

項目反応理論

2021 年 6 月 27 日

3 尺度値の推定

3.4 ベイズ推定法

最尤推定法では、全問正答全問誤答の場合は、推定することができなかった。尺度値の分布を利用した推定方法に、ベイズ推定法がある。これは、全問正答、誤答の尺度値を推定することができる。

3.4.1 ベイズの定理

ベイズの定理

ある確率事象を A 、 B とする。 $f(B)$ は事象 B が起こる確率であり。 $f(A|B)$ は事象 B が起こる仮定の上で、事象 A が起こる確率とする。二つの積は、二つの事象が両方とも観察される確率とし $f(A, B)$ とする。これらの関係を式にすると、

$$f(A, B) = f(B)f(A|B) \quad (3.24)$$

となる。両辺を $f(B)$ で割ると、

$$f(A|B) = \frac{f(A, B)}{f(B)} \quad (3.25)$$

となる。ここで A と B は一般的な事象を表しているので、式 (3.24) の A と B を入れ替えると、

$$f(A, B) = f(A)f(B|A) \quad (3.26)$$

である。これを式 (3.25) に代入すると、

$$f(A|B) = \frac{f(A)f(B|A)}{f(B)} \quad (3.27)$$

となり、この式をベイズの定理という。

< 具体例 >

同じ形の赤い壺、青い壺、緑の壺に基石がそれぞれ10個入っており、そのうち黒い基石がそれぞれ3個、4個、5個入っている。目をつぶって壺を選び、そのまま基石を一つ取り出す試行を考える。

ここで、 B を基石の色、 A を壺の色とする。例えば、 $f(\text{赤}|\text{黒})$ というのは、基石を確認したら黒色だったとき壺の色が赤である確率を表している。それぞれの壺が選ばれる確率はどうよに確からしく、 $\frac{1}{3}$ とする。このことを考慮して、式のすると、

$$f(\text{赤}|\text{黒}) = \frac{f(\text{赤})f(\text{黒}|\text{赤})}{f(\text{黒})} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{1}{4} \quad (3.28)$$

となり、赤い壺である確率は2割5分であることが分かった。

3.4.2 MAP 推定

式 (3.27) において、 A を被験者母数 θ_i とし、 B の反応パターン \mathbf{u}_i とする。これらの関係を式にすると、

$$f(\theta_i|\mathbf{u}_i) = \frac{g(\theta_i)L(\mathbf{u}_i|\theta_i)}{f(\mathbf{u}_i)} \quad (3.29)$$

となる。式 (3.29) は、 \mathbf{u}_i が観察されたときの θ_i の事後分布と呼ばれる。また、 θ_i の分布 $g(\theta_i)$ を事前分布という。ここでの事前事後とはデータを観測する前と後である。式 (3.29) を最大にしたときの被験者母数の値をベイズモーダル値あるいは事後確率最大推定値 (MAP) という。最大化を考えるために、対数変換を行い、

$$\log f(\theta_i|\mathbf{u}_i) = \log g(\theta_i) + \log L(\mathbf{u}_i|\theta) - \log f(\mathbf{u}_i) \quad (3.30)$$

変数である θ_i で偏微分すると、第3項は0になり消えり

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log f(\theta_i|\mathbf{u}_i) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log g(\theta_i) + \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log L(\mathbf{u}_i|\theta) \quad (3.31)$$

となる。これを0とおき θ_i に関して方程式を解くと、被験者母数のベイズ推定値を得る。

被験者母数には標準正規分布を仮定しているので、それを事前分布として用いる。標準正規分布の密度関数の対数を計算し、

$$\log g(\theta_i) = \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) + \left(\frac{-1}{2} \theta_i^2 \right) \quad (3.32)$$

θ_i で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log g(\theta_i) = -\theta_i \quad (3.33)$$

となる。これを式 (3.31) に代入して、値を0とおくと、

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log L(\mathbf{u}_i) - \theta_i = \mathbf{L}\mathbf{L}'(\theta_i) - \theta_i = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

となる。ここで $LL'(\theta_i)$ の具体的な関数は、

$$LL'(\theta_i) = Da \sum_{j=1}^n (u_{ij} - p_j(\theta_i))$$

$$LL'(\theta_i) = D \sum_{j=1}^n a_j (u_{ij} - p_j(\theta_i))$$

$$LL'(\theta_i) = D \sum_{j=1}^n \frac{a_j (u_{ij} - p_j(\theta_i)) (p_j(\theta_i) - c_j)}{p_j(\theta) (1 - c_j)}$$

である。つまり事前分布に標準正規分布を仮定したベイズ推定法のための方程式は、尤度方程式から θ_i を引いたものである。

ここでベイズ推定法と最尤推定法を比較してみる。

- 1 項目数 n が増えると、最尤推定法ベイズ推定値は似たようなものになる。
- 2 ベイズ推定法が有効であるか否かは、被験者母数の事前分布適切であるか否かに依存している。