数列重要事項

1　数列

1.1　等差数列

- 初項 a_1、等差 d とする
- 等差数列の一般項 $a_n = a_1 + (n-1)d$
- 等差数列の和 $S_n = \frac{1}{2} \times n \times (a_1 + a_n)$
- 言い換えると $S_n = \frac{1}{2} \times (\text{項数}) \times (\text{初項} + \text{末項})$

1.2　等比数列

- 初項 a_1、等比 r とする
- 等比数列の一般項 $a_n = a_1 \times r^{n-1}$
- 等比数列の和 $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$
- 言い換えると $S_n = \frac{\text{初項}\,(1-\text{公比}^{\text{項数}})}{1-\text{公比}}$

1.3　階差数列

- 注意 ･･･ 元の数列が階差数列ではない。階差数列 $\{b_n\}$ をもつ数列 $\{a_n\}$ である。
- 初項 a_1、階差数列 $\{b_n\}$ とする
- 等差数列の一般項 $n \geqq 2$ のとき $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$
- **$n = 1$ のときもちゃんと確かめる!!!もし $n = 1$ のときに値が違っていたら $n = 1$ のときと $n \geqq 2$ のときで場合分けして答えを書く**
- テストではしっかり $n \geqq 2$ のときで計算してないと減点になるので注意
- $n \geqq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$ が成り立つ
- また $n \geqq 2$ のとき $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ が成り立つ

1.4　シグマの計算

- $\sum_{k=1}^{n}(\text{定数}) = (\text{定数}) \times n$
- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(1+n)$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(1+n)(2n+1)$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(1+n)\right\}^2$

1.5　群数列

- 問題を解き始める前に以下の 3 つを最初に求めておくと解きやすくなることが多い
- 第 n 群の項数
- 第 n 群までの項数の和 ･･･ 第 n 群の最後の項が前から何番目なのかが分かる
- 第 n 群の最初の項と最後の項の値
- 群数列は元の数列と項数の数列が重なっているから難しく感じるので自分が元の数列の一般項を考えているのか、項数の数列を考えているのかをしっかり考えながら解く

1.6　部分分数分解

- $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ の通分ができるのかの確認から
- $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$
- 部分分数分解はこの逆を使う
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$
  $= (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$
  $\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

- 3つの部分分数分解
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
- $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)})$
を利用する。あとは並べて残る部分だけ計算する。

1.7 漸化式

- 漸化式は基本3パターンに集約される。その3パターンは以下
- 等差型
$a_{n+1} = a_n + d$
数列$\{a_n\}$は初項a_1、等差dの等差数列
- 等比型
$a_{n+1} = r \times a_n$
数列$\{a_n\}$は初項a_1、等差rの等差数列
- 階差型
$a_{n+1} = a_n + (n\text{の式})$
数列$\{a_n\}$は初項a_1、階差数列$\{b_n = (n\text{の式})\}$をもつ数列
- それ以外の漸化式は上の3つのどれかに変形する

1.8 漸化式

$$a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n - 2$$

- a_{n+1}とa_nをαとおくと
$\alpha = 3\alpha - 2$となり$\alpha = 1$が求まる。
- $a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$に$\alpha = 1$を代入して
$a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$を得る。
- ここで$b_n = a_n - 1$とすると$b_{n+1} = a_{n+1}$となるので$a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$は$b_{n+1} = 2b_n$となる。
- $b_{n+1} = 2b_n$は初項$b_1 = a_1 - 1 = 1$、等比2の等比数列なので一般項は$b_n = 1 \times 2^{n-1}$となる。
- $b_n = a_n - 1$より$a_n - 1 = 2^{n-1}$なので$a_n = 2^{n-1} + 1$

1.9 隣接3項間漸化式

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$

- a_{n+1}をα^2と、a_nをαとおくと
$\alpha^2 = 5\alpha - 6$となり$\alpha = 2, 3$が求まる。
- 元の式が
$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n)$または
$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n)$と変形できる。
- $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n)$について
$b_n = a_{n+1} - 2a_n$とおくと$b_{n+1} = 3b_n$となり、
数列$\{b_n\}$は初項$b_1 = a_2 - 2a_1 = -1$、公比3の等比数列なので$b_n = -3^{n-1}$つまり$a_{n+1} - 2a_n = -3^{n-1}$
- $a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n)$について
$c_n = a_{n+1} - 3a_n$とおくと$c_{n+1} = 2c_n$となり、
数列$\{c_n\}$は初項$c_1 = a_2 - 3a_1 = -2$、公比2の等比数列なので$c_n = -2^n$つまり$a_{n+1} - 3a_n = -2^n$
- $a_{n+1} - 2a_n = -3^{n-1}$から$a_{n+1} - 3a_n = -2^n$を引くと$a_n = -3^{n-1} + 2^n$
- ここからは興味のある人だけ
- なぜいきなりa_{n+1}をα^2と、a_nをαとおき$\alpha^2 = 5\alpha - 6$が出てくるのかを考える
- モチベーションは、「与えられた漸化式をある文字m, nを使って
$a_{n+2} - ma_{n+1} = n(a_{n+1} - ma_n)$
のような形にして等比型のような形にしたい」
- $a_{n+2} - ma_{n+1} = n(a_{n+1} - ma_n)$を変形すると$a_{n+2} = (m+n)a_{n+1} - mna_n$となる。
- もとの漸化式に戻すには$m + n = 5, mn = -6$となるようなm, nを見つければよい
- 解と係数の関係よりm, nは文字αを使った方程式$\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0 \rightleftarrows \alpha^2 = 5\alpha - 6$の解となる。
- これが最初に出てきた方程式となる。

1.10 漸化式に変形

漸化式は数列の最大で最難の課題である。しかし、漸化式はいろいろな形で出題されるので基本3パターンに落とし込む変形の仕方がその分だけある。テストだけでなく漸化式の勉強するときはその変形の仕方を自分なりに見つけて行くことが大事である。

1.11 数学的帰納法

- $n = 1$ のとき成立しているか
- $n = k$ のとき成り立っていると仮定する
- $n = k + 1$ のとき成り立っているかを証明して完了。このとき使えるのは $n = k$ では成り立っているという事実
- 「神は存在するのか」の問いに対して「神は存在するよ。だって、神の言葉をつづった聖書に書いてあるからね」は文章としておかしい。神が存在するという結論を根拠に使ってしまっている。これを循環論法という。
- 数学的帰納法の問題では循環論法になりやすいので注意しよう。結論を根拠に使わないように。