Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

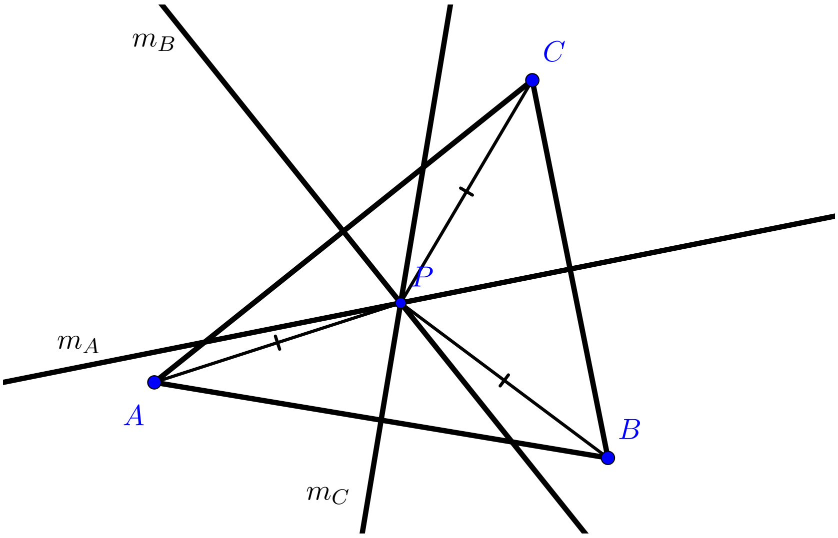
Løsningsforslag — Øving 9

$\boxed{\text{5.6.5}}$ La $\triangle ABC$ være en trekant, og la m_A være midtnormalen til linjen motsatt av hjørnet A. Vi definerer m_B og m_C tilsvarende. Vi ønsker å vise at disse tre linjene skjærer hverandre i et felles punkt.

Vi viser først at m_A og m_B skjærer hverandre, altså at de ikke er paralelle. Vi antar dermed at $m_A \parallel m_B$ og prøver å konstruere en selvmotsigelse. Fra del 3 av teorem 4.7.3 må da enten $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC}$ eller $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, noe som er umulig, siden $\overline{AC}$ og $\overline{BC}$ er sider i en trekant. Altså må de skjære hverandre. Kall dette skjæringspunktet P.

Av punktvis karakterisering av midtnormaler (teorem 4.3.7) er $AP = CP$, siden P ligger på m_B, og $BP = CP$ siden P ligger på m_A. Sammen gir disse likhetene at $AP = BP$, som fra punktvis karakterisering av midtnormaler betyr at $P \in m_C$, altså skjærer alle midtnormalene i punktet P.

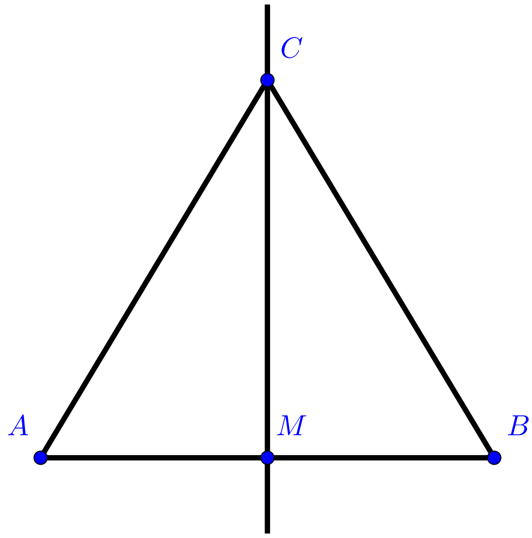
Legg merke til at dette også beviser at omsenteret ligger like langt fra alle hjørnene, ettersom vi har vist $AP = BP = CP$.



