項目反応理論

2021 年 6 月 21 日

3　尺度地の推定

3.3　数値解法

3.3.2　挟み撃ち法

前回は方程式を解く解析的解法を紹介した。しかし、解析的に解くことが困難な場合には、関数の具体的な形状に依存しない解法が求められる。数値解法の 1 種である挟み撃ち法を紹介する。以下のアルゴリズムで方程式を解く。

(1) 正の値をとる収束精度 ϵ を定める。

(2) $LL'(\theta_D) > 0$ なる下限値 θ_D を定める。

(3) $LL'(\theta_D) < 0$ なる上限値 θ_U を定める。

(4) $\theta_M = \dfrac{(\theta_D + \theta_U)}{2}$

(5) $LL'(\theta_M) > \epsilon$ なら $\theta_D = \theta_M$ として (4) に戻る。

(6) $LL'(\theta_M) < -\epsilon$ なら $\theta_U = \theta_M$ として (4) に戻る。

(7) $|LL'(\theta_M)| \leq \epsilon$ なら尺度地の推定値 $\hat{\theta}_i = \theta_M$ として計算終了。

[具体例]

1. (1) 収束精度を $\epsilon = 0.00001$ と定める。
2. (2)$LL'(-20.0) = 1.64388$ で正になる下限値 $\theta_D = -20.0$ を定める。
3. (3)$LL'(10.0) = -1.50686$ なる上限値 θ_U を定める。
4. (4)$\dfrac{-20.0 + 10.0}{2} = -5.0$
5. (5)$LL'(-5.0) = 1.39742$ なので $\theta_D = \theta_M$ として (4) に戻る。
6. (4)$\dfrac{(-5.0 + 10.0)}{2} = 2.5$

7. (5)$LL'(2.5) = -0.34504$ なので $\theta_U = \theta_M$ として (4) に戻る。
8. ……
9. (3) $\dfrac{(-1.8087 + (-1.8085))}{2} = -1.80859$
10. (7) $|LL'(-1.80859)| \leq 0.00001$ なので、$\hat{\theta}_i = -1.80859$ で計算終了。

3.3.3 ニュートン法

前述した挟み撃ち法は、正と負の値である θ_U と θ_D の間には 0 となる値が存在する、ある種の中間値の定理のような性質を利用している。関数の具体的な形状に依存せず方程式を解く方法に、ニュートン法を紹介する。これは、初期値を更新しながら解に近づく方法である。

ニュートン法は、区分を狭めれば滑らかな関数は直線に近づいていく、という性質を利用した数値解法である。まず、初期値 ${}_0\theta$ を設ける。関数に対して ${}_0\theta$ から接線を引く。初めのほうは関数も直線ではないため解には遠いものとなるが、次に初めの接線と 0 の交点を ${}_1\theta$ とする。これを繰り返すことで、限りなく解に近似することができる。では、どのようにして ${}_0\theta$ から ${}_1\theta$ を求めることができるのだろうか。

${}_0\theta$ から引いた接線の傾きは

$$LL''({}_0\theta) = \frac{LL'({}_0\theta)}{{}_0\theta -_1 \theta} \tag{3.17}$$

のように表現することができる。この式を ${}_1\theta$ に関して解くと、

$${}_1\theta =_0 \theta - \frac{LL'({}_0\theta)}{LL''({}_0\theta)} \tag{3.18}$$

となり ${}_0\theta$ から ${}_1\theta$ を求めることができる。${}_2\theta$ を求められることから、一般化して

$${}_{k+1}\theta =_k \theta - \frac{LL'({}_k\theta)}{LL''({}_k\theta)} \tag{3.19}$$

と表すことができる。