Brown 運動

2022 年 2 月 13 日

1 Brown 運動

1.1 構成

B_t をブラウン運動とする。時刻を t として $t=0$(始点) の時、$B_t=0$ として、 $t=1$(終点) の時、$B_t=1$ とする。一番単純なブラウン運動が生成された。

ブラウン運動を一般化して考える。$\{B_t, \mathscr{F}; t \geq 0\}$ をブラウン運動とする。ただし、$0 \leq s < t < \infty$。また、$\theta = \dfrac{t+s}{2}$ とし $B_s = x, B_t = z$ を仮定したとき、B_θ は期待値 $\mu = \dfrac{x+z}{2}$、分散 $\sigma^2 = \dfrac{t-s}{4}$ の標準正規分布に従う。これを確認するために、$B_s, B_\theta - B_s, B_t - B_\theta$ の増加を考えて、確率密度関数を導いてみる。

$$\begin{aligned} P[B_s \in dx, B_\theta \in dy, B_t \in dz] &= p(s;0,x)p\left(\frac{t-s}{2};x,y\right)p\left(\frac{t-s}{2};y,z\right)dxdydz \\ &= p(s;0,x)p(t-s;x,z)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dxdydz \end{aligned} \tag{1}$$

ここで以下の式で、式 (1) を割ると

$$P[B_s \in dx, B_t \in dz] = p(s;0,x)p(t-s;x,z)dxdz \tag{2}$$

以下の式を得る。

$$P[B_{\frac{t+s}{2}} \in dy | B_s = x, B_t = z] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dy \tag{3}$$

この $B_{\frac{t+s}{2}}$ の式の形より、有限区間 $[0,1]$ 上で、生成することができることがわかる。区間 $[0,1]$ 上での単純な線形補完によるブラウン運動の生成の確認は、全ての $t \geq 0$ においてブラウン運動を生成することができる確認につながる。

1.2 証明

この構成を可能にするために、まずは標準正規分布に従う変数の可算集合 $\{\xi_k{}^{(n)}; k \in I(n), n = 0, 1, \dots\}$ から考えよう。ここにおける $I(n)$ とは 0 から 2^n までの奇数の集合である。各 0 以上の n について、$B^{(n)} = \left\{B_t^{(n)}; 0 \le t \le 1\right\}$ をブラウン運動と定める。ここで、$n \ge 1$ に対して、$B^{(n)}_{\frac{k}{2^{n-1}}}$ と $B^{(n-1)}_{\frac{k}{2^{n-1}}}$ を同じと定める。そうすることで、各 n について $B^{(n)}_{\frac{k}{2^n}}$ について考えればよいことになる。次に、

$$B_0^{(0)} = 0, \quad B_1^{(0)} = \xi_1^{(0)} \tag{4}$$

と定める。これにより $B^{(n)}_{\frac{k}{2^n}}$ をいかの式で定義することができる。

$$B^{(n)}_{\frac{k}{2^n}} \equiv B^{(n)}_{\frac{t+s}{2}} \triangleq \mu + \sigma\xi_k^{(n)}. \tag{5}$$

次に、$B_t^{(n)}$ は連続関数 B_t にほとんど確実に t に関して一様収束して $\{B_t, \mathscr{F}^B; 0 \ge t \ge 1\}$ はブラウン運動になることを示そう。

はじめは、$B_t^{(n)}$ に別の便利な表記を与えよう。ハール関数を次のように定める。$H_1^{(0)}(t) = 1, 0 \le t \le 1$ そして、$n \ge 1, k \in I(n)$ に対して、

$$H_k^{(n)} = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & (\frac{k-1}{2^n} \le t \le \frac{k}{2^n}) \\ -2^{\frac{n-1}{2}} & (\frac{k}{2^n} \le t \le \frac{k+1}{2^n}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{6}$$

次に、シャウダー関数を定義する。

$$S_k^{(n)}(t) = \int_0^t H_k^{(n)}(u)du \quad 0 \le t \le 1, n \ge 0, k \in I(n) \tag{7}$$

n に関して帰納的に考えると、

$$B_t^{(n)}(\omega) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k \in I(m)} \xi_k^{(m)}(\omega) S_k^{(m)}(t) \quad 0 \le t \le 1, n \ge 0 \tag{8}$$

と書ける。

補題 1.1 $n \to \infty$ のとき、$\{B_t^{(n)}; o \le t \le 1, n \ge 0\}$ は、ほとんど確実に $\omega \in \Omega$ に関して $\{B_t; o \le t \le 1\}$ に一様収束する。

証明: $b_n = max_{k \in I(n)} |\xi_k^{(n)}|$ と定義する。$x > 0$ に対して、

$$\begin{aligned} P[|\xi_k^{(n)}| > x] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &\ge \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty \frac{u}{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} \end{aligned} \tag{9}$$

である。これより、

$$P[b_n > n] = P[\bigcup_{k \in I_n} \{|\xi_k^{(n)}| > n\}] \le 2^n P[|\xi_1^{(n)}| > n] \le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^n e^{-\frac{n^2}{2}}}{n}, n \ge 1 \tag{10}$$

となる。$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n e^{-\frac{n^2}{2}}}{n} < \infty$ であるから、$Borel-Cantelli$ の補題より、$P(\tilde{\Omega}) = 1$ となる適当な集合 $\tilde{\Omega}$ が存在して、各 $\omega \in \tilde{\Omega}$ に対して、整数 $n(\omega)$ を選んで、全ての $n \ge n(\omega)$ に対して $b_n(\omega) \le n$ をみたすようにできてる。しかし、

$$\sum_{n=n(\omega)}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} |\xi_k^{(n)} S_k^{(n)}(t)| \le \sum_{n=n(\omega)}^{\infty} n 2^{\frac{-n+1}{2}} < \infty \tag{11}$$

