Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA2401 Geometri
Vår 2022

Løsningsforslag — Øving 9

5.6.5 La $\triangle ABC$ være en trekant, og la m_A være midtnormalen til linjen motsatt av hjørnet A. Vi definerer m_B og m_C tilsvarende. Vi ønsker å vise at disse tre linjene skjærer hverandre i et felles punkt.

Vi viser først at m_A og m_B skjærer hverandre, altså at de ikke er paralelle. Vi antar dermed at $m_A \parallel m_B$ og prøver å konstruere en selvmotsigelse. Fra del 3 av teorem 4.7.3 må da enten $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC}$ eller $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, noe som er umulig, siden $\overline{AC}$ og $\overline{BC}$ er sider i en trekant. Altså må de skjære hverandre. Kall dette skjæringspunktet P.

Av punktvis karakterisering av midtnormaler (teorem 4.3.7) er $AP = CP$, siden P ligger på m_B, og $BP = CP$ siden P ligger på m_A. Sammen gir disse likhetene at $AP = BP$, som fra punktvis karakterisering av midtnormaler betyr at $P \in m_C$, altså skjærer alle midtnormalene i punktet P.

Legg merke til at dette også beviser at omsenteret ligger like langt fra alle hjørnene, ettersom vi har vist $AP = BP = CP$.

5.6.11 Vi skal vise at en trekant $\triangle ABC$ er likesidet hvis og bare hvis omsenteret og sentroiden sammenfaller. Vi minner oss selv om at sentroiden er definert som skjæringspunktet til de tre medianene i trekanten, og at omsenteret er definer som skjæringspunktet til de tre midtnormalene til sidene i trekanten.

Anta at $\triangle ABC$ er likesidet. For å vise at sentroiden og omsenteret sammenfaller, er det nok å vise at medianene og midtnormalene til trekanten sammenfaller – da har vi vist at linjene som definerer de to punktene er like. La M være midtpunktet på $\overline{AB}$. Vi viser at medianen $\overleftrightarrow{CM}$ er midtnormalen til $\overline{AB}$. Beviset for de andre medianene og midtnormalene er identisk.

Vi vet at $AC = BC$ siden $\triangle ABC$ er likesidet. Dermed sier teorem 4.3.7 at C ligger på midtnormalen til $\overline{AB}$. Men, da vet vi at M og C både ligger på medianen gjennom C og på midtnormalen til $\overline{AB}$. Siden to punkt bestemmer en unik linje, må derfor medianen og midtnormalen sammenfalle.

Anto nå at omsenteret og sentroiden sammenfaller, kall dette punktet P. Dette må bety at medianene og midtnormalene til trekanten sammenfaller. Betrakt for eksempel medianen gjennom C og midtnormalen til $\overline{AB}$. Per antagelse ligger P både på medianen gjennom C og midtnormalen til $\overline{AB}$, og per definisjon ligger også midtpunktet til $\overline{AB}$, som vi kaller M, på begge disse linjene. Siden de to punktene M og P bestemmer en unik linje, må disse linjene sammenfalle. Vi viser at $AC = BC$, beviset for at $AB = BC$ er identisk. Vi vet at $\overline{CM} \perp \overline{AB}$, ettersom $\overleftrightarrow{CM}$ er medianen gjennom C, som vi vet sammenfaller med midtnormalen til $\overline{AB}$. Vi betrakter de rettvinklede trekantene $\triangle AMC$ og $\triangle BMC$. Linjestykket $\overline{MC}$ er felles i de to trekantene, og $AM = BM$ siden M er midtpunktet. Dermed gir SVS at $\triangle AMC \cong \triangle MBC$, som spesielt betyr at $AC = BC$.

5.6.14

6.1.1 Anta at alle trekanter i nøytral geometri har samme defekt, og kall denne defekten c. Vi skal vise at vi har $c = 0$.

La $\triangle ABC$ være en trekant, og la D være midtpunktet på $\overline{BC}$. Fra teorem 4.8.2 har vi da

$$\delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle ABD) + \delta(\triangle DCA),$$

der δ måler defekten til trekantene. Siden vi antok at defekten til alle trekanter er den samme, blir denne likningen

$$c = c + c = 2c,$$

som medfører at $c = 0$.

Hvis alle trekanter har samme defekt har vi vist at denne defekten må være 0. At alle trekanter har defekt lik 0 er av teorem 4.7.4 ekvivalent med euklids paralellpostulat. Dermed kan ikke alle trekanter i hyperbolsk geometri ha samme defekt.

6.1.2 La $\square ABCD$ være en Saccheri firkant med base $\overline{AB}$. La N og M være midtpunktene på $\overline{CD}$ og $\overline{AB}$ respektivt. Vi ønsker å vise at $MN < BC$.

Fra del 3 av teorem 4.8.10, vet vi at $\overline{NM} \perp \overline{AB}$ og $\overline{NM} \perp \overline{CD}$. Dette betyr at $\square MBCN$ er en Lambert firkant. Dermed kan vi fra teorem 6.1.7 konkludere med at $MN < BC$, som var det vi ville vise.

6.1.3 La $\square ABCD$ være en Saccheri firkant med base $\overline{AB}$. La N og M være midtpunktene på $\overline{CD}$ og $\overline{AB}$ respektivt (se figuren til oppgave 6.1.2). Vi ønsker å vise at $AB < CD$.

Fra del 3 av teorem 4.8.10, har vi $\overline{MN} \perp \overline{AD}$ og $\overline{MN} \perp \overline{CD}$. Dermed er både $\square MBCN$ og $\square AMND$ Lambert firkanter. Fra teorem 6.1.7 kan vi dermed konkludere med at $MB < NC$ og $AM < DN$. Siden M og N er midtpunktene på linjene $\overline{AB}$ og $\overline{CD}$, har vi spesielt at $A * M * B$ og $C * N * D$. Dette betyr at vi har $AB = AM + MB$ og $CD = CN + ND$. Så ved å addere de to ulikhetene vi fikk fra teorem 6.1.7 får vi $AC < CD$, som var det vi ønsket å vise.