

基本例題 半直線のなす角

3点 O , $A(2 + \sqrt{3}i)$, $B(-1 + 3\sqrt{3}i)$ について半直線 OA から半直線 OB までの回転角 θ を求める。
ただし、 $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。

指針 半直線のなす角

$B(\beta)$, $C(\gamma)$ に対して、点 B を r 倍して、 θ だけ回転したとき点 C に移るとすると、

$$\gamma = r(\cos \theta + i \sin \theta)\beta \quad (1)$$

となる。拡大、回転は複素数 z に $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ を掛けることに対応した。回転の中心が、原点ではない場合には、回転の中心が原点に来るように平行移動してから考える。ここで $A(\alpha)$ を追加して考える。点 A を中心に、点 B を r 倍にして、 θ だけ回転したときに、点 C に移ることとする。このときに、点 A が原点に移る平行移動によって全体を平行移動すると、

$$\gamma - \alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)(\beta - \alpha) \quad (2)$$

となる。ここで、点 A , B , C が分かっているときに、 $\angle BAC$ を求めることを考える。式 (2) の両辺を $\beta - \alpha$ で割ると、

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (3)$$

となる。 θ は左辺の偏角であることがわかる。また、左辺の絶対値が半直線の長さであることがわかる。

解答

練習問題

3点 O , $A(-1+2i)$, $B(1+3i)$ について、半直線 OA から半直線 OB までの回転角 θ を求めなさい。ただし、 $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。

練習問題

3点 $A(-1+2i)$, $B(1+3i)$, $C(4+3i)$ について、半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ を求めなさい。ただし、 $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。