



**3.2.12** At  $f : l \rightarrow \mathbb{R}$  er en koordinatfunksjon betyr at

1.  $PQ = |f(P) - f(Q)|$  for alle punkter  $P, Q \in l$ .
2.  $f$  er på, altså at for alle  $x \in \mathbb{R}$  finnes det et punkt  $P \in l$  slik at  $f(P) = x$ .
3.  $f$  er 1-til-1, altså at dersom  $f(P) = f(Q)$  for to punkter  $P, Q \in l$ , så er  $P = Q$ .

De to siste punktene betyr at  $f$  er en 1-til-1 korrespondanse.

a) Vi antar at  $f$  er en koordinatfunksjon, og dermed tilfredstiller de tre punktene over. Funksjonen  $-f$  er definert ved  $(-f)(x) = -f(x)$ . For å vite om dette også er en koordinatfunksjon sjekker vi de tre punktene.

1. Vi har at  $|(-f)(P) - (-f)(Q)| = |-f(P) + f(Q)| = |f(P) - f(Q)|$ , og siden  $f$  er en koordinatfunksjon vet vi at  $|f(P) - f(Q)| = PQ$ . Altså er  $|(-f)(P) - (-f)(Q)| = PQ$ .
2. Velg et tilfeldig punkt  $x \in \mathbb{R}$ . Siden  $f$  er på, finnes det et punkt  $P$  slik at  $f(P) = -x$ . Vi har da  $(-f)(P) = -f(P) = -(-x) = x$ , som viser at også  $-f$  er på.
3. La  $(-f)(P) = (-f)(Q)$ . Per definisjon betyr dette at  $-f(P) = -f(Q)$ , som igjen betyr at  $f(P) = f(Q)$ . Siden  $f$  er 1-til-1 betyr dette at  $P = Q$ . Dermed er også  $-f$  1-til-1.

b) Vi antar igjen at  $f$  er en koordinatfunksjon. Vi sjekker om  $g$  tilfredsstiller de tre punktene.

1. Vi har  $|g(P) - g(Q)| = |f(P) + c - (f(Q) + c)| = |f(P) - f(Q)|$ . Siden  $f$  er en koordinatfunksjon har vi  $|f(P) - f(Q)| = PQ$ , og dermed at  $|g(P) - g(Q)| = PQ$ .
2. Velg et tilfeldig punkt  $x \in \mathbb{R}$ . Siden  $f$  er på finnes det et punkt  $P$  slik at  $f(P) = x - c$ . Vi har da  $g(P) = f(P) + c = x - c + c = x$ . Altså er  $g$  også på.
3. La  $g(P) = g(Q)$ . Per definisjon betyr dette at  $f(P) + c = f(Q) + c$ , som betyr at  $f(P) = f(Q)$ . Siden  $f$  er 1-til-1 betyr dette at  $P = Q$ . Dermed er også  $g$  1-til-1.

c) Anta nå at både  $f$  og  $h$  er koordinatfunksjoner for  $l$ . For å vise at to koordinatfunksjoner er like trenger vi faktisk kun å sjekke at de er like i to ulike punkter. La oss se litt nærmere på dette.

**Lemma 1.** *La  $f$  og  $h$  være koordinatfunksjoner for en linje  $l$ . Dersom  $f(P) = h(P)$  og  $f(Q) = h(Q)$  for to punkter  $P \neq Q$ , så er  $f(A) = h(A)$  for alle  $A \in l$ .*

*Bevis.* Anta at  $f(P) = h(P)$  og  $f(Q) = h(Q)$  der  $P \neq Q$ . Siden  $P \neq Q$  har vi  $f(P) \neq f(Q)$ . Vi kan anta uten ta av generalitet at  $f(P) < f(Q)$ . La  $A \in l$

være et punkt. Vi ønsker å vise at  $f(A) = h(A)$ . Fra korollar 3.2.19 vet vi at dersom tre ulike punkter ligger på en linje, så ligger et av dem mellom de to andre. Vi har nå tre punkter:  $P$ ,  $Q$ ,  $A$ , og disse kan være i tre konfigurasjoner:  $P * A * Q$ ,  $P * Q * A$  og  $A * P * Q$ . Vi sjekker at  $f(A) = h(A)$  i alle tre tilfellene.

