

# 確率統計特論

2022年4月18日

## 1 ルベーグの優収束定理

定義: 可測集合  $A$  上の可測関数列  $f_n$  は、 $A$  上各点収束するとする。  
ある  $A$  上可測積分関数  $g$  が存在して、 $\forall n$  に対して、

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ a.e. } x \in A$$

を満たすとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) dx = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

ポイントは3つ

- $f_n$  が各点収束すること
- $g$  が  $f_n$  の優関数であること
- $g$  が可積分であること

これを期待値について考えると

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ : 確率空間

$X_n, n = 1, 2, \dots$ : 確率変数

に対して、

- $|X_n| \leq U, j = 1, 2, \dots$  となる  $U$  が確率1で存在する。
- $\lim_{j \rightarrow \infty} X_n = X$  が成立する。

このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n]$  となる

## 2 期待値と極限が交換できない場合

$\Omega = (0, 1), P : \text{一様分布}$

$$X_n(\omega) = n(\omega \in (0, \frac{1}{n}))$$

$$X_n(\omega) = 0(\text{otherwise})$$

このとき  $\forall n$  に対して、 $E[X_n] = 1$  だが  $\omega$  に対して  $X_n(\omega) \rightarrow 0$  なので、  
 $\lim E[X_n] = 1, E[\lim X_n] = 0$

前回まで

$$\textcircled{1} B_{t_j}^{(n)} = \sum_{m=0}^n \sum_{K \in I(m)} \xi_K^{(m)}(\omega) S_K^{(m)}(t_j) \quad (0 \leq t \leq 1, n \geq 0)$$

$$\textcircled{2} (\text{式3.4}) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{K \in I(n)} S_K^{(n)}(t) S_K^{(n)}(s) = S \wedge t, \quad 0 \leq s, t \leq 1$$

$$\textcircled{3} E[\exp \{ -i \sum_{j=1}^n (\lambda_{j+1} - \lambda_j) B_{t_j}^{(n)} \}]$$

$$= \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (\lambda_{j+1} - \lambda_j) (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \sum_{m=0}^M \sum_{K \in I(m)} S_K^{(m)}(t_j) S_K^{(m)}(t_i) \right]$$

$$(A_1 + \dots + A_n)^2 = \sum_{i=1}^n A_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n A_i A_j$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_i A_j$$

図 1: 前回までに分かったこと