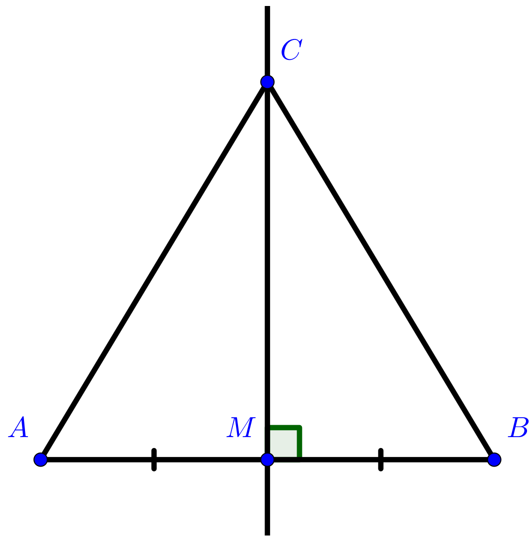
$\boxed{\text{5.6.11}}$ Vi skal vise at en trekant $\triangle ABC$ er likesidet hvis og bare hvis omsenteret og sentroiden sammenfaller. Vi minner oss selv om at sentroiden er definert som skjæringspunktet til de tre medianene i trekanten, og at omsenteret er definer som skjæringspunktet til de tre midtnormalene til sidene i trekanten.

Anta at $\triangle ABC$ er likesidet. For å vise at sentroiden og omsenteret sammenfaller, er det nok å vise at medianene og midtnormalene til trekanten sammenfaller – da har vi vist at linjene som definerer de to punktene er like. La M være midtpunktet på $\overline{AB}$. Vi viser at medianen $\overleftrightarrow{CM}$ er midtnormalen til $\overline{AB}$. Beviset for de andre medianene og midtnormalene er identisk.

Vi vet at $AC = BC$ siden $\triangle ABC$ er likesidet. Dermed sier teorem 4.3.7 at C ligger på midtnormalen til $\overline{AB}$. Men, da vet vi at M og C både ligger på medianen gjennom C og på midtnormalen til $\overline{AB}$. Siden to punkt bestemmer en unik linje, må derfor medianen og midtnormalen sammenfalle.



Anto nå at omsenteret og sentroiden sammenfaller, kall dette punktet P. Dette må bety at medianene og midtnormalene til trekanten sammenfaller. Betrakt for eksempel medianen gjennom C og midtnormalen til $\overline{AB}$. Per antagelse ligger P både på medianen gjennom C og midtnormalen til $\overline{AB}$, og per definisjon ligger også midtpunktet til $\overline{AB}$, som vi kaller M, på begge disse linjene. Siden de to punktene M og P bestemmer en unik linje, må disse linjene sammenfalle. Vi viser at $AC = BC$, beviset for at $AB = BC$ er identisk. Vi vet at $\overline{CM} \perp \overline{AB}$, ettersom $\overleftrightarrow{CM}$ er medianen gjennom C, som vi vet sammenfaller med midtnormalen til $\overline{AB}$. Vi betrakter de rettvinklede trekantene $\triangle AMC$ og $\triangle BMC$. Linjestykket $\overline{MC}$ er felles i de to trekantene, og $AM = BM$ siden M er midtpunktet. Dermed gir SVS at $\triangle AMC \cong \triangle MBC$, som spesielt betyr at $AC = BC$. Dermed er trekanten likesidet, som var det vi ville vise.



$\boxed{\text{5.6.14}}$ La A og B være to ulike punkter.

a) Vi skal vise at for alle reelle tall $x \neq -1$ finnes et unikt punkt X på $\overleftrightarrow{AB}$ slik at $AX/XB = x$. Denne brøken tolkes som en "sensed ratio", altså at AX/XB er positiv hvis $A * X * B$ og negativ ellers. Vi deler beviset inn i fire deler: $x = 0$, $x > 0$, $-1 < x < 0$ og $x < -1$. Merk at vi bruker notasjonen AX/XB når vi snakker om brøken som en "sensed ration", og $\frac{AX}{XB}$ når vi snakker om brøken som en vanlig brøk. Først bruker vi teorem 3.2.16 til å finne en koordinatfunksjon $f : \overleftrightarrow{AB} \longrightarrow \mathbb{R}$, slik at $f(A) = 0$ og $f(B) > 0$.

