Løsningsforslag — Øving 7

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

4.7.2 Anta først at det euklidske parallellpostulatet holder. Vi vil vise at dersom $l \parallel m$, og en linje $t \neq l$ skjærer l, så må t også skjære m. Dette kalles ofte Proclus' aksiom. Vi bruker et bevis med selvmotsigelse, og antar derfor at t skjærer l, men at t *ikke* skjærer m. Med andre ord betyr dette at $t \parallel m$.

La P være skjæringspunktet mellom t og l. Da er t og l to linjer som begge går gjennom P og er paralelle til m. Dette motsier det euklidske parallellpostulatet. Dermed kan vi konkludere med at t skjærer m, som var det vi ville vise.

Anto nå at Proclus' aksiom holder, og at vi har en linje l og et punkt P som ikke ligger på l. Vi må vise at det finnes en unik linje m som inneholder P og som er parallell med l. Fra teorem 4.1.3 vet vi at vi kan finne et unikt punkt A slik at $\overleftrightarrow{PA} \perp l$. Fra del 3 av gradskivepostulatet kan vi finne et punkt Q slik at $\mu(\angle APQ) = 90$. Merk at vi må egentlig spesifisere et halvplan for å bruke denne påstanden, men i dette tilfelle har det ikke noe å si hvilket halvplan vi velger. Det alternerende indre vinkel-teoremet gir oss at $\overleftrightarrow{PQ} \parallel l$, siden $\overleftrightarrow{PA}$ skjærer både l og $\overleftrightarrow{PQ}$ på en slik måte at alle indre vinkler er rette. Dermed har vi funnet en linje $m = \overleftrightarrow{PQ}$ slik at $P \in m$ og $m \parallel l$. Merk her at vi ikke har brukt hverken det euklidske parallellpostulatet eller Proclus' aksiom, så denne konstruksjonen av en parallell linje er fungerer derfor i nøytral geometri. Konstruksjonen kalles ofte for den doble perpendikulær konstruksjonen.

Det gjenstår å vise at denne linja er unik. Anta defor at vi har en linje $n \neq m$ som er paralell med l og har $P \in n$. Dermed skjærer n linjen m i punktet P. Proclus' aksiom sier oss da at n også må skjære l, noe som motsier at n og l er paralelle. Dermed er m unik, og beviset er fullført.

4.7.6 Vi skal vise at det euklidske parallellpostulatet (sammen med alle aksiomene i nøytral geometri) impliserer at alle trekanter har vinkelsum lik 180. Vi kommer til å bruke at boka har vist at det euklidske parallellpostulatet er ekvivalent med motsatsen til det alternerende indre vinkel-teoremet (teorem 4.7.1). Resultatet vi skal vise er en del av teorem 4.7.4, så vi tar oss friheten til å bruke resultatene vist før dette teoremet.

Ved hjelp av del 3 av gradskivepostulatet kan vi finne et punkt D slik at $\mu(\angle BCD) = \mu(\angle ABC)$, og slik at D og A ligger på motsatt side av $\overleftrightarrow{BC}$. Siden $\mu(\angle BCD) = \mu(\angle ABC)$, gir indre vinkel-teoremet oss at $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$. Vi kan så bruke linjalpostulatet til å finne et punkt E på $\overleftrightarrow{CD}$ slik at $E * C * D$. Siden $\overleftrightarrow{EC} = \overleftrightarrow{CD}$, vet vi at $\overleftrightarrow{EC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$. Dermed gir motsatsen til det alternerende indre vinkel-teoremet (teorem 4.7.1) oss at $\mu(\angle ACE) = \mu(\angle CAB)$.

Til nå har vi vist at $\mu(\angle BCD) = \mu(\angle ABC)$ og $\mu(\angle ACE) = \mu(\angle CAB)$. For å vise at

$$\mu(\angle ABC) + \mu(\angle CAB) + \mu(\angle ACB) = 180,$$

er det dermed nok å vise at

$$\mu(\angle BCD) + \mu(\angle ACE) + \mu(\angle ACB) = 180.$$

Men, denne siste ligningen følger av å bruke lineært par-teoremet fordi dette teoremet gir oss at $\mu(\angle ACE) = \mu(\angle ACD) = 180$. Av del 4 av gradskivepostulatet vet vi at $\mu(\angle ACD) = \mu(\angle ACB) + \mu(\angle BCD)$, slik at vi til sammen har

$$\begin{aligned}180 &= \mu(\angle ACE) + \mu(\angle ACD)\\ &= \mu(\angle ACE) + \mu(\angle ACB) + \mu(\angle BCD)\\ &= \mu(\angle ABC) + \mu(\angle CAB) + \mu(\angle ACB),\end{aligned}$$

der vi i siste ligning har brukt at $\mu(\angle BCD) = \mu(\angle ABC)$ og $\mu(\angle ACE) = \mu(\angle CAB)$. Dermed har vi vist resultatet vi ønsket å vise.

