

# 項目反応理論

2022年3月29日

## 1 ベイズ推定

### 1.1 MAP 推定法

$\theta_1$ (被験者1の能力値)の値が $a$ 以上 $b$ 以下である確率を

$$\begin{aligned} P(a \leq \theta_1 \leq b) &= \int_a^b \pi(x) dx \\ &= P(a \leq X \leq b) \end{aligned} \quad (1)$$

とする。ここでは、

$$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (2)$$

と仮定する。式(2)を対数に変換すると、

$$\log \pi(x) = \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{x^2}{2} \quad (3)$$

ここで確率変数が連続型である時にベイズの定理を適応すると、

$$\pi(x|\mathbf{u}_1) = \frac{L(\mathbf{u}_1)\pi(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} L(\mathbf{u}_1)\pi(x)dx} \quad (4)$$

となり、これを対数変換したものを最大にする $x$ の値をMAP推定値という。

$$\begin{aligned} \log \pi(x|\mathbf{u}_1) &= \log L(\mathbf{u}_1) + \log \pi(x) - \log \int_{-\infty}^{\infty} L(\mathbf{u}_1)\pi(x)dx \\ &= \log L(\mathbf{u}_1) - \frac{x^2}{2} + C \end{aligned} \quad (5)$$

### 1.2 アルゴリズム

**step1** それぞれの尤度関数を求める。

**step2** 事前分布 $\pi(x)$ を定める。

**step3**  $\pi(x|\mathbf{u}_1)$ を求める。

**step4**  $\log \pi(x|\mathbf{u}_1)$ を最大にする $x$ を求める。