- $\mathbf{x = 0}$: I dette tilfelle kan vi velge $X = A$. Da er $AX = 0$, og siden $A \neq B$ har vi $BX \neq 0$, slik at $AX/XB = 0$. Punktet X er i dette tilfellet også unikt, ettersom $AX/XB = 0$ impliserer $AX = 0$, som kun er tilfellet dersom $X = A$.
- $\mathbf{x > 0}$: Siden x er positiv må vi ha $A * X * B$ for å oppfylle kravet om "sensed ratio". Fra teorem 3.2.17 må vi derfor ha $0 = f(A) < f(X) < f(B)$. Siden f er en koordinatfunksjon vet vi i dette tilfellet at

  $$AX = |f(A) - f(X)| = f(X)$$

  og at

  $$BX = |f(B) - f(X)| = f(B) - f(X),$$

  der vi har brukt $f(X) < f(B)$ for å fjerne absoluttverditegnet. Dermed kan vi utrykke $\frac{AX}{XB}$ ved hjelp av f:

  $$\frac{AX}{XB} = \frac{f(X)}{f(B) - f(X)} = x.$$

  Løser vi denne likningen for $f(X)$ får vi

  $$f(X) = \frac{x}{x+1} f(B).$$

  Så, for å finne et punkt X slik at $\frac{AX}{XB} = x$ trenger vi å finne $X \in \overleftrightarrow{AB}$ slik at $f(X) = \frac{x}{x+1} f(B)$. Siden f er en koordinatfunksjon vet vi at f er en bijeksjon, så en slik X eksisterer, og er unik.
- $\mathbf{-1 < x < 0}$: Dersom vi har en X slik at $AX/XB = x$, må vi fra kraved om "sensed ratio", ha $X * A * B$ eller $A * B * X$. I dette tilfellet ønsker vi – dersom vi behandler $\frac{AX}{XB}$ som en vanlig brøk – at vi har X slik at $\frac{AX}{XB} < 1$, noe som betyr at vi ønsker $AX < XB$. Dette betyr at vi har $X * A * B$. Formulert ved funksjonen f krever vi altså at $f(X) < 0 = f(A) < f(B)$. Da er

  $$AX = |f(A) - f(X)| = -f(X)$$

  og at

  $$BX = |f(B) - f(X)| = f(B) - f(X),$$

  der vi har brukt $f(X) < f(B)$ for å fjerne absoluttverditegnet. Dermed kan vi uttrykke den vanlige brøken $\frac{AX}{XB}$ ved hjelp av f:

  $$\frac{AX}{XB} = \frac{-f(X)}{f(B) - f(X)} = -x.$$

  Vi løser denne likningen for $f(X)$ og får

  $$f(X) = \frac{x}{x+1} f(B).$$

En unik X som tilfredstiller denne likningen finnes igjen grunnet at f er en koordinatfunksjon, og dermed en bijeksjon.

- $\mathbf{x < -1}$: Dersom vi har en X slik at $AX/XB = x$, må vi fra kraved om "sensed ratio" som over ha $X * A * B$ eller $A * B * X$. I dette tilfellet ønsker vi en X slik at $\frac{AX}{XB} > 1$, noe som betyr at vi ønsker $AX > XB$. Dette betyr at vi har $A * B * X$. Formulert ved funksjonen f krever vi altså at $0 = f(A) < f(B) < f(X)$. Da er

$$AX = |f(A) - f(X)| = f(X)$$

og at

$$BX = |f(B) - f(X)| = f(X) - f(B),$$

der vi har brukt $f(B) < f(X)$ for å fjerne absoluttverditegnet. Dermed kan vi uttrykke $\frac{AX}{XB}$ ved hjelp av f:

$$\frac{AX}{XB} = \frac{f(X)}{f(X) - f(B)} = x.$$

Vi løser denne likningen for $f(X)$ og får

$$f(X) = \frac{x}{x+1} f(B).$$

En unik X som tilfredstiller denne likningen finnes igjen grunnet at f er en koordinatfunksjon, og dermed en bijeksjon.

b) Vi skal vise at det ikke finnes et punkt $X \in \overleftrightarrow{AB}$ slik at $AX/XB = -1$, derbrøken fremdeles tolkes som en "sensed ratio". Fra korollar 3.2.19 har vi enten at $X \in \overline{AB}$, $X * A * B$ eller $A * B * X$.