4.8.1 La $\triangle ABC$ være en trekant og E et punkt i det indre av $\overline{BC}$. Vi skal vise at $\delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle ABE) + \delta(\triangle ECA)$.

Ved å skrive ut definisjonen av δ ser vi at denne påstanden er ekvivalent med å vise at

$$180 - \sigma(\triangle ABC) = 180 - \sigma(\triangle ABE) + 180 - \sigma(\triangle ECA).$$

Med litt enkel algebraisk manipulasjon kan vi kan skrive om denne ligningen til

$$\sigma(\triangle ABC) + 180 = \sigma(\triangle ABE) + \sigma(\triangle ECA).$$

Denne siste likningen, som vi altså må vise at stemmer, er nettopp innholdet i lemma 4.5.4, som vil si at vi har vist resultatet vi var ute etter å vise.

4.8.2 Vi skal vise at når $\square ABCD$ er en konveks firkant, er $\delta\square ABCD = \delta(\triangle ABC) + \delta(\triangle ACD)$.

En del av definisjonen av konveks (definisjon 4.6.2), er at A ligger i det indre av $\angle BCD$. Dermed gir del 4 av gradskivepostulatet oss at

$$\mu(\angle BCA) + \mu(\angle ACD) = \mu(\angle BCD),$$

og på akkuratt samme måte viser vi at

$$\mu(\angle DAC) + \mu(\angle CAB) = \mu(\angle DAB).$$

Vi kan nå fullføre beviset med litt enkel algebra

$$\begin{aligned}\delta(\square ABCD) &= 360 - \sigma(\square ABCD)\\ &= 360 - (\mu(\angle ABC) + \mu(\angle CDA) + \mu(\angle DAB) + \mu(\angle BCD))\\ &= 360 - (\sigma(\triangle ABC) + \sigma(\triangle ACD))\\ &= 180 - \sigma(\triangle ABC) + 180 - \sigma(\triangle ACD)\\ &= \delta(\triangle ABC) + \delta(\triangle ACD),\end{aligned}$$

der vi i den tredje ligningen har brukt de to ligningene vi fant for $\mu(\angle BCD)$ og $\mu(\angle DAB)$, sammen med definisjonen av σ. Det meste vi gjør i denne oppgaven er altså å bruke definisjonene til δ og σ.

4.8.5 Vi skal vise teorem 4.8.10. I denne oppgaven vil derfor $\square ABCD$ være en Saccherifirkant, altså at $\angle ABC$ og $\angle DAB$ er rette vinkler og at $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Siden teloremet har 6 deler, må vi vise 6 påstander.

1. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$: Vi betrakter de to trekantene $\triangle ABD$ og $\triangle BAC$, se figuren. Per antagelse vet vi følgende
$$\overline{AD} \cong \overline{BC}, \quad \overline{AB} \cong \overline{BA} \quad \text{og} \quad \mu(\angle ABD) = \mu(\angle BAC) = 90.$$
Dermed gir SVS (side-vinkel-side) oss at $\triangle ABD \cong \triangle BAC$, som spesielt betyr at $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.
2. $\angle BCD \cong \angle ADC$: Denne gangen vender vi blikket mot trekantene $\triangle ADC$ og $\triangle BCD$. Siden vi nettopp viste at $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, vet vi nå at alle sidene i disse to trekantene er kongruente. Dermed gir SSS (side-side-side) oss at $triangle ACD \cong \triangle BDC$, noe som spesielt betyr at $\angle BCD \cong \angle ADC$.
3. Linjestykket fra midtpunktet til $\overline{AB}$ til midtpunktet av $\overline{CD}$ står vinkelrett på $\overline{AB}$ og $\overline{CD}$: La M være midtpunktet til $\overline{AB}$ og N være midtpunktet til $\overline{CD}$. Vi begynner med å kikke på trekantene $\triangle AMD$ og $\triangle BMC$. Siden $\overline{AM} \cong \overline{BM}$ (ettersom M er midtpunktet mellom de), kan vi bruke SVS til å si at
$$\triangle AMD \cong \triangle BMC.$$
Spesielt har vi $\overline{DM} \cong \overline{CM}$. Fra dette har vi nå at alle sidene i trekantene $\triangle DMN$ og $\triangle CMN$ er kongruente, slik at SSS gir oss at $\triangle DMN \cong \triangle CMN$. Spesielt betyr dette at $\mu(\angle MND) = \mu(\angle MNC)$, og siden $\angle MND$ og $\angle MNC$ er supplementærvinkler vet vi fra lineært par-teoremet at
$$180 = \mu(\angle MND) + \mu(\angle MNC) = 1\mu(\angle MND).$$
Dette betyr at $\mu(\angle MND) = 90$, som viser at vi har $\overline{MN} \perp \overline{CD}$.
Det gjenstår å vise at $\overline{MN} \perp \overline{AB}$, men beviset for denne påstanden er veldig likt første del, så vi skisserer bare raskt. Siden vi fra punkt 2 av denne oppgaven at $\angle BCD \cong \angle ADC$, kan vi bruke SVS til å konkludere med at $\triangle BCN \cong \triangle ADN$, og da spesielt at $\overline{AN} \cong \overline{BN}$. Som i første del kan vi da bruke lineært par-teoremet til å konkludere med at vinkelen $\angle AMN$ er rett.
4. $\square ABCD$ er et paralellogram: Siden linjen $\overleftrightarrow{AB}$ skjærer $\overleftrightarrow{AD}$ og $\overleftrightarrow{BC}$ slik at skjæringsvinklene er rette, gir alternerende indre vinkel-teoremet at $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Tilsvarende skjærer $\overleftrightarrow{MN}$ linjene $\overleftrightarrow{AB}$ og $\overleftrightarrow{CD}$ slik at skjæringsvinklene er rette (dette er resultatet fra punkt 3 av denne oppgaven). Vi vet da at $\mu(\angle AMN) = \mu(\angle DNM) = 90$. Fra lineært par-teoremet vet vi da at $\mu(\angle CNM) = 90$. Dette betyr at de to indre vinklene $\angle AMN$ og $\angle CNM$ er kongruente. Det alternerende indre vinkel-teoremet gir oss da at $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
5. $\square ABCD$ er konveks: Vi har vist at $\square ABCD$ er et paralellogram, og i forrige øving viste vi teorem 4.6.6 som sier at alle paralellogram er konvekse. Dermed er vi ferdige.
6. Vinklene $\angle BCD$ og $\angle CDA$ er enten rette elle spisse: Vi må vise at $\mu(\angle BCD) \leq 90$ og at $\mu(\angle CDA) \leq 90$. Fra teorem 4.6.4 vet vi at
$$\mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCD) + \mu(\angle CDA) + \mu(\angle DAB) \leq 360.$$
Vi vet at $\mu(\angle ABC) = \mu(\angle DAB) = 90$, og fra punkt 2 av denne oppgaven vet vi at $\mu(\angle CDA) = \mu(\angle BCD)$. Setter vi dette inn i ligningen over får vi at $2\mu(\angle CDA) \leq 180$, slik at vi har $\mu(\angle CDA) = \mu(\angle BCD) \leq 90$.

4.8.8 La $\square ABCD$ være en Lambert-firkant, altså en firkant hvor vinkelen ved de tre hjørnene A, B og C er rette.

Vi skal vise 4 utsagn.

1. $\square ABCD$ er et paralellogram: Dette følger lett fra alternerende indre vinkelteoremet, nærmere bestem fra korollar 4.4.8. Vi har at $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$ og at $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ siden $\square ABCD$ er en Lambert-firkant. Siden vi åpenbart ikke har at $\overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{BC}$ gir korollar 4.4.8 oss at $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.

