項目反応理論

2022 年 5 月 8 日

1　多次元項目反応理論

1.1　被験者の特性を線形結合で表現

2 パラメータで考える。

k 次元の特性を測定する多次元項目反応モデルにおいて、j 個の項目に対する反応が特性値を所与とすると互いに独立のとき、特性値を所与とした尤度は

$$L(u_1, u_2, \cdots, u_j|\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_K)^t) = \prod_j^J P_j(\theta)^{u_j} Q_j(\theta)^{(1-u_j)} \tag{1}$$

ただし、u_j は項目 j に対して正答するか誤答するかを表す確率変数であり、θ_k は特性 k についての特性値である。

ここで、特性値 θ の分布を $p(\theta)$ とおくと、周辺尤度 $L(u_1, u_2, \cdots, u_j)$ は

$$L(u_1, u_2, \cdots, u_j) = \int L(u_1, u_2, \cdots, u_j|\theta)p(\theta)d\theta \tag{2}$$

またここで、$P_j(\theta)$ は θ を所与とした場合の正答確率である。これを 2 パラメータのロジスティックモデルで表現すると

$$P_j(\theta) = \frac{\exp D(\sum_{k=1}^{K} w_{jk}\theta_k + b_j)}{1 + \exp D(\sum_{k=1}^{K} w_{jk}\theta_k + b_j)} \tag{3}$$

である。ここで、w_{jk} は第 j 項目の第 k 特性の識別力パラメータであり、b_j は第 j 項目の困難度パラメータ、$D = 1.8$ である。

1.2　アルゴリズム

被験者：$i = 1, 2, 3, 4$

項目：$j = 1, 2, 3, 4, 5$

能力パラメータ：$\theta_{jk} = (\theta_{j1}, \theta_{j2})$

	A	B	C	D
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1
5	1	1	1	1

図 1: 反応データ

困難度：$b_j = (-2, -1, 0, 1, 2)$
項目ごとの能力パラメータの識別力:

$$a_{jk} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{51} & a_{52} \end{pmatrix} \tag{4}$$

2 パラメータのロジスティックモデルを次の式に仮定する。

$$P_j(\theta) = \frac{\exp\{D(\sum_{k=1}^{K} a_{jk}\theta_j k + b_j)\}}{1 + \exp\{D(\sum_{k=1}^{K} a_{jk}\theta_j k + b_j)\}} \tag{5}$$

例えば、項目 $j = 1$ に被験者 $i = 1$ が正解する確率は,

$$\begin{aligned} P_j(\theta) &= \frac{\exp\{(-1.7)(\sum_{k=1}^{2} a_{jk}\theta_j k + b_1)\}}{1 + \exp\{(-1.7)(\sum_{k=1}^{2} a_{jk}\theta_j k + b_1)\}} \\ &= \frac{\exp\{(-1.7)(a_{11}\theta_{11} + a_{12}\theta_{12} + b_1)\}}{1 + \exp\{(-1.7)(a_{11}\theta_{11} + a_{12}\theta_{12} + b_1)\}} \end{aligned} \tag{6}$$

となる。これを用いて反応行列から正答のときは $P_j(\theta)$, 誤答のときは $1 - P_j(\theta)$ として、それぞれの尤度関数を求めていく。例えば能力値を推定する場合は θ が変数となる。θ は今回 2 種類を考えているので尤度を $\theta_j k$ で偏微分してから最尤法で最大となる θ の組を求めていく。