- Hvis $X \in AB$, sier definisjonen av ´´sensed ratio" at AX/XB er positiv. Dermed er spesielt $AX/XB \neq -1$.
- Hvis $A * B * X$, er $AB + BX = AX$ per definisjon av mellomliggenhet. Dermed er
$$\frac{AX}{XB} = \frac{AB + BX}{BX} = 1 + \frac{AB}{BX} > 1,$$
slik at $AX/XB \neq -1$.
- Hvis $X * A * B$ er $AX + AB = XB$ av definisjonen av mellomliggenhet. Dermed er
$$\frac{AX}{XB} = \frac{AX}{AX + AB} < 1,$$
slik at $AX/XB \neq -1$.

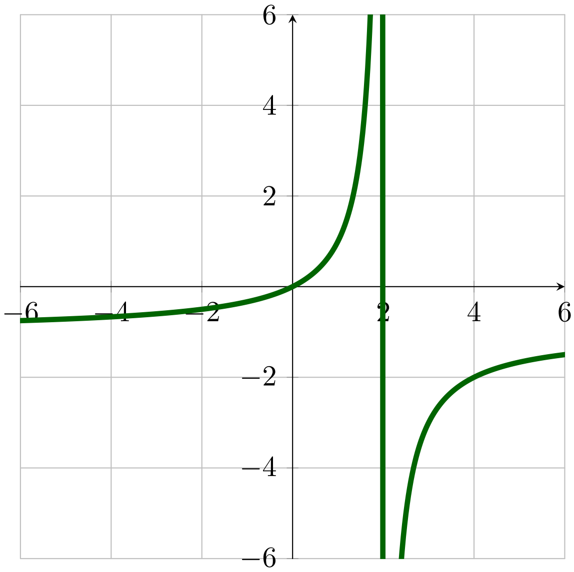
c) Vi skal lage en graf som illustrerer hvordan AX/XB varierer med punktet $X \in \overleftrightarrow{AB}$. For å lage en graf antar vi at A og B er to tall på den reelle tallinjen med $A < B$, og vi lar $\overleftrightarrow{AB}$ være x-aksen vår. For $X \in \mathbb{R}$ er da $AX = |X - A|$ og $BX = |X - B|$, slik at

$$\frac{AX}{XB} = \begin{cases} \frac{X-A}{X-B}, & \text{for } X > B, \\ \frac{X-A}{B-X}, & \text{for } A < X < B, \\ \frac{X-A}{X-B}, & \text{for } X < A. \end{cases}$$

Her har vi bare brukt definisjonen av absoluttverdi for å skrive ut uttrykket for den vanlige brøken $\frac{AX}{XB}$. Men vi skal lage en graf av AX/BX, altså en "sensed ratio", og AX/XB er definert slik at fortegnet er positivt når $A < X < B$, og negativt ellers. Ergo

$$AX/XB = \begin{cases} -\frac{X-A}{X-B}, & \text{for } X > B, \\ \frac{X-A}{B-X}, & \text{for } A < X < B, \\ -\frac{X-A}{X-B}, & \text{for } X < A. \end{cases}$$

Men, det er lett å se at disse tre uttrykkene alltid er like, slik at $AX/BX = \frac{X-A}{B-X}$. For å faktisk lage en graf velger vi $A = 0$ og $B = 2$, slik at $AX/XB = \frac{x}{2-x}$. Da får vi



$\boxed{6.1.1}$ Anta at alle trekanter i nøytral geometri har samme defekt, og kall denne defekten c. Vi skal vise at vi har $c = 0$.

