Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA2401 Geometri
Vår 2022

Løsningsforslag — Øving 7

4.7.2 Anta først at det euklidske parallellpostulatet holder. Vi vil vise at dersom $l \parallel m$, og en linje $t \neq l$ skjærer l, så må t også skjære m. Dette kalles ofte Proclus' aksiom. Vi bruker et bevis med selvmotsigelse, og antar derfor at t skjærer l, men at t *ikke* skjærer m. Med andre ord betyr dette at $t \parallel m$.

La P være skjæringspunktet mellom t og l. Da er t og l to linjer som begge går gjennom P og er paralelle til m. Dette motsier det euklidske parallellpostulatet. Dermed kan vi konkludere med at t skjærer m, som var det vi ville vise.

Anto nå at Proclus' aksiom holder, og at vi har en linje l og et punkt P som ikke ligger på l. Vi må vise at det finnes en unik linje m som inneholder P og som er parallell med l. Fra teorem 4.1.3 vet vi at vi kan finne et unikt punkt A slik at $\overleftrightarrow{PA} \perp l$. Fra del 3 av gradskivepostulatet kan vi finne et punkt Q slik at $\mu(\angle APQ) = 90$. Merk at vi må egentlig spesifisere et halvplan for å bruke denne påstanden, men i dette tilfelle har det ikke noe å si hvilket halvplan vi velger. Det alternerende indre vinkel-teoremet gir oss at $\overleftrightarrow{PQ} \parallel l$, siden $\overleftrightarrow{PA}$ skjærer både l og $\overleftrightarrow{PQ}$ på en slik måte at alle indre vinkler er rette. Dermed har vi funnet en linje $m = \overleftrightarrow{PQ}$ slik at $P \in m$ og $m \parallel l$. Merk her at vi ikke har brukt hverken det euklidske parallellpostulatet eller Proclus' aksiom, så denne konstruksjonen av en parallell linje er fungerer derfor i nøytral geometri. Konstruksjonen kalles ofte for den doble perpendikulær konstruksjonen.

Det gjenstår å vise at denne linja er unik. Anta defor at vi har en linje $n \neq m$ som er paralell med l og har $P \in n$. Dermed skjærer n linjen m i punktet P. Proclus' aksiom sier oss da at n også må skjære l, noe som motsier at n og l er paralelle. Dermed er m unik, og beviset er fullført.

4.7.6

4.8.1

4.8.2

4.8.5

4.8.8

4.8.10

5.1.2

5.1.3