1.  $P * A * Q$ : Av teorem 3.2.17 har vi at  $f(P) < f(A) < f(Q)$ , og fra linjalpostulatet er

$$AQ = |f(Q) - f(A)| = f(Q) - f(A),$$

der vi har fjernet absoluttverditegnet ettersom  $f(A) < f(Q)$ . Vi har da  $f(A) = f(Q) - AQ$ . På samme måte får vi  $h(A) = h(Q) - AQ$ . Dermed har vi

$$f(A) = f(Q) - AQ = h(Q) - AQ = h(A),$$

siden vi har antatt at  $f(Q) = h(Q)$ .

2.  $P * Q * A$ : De to følgende punktene er så og si helt like som det over, men vi skriver de ut for kompletthets skyld.

Fra teorem 3.2.17 vet vi at  $f(P) < f(Q) < f(A)$ , og fra linjalpostulatet er

$$AQ = |f(A) - f(Q)| = f(A) - f(Q),$$

der vi igjen har fjernet absoluttverditegnet siden  $f(Q) < f(A)$ . Vi har da  $f(A) = f(Q) + AQ$ . På samme måte får vi  $h(A) = h(Q) + AQ$ . Dermed har vi

$$f(A) = f(Q) + AQ = h(Q) + AQ = h(A),$$

siden vi har antatt at  $f(Q) = h(Q)$ .

3.  $A * P * Q$ : Fra teorem 3.2.17 vet vi at  $f(A) < f(P) < f(Q)$ , og fra linjalpostulatet er

$$AP = |f(P) - f(A)| = f(P) - f(A),$$

der vi igjen har fjernet absoluttverditegnet siden  $f(A) < f(P)$ . Vi har da  $f(A) = f(P) - AP$ . På samme måte får vi  $h(A) = h(P) - AP$ . Dermed har vi

$$f(A) = f(P) - AP = h(P) - AP = h(A),$$

siden vi har antatt at  $f(P) = h(P)$ .

□

Ok, la oss vende tilbake til den faktiske oppgaven. Siden  $f$  er en koordinatfunksjon vet vi at det er *på*. Dermed kan vi finne punkter  $P$  og  $Q$  slik at  $f(P) = 0$  og  $f(Q) = 1$ . Fra linjalpostulatet har vi dermed at  $PQ = f(Q) - f(P) = 1$ . Vi har to muligheter for  $h$ , enten er  $h(P) < h(Q)$ , eller så er  $h(Q) < h(P)$ . Vi ser på den første muligheten først.

Anta at  $h(P) < h(Q)$ . Vi påstår at for en hver  $A \in l$  så er  $h(A) = f(A) + c$ , der  $c = h(P)$ . Siden  $f$  er en koordinatfunksjon vet vi fra b) at funksjonen gitt ved  $f(P) + c$  også er en koordinatfunksjon. Fra lemma 1 trenger vi kun å vise at  $h(P) = f(P) + c$  og  $h(Q) = f(Q) + c$  for å bevise påstanden vår. Vi har

$$f(P) + c = f(P) + h(P) = 0 + h(P) = h(P)$$

og

$$\begin{aligned}
 f(Q) + c &= f(Q) + h(P) \\
 &= f(Q) + (h(Q) - PQ) \\
 &= h(Q) + (f(Q) - PQ) \\
 &= h(Q),
 \end{aligned}$$

ettersom  $f(Q) = 1 = PQ$ . Den andre av likhetene over får vi fra linjalpostulatet. Anta nå at  $h(Q) < h(P)$ . Vi påstår nå at  $h(A) = -f(A) + c$ , der igjen  $c = h(P)$ , for alle  $A \in l$ . Beviset for at dette er sant er helt analogt til det over. Altså, vi sjekker om de er like for  $P$  og  $Q$ , noe som ved lemma 1 betyr at de må være like. Vi har

$$h(P) = 0 + h(P) = -f(P) + c,$$

da  $f(P) = 0$ . Vi har også

$$\begin{aligned}
 -f(Q) + c &= -f(Q) + h(P) \\
 &= -f(Q) + (h(Q) + PQ) \\
 &= h(Q) + (PQ - f(Q)) \\
 &= h(Q),
 \end{aligned}$$

ettersom  $f(Q) = 1 = PQ$ . Den andre av likhetene over får vi igjen fra linjalpostulatet.

