確率統計特論

2022 年 4 月 18 日

1 ルベーグの優収束定理

定義: 可測集合 A 上の可測関数列 f_n は、A 上各点収束するとする。
ある A 上可測積分関数 g が存在して、$\forall n$ に対して、

$$|f_n(x)| \leq g(x) a.e x \in A$$

を満たすとき、

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)dx = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

ポイントは 3 つ

- f_n が各点収束すること
- g が f_n の優関数であること
- g が可積分であること

これを期待値について考えると

$(\Omega,\mathscr{F},P)$:確率空間
X_n,$n = 1, 2, \cdots$:確率変数
に対して、

- $|X_n| \leq U, j = 1, 2, \cdots$ となる U が確率 1 で存在する。
- $\lim_{j\to\infty} X_n = X$ が成立する。

このとき、$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[\lim_{n\rightleftarrows\infty} X_n]$ となる

2 期待値と極限が交換できない場合

$\Omega = (0, 1), P$: 一様分布

$X_n(\omega) = n(\omega \in (0, \frac{1}{n}))$

$X_n(\omega) = 0(otherwise)$

このとき $\forall n$ に対して、$E[X_n] = 1$ だが ω に対して $X_n(\omega) \to 0$ なので、
$\lim E[X_n] = 1, E[\lim X_n] = 0$

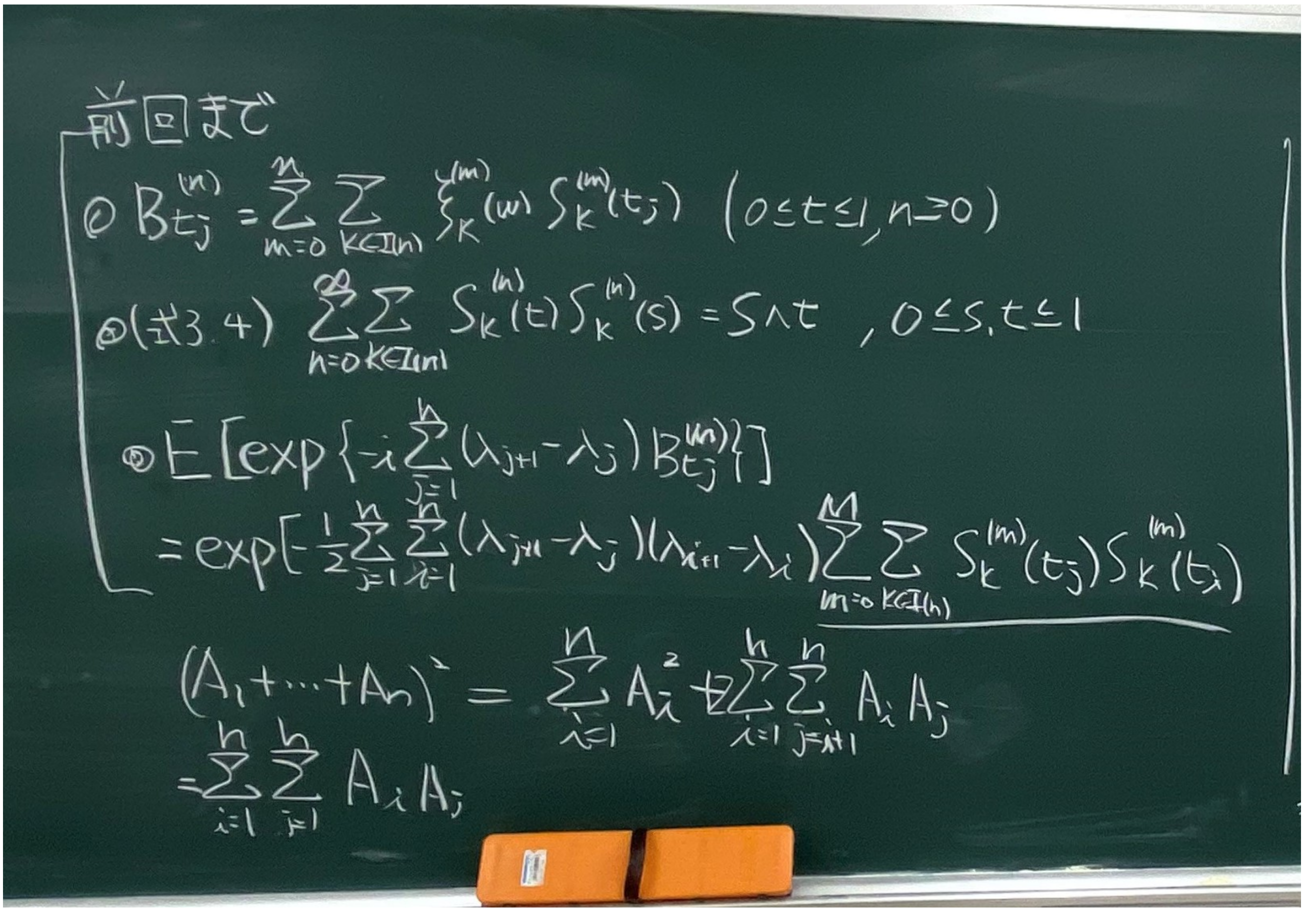

図 1: 前回までに分かったこと