज्ञात करने के लिए माना गतिक तार इस प्रकार है कि $\vec{B}, \vec{v}, \vec{\ell}$ एक दूसरे के लम्बवत् है।

$$d\varepsilon = Bv_0\, dy = B_0\left[1+\left(\frac{y}{L}\right)^{\beta}\right]V_0 dy$$

$$\varepsilon = \int_0^L B_0\left(1+\left(\frac{y}{L}\right)^{\beta}\right)V_0 dy$$

$$= B_0V_0L\left[1+\frac{1}{\beta+1}\right]$$ emf in loop is proportional to L for given value of β.

for

छड में उत्पन्न emf का मान दिये गए β के लिए L के निम्न प्रकार समानुपाती है।

$\beta = 0$; $\varepsilon = 2B_0V_0L$

$\beta = 2$; $\varepsilon = B_0V_0L\left[1+\frac{1}{3}\right] = \frac{4}{3}B_0V_0L$

the length of the projection of the wire y = x of length $\sqrt{2}L$ on the y-axis is L thus the answer remain unchanged

Therefore, answer is 1, 2, 4

$\sqrt{2}L$ लम्बाई के तार y = x की y के अनुदिश प्रक्षेप लम्बाई L है। इसलिए उत्तर अपरिवर्तित रहेगा।

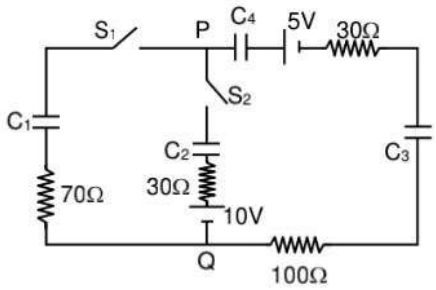
अतः उत्तर 1, 2, 4

Correct option – 1, 2, 4

4. In the circuit shown, initially there is no charge on capacitors and keys S_1 and S_2 are open. The values of the capacitors are $C_1 = 10\mu F$, $C_2 = 30\mu F$, and $C_3 = C_4 = 80\mu F$. Which statements is/are correct :

प्रदर्शित परिपथ में, आरम्भ में संधारित्रों पर कोई आवेश नही है और कुजी S_1 और S_2 खुली है। संधारित्रों के मान $C_1 = 10\mu F$, $C_2 = 30\mu F$, और $C_3 = C_4 = 80\mu F$ है। निम्नलिखित कथनों में से कौनसा (से) सही है(हैं)?

Downloaded From ToraLabs



(1) The key S_1 is kept closed for long time such that capacitors are fully charged. Now key S_2 is closed, at this time the instantaneous current across 30Ω resistor (between points P & Q) will be 0.2A (round off to 1st decimal place).

(2) If key S_1 is kept closed for long time such that capacitors are fully charged, the voltage across C_1 will be 4V.

(3) At time t = 0, the key S_1 is closed, the instantaneous current in the closed circuit will be 25 mA

(4) if S_1 is kept closed for long time such that capacitors are fully charged, the voltage difference between P and Q will be 10V.

(1) कुंजी S_1 को लंबे समय के लिए इस प्रकार बंद रखा जाता है कि सभी संधारित्र पूर्ण आवेशित हो जाते है। अब कुंजी S_2 को बंद किया जाता है तब इस समय पर 30Ω के प्रतिरोध (P और Q के मध्य) में तात्क्षणिक (instantaneous) धारा का मान 0.2A होगा। (दशमलव के प्रथम स्थान तक राउंड ऑफ (round off)

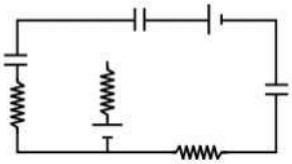
(2) यदि कुंजी S_1 को लंबे समय के लिए इस प्रकार बंद किया जाए कि सभी संधारित्र पूर्ण आवेशित हो जाए तब संधारित्र C_1 पर 4V का विभव होगा।

(3) समय t = 0 पर, जब कुंजी S_1 को बंद किया जाता है, तब बंद परिपथ में तात्क्षणिक (instantaneous) धारा का मान 25 mA होगा।

(4) यदि कुंजी S_1 को लंबे समय के लिए इस प्रकार बंद किया जाए कि सभी संधारित्र पूर्ण आवेशित हो जाए तब बिन्दु P और Q के मध्य 10V का विभवांतर होगा

Ans. **(2, 3)**

Sol.

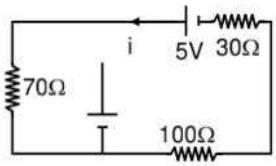


Just after closing of switch S_1 charge on capacitors is zero.

∴ Replace all capacitors with wire.