**3.2.15** Oppgaver ber oss om å vise at to mengder er like, altså at

$$\overrightarrow{AB} = \{P \in l \mid f(P) \geq 0\}.$$

For å vise dette viser vi to ting: først, dersom  $P \in \overrightarrow{AB}$  så er  $f(P) \geq 0$ , så, dersom  $f(P) \geq 0$  så er  $P \in \overrightarrow{AB}$ .

Anta dermed at  $P \in \overrightarrow{AB}$ . Da har vi enten  $P = A$ ,  $P = B$ ,  $A * P * B$  eller  $A * B * P$ . Dersom  $P = A$  har vi fra beskrivelsen av funksjonen  $f$  at  $f(P) = 0$  og dersom  $P = B$  har vi  $f(P) > 0$ . Dersom  $A * P * B$  har vi dermed fra teorem 3.2.17 i boka at  $f(A) < f(P) < f(B)$ , og dermed at  $f(P) \geq 0$ . Siste mulighet er at  $A * B * P$ , som igjen fra teorem 3.2.17 betyr at  $f(A) < f(B) < f(P)$ . Alle mulighetene gir oss  $f(P) \geq 0$ , så vi har vist den første delen.

Anta nå at vi har  $f(P) \geq 0$ . Hvis  $f(P) = 0$  så har vi  $f(A) = f(P)$ . Siden  $f$  er entil-en vet vi at dette betyr at  $A = P$ . Det tilsvarende gjelder dersom  $f(P) = f(B)$ . I begge tilfeller er  $P \in \overrightarrow{AB}$ . Vi har da to tilfeller igjen,  $f(A) < f(P) < f(B)$  og  $f(A) < f(B) < f(P)$ . Fra teorem 3.2.17 får vi da respektivt at  $A * P * B$  og  $A * B * P$ . Dermed er  $P \in \overrightarrow{AB}$ .

**3.2.22** Vi skal vise at dersom  $\overline{AB} = \overline{CD}$ , så er enten  $A = C$  og  $B = D$  eller  $A = D$  og  $B = C$ . Vi bemerker oss først at  $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$  ettersom  $C$  og  $D$  begge ligger på linjen  $\overleftrightarrow{AB}$ .

La nå  $f : \overleftrightarrow{AB} \rightarrow \mathbb{R}$  være en koordinatfunksjon. Vi kan anta uten tap av generalitet at  $f(A) < f(B)$  og  $f(C) < f(D)$ . Fra teorem 3.2.17 får vi to likheter:

$$\overline{AB} = \{P | f(A) \leq f(P) \leq f(B)\}$$

$$\overline{CD} = \{P | f(C) \leq f(P) \leq f(D)\}.$$

Siden vi har antatt at  $\overline{AB} = \overline{CD}$  vet vi at  $C \in \overline{AB}$ . Fra den første likheten får vi da at  $f(A) \leq f(C)$ . Vi vet også at  $A \in \overline{CD}$ , som fra den andre likheten gir oss  $f(C) \leq f(A)$ . Siden  $f(C)$  er både mindre og større enn  $f(A)$  må vi ha  $f(A) = f(C)$ . Siden  $f$  er en-til-en betyr dette at  $A = C$ .

Helt tilsvarende får vi at  $B = D$ . Merk at mulighetene  $A = D$  og  $B = C$  forsvant da vi anto at  $f(A) < f(B)$  og  $f(C) < f(D)$ . Snur vi på disse ulikhetene får vi isteden  $A = D$  og  $B = C$ .

**3.2.24.d)** Vi skal vise at  $\overline{AB} \cap \overline{BC} = \{B\}$ . Siden  $A, B, C$  er kolineære finnes en linje  $l$  som de alle ligger på. La  $f : l \rightarrow \mathbb{R}$  være en koordinatfunksjon for  $l$ . Ettersom  $B$  ligger mellom  $A$  og  $C$  vet vi fra teorem 3.2.17 at enten  $f(A) < f(B) < f(C)$  eller  $f(A) > f(B) > f(C)$ . Vi antar  $f(A) < f(B) < f(C)$ . Beviset vil være helt tilsvarende dersom vi isteden antar den andre ulikheten. Fra teorem 3.2.17 får vi to likheter

$$\overline{AB} = \{P | f(A) \leq f(P) \leq f(B)\}$$

$$\overline{BC} = \{P | f(B) \leq f(P) \leq f(C)\}.$$

Dersom vi tar et punkt  $Q \in \overline{AB} \cap \overline{BC}$  må vi fra de to likhetene ha  $f(A) \leq f(Q) \leq f(B)$  og  $f(B) \leq f(Q) \leq f(C)$ . Siden  $f(Q)$  er både mindre og større enn  $f(B)$  må vi ha  $f(Q) = f(B)$ . Siden  $f$  er en-til-en betyr dette at  $Q = B$ .

