項目反応理論

2021 年 7 月 2 日

3　尺度値の推定

3.4　ベイズ推定法

3.4.3　EAP 推定法

ベイズ推定法は MAP 推定法ばかりではなく EAP 法も利用される。これは、θ_i の事後分布の θ_i に関する期待値を推定値とする推定法である。式にすると、

$$\begin{aligned}\theta_i &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_i \frac{g(\theta_i)L(\boldsymbol{u}_i|\theta)}{f(\boldsymbol{u}_i)} d\theta_i \\ &= \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_i g(\theta_i)L(\boldsymbol{u}_i|\theta) d\theta_i}{f(\boldsymbol{u}_i)} \\ &= \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_i g(\theta_i)L(\boldsymbol{u}_i|\theta) d\theta_i}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta_i)L(\boldsymbol{u}_i|\theta) d\theta_i} \end{aligned} \tag{3.35}$$

となる。式中の積分は区分求積法によって求めることができる。

ある区間 $[a, b]$ を N 等分した点 (幅は$\Delta\theta$) を $\theta_n(n = 1, 2, \cdots, N, N + 1)$ とすると

$$\int_b^a f(\theta)d\theta \simeq \sum_{n=1}^{N} f(\theta) \times \Delta\theta \tag{3.36}$$

によって N 個の長方形の和によって近似することができる。式 (3.35) 中の区間は $[-\infty, \infty]$ であるが、$g(\theta)$ は標準正規分布を仮定しているので、積分区間は $[-3, 3]$ や $[-4, 4]$ などで十分であると考えられる。式にすると、

$$\hat{\theta}_i \simeq \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \theta_{in} L(\boldsymbol{u}_i|\theta_{in}) g(\theta_{in}) \Delta\theta}{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} L(\boldsymbol{u}_i|\theta_{in}) g(\theta_{in}) \Delta\theta} \tag{3.37}$$

と近似できる。これまでの方法と違って、直接求めることができるので、反復計算の必要のない EAP 推定法は計算時間を短縮することができる。

4　項目母数の推定

第 3 章では項目母数は既知であると仮定したうえで進めてきた。今回からは、反応パタン $\boldsymbol{U}$ から項目母数を推定する方法について考える。

4.1　同時最尤推定法

本節では $\boldsymbol{U}$ から項目母数と被験者母数を同時に推定する方法を紹介する。第 3 章で導入したように、被験者母数 θ_i が与えられたとき、u_{ij} の分布は、

$$f(u_{ij}|\theta_i) = p_j(\theta_i)^{u_{ij}} q_j(\theta_i)^{1-u_{ij}} \tag{4.1}$$

であった。ただし、これまでと違って今回は項目母数も未知であるので、

$$f(u_{ij}|\theta_i, a_j, b_j, c_j) = p_j(\theta_i)^{u_{ij}} q_j(\theta_i)^{1-u_{ij}} \tag{4.2}$$

と書き直す。ここでは 3 母数モデルを用いて説明していく。局所独立の仮定から、n 個の項目に関する被験者 i の反応パタンベクトル $\boldsymbol{u}_i$ が観察される確率は、

$$f(\boldsymbol{u}_i|\theta_i, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \prod_{j=1}^{n} f(u_{ij}|\theta_i, a_j, b_j, c_j) \tag{4.3}$$

と表現される。ここで、

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)' \tag{4.4}$$
$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)' \tag{4.5}$$
$$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)' \tag{4.6}$$

である。