कुंजी S_1 बन्द करने के तुरन्त पश्चात् संधारित्रों पर आवेश शून्य है।

∴ सभी संधारित्रों को तार से बदलने पर

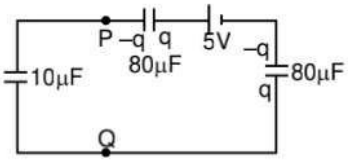


Downloaded From ToraLabs

$i = \frac{5}{70+100+30} = \frac{5}{200} = 25mA$

Now S_1 is kept closed for long time circuit is in steady state

अब S_1 को लम्बे समय तक बन्द करने पर परिपथ स्थायी अवस्था में होता है।



$\frac{q}{10} + \frac{q}{80} + \frac{q}{80} - 5 = 0$

$\frac{10q}{80} = 5$

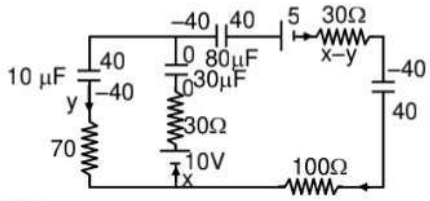
$\therefore$ q = 40 μC

$\therefore$ V across C_1 = 40/10 = 4 volt

Now just after closing of S_2 charge on each capacitor remain same

$\therefore$ C_1 के सिरों पर विभवान्तर = 40/10 = 4 volt

अब S_2 को बन्द करने के तुरन्त पश्चात् सभी संधारित्रों पर आवेश समान होगा



KVL

–10 + x × 30 + 40/10 + y × 70 = 0

30x + 70y = 6 ....(1)

$-\frac{40}{80} + 5 + (x - y)\,30 - \frac{40}{80} + (x - y) \times 100 - 10 + x \times 30 = 0$

160x – 130y – 6 = 0 ....(2)

y = 96/1510

x = 0.05 amp.

Correct option – 2, 3

Downloaded From ToraLabs

5. A charged shell of radius R carries a total charge Q. Given ϕ as the flux of electric field through a closed cylindrical surface of height h, radius r and with its center same as that of the shell. Here center of cylinder is a point on the axis of the cylinder which is equidistant from its top and bottom surfaces. Which of the following option(s) is are correct [ε_0 is the permittivity of free space]

एक R त्रिज्या वाले आवेशित कोश पर कुल आवेश Q एक लंबाई h और त्रिज्या r वाले बेलनाकार बंद पृष्ठ, जिसका केंद्र कोश के केंद्र पर ही है, से गुजरने वाला वैद्युत फ्लक्स (flux) ϕ है। यहाँ बेलन का केंद्र इसके अक्ष पर एक बिन्दु है जो कि ऊपरी और निचली सतह से समान दूरी पर है। निम्नलिखित कथनों में से कौनसा (से) सही है (हैं) ? [मुक्त आकाश free space की वैद्युतशीलता ε_0 है]

(1) If $h > 2R$ and $r = \frac{4R}{5}$ then $\phi = \frac{Q}{5\varepsilon_0}$

(2) If $h > 2R$ and $r = \frac{3R}{5}$ then $\phi = \frac{Q}{5\varepsilon_0}$

(3) If $h < \frac{8R}{5}$ and $r = \frac{3R}{5}$ then $\phi = 0$

(4) If $h > 2R$ and $r > R$ then $\phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

(1) यदि $h > 2R$ और $r = \frac{4R}{5}$ तब $\phi = \frac{Q}{5\varepsilon_0}$

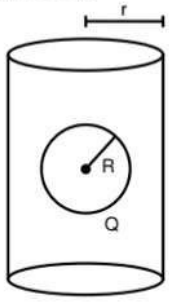
(2) यदि $h > 2R$ और $r = \frac{3R}{5}$ तब $\phi = \frac{Q}{5\varepsilon_0}$

(3) यदि $h < \frac{8R}{5}$ और $r = \frac{3R}{5}$ तब $\phi = 0$

(4) यदि $h > 2R$ और $r > R$ तब $\phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

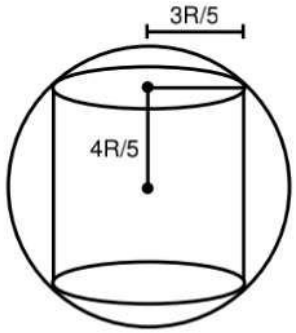
Ans. **(2, 3, 4)**

Sol. (a) $h > 2R$ $\quad r > R$



$\phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ clearly from Gauss' Law गाऊस के नियम से स्पष्ट है।

(b) suppose माना $h = \frac{8R}{5}$ $\quad r = \frac{3R}{5}$

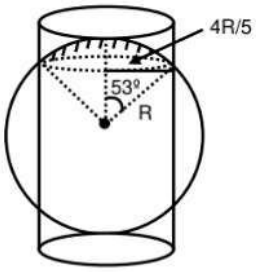


$\phi = 0$

Downloaded From ToraLabs

so for $h < \frac{8R}{5}$ $\phi = 0$ इसलिये $h < \frac{8R}{5}$ के लिये $\phi = 0$

(C) for h = 2R लिये $r = \frac{4R}{5}$



Shaded charge छायांकित आवेश $= 2\pi\,(1 - \cos 53^\circ) \times \frac{Q}{4\pi} = \frac{Q}{5}$

