項目反応理論

2021年6月2日

1 ロジスティックモデル

1.1 オッズ・ロジットと1母数・2母数モデル

あるサッカーチーム i とサッカーチーム j の試合の賭けを募集したとする。この時に発表されるのが、オッズと呼ばれ払戻金倍率の逆数のことである。例えば、オッズが 0.25 なら、その逆数の 4 倍の金額が払い戻される。1000 円を賭けていたら、その元金にプラスして 4000 円を手に入れることができる。オッズは

$$odds = \frac{p_j(\theta_i)}{1 - p_j(\theta_i)} \tag{1}$$

と表現される。オッズが 0.25 のとき、式は $\dfrac{0.2}{1-0.2} = \dfrac{0.2}{0.8}$ となっている。これは、チーム i が 0.2 の確率で勝つと評価されている。

逆にこの式を $p_j(\theta_i)$ について解くと、

$$p_j(\theta_i) = \frac{odds_i}{1 + ddds_i} \tag{2}$$

となる。この式に合わせて、1 母数モデルと 2 母数モデルの ICC を書き換えると、

$$p_j(\theta_i) = \frac{\exp(Da(\theta_i - b_j))}{1 + \exp(Da(\theta_i - b_j))} \tag{3}$$

$$p_j(\theta_i) = \frac{\exp(Da_j(\theta_i - b_j))}{1 + \exp(Da_j(\theta_i - b_j))} \tag{4}$$

となり、$\exp(Da_j(\theta_i - b_j))$ は被験者 i が項目 j に正答するオッズである。

オッズについての考察

自分のチームが弱い場合と強い場合について考える。

- 1 勝 8 敗のとき

$$\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}} = 0.125 \tag{5}$$

- 1 勝 16 敗のとき

$$\frac{\frac{1}{17}}{1-\frac{1}{17}} = 0.062 \tag{6}$$

- 8 勝 1 敗のとき

$$\frac{\frac{8}{9}}{1-\frac{8}{9}} = 8 \tag{7}$$

- 16 勝 1 敗のとき

$$\frac{\frac{16}{17}}{1-\frac{16}{17}} = 16 \tag{8}$$

負けが重なっても、式の性質上値が 0 を下回ることがないが、価値が重なるときの値は、上にどこまでも伸びる。尺度の違いからうまく判定できないところに注意する必要がある。

上記の尺度の問題を解決する方法として、オッズの対数をとる操作を行う。式にすると

$$logit_i = log(odds_i) = log(\frac{p_j(\theta_i)}{1-p_j(\theta_i)}) \tag{9}$$

と表され、これをロジットという。上記を例に考えると、

- 1 勝 8 敗のとき

$$log\left(\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}\right) \fallingdotseq -0.903 \tag{10}$$

- 1 勝 16 敗のとき

$$log\left(\frac{\frac{1}{17}}{1-\frac{1}{17}}\right) \fallingdotseq -1.207 \tag{11}$$

- 8 勝 1 敗のとき

$$log\left(\frac{\frac{8}{9}}{1-\frac{8}{9}}\right) \fallingdotseq 0.903 \tag{12}$$

- 16 勝 1 敗のとき

$$log\left(\frac{\frac{16}{17}}{1-\frac{16}{17}}\right) \fallingdotseq 1.204 \tag{13}$$

このように尺度をそろえることができる。