Современные вычислительные технологии. Численное решение одномерного уравнения Лапласа на отрезке. Отчет.

Денисенко Елизавета Геннадьевна, 303 группа ВМК МГУ

Содержание

1 Постановка задачи

Необходимо решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} -u'' = f, & x \in (0;1) \\ u(0) = a, & u(1) = b \end{cases}$$

численно с помощью метода конечных разностей.

На отрезке $(0;1)$ вводится равномерная сетка $\{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$, где $x_i = i \cdot h$, $h = \frac{1}{N}$ – шаг сетки.

Вводятся дискретные неизвестные $\{y_i \approx u(x_i)\}$, и для каждого узла составляется дискретное уравнение, приближающее уравнение Лапласа на трехточечном шаблоне.

Дискретная аппроксимация уравнения:

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = f(x_i),$$

для приграничных узлов (x_1, x_{N-1}) сюда войдут граничные условия.

Общая система:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f(x_1) + \frac{a}{h^2} \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) + \frac{b}{h^2} \end{bmatrix}$$

2 Метод прогонки

Система уравнений $Ax = F$ равносильна соотношению:

$$A_i x_{i-1} + B_i x_i + C_i x_{i+1} = F_i. \tag{1}$$

Здесь A_i, B_i, C_i - элементы нижней, главной и верхней диагоналей соответственно. Метод прогонки основывается на предположении, что искомые неизвестные связаны рекуррентным соотношением:

$$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1. \tag{2}$$

Тогда выразим x_{i-1} и x_i через x_{i+1} и подставим в уравнение (1):

$$(A_i \alpha_i \alpha_{i+1} + B_i \alpha_i + C_i) x_{i+1} + A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i + B_i \beta_{i+1} - F_i = 0, \tag{3}$$

где F_i — правая часть i-го уравнения. Это соотношение будет выполняться независимо от решения, если потребовать:

$$\begin{cases} A_i \alpha_i \alpha_{i+1} + B_i \alpha_i + C_i = 0, \\ A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i + B_i \beta_{i+1} - F_i = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = \frac{-C_i}{A_i\alpha_i + B_i}, \\ \beta_{i+1} = \frac{F_i - A_i\beta_i}{A_i\alpha_i + B_i}. \end{cases} \tag{5}$$

Из первого уравнения получим:

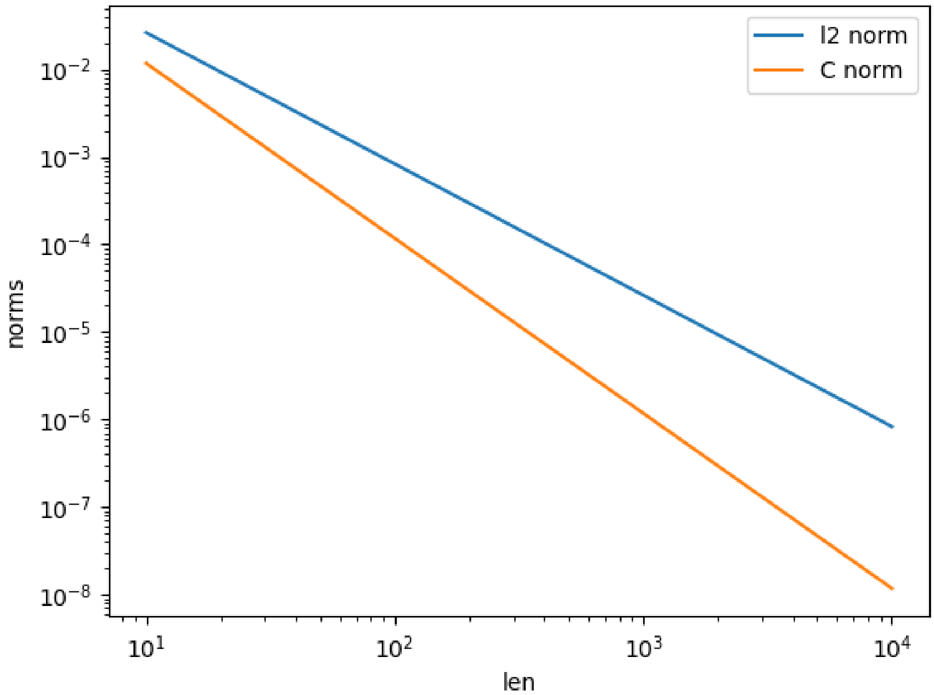
$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{-C_1}{B_1}, \\ \beta_2 = \frac{F_1}{B_1}. \end{cases} \tag{6}$$

После нахождения прогонных коэффициентов α и β, используя уравнение (2), получим решение системы. При этом:

$$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, \ldots, 1. \tag{7}$$

$$x_n = \frac{F_n - A_n\beta_n}{B_n + A_n\alpha_n}. \tag{8}$$

3 Численные эксперименты и выводы



Как видно из графика численное решение сходится к точному решению с ожидаемым порядком точности.