$\therefore \quad q_{enclosed} = \frac{2Q}{5}$

$\therefore \quad \phi = \frac{2Q}{5\varepsilon_0}$

$\therefore$ for $h > 2R$ $r = \frac{4R}{5}$ $\quad \therefore \phi = \frac{2Q}{5\varepsilon_0}$

$h > 2R$ के लिये $r = \frac{4R}{5}$ $\quad \therefore \phi = \frac{2Q}{5\varepsilon_0}$

(d) like option C for h = 2R $r = \frac{3R}{5}$

विकल्प C के समान h = 2R के लिये $r = \frac{3R}{5}$

$q_{enclosed} = 2 \times 2\pi\,(1 - \cos 37^\circ)\,\frac{Q}{4\pi} = \frac{Q}{5}$

$\therefore \quad \phi = \frac{Q}{5\varepsilon_0}$

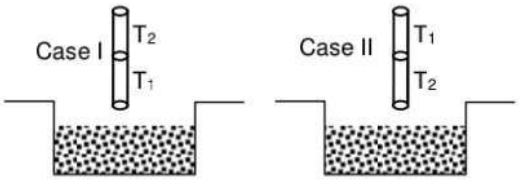
Downloaded From ToraLabs

6. A cylindrical capillary tube of 0.2 mm radius is made by joining two capillaries T_1 and T_2 of different materials having water contact angles of 0° and 60° respectively. The capillary tube is dipped vertically in water in two different configurations, case I and II as shown in figure. Which of the following option(s) is (are) correct?

[Surface tension of water = 0.075N/m, density of water = 1000 kg/m^3, take g = 10 m/s^2]

दो भिन्न पदार्थों की एक समान 0.2 mm त्रिज्या वाली दो केशनलियों T_1 और T_2, जिनके पानी के साथ संपर्क कोण (contact angles) क्रमशः 0° तथा 60° है, को जोड़कर एक केशनली बनाते हैं। इस केशनली को चित्रानुसार दो भिन्न विन्यास I और विन्यास II में पानी में ऊर्ध्वाधर डुबाया जाता है। निम्नलिखित कथनों में से कौनसा (से) सही है (हैं) ?

[पानी का पृष्ठतनाव = 0.075N/m, पानी का घनत्व = 1000 kg/m^3, तथा g = 10 m/s^2]



(1) For case I, if the joint is kept at 8 cm above the water surface, the height of water column in the tube will be 7.5 cm. (Neglect the weight of the water in the meniscus)

(2) For case I, capillary joint is 5cm above the water surface, the height of water column raised in the tube will be more than 8.75 cm. (Neglect the weight of the water in the meniscus)

(3) The correction in the height of water column raised in the tube, due to weight of water contained in the meniscus, will be different for both cases.

(4) For case II, the capillary joint is 5 cm above the water surface, the height of water column raised in the tube will be 3.75 cm. (Neglect the weight of the water in the meniscus)

(1) विन्यास I के लिये, यदि केशनलियों का जोड़ पानी की सतह से 8 cm ऊँचाई पर है, नली में चढ़े पानी की ऊँचाई 7.5 cm होगी। (मुक्त पृष्ठ पर पानी का भार उपेक्षणीय है)

(2) विन्यास I के लिये, यदि केशनलियों का जोड़ पानी की सतह से 5 cm ऊपर है, नली में चढ़े पानी की ऊँचाई 8.75 cm से अधिक होगी (मुक्त पृष्ठ पर पानी का भार उपेक्षणीय है)

(3) पानी के मुक्त पृष्ठ (meniscus) में उपस्थित पानी के भार के कारण केशनली में चढ़े पानी की ऊँचाई में संशोधन (correction) का मान दोनों विन्यासों के लिये भिन्न होगा।

(4) विन्यास II के लिये, यदि केशनलियों का जोड़ पानी की सतह से 5 cm ऊँचाई पर है, नली में चढ़े पानी की ऊँचाई 3.75 cm होगी। (मुक्त पृष्ठ पर पानी का भार उपेक्षणीय है)

Ans. **(1, 3, 4)**

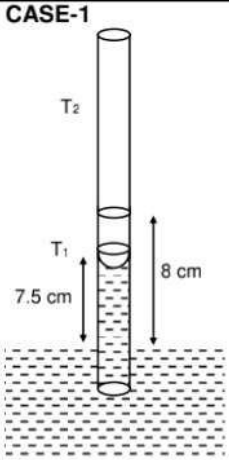
Sol. Heights if only single material tubes are used of sufficient length

$$h_1 = \frac{2T\cos\theta}{\rho r g} = \frac{2\times 0.075\times\cos 0^\circ}{1000\times 2\times 10^{-4}\times 10} = 7.5 \text{ cm}$$

$$h_2 = \frac{2T\cos\theta'}{\rho r g} = \frac{2\times 0.075\times\cos 60^\circ}{1000\times 2\times 10^{-4}\times 10} = 3.75 \text{ cm}$$

