MATMEK-4270 Oblig 1

Torarin Hals Bakke

October 7, 2024

1 Eksakt løsning

Jeg setter inn definisjonen av u i bølgelikningen:

$$\frac{\partial^2 e^{\imath(k_x x + k_y y - \omega t)}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 e^{\imath(k_x x + k_y y - \omega t)}$$

$$-\omega^2 e^{\imath(\dots)} = -c^2(k_x^2 + k_y^2) e^{\imath(\dots)}$$

$$\omega = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

som stemmer med definisjonen av ω.

2 Dispersion coefficient

For å vise at $\tilde{\omega} = \omega$ holder det å vise at den diskretiserte bølgelikningen gjelder for ω når $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{h}{c}$. Jeg skriver

$$u_{ij}^n = e^{\imath(kh(i+j) - \omega n \Delta t)} = A^n E(i,j)$$

der $A = e^{-\imath\omega\Delta t} = e^{-\imath c \sqrt{2} k \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{h}{c}} = e^{-\imath kh}$ og $E(i,j) = e^{\imath kh(i+j)}$.

Da får jeg likningen

$$\begin{aligned} \frac{(A^{n+1} - 2A^n + A^{n-1})E(i,j)}{\Delta t^2} = c^2 A^n \Big\{ \\ \frac{E(i+1,j) - 2E(i,j) + E(i-1,j)}{h^2} \\ + \frac{E(i,j+1) - 2E(i,j) + E(i,j-1)}{h^2} \Big\} \end{aligned} \tag{1}$$

som ved å dele på $A^n E(i,j)$ og forenkle (som vist i forelesning 7) gir

$$e^{-\imath kh} - 2 + e^{\imath kh} = 2c^2 \Delta t^2 \frac{e^{\imath kh} - 2 + e^{-\imath kh}}{h^2}$$

Siden $2c^2 \Delta t^2 = 2c^2 \frac{1}{2} \frac{h^2}{c^2} = h^2$ får jeg til slutt

$$\cos(kh) = \cos(kh)$$

og likningen gjelder.