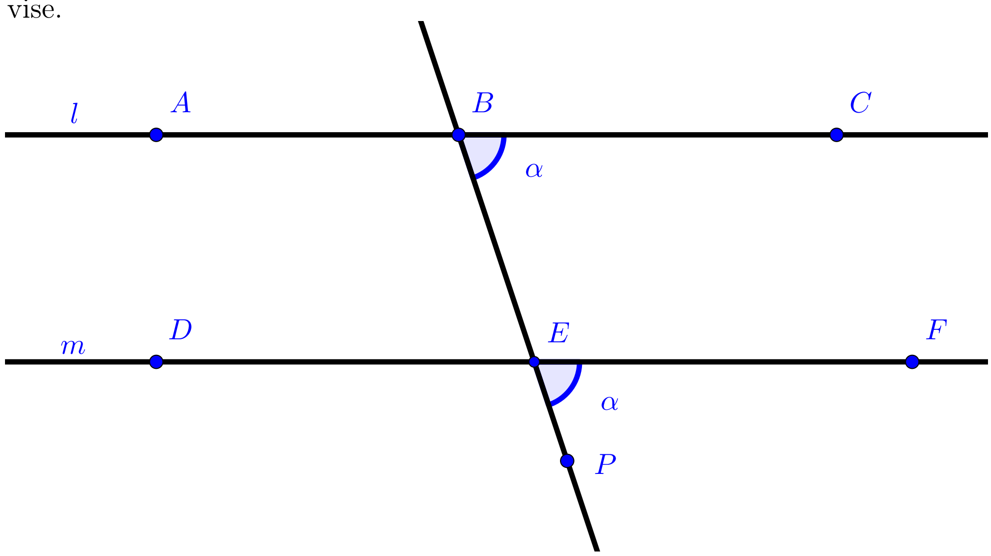
Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA2401 Geometri
Vår 2022

Løsningsforslag — Øving 6

4.4.1 Vi skal vise at dersom $\angle CBP \cong \angle FEP$, så må l og m være paralelle. Se figuren for oppsettet av punkter og linjer.

Av toppvinkelteoremet (teorem 3.5.13) får vi at $\angle FEP \cong \angle DEB$. Fra dette gir alternerende-indre-vinkel-teoremet oss at m og l er paralelle, som var det vi ville vise.



4.4.2 Vi bruker igjen figuren fra forrige oppgave til oppsettet av punkter og linjer. Vi skal nå vise at dersom $\angle CBP$ og $\angle FEB$ er supplementærvinkler, så er m og l paralelle.

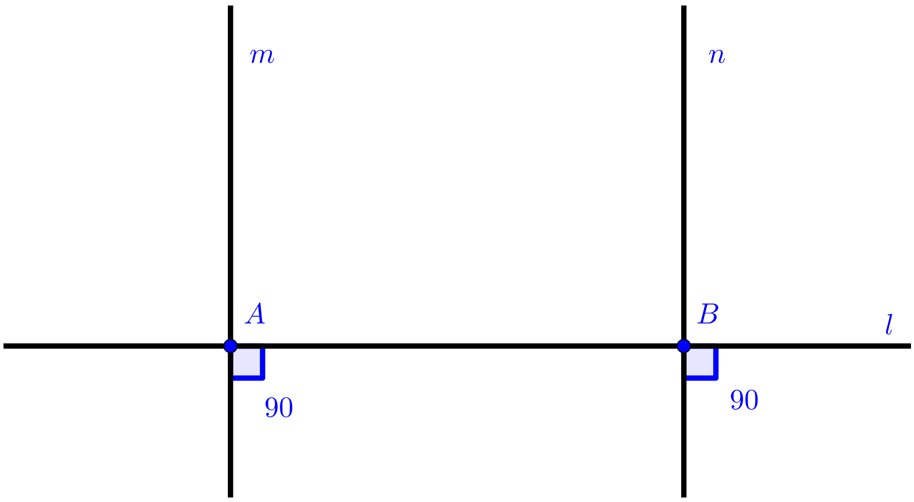
Anta at $\angle CBP$ og $\angle FEB$ er supplementærvinkler. Per definisjon betyr dette at $\mu(\angle CBP) + \mu(\angle FEB) = 180$. Av lineært par-teoremet får vi også at $\mu(\angle DEB) + \mu(\angle FEB) = 180$. Dermed må vi ha