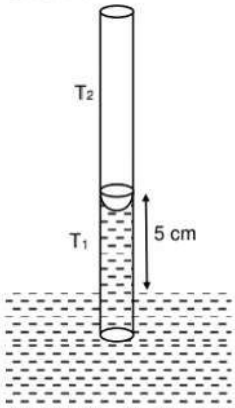
Downloaded From ToraLabs

CASE-1



Therefore, Option (1) is correct

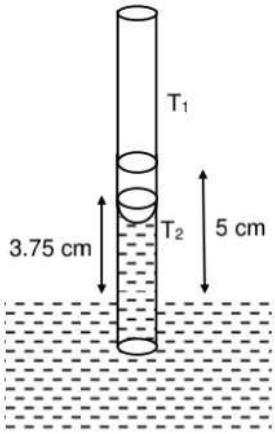
CASE-1



(2) Liquid will rise only upto height of 5 cm and meniscus will adjust by changing is radius of curvature. If the liquid goes up in tube 2 then it will not be able to support the weight of the liquid

(3) Weight of water in meniscus will be different in two cases because angle of contact is different .

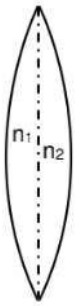
(4) CASE-II



Downloaded From ToraLabs

7. A thin convex lens is made of two materials with refractive indices n_1 and n_2, as shown in figure. The radius of curvature of the left and right spherical surfaces are equal. f is the focal length of the lens when $n_1 = n_2 = n$. The focal length is $f + \Delta f$ when $n_1 = n$ and $n_2 = n + \Delta n$. Assuming $\Delta n << (n - 1)$ and $(1 < n < 2)$, the correct statement(s) is/are

चित्र में दर्शाया गया एक पतला उत्तल लेंस दो पदार्थों से मिलकर बना है, जिनके अपवर्तनांक (refractive inded) क्रमशः n_1 और n_2 हैं। लेंस के बाएँ और दाएँ पृष्ठों की वक्रता त्रिज्याएँ समान है। $n_1 = n_2 = n$ के लिए लेंस की फोकस दूरी f है। जब $n_1 = n$ और $n_2 = n + \Delta n$ है, तब फोकस दूरी $f + \Delta f$ है। यह मानते हुए कि $\Delta n << (n - 1)$ और $(1 < n < 2)$, निम्नलिखित कथनों में से कौनसा (से) सही है (हैं) ?



(1) If $\frac{\Delta n}{n} < 0$ then $\frac{\Delta f}{f} > 0$

(2) For $n = 1.5$, $\Delta n = 10^{-3}$ and $f = 20$cm, the value of $|\Delta f|$ will be 0.02 cm (round off to 2nd decimal place).

(3) $\left|\frac{\Delta f}{f}\right| < \left|\frac{\Delta n}{n}\right|$

(4) The relation between $\frac{\Delta f}{f}$ and $\frac{\Delta n}{n}$ remains unchanged if both the convex surfaces are replaced by concave surfaces of the same radius of curvature.

(1) यदि $\frac{\Delta n}{n} < 0$ हो तब $\frac{\Delta f}{f} > 0$

(2) यदि $n = 1.5$, $\Delta n = 10^{-3}$ और $f = 20$cm हो, तब $|\Delta f|$ का मान 0.02 cm होगा। (दशमलव के द्वितीय स्थान तक राउंड ऑफ round off).

(3) $\left|\frac{\Delta f}{f}\right| < \left|\frac{\Delta n}{n}\right|$

(4) यदि दोनों उत्तल पृष्ठों को उसी समान वक्रता त्रिज्या वाले अवतल पृष्ठों से बदला जाता है तब $\frac{\Delta f}{f}$ और $\frac{\Delta n}{n}$ का संबंध अपरिवर्तित रहता है।

Ans. **(1, 2, 4)**

Downloaded From ToraLabs

Sol. $\frac{1}{f_0} = \frac{2(n-1)}{R}$ .....(1)

$\frac{1}{f_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty}\right)$

$\frac{1}{f_2} = (n+\Delta n-1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty}\right)$

$\frac{1}{f_0+\Delta f_0} = \frac{(n-1)}{R} + (n+\Delta n-1)\left(\frac{1}{R}\right)$

$\frac{1}{f_0+\Delta f_0} = \frac{2n+\Delta n-2}{R}$ .....(2)

$(1)/(2) \Rightarrow \frac{f_0+\Delta f_0}{f_0} = \frac{\frac{2(n-1)}{R}}{\frac{2n+\Delta n-2}{R}}$