であり、したがって、$\omega \in \tilde{\Omega}$ に対して、$B_t^{(n)}(\omega)$ は極限 $B_t(\omega)$ に t に関して一様収束する。 □

ここで、内積について定義しておく。内積 $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$ のもとで $L^2[0,1]$ は $Hilbert$ 空間であり、$Haar$ 関数 $\{H_k^{(N)}; k \in I(n), n \ge 0\}$ は完全正規系を作る。$Parseval$ の等式

$$< f, g >= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} < f, H_k^{(n)} >< g, H_k^{(n)} > \tag{12}$$

$f = 1_{[0,1]}, g = [0,1]$ を適応させると

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} S_k^{(n)}(t) S_k^{(n)}(s) = s \wedge t \tag{13}$$

定理 1.2 $B_t = \lim_{n \to \infty} B_t^{(n)}$ とすると、$\{B_t, \mathscr{F}_t^B; 0 \le t \le 1\}$ はブラウン運動になる

証明: 証明するに際して、$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \le 1$ に対して、増分 $\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\}_{j=1}^n$ が独立で、期待値 0、分散 $t_j - t_{j-1}$ になっていることを示す。そのために、$\lambda_i \in \mathbb{R}, j = 1, \cdots, n$ そして $i = \sqrt{-1}$ に対して、

$$E\left[\exp\left\{i \sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right\}\right] = \prod_{j=1}^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})\right\} \tag{14}$$

$\lambda_{n+1} = 0$ として、独立性と標準正規性を用いると、

$$\begin{aligned}
E\left[\exp\left\{-i \sum_{j=1}^n (\lambda_{j+1} - \lambda_j) B_{t_j}^{(M)}\right\}\right] &= E\left[\exp\left\{-i \sum_{m=0}^{M} \sum_{k \in I(m)} \xi^{(m)} \sum_{j=1}^n (\lambda_{j+1} - \lambda_j) S_k^{(m)}(t_j)\right\}\right] \\
&= \prod_{m=0}^{M} \prod_{k \in I(m)} E\left[\exp\left\{-i \xi_k^{(m)} \sum_{j=1}^n (\lambda_{j+1} - \lambda_j) S_k^{(m)}(t_j)\right\}\right] \\
&= \prod_{m=0}^{M} \prod_{k \in I(m)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{(\lambda_{j+1} - \lambda_j) S_k^{(m)}(t_j)\right\}^2\right] \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (\lambda_{j+1} - \lambda_j)(\lambda_{j+1} - \lambda_j) \sum_{m=0}^{M} \sum_{k \in I(m)} S_k^{(m)}(t_j) S_k^{(m)}(t_j)\right]
\end{aligned} \tag{15}$$

ここで、$M \to \infty$ と式 (13) を用いると、

$$
\begin{aligned}
& E\left[\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(B_{t_j} - Bt_{j-1})\right\}\right] \\
&= E\left[\exp\left\{i\left(\lambda_1(B_{t_1} - B_{t_0}) + \lambda_2(B_{t_2} - B_{t_1}) + \cdots + \lambda_n(B_{t_n} - B_{t_{n-1}})\right)\right\}\right] \\
&= E\left[\exp\left\{-i\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1} - \lambda_j)B_{t_j}\right\}\right] (\because B_{t_0}\text{は}\,0\,\text{なので消える}) \\
&= \exp\left\{-\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(\lambda_{j+1} - \lambda_j)(\lambda_{i+1} - \lambda_i)t_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1} - \lambda_j)^2 t_j\right\} \\
&= \exp\left\{-\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j+1} - \lambda_j)(-\lambda_{j+1})t_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1} - \lambda_j)^2 t_j\right\} \\
&= \exp\left\{-\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j+1} - \lambda_j)(-\lambda_{j+1})t_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j+1} - \lambda_j)^2 - \frac{1}{2}(\lambda_{n+1} - \lambda_n)^2 t_n\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\left\{2(\lambda_{j+1} - \lambda_j)(\lambda_{j+1}) - (\lambda_{j+1} - \lambda_j)^2\right\}t_j - \frac{1}{2}(\lambda_{n+1} - \lambda_n)^2 t_n\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\left\{2(\lambda_{j+1})^2 - 2(\lambda_{j+1}\lambda_j) - (\lambda_{j+1})^2 + 2(\lambda_{j+1}\lambda_j) - (\lambda_j)^2\right\}t_j - \frac{1}{2}(\lambda_n)^2 t_n\right\} (\because \lambda_{n+1} = 0) \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}({\lambda_{j+1}}^2 - {\lambda_j}^2)t_j - \frac{1}{2}{\lambda_n}^2 t_n\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2}({\lambda_2}^2 - {\lambda_1}^2)t_1 + \frac{1}{2}({\lambda_3}^2 - {\lambda_2}^2)t_2 + \cdots + \frac{1}{2}({\lambda_n}^2 - {\lambda_{n-1}}^2)t_{n-1} - \frac{1}{2}{\lambda_n}^2 t_n\right\} \\
&= \prod_{j=1}^{n}\exp\left\{-\frac{1}{2}{\lambda_j}^2(t_j - t_{j-1})\right\} \qquad (16)
\end{aligned}
$$

□

これにより証明された。