$$\mu(\angle CBP) = 180 - \mu(\angle FEB) = \mu(\angle DEB),$$

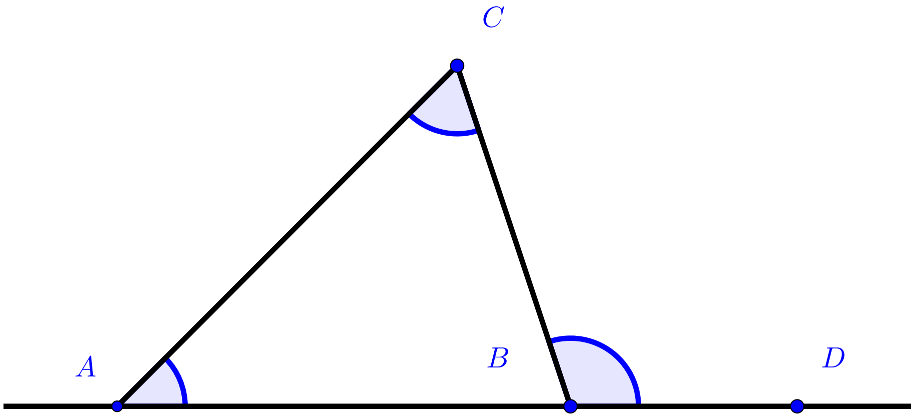
eller med andre ord $\angle CBP \cong \angle DEB$. Det alternerende-indre-vinkel-teoremet gir oss da at l og m er paralelle.

4.4.3 La l, m og n være tre linjer slik at $m \perp l$ og $n \perp l$. Vi vil vise at vi enten har $m = n$ eller $m \parallel n$.

La A være punktet der linjene l og m skjærer hverandre, og B være punktet der linjene l og m skjærer hverandre. Vi har to tilfeller: enten er $A = B$, eller så er $A \neq B$. Dersom $A = B$ vet vi at $n = m$ grunnet unikhet av vinkelrette linjer gjennom et gitt punkt. Siden linjene m og n begge står vinkelrette på l kan vi konkludere med at $m \parallel n$ fra oppgave 4.4.1.



$\boxed{4.5.1}$ La $\triangle ABC$ være en trekant, og la D være et punkt på $\overleftrightarrow{AB}$ slik at $A * B * D$. Vi vil vise at $\mu(\angle CAB) + \mu(\angle BCA) \leq \mu(\angle DBC)$.



Fra Sacherri-Legendres teorem vet vi at

$$\mu(\angle CAB) + \mu(\angle BCA) + \mu(\angle ABC) \leq 180.$$

Dermed har vi

$$\mu(\angle CAB) + \mu(\angle BCA) \leq 180 - \mu(\angle ABC).$$

Fra lineært par-teoremet vet vi også at $\mu(\angle DBC) = 180 - \mu(\angle ABC)$. Ved å kombinere de to forrige ligningene får vi at

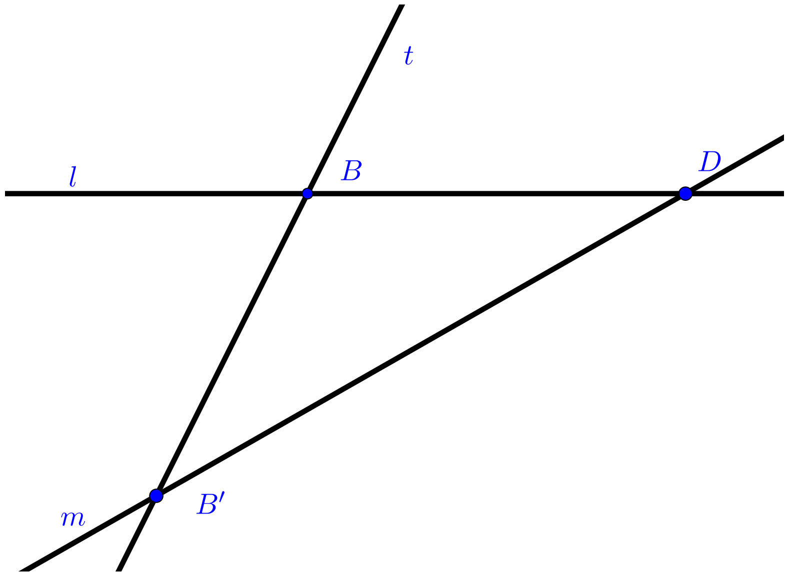
$$\mu(\angle CAB) + \mu(\angle BCA) \leq \mu(\angle DBC),$$

som var det vi ville vise.

$\boxed{4.5.2}$ La l og m være to ulike linjer som begge skjæres av en linje t. Vi vil vise at summen av vinkelmålene til de indre vinklene på den siden av t der l og m skjærer hverandre er strengt mindre en 180. Det kan være enklere å skjønne hva vi vil vise ved å se på figuren under.