$1+\frac{\Delta f_0}{f_0} = \frac{2(n-1)}{2n+\Delta n-2}$

$\frac{\Delta f_0}{f_0} = \frac{-\Delta n}{(2n+\Delta n-2)}$

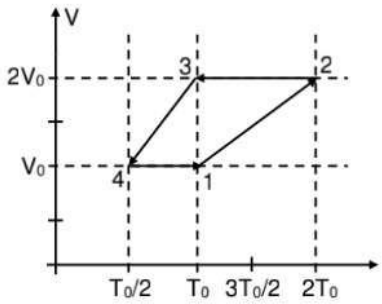
$\frac{\Delta f_0}{20} = -\frac{10^{-3}}{3+10^{-3}-2} \Rightarrow \Delta f_0 = -2\times10^{-2}$

$|\Delta f_0| = 0.02$ cm

Ans. **1, 2, 4**

8. One mole of a monatomic ideal gas goes through a thermodynamic cycle, as shown in the volume versus temperature (V-T) diagram. The correct statement(s) is/are : [R is the gas constant)

एकपरमाणुक आदर्श गैस का एक मोल एक ऊष्मागतिकीय चक्र (thermodynamic cycle) से गुजरता है, जिसे आयतन–तापमान (V-T) ग्राफ चित्र में दिखाया गया है। निम्नलिखित कथनों में से कौन सा(से) सही है(हैं): [R गैस नियतांक है)



Downloaded From ToraLabs

(1) Work done in this thermodynamic cycle ($1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$) is $|W| = \frac{1}{2}RT_0$

(2) The ratio of heat transfer during processes $1 \to 2$ and $2 \to 3$ is $\left|\frac{Q_{1\to2}}{Q_{2\to3}}\right| = \frac{5}{3}$

(3) The above thermodynamic cycle exhibits only isochoric and adiabatic processes.

(4) The ratio of heat transfer during processes $1 \to 2$ and $3 \to 4$ is $\left|\frac{Q_{1\to2}}{Q_{2\to3}}\right| = \frac{1}{2}$

(1) इस ऊष्मागतिकीय चक्र ($1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$) में किया गया कार्य $|W| = \frac{1}{2}RT_0$ है।

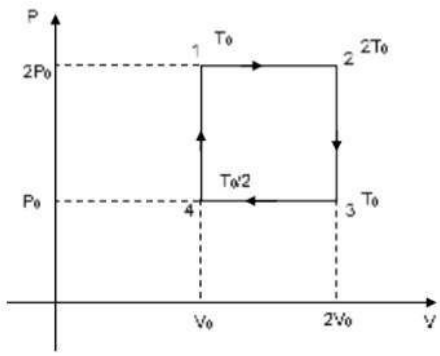
(2) चक्रम $1 \to 2$ तथा $2 \to 3$ में ऊष्मा स्थानांतरण का अनुपात $\left|\frac{Q_{1\to2}}{Q_{2\to3}}\right| = \frac{5}{3}$ है।

(3) उपर्युक्त ऊष्मागतिकीय चक्र में केवल समायतनीय (isochoric) और रूद्धोष्म (adiabatic) प्रक्रम आते है।

(4) चक्रम $1 \to 2$ तथा $3 \to 4$ में ऊष्मा स्थानांतरण का अनुपात $\left|\frac{Q_{1\to2}}{Q_{2\to3}}\right| = \frac{1}{2}$ है।

Ans. **(1, 2)**

Sol.



(4) $\left|\frac{\Delta Q_{1\to2}}{\Delta Q_{3\to4}}\right| = \left|\frac{NC_P\Delta T_{1\to2}}{NC_P\Delta T_{3\to4}}\right| = \frac{T_0}{T_0/2} = 2$

(2) $\left|\frac{\Delta Q_{1\to2}}{\Delta Q_{2\to3}}\right| = \left|\frac{NC_P\Delta T_{1\to2}}{NC_V\Delta T_{2\to3}}\right| = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3}$

(1) $W_{cycle} = P_0V_0 = nR\left[\frac{T_0}{2}\right]$ [Using point no. 4]

(3) Wrong as no adiabatic process is involved

गलत है क्योंकि प्रक्रम में कोई रूद्धोष्म प्रक्रम नहीं है।

Correct option 1, 2

Downloaded From ToraLabs

SECTION-3 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal placed.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks : **+3** If ONLY the correct numerical value is entered.
Zero Marks : **0** In all other cases.

खंड **3** (अधिकतम अंक: **18**)

- इस खंड में छः**(06)** प्रश्न है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक संख्यात्मक मान **(NUMERICAL VALUE)** हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर के सही संख्यात्मक मान को माउज (mouse) और ऑन–स्क्रीन (on–screen) वर्चुअल नुमेरिक कीपेड (virtaul numeric keypad) के प्रयोग से उत्तर के लिए चिन्हित स्थान पर दर्ज करें। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है , तो संख्यात्मक मान को दशमलव के दो स्थानों तक ट्रंकेट/राउंड ऑफ **(truncate/round-off)** करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :–

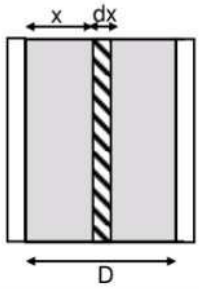
पूर्ण अंक : **+3** यदि दर्ज किया गया संख्यात्मक मान **(Numerical value)** ही सही उत्तर है।
शून्य अंक : **0** अन्य सभी परिस्थितियों में।