La $\triangle ABC$ være en trekant, og la D være midtpunktet på $\overline{BC}$. Fra teorem 4.8.2 har vi da

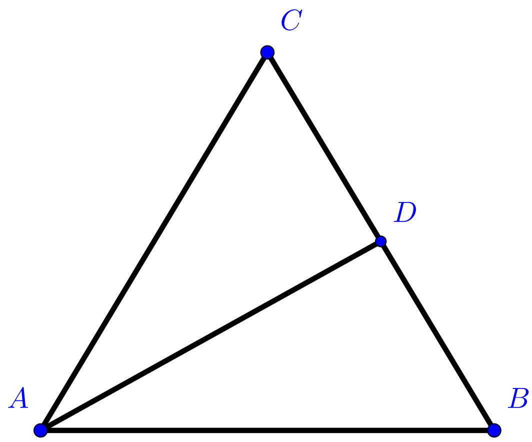
$$\delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle ABD) + \delta(\triangle DCA),$$

der δ måler defekten til trekantene. Siden vi antok at defekten til alle trekanter er den samme, blir denne likningen

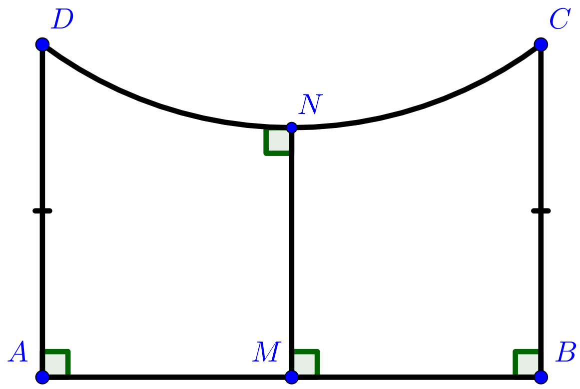
$$c = c + c = 2c,$$

som medfører at $c = 0$.

Hvis alle trekanter har samme defekt har vi vist at denne defekten må være 0. At alle trekanter har defekt lik 0 er av teorem 4.7.4 ekvivalent med euklids paralellpostulat. Dermed kan ikke alle trekanter i hyperbolsk geometri ha samme defekt.



$\boxed{\text{6.1.2}}$ La $\square ABCD$ være en Saccheri firkant med base $\overline{AB}$. La N og M være midtpunktene på $\overline{CD}$ og $\overline{AB}$ respektivt. Vi ønsker å vise at $MN < BC$.



Fra del 3 av teorem 4.8.10, vet vi at $\overline{NM} \perp \overline{AB}$ og $\overline{NM} \perp \overline{CD}$. Dette betyr at $\square MBCN$ er en Lambert firkant. Dermed kan vi fra teorem 6.1.7 konkludere med at $MN < BC$, som var det vi ville vise.

$\boxed{\text{6.1.3}}$ La $\square ABCD$ være en Saccheri firkant med base $\overline{AB}$. La N og M være midtpunktene på $\overline{CD}$ og $\overline{AB}$ respektivt (se figuren til oppgave 6.1.2). Vi ønsker å vise at $AB < CD$.

Fra del 3 av teorem 4.8.10, har vi $\overline{MN} \perp \overline{AD}$ og $\overline{MN} \perp \overline{CD}$. Dermed er både $\square MBCN$ og $\square AMND$ Lambert firkanter. Fra teorem 6.1.7 kan vi dermed konkludere med at $MB < NC$ og $AM < DN$. Siden M og N er midtpunktene på linjene $\overline{AB}$ og $\overline{CD}$, har vi spesielt at $A * M * B$ og $C * N * D$. Dette betyr at vi har $AB = AM + MB$ og $CD = CN + ND$. Så ved å addere de to ulikhetene vi fikk fra teorem 6.1.7 får vi $AC < CD$, som var det vi ønsket å vise.