Vi fikserer ført litt notasjon, slik at det er klart hva vi faktisk vil vise. La B være skjæringspunktet mellom t og l, og B' være skjæringspunktet til t og m. La også D være skjæringspunktet til l og m. Det vi da vil vise er at

$$\mu(\angle DBB') + \mu(\angle BB'D) < 180.$$



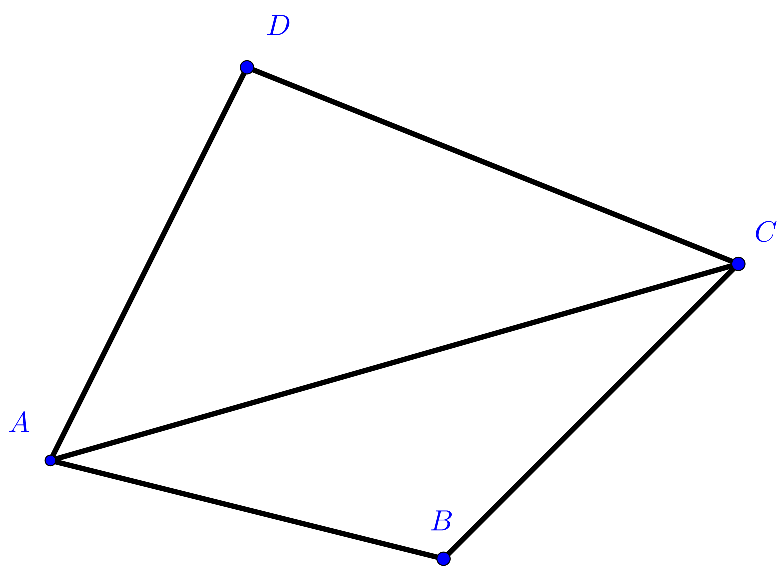
Ved å anvende Saccheri-Legendres teorem på trekanten $\triangle DBB'$ får vi

$$\mu(\angle DBB') + \mu(\angle BB'D) + \mu(\angle B'DB) \leq 180.$$

Siden $\mu(\angle B'DB) > 0$ fra gradskivepostulatet følger resultatet vi ønsker å vise umiddelbart ved å trekke fra $\mu(\angle B'DB)$ fra ligningen over.

$\boxed{\text{4.6.1}}$ La $\square ABCD$ være en konveks firkant. Vi vil vise at

$$\mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCD) + \mu(\angle CDA) + \mu(\angle DAB) \leq 360.$$



Vi deler firkanten inn i to trekanter, $\triangle ABC$ og $\triangle CDA$. Merk at dette faktisk gir oss to trekanter da disse punktene ikke kan ligge på linje per definisjon av en firkant. Ved å anvende Saccheri-Legendre teoremet på trekantene $\triangle ABC$ og $\triangle CDA$ får vi

$$\mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCA) + \mu(\angle CAB) \leq 180$$

og

$$\mu(\angle CDA) + \mu(\angle DAC) + \mu(\angle ACD) \leq 180.$$

Legger vi disse to ligningene sammen får vi at

$$\mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCA) + \mu(\angle CAB) + \mu(\angle CDA) + \mu(\angle DAC) + \mu(\angle ACD) \leq 360.$$

Siden firkanten er konveks vet vi at A ligger i det indre av vinkelen $\angle BCD$ og at C ligger i det indre av vinkelen $\angle DAB$. Fra del 4 av gradskivepostulatet får vi at

$$\mu(\angle BCA) + \mu(\angle ACD) = \mu(\angle BCD),$$

og

$$\mu(\angle DAC) + \mu(\angle CAB) = \mu(\angle DAB).$$

Setter vi disse likhetene i den vi hadde over, får vi nøyaktig det vi var ute etter, altså

$$\mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCD) + \mu(\angle CDA) + \mu(\angle DAB) \leq 360.$$

$\boxed{\text{4.6.2}}$ Anta at $\square ABCD$ er et paralellogram, altså at $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ og $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Vi vil vise at $\square ABCD$ er konveks, som for firkanter betyr at hvert hjørne ligger i det indre av vinkelen definert av de tre andre hjørnene. Vi viser at dette stemmer kun for ett av hjørnene, A, da beviset for de tre andre er helt likt.

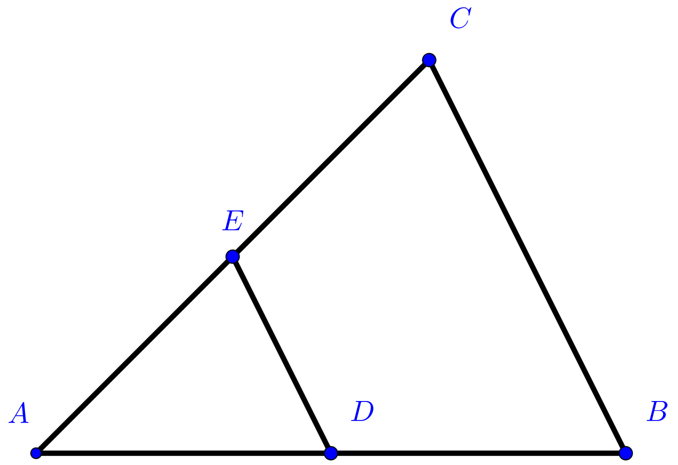
Vi minner oss selv på hva det vil si å ligge i det indre av $\angle BCD$: det betyr at A og B ligger på samme side av $\overleftrightarrow{CD}$, og at A og D ligger på samme side av $\overleftrightarrow{BC}$. La oss vise at dette stemmer.

