「歴史に学ぶ数学」レポート

210-d8551 西郷虎太郎

1　レポート問題 3

$\mathbb{H}$ 上の変換 $z \to \dfrac{ax+b}{cx+d} s.t. a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc=1$ は P 計量に関する等長変換であることを示せ。

$w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ として $\dfrac{dwd\bar{w}}{w-\bar{w}} = \dfrac{dzd\bar{z}}{(z-\bar{z})^2}$ になることを示す。

$$\frac{dw}{dz} = \frac{(az+b)'(cz+b)-(az+b)(cz+d)'}{(cz+d)^2} = \frac{dz}{(cz+d)^2} \tag{1}$$

また、

$$\frac{d\bar{w}}{dz} = \frac{d\bar{z}}{(c\bar{z}+d)'} \tag{2}$$

ここで、$w-\bar{w}$ を考えると,

$$w-\bar{w} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+b)-(a\bar{z}+b)(cz+d)}{(cz+d)(c\bar{z}+d)} = \frac{z-\bar{z}}{(cz+d)(c\bar{z}+d)} \tag{3}$$

よって

$$(\text{左辺}) = \frac{dwd\bar{w}}{w-\bar{w}} = \frac{dzd\bar{z}}{(z-\bar{z})^2} = (\text{右辺}) \tag{4}$$

2　レポート問題4

斜線で示された部分の面積を求めなさい。

求める部分の面積を $\boldsymbol{S}$ とすると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S} = \int_D \frac{1}{y^2} dxdy &= \int_{-1}^{1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy \\
&= \int_{-1}^{1} \lim_{a\to\infty} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{a} \frac{1}{y^2} dy \\
&= \int_{-1}^{1} \lim_{a\to\infty} \{-\frac{1}{a} - (-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx
\end{aligned}$$

ここで $x = \sin\theta$ と置くと $\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta$ より

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\theta} \cos\theta d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{S} = \pi$