1. A parallel plate capacitor of capacitance C has spacing d between two plates having area A. The region between the plates is filled with N dielectric layers, parallel to its plates, each with thickness $\delta = \frac{d}{N}$. The dielectric constant of the mth s layer is $K_m = K\left(1+\frac{m}{N}\right)$. For a very large N(> 10^3), the capacitance C is $\alpha\left(\frac{K \epsilon_0 A}{d \ln 2}\right)$. The value of α will be _____ . [ϵ_0 is the permittivity of free space]

एक C धारिता वाले समान्तर प्लेट संधारित्र के प्लेटों के बीच की दूरी d है और प्रत्येक प्लेट का क्षेत्रफल A है। प्लेटों के बीच पूरे स्थान को प्लेटों के समान्तर $\delta = \frac{d}{N}$ मोटाई वाली N परावैद्युत परतों से भर देते हैं। m^{th} परत का परावैद्युतांक $K_m = K\left(1+\frac{m}{N}\right)$ है। बहुत अधिक N(> 10^3) के लिए धारिता $C = \alpha\left(\frac{K \epsilon_0 A}{d \ln 2}\right)$ है। α का मान _____ होगा। [मुक्त आकाश (free space) की वैद्युतशीलता ϵ_0 है]

Ans. **1.00**

Sol.



Downloaded From ToraLabs

$$\frac{x}{m} = \frac{D}{N}$$

$$d\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{dx}{K_m\varepsilon_0 A} = \frac{dx}{K\varepsilon_0 A\left(1+\frac{m}{N}\right)} = \frac{dx}{K\varepsilon_0 A\left(1+\frac{x}{D}\right)}$$

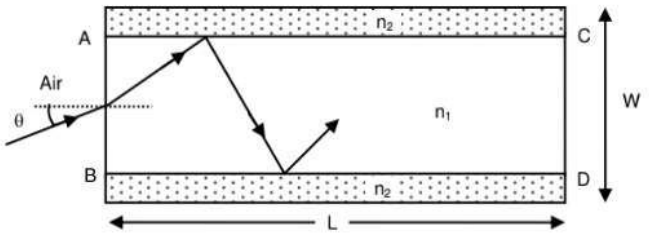
$$\frac{1}{C_{eq}} = \int d\left(\frac{1}{C}\right) = \int_0^D \frac{Ddx}{K\varepsilon_0 A(D+x)}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{D}{K\varepsilon_0 A}\ell n2$$

$C_{eq} = \frac{K\varepsilon_0 A}{D\ell n2}$. Therefore $\alpha = 1$

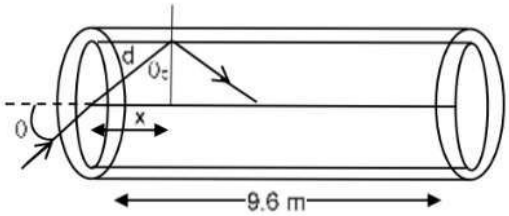
2. A planar structure of length L and width W is made of two different optical media of refractive indices $n_1 = 1.5$ and $n_2 = 1.44$ as shown in figure. If L >> W, a ray entering from end AB will emerge from end CD only if the total internal reflection condition is met inside the structure. For L = 9.6 m, if the incident angle θ is varied, the maximum time taken by a ray to exit the plane CD is $t \times 10^{-9}$ s, where t is _____ .
[Speed of light $c = 3 \times 10^8$ m/s]

एक L लंबाई तथा W चौड़ाई की एक समतल संरचना दो भिन्न प्रकाशीय पदार्थों से बनी है, जिनका अपवर्तनांक $n_1 = 1.5$ और $n_2 = 1.44$ है, जैसा चित्र में प्रदर्शित है। यदि L >> W है तब AB सिरे पर आपति किरण का CD सिरे से उदगमन (emerge) संरचना के अंदर पूर्ण आंतरिक परावर्तन (total internal reflection) होने पर ही होगा। L = 9.6 m के लिए, यदि आपतन कोण θ को बदलते है तब किरण द्वारा CD सिरे से बाहर निकलने में लिया गया अधिकतम समय $t \times 10^{-9}$ s है, जहाँ t का मान _____ है। [प्रकाश कि गति $c = 3 \times 10^8$ m/s]



Ans. **50.00**

Sol.