   Helt tilsvarende har vi at $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{CD}$ og at $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB}$, slik at korollar 4.4.8 gir at $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$. Dermed er firkanten et paralellogram.
2. $\square ABCD$ er konveks: Vi har vist at $\square ABCD$ er et paralellogram, og i forrige øving viste vi teorem 4.6.6 so sa at alle paralellogrammer en konvekse. Dermed er vi ferdige.
3. $\mu(\angle CDA) \leq 90$: Fra teorem 4.6.4 vet vi at

   $$\mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCD) + \mu(\angle CDA) + \mu(\angle DAB) \leq 360.$$

   Siden alle andre vinkler enn $\angle CDA$ er rette, gir dette at

   $$270 + \mu(\angle CDA) \leq 360,$$

   som vil si at $\mu(\angle CDA) \leq 90$.
4. $BC \leq AD$: Vi antar at $BC > AD$ og viser at dette fører til en selvmotsigelse. Fra teorem 3.2.23 kan vi finne et punkt $P \in \overrightarrow{BC}$ slik at $BP = AD$. Siden $BP = AD < BC$ per antagelse, gir korollar 3.2.18 at $B * P * C$, slik at $P \in \overline{BC}$. Da er $\square ABPD$ en Saccheri-firkant. Fra siste del av teorem 4.8.10, altså forrige oppgave, vet vi da at $\mu(\angle BPD) \leq 90$. Men $\angle BPD$ er også en ytre vinkel til trekanten $\triangle PCD$, slik at ytre vinkel-teoremet gir oss

   $$\mu(\angle BPD) > \mu(\angle PCD) = 90.$$

   De to siste ligningene kan selvsagt ikke stemme samtidig, altså har vi nådd en selvmotsigelse. Dermed kan ikke antagelsen vår være sann, altså har vi $BC \leq AD$.

4.8.10 La $\angle BAC$ være en spiss vinkel og la P og Q være to punkter på $\overrightarrow{AB}$ slik at $A * P * Q$. Vi kan finne vinkelrette linjer fra P og Q ned på linjen $\overleftrightarrow{AC}$. Kall skjæringspunktene E og F respektivt. Vi viser først at $QF > PE$.

Siden $\angle BAC$ er spiss må skjæringspunktene P og Q ligge på strålen $\overrightarrow{AC}$. Vinkelen $\angle EPQ$ må også være stump. Vi må ha en av følgende tre muligheter: $QF < PE$, $QF = PE$ eller $QF > PE$. Vi viser at de to første mulighetene fører til en selvmotsigelse.

Anta først at $QF = PE$. Da er firkanten $\square EFQP$ en Saccheri-firkant. Dermed vet vi fra teorem 4.8.10 del 6, altså oppgave 4.8.5 i denne øvingen, at vinkelen $\angle EPQ$ enten rett eller spiss. Men dette motsier påstanden vår, så vi kan ikke ha at $QF = PE$.

Anta nå at vi har $QF < PE$. Fra linjalpostulatet kan vi finne et punkt P' mellom E og P slik at $P'E = QF$. Da er firkanten $\square EFQP'$ en Saccheri-firkant, som igjen vil si at vinkelen $\angle EP'Q$ er enten rett eller spiss (oppgave 4.8.5 del 6). Men dette motsier ytre vinkel-teoremet, ettersom vinkelen $\angle EP'Q$ er en ytre vinkel til $\triangle PP'Q$ og $\angle EPQ$ er en indre vinkel til den samme trekanten. Dermed kan vi ikke ha at $QF < PE$.

Den eneste muligheten som gjenstår er dermed $QF > PE$ som var det vi ville vise.

Vi viser nå andre del av teoremet, nemlig at for ethvert reelt tall d_0 så finnes et punkt R på $\overrightarrow{AB}$ slik at $d(R, \overleftrightarrow{AC}) = d_0 > d_0$. La d_0 være et gitt reellt tall. Definer $B_0 = A$ og $B_1 = B$. Vi kan bruke linjalpostulatet til å finne punkter $B_2, B_3, \ldots$ på $\overrightarrow{AB}$ slik at for hver $i \geq 1$ har vi $B_0 * B_i * B_{i+1}$ og $B_iB_{i+1} = B_0B_i$. Vi bruker oppgave 4.8.9[1] som gir oss $d(B_{i+1}, \overleftrightarrow{AC}) \geq 2d(B_i, \overleftrightarrow{AC})$. Det følger ved matematisk induksjon at vi har $d(B_n, \overleftrightarrow{AC}) = 2^{n-1}d(B_1, \overleftrightarrow{AC})$ for hver $n \geq 0$.

