Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA2401 Geometri
Vår 2022

Løsningsforslag — Øving 8

5.1.1 La l og l' være paralelle linjer, og t en tredje linje som skjærer både l og l' transversalt. Vi ønsker å vise at alle fire par av vinkler er kongruente.

La B og B' være skjæringspunktene mellom respektivt l og t og l' og t. La videre $A, C \in l$ slik at $A * B * C$, $A', C' \in l'$ slik at $A' * B' * C$ og $B'' \in t$ slik at $t * t' * t''$.

Fra det vertikale vinkel-teoremet vet vi at $\angle B''B'C' \cong \angle A'B'B$. Fra det motsatte alternerende indre vinkel-teoremet (teorem 5.1.1) får vi $\angle A'B'B \cong \angle B'BC$. Dermed følger det at alle de fire parene med vinkler dannet er kongruente.

5.1.9 La l og m være to paralelle linjer. Vi skal vise at det finnes en linje t slik at $t \perp l$ og $t \perp m$.

La P være et vilkårlig punkt på l. Fra teorem 4.1.3 vet vi at det finnes en unik linje t slik at $P \in t$ og $t \perp l$. Det er også klart at t må skjære m, for dersom t ikke skjærer m må vi ha $m \parallel t$ og $l \perp t$, noe som ikke er mulig for paralelle linjer i euklidsk geometri. Det gjenstår å vise at $t \perp m$. Dette følger fra det motsatte alternerende indre vinkel-teoremet ettersom vinkelen mellom t og l er rett, må vinkelen mellom t og m også være rett.

5.3.1 Vi har to trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ slik at $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Vi skal finne $r > 0$ slik at $DE = r \cdot AB$, $DF = r \cdot AC$ og $EF = r \cdot BC$.

Vi prøver verdien $r = \frac{DE}{AB}$. Vi må da vise at denne verdien oppfyller kravene. Vi får umiddelbart $DE = \frac{DE}{AB} \cdot AB = r \cdot AB$, så vi har vist den første likheten.

Ettersom $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ gir teorem 5.3.1 oss at

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF},$$

noe som gir oss

$$\frac{DF}{AC} = \frac{DE}{AB}.$$

Vi får da

$$DF = \frac{DF}{AC} \cdot AC = \frac{DE}{AB} \cdot AC = r \cdot AC,$$

som var den andre ligningen vi skulle vise.

Helt tilsvarende bruker vi teorem 5.3.1 til å få

$$\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE},$$

som igjen gir oss

$$\frac{EF}{BC} = \frac{DE}{AB}.$$

Vi får

$$EF = \frac{EF}{BC} \cdot BC = \frac{DE}{AB} \cdot BC = r \cdot BC,$$

som viser den siste ligningen vi skulle vise.

5.3.2 Anta at $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er to trekanter slik at $\angle CAB \cong \angle FDE$ og $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$. Vi vil vise at $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Vi bemerker oss først at fra ligningen $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ får vi $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$, slik at dersom $AB = DE$ får vi automatisk også $AC = DF$. I dette tilfellet gir side-vinkel-side-postulatet (SVS) oss at $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Vi kan derfor uten tap av generalitet anta at $AB > DE$. Ved linjalpostulatet kan vi finne et punkt P på strålen $\overrightarrow{AB}$ slik at $AP = DE$. Videre lar vi m være den unike linjen som er paralell med $\overleftrightarrow{BC}$ gjennom P. Eksistens og unikhet av en slik linje finnes grunnet det euklidske paralellpostulatet. Siden m skjærer $\overline{AB}$ i P og er paralell med $\overleftrightarrow{BC}$ kan vi bruke Paschs aksiom til å konkludere med at linjen m skjærer $\overline{AC}$. Kall dette skjæringspunktet Q.

Vi kan nå anvende paralellprojeksjonsteoremet (teorem 5.2.1), som i dette tilfelle gir oss $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$. Men, siden vi har konstruer P slik at $AP = DE$ gir dette oss at

$$AQ = \frac{DE}{AB} \cdot AC = DF,$$

der den siste likheten følger av den opprinnelige antagelsen $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$. Vi kan nå bruke side-vinkel-side-postulatet (SVS) til å konkludere med at $\triangle APQ \cong \triangle DEF$, ettersom vi vet at $AP = DE$, $\angle CAB \cong \angle FDE$ og $AQ = DF$. Men, vi kan også bruke det motsatte av alternerende indre vinkel-teoremet til å få $\angle APQ \cong \angle ABC$ og $\angle PQA \cong \angle BCA$, slik at $\triangle ABC \sim \triangle APQ$. Ettersom vi har $\triangle ABC \sim \triangle APQ$ og $\triangle APQ \cong \triangle DEF$ kan vi konkludere med at $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

5.3.3

5.4.1

5.4.3 La $\triangle ABC$ være en trekant slik at $a^2 + b^2 = c^2$, der a er lengden på siden motsatt av hjørnet A, altså $a = BC$, og tilsvarende for b og c. Vi vil vise at vinkelen $\angle BCA$ er en rett vinkel. Planen vår er å konstruere en rettvinklet trekant der to av sidene har lengde a og b, for å så bruke Pythagoras til å vise at denne nye trekanten er kongruent med den opprinnelige trekanten.

Vi begynner med å konstruere en rett vinkel. Plukk to vilkårlige punkt F og P. Fra del 3 av gradskivepostulatet kan vi da finne et punkt Q slik at $\mu(\angle PFQ) = 90$. Vi bruker så linjalpostulatet til å finne et punkt E på strålen $\overrightarrow{FP}$ slik at $a = FE$, og et punkt D

på $\overrightarrow{FQ}$ slik at $b = FD$. Fra Pythagors' teorem anvendt på den rettvinklede trekanten $\triangle DEF$ gir oss $a^2 + b^2 = DE^2$. Men, vi vet også at $a^2 + b^2 = c^2$, så vi må ha $c = DE$. Vi vet nå at alle sidene i $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er like lange, slik at SSS (side-side-side) gir oss at $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Spesielt betyr dette at $\mu(\angle BCA) = \mu(\angle EFD) = 90$, som var det vi ville vise.