$1.5 \sin\theta_c = 1.44 \sin 90^\circ$

Downloaded From ToraLabs

$\sin\theta_C = \frac{1.44}{1.50} = \frac{24}{25}$

$\therefore \sin\theta_C = \frac{x}{d} = \frac{24}{25}$

$d = \frac{25x}{24}$

$\therefore$ total length travel by light प्रकाश द्वारा तय की गयी कुल दूरी $= \frac{25}{24} \times 9.6 = 10m$

$\therefore t = \frac{S}{\left(\frac{C}{n_1}\right)} = \frac{10}{\frac{3\times10^8}{1.5}} = \frac{1}{2}\times10^{-7} = 5 \times 10^{-8}$

$t = 50ns$

$t = 50 \times 10^{-9}$

$\therefore$ Ans = 50

3. A liquid at 30° C is poured very slowly into a Calorimeter that is at temperature of 110°C. The boiling temperature of the liquid is 80°C. It is found that the first 5 gm of the liquid completely evaporates. After pouring another 80 gm of the liquid the equilibrium temperature is found to be 50°C. The ratio of the Latent heat of the liquid to its specific heat will be ____ °C. (Neglect the heat exchange with surrounding]

एक 30° C के द्रव को एक ऊष्मामापी (Calorimeter) जिसका 110°C में धीरे–धीरे डाला जाता है। द्रव का कथनांक (boiling temperature) 80°C है। ऐसा पाया गया कि द्रव का पहला 5 gm पूर्ण रूप से वाष्पित हो जाता है। इसके बाद द्रव की 80 gm और मात्रा डालने पर साम्यावस्था का तापमान 50°C हो जाता है। द्रव की गुप्त (Latent) और विशिष्ट (specific) ऊष्माओं का अनुपात ____ °C होगा। (वातावर ण के साथ ऊष्मा स्थानांतरण को उपेक्षणीय माने]

Ans. **270.00, 120.00**

Sol. **CASE-I: If calorimeter is open and after evaporation liquid escapes**

$5 \times S \times 50 + 5L = W \times 30$ .....(1)

$80 \times S \times 20 = W \times 30$ .....(2)

$80 \times S \times 20 = 5 \times S \times 50 + 5L$

$5L = 1350\ S$

$\frac{L}{S} = 270$

CASE-II: If calorimeter is closed (vapour not allowed to escape)

Heat gain = Heat loss

$5S\ (80–30) + 5L = W\ (110–80)$

S = Specific heat of liquid

L = Latent heat of liquid

W = Water equivalent of calorimeter

$250S + 5L = W \times 30$ ..... (1)

Now 80gm liquid is poured

Heat gain = Heat loss

Here final temperature = 50°C

$80 \times S \times 20 = 5L + 5S \times 30 + W \times 30$ ..... (2)

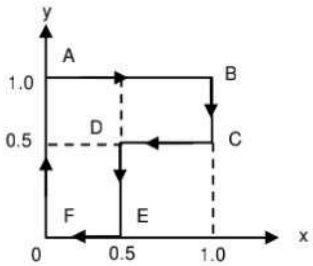
From (1) & (2)

$\frac{L}{S}$ = **120 Ans**

Downloaded From ToraLabs

4. A particle is moved along a path AB–BC–CD–DE–EF–FA, as shown in figure in presence of a force $\vec{F} = (\alpha y\hat{i} + 2\alpha x\hat{j})$N, where x and y are in meter and α w= –1 Nm^{-1}. The work done on the particle by this force $\vec{F}$ will be ____ joule

एक कण को बल $\vec{F} = (\alpha y\hat{i} + 2\alpha x\hat{j})$N, जहाँ x और y का मान मीटर में है तथा α = –1 Nm^{-1} है, की उपस्थिति में AB–BC–CD–DE–EF–FA पथ पर चित्रानुसार चलाया जाता है। बल $\vec{F}$ द्वारा गण पर किये गये कार्य का परिमाण ____ जूल (joule) होगा।



Ans. **0.75**

Sol. $dw = \vec{F}.d\vec{r}$

$dw = \alpha ydx + 2\alpha xdy$

$A \to B$ y = 1, dy = 0 $w_{A\to B} = \int \alpha ydx = \alpha.1\int_0^1 dx = \alpha$

$B \to C$ x = 1, dx = 0 $w_{B\to C} = 2\alpha.1\int_1^{0.5} dy = -2\alpha(0.5) = -\alpha$

$C \to D$ y = 0.5 dy = 0 $w_{C\to D} = \int_1^{0.5} \alpha ydx = \alpha.\frac{1}{2}\int_1^{0.5} dx = -\frac{\alpha}{4}$

$D \to E$ x = 0.5 dx = 0 $w_{D\to E} = 2\alpha\int xdy = 2\alpha.\frac{1}{2}\int_{0.5}^{0} dy = -\frac{\alpha}{2}$

$E \to F$, y = 0, dy = 0, $W_{EF} = 0$

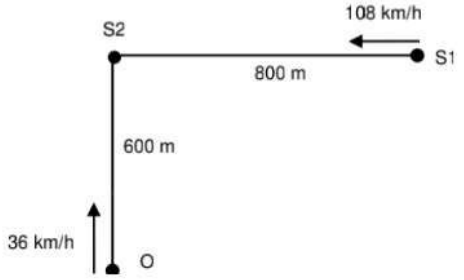
$F \to A$ x = 0, dx = 0, $W_{F\to A} = 0$

