

項目反応理論

2021 年 6 月 6 日

1 ロジスティックモデル

1.1 オッズ・ロジットと 1 母数・2 母数モデル

あるサッカーチーム i とサッカーチーム j の試合の賭けを募集したとする。この時に発表されるのが、オッズと呼ばれ払戻金倍率の逆数のことである。例えば、オッズが 0.25 なら、その逆数の 4 倍の金額が払い戻される。1000 円を賭けていたら、その元金にプラスして 4000 円を手に入れることができる。オッズは

$$odds = \frac{p_j(\theta_i)}{1 - p_j(\theta_i)} \quad (1)$$

と表現される。オッズが 0.25 のとき、式は $\frac{0.2}{1 - 0.2} = \frac{0.2}{0.8}$ となっている。これは、チーム i が 0.2 の確率で勝つと評価されている。

逆にこの式を $p_j(\theta_i)$ について解くと、

$$p_j(\theta_i) = \frac{odds_i}{1 + odds_i} \quad (2)$$

となる。この式に合わせて、1 母数モデルと 2 母数モデルの ICC を書き換えると、

$$p_j(\theta_i) = \frac{\exp(Da(\theta_i - b_j))}{1 + \exp(Da(\theta_i - b_j))} \quad (3)$$

$$p_j(\theta_i) = \frac{\exp(Da_j(\theta_i - b_j))}{1 + \exp(Da_j(\theta_i - b_j))} \quad (4)$$

となり、 $\exp(Da_j(\theta_i - b_j))$ は被験者 i が項目 j に正答するオッズである。

オッズについての考察

自分のチームが弱い場合と強い場合について考える。

- 1勝8敗のとき

$$\frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = 0.125 \quad (5)$$

- 1勝16敗のとき

$$\frac{\frac{1}{17}}{1 - \frac{1}{17}} = 0.062 \quad (6)$$

- 8勝1敗のとき

$$\frac{\frac{8}{9}}{1 - \frac{8}{9}} = 8 \quad (7)$$

- 16勝1敗のとき

$$\frac{\frac{16}{17}}{1 - \frac{16}{17}} = 16 \quad (8)$$

負けが重なっても、式の性質上値が0を下回ることがないが、価値が重なるときの値は、上にどこまでも伸びる。尺度の違いからうまく判定できないところに注意する必要がある。

上記の尺度の問題を解決する方法として、オッズの対数をとる操作を行う。式にすると

$$\text{logit}_i = \log(\text{odds}_i) = \log\left(\frac{p_j(\theta_i)}{1 - p_j(\theta_i)}\right) \quad (9)$$

と表され、これをロジットという。上記を例に考えると、

- 1勝8敗のとき

$$\log\left(\frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}}\right) \doteq -0.903 \quad (10)$$

- 1勝16敗のとき

$$\log\left(\frac{\frac{1}{17}}{1 - \frac{1}{17}}\right) \doteq -1.207 \quad (11)$$

- 8勝1敗のとき

$$\log\left(\frac{\frac{8}{9}}{1 - \frac{8}{9}}\right) \doteq 0.903 \quad (12)$$

- 16 勝 1 敗のとき

$$\log \left(\frac{\frac{16}{17}}{1 - \frac{16}{17}} \right) \doteq 1.204 \quad (13)$$

このように尺度をそろえることができる。

1.2 ICC が表現する確率についての考察

A 氏と B 氏の二名について考えてみる。どちらも特性 $\theta = 0.0$ だと仮定する。この二名が回答したある項目 32 についてみていく。 A 氏は項目 32 の答えを知っていて正解し、 B 氏は答えを知らずに誤答したとする。この場合、 A 氏は確率 1 で正解し、 B 氏は確率 1 で誤答したと言える。では、 ICC による $p_{32}(\theta = 0.0) = 0.741$ は何を表しているのだろうか。主に

- 特性値が θ である受験者の母集団における特定項目の正答確率
- 同一の性質を持つ項目の集まりに対する特定の受験者の正答確率
- 特定の受験者の特定の項目に対する正答確率

の 3 通りで解釈することができる。