Siden vi vet at $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ vet vi at $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \emptyset$. Dette betyr at A og D ligger på samme side av $\overleftrightarrow{BC}$. Se proposisjon 3.3.4 hvis dette er uklart.

På nøyaktig samme måte får vi at $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \emptyset$, som gir oss at A og B liger på samme side av $\overleftrightarrow{CD}$.

Dermed har vi at A ligger i det indre av vinkelen $\angle BCD$. At de andre hjørnene ligger i det indre av de andre respektive vinklene bevises på tilsvarende måte. Dermed er firkanten $\square ABCD$ konveks.

$\boxed{\text{4.6.5}}$ La $\triangle ABC$ være en trekant, D et punkt mellom A og B, og E et punkt mellom A og C.



Vi skal vise at $\square BCED$ er en konveks firkant, altså at hjørnene ligger i det indre av vinklene definert av de resterende hjørnene.

- E ligger i det indre av $\angle DBC$: Vi bemerker oss først at $\angle DBC = \angle ABC$, siden $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA}$. Siden vi vet at E ligger mellom A og C, vet vi at strålen $\overrightarrow{BE}$ skjærer det indre av linjestykket $\overline{AC}$. Fra teorem 3.5.3 kan vi konkludere med at E ligger i det indre av $\angle ABC = \angle DBC$.
- D ligger i det indre av $\angle BCE$: Agumentet er veldig likt det over. Vi har at $\angle BCE = \angle BCA$, og teorem 3.5.3 gir oss at D ligger i det indre av $\angle BCA$ ettersom $\overrightarrow{CD}$ skjærer $\overline{AB}$ i punktet D.
- B ligger i det indre av $\angle CED$: Av definisjonen av det indre av en vinkel, må vi vise at B og D ligger på samme side av $\overleftrightarrow{EC}$, og at B og C ligger på samme side av $\overleftrightarrow{ED}$. Siden både B og D ligger på strålen $\overrightarrow{AB}$ gir stråleteoremet (teorem 3.3.9) at B og D ligger på samme side av $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{EC}$. Merk så at B og A ligger på motsatt side av $\overleftrightarrow{ED}$, siden $\overline{AB}$ skjærer $\overleftrightarrow{ED}$ i punktet D. På samme vis ligger C og A på motsatt side av $\overleftrightarrow{ED}$, ettersom $\overline{AC}$ skjærer $\overleftrightarrow{ED}$ i punktet E. Siden A ligger på motsatt side av både B og C kan vi konkludere med at B og C ligger på samme side av $\overleftrightarrow{ED}$.
- C ligger i det indre av $\angle EDB$: Denne bevises på samme måte som forrige punkt.

Siden alle hjørnene ligger i det indre av vinkelen definert av de resterende hjørnene er firkanten $\square BCED$ konveks.

$\boxed{4.7.1}$ Anta Euklids femte postulat. La l være en linje og P et punkt som ikke ligger på l. Vi vil vise at det finnes en unik linje m slik at $P \in m$ og $m \parallel l$.

Vi kan konstruere en linje n vinkelrett på l slik at $P \in n$. La punktet der l og n skjærer hverandre være Q. Fra gradskivepostulatet kan vi finne en linje m slik at $m \perp \overleftrightarrow{PQ}$ og $P \in m$. Fra oppgave 4.4.3 vet vi nå at $m \parallel l$.

Vi må vise at denne linjen er unik. Anta at det finnes en annen linje $m' \neq m$ slik at $P \in m'$. Vi viser at $m' \nparallel l$.

Linjen $\overleftrightarrow{PQ}$ er transversal for l og m'. Siden vi har antatt at $m' \neq m$ har vi at de indre vinklene dannet av m' og $\overleftrightarrow{PQ}$ ikke er rette vinkler. Men, de to indre vinklene dannet av m' og $\overleftrightarrow{PQ}$ er supplementærvinkler, så en av vinklene må ha vinkelmål større enn 90 og en må ha vinkelmål mindre enn 90. Fra Euklids femte postulat må linjene m' og l skjære hverandre på den siden av $\overleftrightarrow{PQ}$ der vinkelmålet er mindre enn 90. Siden m' og l skjærer hverandre er de ikke paralelle. Altså er den paralelle linjen m unik.