$\therefore w = \alpha - \alpha - \frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha}{2} = -\frac{3\alpha}{4}$ Given $\alpha = -1 \Rightarrow$ W = +3/4J = 0.75J

5. A train S1, moving with a uniform velocity of 108 km/h, approaches another train S2 standing on a platform. An observer O moves with a uniform velocity of 36 km/h towards S2, as shown in figure. Both the trains are blowing whistles of same frequency 120 Hz. When O is 600 m away from S2 and distance between S1 and S2 is 800 m, the number of beats heard by O is _____ . (Speed of the sound = 330 m/s)

एक रेलगाड़ी (S1) 108 km/h के समान वेग से चलते हुए दूसरी रेलगाड़ी (S2) जो कि स्टेशन पर खड़ी है की तरफ जा रही है। एक श्रोत (O) 36 km/h के समान वेग से (S2) की तरफ चित्रानुसार जा रहा है। दोनों रेलगाडियाँ 120 Hz के समान आवृति की सीटियाँ बजा रही हैं। जब O की दूरी S2 से 600 m है तथा S1 और S2 के बीच की दूरी 800 m है तब O के द्वारा सुने गए विस्पंदनों (beats) की संख्या _____ है। (ध्वनि की गति = 330 m/s)

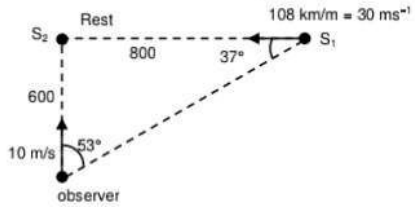
Downloaded From ToraLabs



Ans. **8.12 or 8.13**

Sol. Speed of sound ध्वनि की चाल = 330 m/s

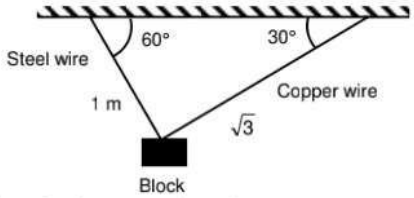
Calculate beat विस्पन्द आवृत्ति f_{req}



$$f_b = 120\left[\left(\frac{330+10\cos 53^\circ}{330-30\cos 37^\circ}\right)-\left(\frac{330+10}{330}\right)\right] = 120\left[\frac{336}{306}-\frac{34}{33}\right] = 8.128\text{Hz}$$

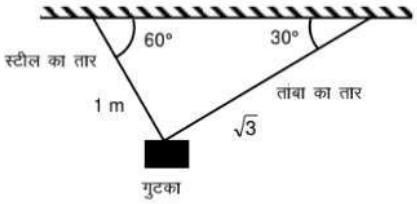
6. A block of weight 100 N is suspended by copper and steel wires of same cross sectional area 0.5 cm^2 and, length $\sqrt{3}$ m and 1 m, respectively. Their other ends are fixed on a ceiling as shown in figure. The angles subtended by copper and steel wires with ceiling are 30° and 60°, respectively. If elongation in copper wire is ($\Delta\ell_C$) and elongation in steel wire is ($\Delta\ell_S$), then the ratio $\frac{\Delta\ell_C}{\Delta\ell_S}$ is ___ .

(Young's modulus for copper and steel are 1×10^{11} N/m^2 and 2×10^{11} N/m^2, respectively)



एक 100 N भार वाले गुटके को तांबे और स्टील के तारों, जिनका अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल (cross sectional area) एकसमान तथा 0.5 cm^2 है और लंबाई क्रमशः $\sqrt{3}$ m तथा 1 m है, द्वारा लटकाया जाता है। तारों के दूसरे छोर छत पर चित्रानुसार जुडे हुए हैं। तांबे और स्टील के तार क्रमशः छत से 30° और 60° का कोण बनाते है। यदि तांबे के तार में लंबाई वृद्धि ($\Delta\ell_C$) तथा स्टील के तार में लंबाई वृद्धि ($\Delta\ell_S$) है तब $\frac{\Delta\ell_C}{\Delta\ell_S}$ is ___ है।

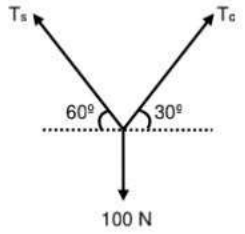
(तांबे और स्टील का यंग गुणांक (Young's modulus) क्रमशः 1×10^{11} N/m^2 तथा 2×10^{11} N/m^2 है)



Downloaded From ToraLabs

Ans. 2.00

Sol.



$$\frac{T_s}{2} = T_c \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$T_s = \sqrt{3}\, T_c$$

$$\frac{\Delta\ell_c}{\Delta\ell_s} = \left(\frac{T_c}{T_s}\right)\left(\frac{\ell_c}{\ell_s}\right)\left(\frac{Y_s}{Y_c}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)\left(\frac{2\times10^{11}}{1\times10^{11}}\right) = 2$$

Downloaded From ToraLabs