

項目反応理論

2021 年 7 月 3 日

3 尺度値の推定

3.4 ベイズ推定法

3.4.3 EAP 推定法

ベイズ推定法は MAP 推定法ばかりではなく EAP 法も利用される。これは、 θ_i の事後分布の θ_i に関する期待値を推定値とする推定法である。式にすると、

$$\begin{aligned}\theta_i &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_i \frac{g(\theta_i)L(\mathbf{u}_i|\theta)}{f(\mathbf{u}_i)} d\theta_i \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_i g(\theta_i)L(\mathbf{u}_i|\theta) d\theta_i}{f(\mathbf{u}_i)} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_i g(\theta_i)L(\mathbf{u}_i|\theta) d\theta_i}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta_i)L(\mathbf{u}_i|\theta) d\theta_i}\end{aligned}\tag{3.35}$$

となる。式中の積分は区分求積法によって求めることができる。

ある区間 $[a, b]$ を N 等分した点 (幅は $\Delta\theta$) を $\theta_n (n = 1, 2, \dots, N, N+1)$ とすると

$$\int_b^a f(\theta) d\theta \simeq \sum_{n=1}^N f(\theta) \times \Delta\theta\tag{3.36}$$

によって N 個の長方形の和によって近似することができる。式 (3.35) 中の区間は $[-\infty, \infty]$ であるが、 $g(\theta)$ は標準正規分布を仮定しているので、積分区間は $[-3, 3]$ や $[-4, 4]$ などでも十分であると考えられる。式にすると、

$$\hat{\theta}_i \simeq \frac{\sum_{n=1}^N \theta_{in} L(\mathbf{u}_i|\theta_{in}) g(\theta_{in}) \Delta\theta}{\sum_{n=1}^N L(\mathbf{u}_i|\theta_{in}) g(\theta_{in}) \Delta\theta}\tag{3.37}$$

と近似できる。これまでの方法と違って、直接求めることができるので、反復計算の必要のない EAP 推定法は計算時間を短縮することができる。

4 項目母数の推定

第3章では項目母数は既知であると仮定したうえで進めてきた。今回からは、反応パターン U から項目母数を推定する方法について考える。

4.1 同時最尤推定法

本節では U から項目母数と被験者母数を同時に推定する方法を紹介する。第3章で導入したように、被験者母数 θ_i が与えられたとき、 u_{ij} の分布は、

$$f(u_{ij}|\theta_i) = p_j(\theta_i)^{u_{ij}} q_j(\theta_i)^{1-u_{ij}} \quad (4.1)$$

であった。ただし、これまでと違って今回は項目母数も未知であるので、

$$f(u_{ij}|\theta_i, a_j, b_j, c_j) = p_j(\theta_i)^{u_{ij}} q_j(\theta_i)^{1-u_{ij}} \quad (4.2)$$

と書き直す。ここでは3母数モデルを用いて説明していく。局所独立の仮定から、 n 個の項目に関する被験者 i の反応パターンベクトル \mathbf{u}_i が観察される確率は、

$$f(\mathbf{u}_i|\theta_i, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \prod_{j=1}^n f(u_{ij}|\theta_i, a_j, b_j, c_j) \quad (4.3)$$

と表現される。ここで、

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)' \quad (4.4)$$

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)' \quad (4.5)$$

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)' \quad (4.6)$$

である。被験者の反応は互いに独立であるから、被験者母数と項目母数が与えられた条件の下で、 n 個の項目に対する N 人の被験者の反応パターン行列 U が観察される確率は、

$$\mathbf{f}(U) = (a_1, a_2, \dots, a_n)' \quad (4.7)$$