Fra Arkimedes' aksiom for de reelle tallene kan vi finne et naturlig tall k slik at $2^{k-1}d(B_1, \overleftrightarrow{AC}) \geq d_0$. Punktet $R = B_k$ har de egenskapene vi er ute etter.

$\boxed{5.1.2}$ Vi skal vise teorem 5.1.10. La $\square ABCD$ være et paralellogram, altså at $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ og $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Vi skal vise 4 utsagn.

1. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ og $\triangle ABD \cong \triangle CBD$: Vi viser kun $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, da den andre kongruensen vises på akkuratt samme måte. Vi vet at $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, og at disse linjene skjæres av $\overleftrightarrow{AC}$ i henholdsvis A og C. Det motsatte alternerende indre vinkel-teoremet (MAIVT, teorem 5.1.1) gir derfor at
$$\angle DAC \cong \angle BCA.$$
På tilsvarende vis vet vi at $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ og at disse to linjene skjæres av $\overleftrightarrow{AC}$ i henholdsvis A og C. Igjen gir MAIVT dermed at
$$\angle CAB \cong \angle ACD.$$
Vi vet nå at $\angle DAC \cong \angle BCA$, $\angle CAB \cong \angle ACD$ og $\overline{AC} \cong \overline{CA}$. Side-vinkel-side-postulatet (VSV) gir oss dermed at $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.
2. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ og $\overline{BC} \cong \overline{AD}$: Fra det første punktet i oppgaven vet vi at $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. Da må vi spesielt ha $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. På tilsvarende vis får vi $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ fordi $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.
3. $\angle DAB \cong \angle BCD$ og $\angle ABC \cong \angle CDA$: Som i punkt 2 følger dette punktet direkte fra kongruensene i punkt 1.
4. Diagonalene $\overline{AC}$ og $\overline{BD}$ skjærer hverandre i et punkt P slik at $AP = PC$ og $BP = PD$: Vi vet fra forrige øving (teorem 4.6.6) at $\square ABCD$ er konveks. Videre vet vi fra teorem 4.6.8 at diagonalene i en konveks firkant skjærer hverandre i det indre, og vi vet dermed at $\overline{AC}$ og $\overline{BD}$ skjærer hverandre i et punkt P. Vi må vise at $AP = PC$ og $BP = PD$.
Vi vet at $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ og at disse to linjene skjæres av $\overleftrightarrow{AC}$ i henholdvis A og C. MAIVT gir oss dermed at
$$\angle PAB \cong \angle PCD.$$

[1] Det burde kanskje skrives ned et kjapt bevis på denne oppgaven for å bruke den...

De samme linjene skjæres også av $\overleftrightarrow{BD}$ i henholdsvis B og D, og MAIVT gir igjen at

$$\angle ABP \cong \angle PDC.$$

Fra punkt 2 i denne oppgaven vet vi også at $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, og disse tre kongruensene lar oss bruke VSV (vinkel-side-vinkel) til å konkludere med at

$$\triangle ABP \cong \triangle CDP,$$

noe som spesielt betyr at $AP = PC$ og $BP = PD$.

$\boxed{5.1.3}$ La $\square ABCD$ være en firkant slik at $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ og $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Vi skal vise at $\square ABCD$ er et paralellogram, altså at vi også har $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Linjen $\overleftrightarrow{AC}$ skjærer de to paralelle linjene $\overleftrightarrow{AB}$ og $\overleftrightarrow{CD}$ i henholdsvis A og C. Det motsatte alternerende indre vinkel-teoremet (MAIVT) gir oss da at

$$\angle CAB \cong \angle ACD.$$

Nå har vi at $\overline{AC} \cong \overline{AC}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ og $\angle CAB \cong \angle ACD$. Fra SVS (side-vinkel-side) får vi da at $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, noe som spesielt betyr at $\angle DAC \cong \angle BCA$. Men dette betyr at $\overleftrightarrow{AC}$ skjærer linjene $\overleftrightarrow{AD}$ og $\overleftrightarrow{BC}$ i punktene A og C, slik at $\angle DAC \cong \angle BCA$. Det alternerende indre vinkel-teoremet (AIVT) gir oss dermed at $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, som var det vi ville vise.