**3.3.1** La  $X$  og  $Y$  være to konvekse mengder. Vi velger oss to punkter  $A$  og  $B$  i snittet  $X \cap Y$ . Dersom vi klarer å vise at linjen  $\overline{AB} \subset X \cap Y$ , så har vi vist at  $X \cap Y$  også er en konveks mengde.

Ettersom  $A, B \in X \cap Y$  må vi ha  $A \in X$ ,  $A \in Y$ ,  $B \in X$  og  $B \in Y$ . Siden  $X$  og  $Y$  er konvekse mengder vet vi da at linjen  $\overline{AB} \subset X$  og  $\overline{AB} \subset Y$ . Siden linjen ligger i både  $X$  og  $Y$  ligger den også per definisjon i snittet av mengdene. Dermed har vi  $\overline{AB} \subset X \cap Y$ , som var det vi ville vise.

Under har vi tegnet et eksempel av to disjunkte konvekse mengder (to diskler)  $X$  og  $Y$ . Som vi enkelt kan se, er ikke unionen av disse en konveks mengde. Velg to punkter  $A \in X$  og  $B \in Y$ . Siden  $X$  og  $Y$  er disjunkte er ikke linjen  $\overline{AB}$  inneholdt i  $X \cup Y$ . Dermed er ikke unionen konveks.

Vi har to måter å tenke på at den tomme mengden er en konveks mengde. Per definisjon inneholder ikke den tomme mengden noen punkter. Dette betyr at for alle punkter (nettopp ingen) i  $\emptyset$  så er linjen mellom de inneholdt i  $\emptyset$ . Dermed tilfredstiller  $\emptyset$  trivielt definisjonen av å være konveks. Vi har i starten av oppgaven også vist at snittet av to konvekse mengder er igjen konvekst. Så, dersom vi tar to disjunkte

mengder (for eksempel de vi tegnet over) så vil snittet av disse være konvekst. Dette snittet er jo den tomme mengden, så den må da være konveks.

- 3.3.2 •  $\{A\}$ : I denne mengden har vi kun ett punkt, nemlig  $A$ . Så det eneste linjestykket vi har er  $\overline{AA}$ . Per definisjon har vi

$$\overline{AA} = \{A, A\} \cup \{P | A * P * A\} = \{A\}.$$

Ettersom  $\{A\} \subseteq \{A\}$  er mengden konveks.

- $\overline{AB}$ : La  $C$  og  $D$  være to punkter i  $\overline{AB}$ . For at  $\overline{AB}$  skal være konvekst må vi vise at linjestykket  $\overline{CD}$  er inneholdt i  $\overline{AB}$ .

Punktene  $A, B, C$  og  $D$  ligger alle på linjen  $\overleftrightarrow{AB}$ . La  $f : \overleftrightarrow{AB} \rightarrow \mathbb{R}$  være en koordinatfunksjon, som vi fra teorem 3.2.16 kan anta at oppfyller  $f(A) = 0$  og  $f(B) > 0$ . Vi antar videre uten tap av generalitet at  $f(C) < f(D)$ . Fra teorem 3.2.17 får vi to likheter

$$\overline{AB} = \{P | f(A) \leq f(P) \leq f(B)\}$$

$$\overline{CD} = \{P | f(C) \leq f(P) \leq f(D)\}.$$

Siden  $C, D \in \overline{AB}$  vet vi dermed at  $f(A) \leq f(C) \leq f(D) \leq f(B)$ . Dette betyr også at for et hvert punkt  $P \in \overline{CD}$  så har vi  $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$ . Fra teorem 3.2.17 vet vi da at  $A * P * B$ , som vil si at  $P \in \overline{AB}$ . Dermed har vi  $\overline{CD} \subseteq \overline{AB}$ .

- $\overrightarrow{AB}$ : Som over lar vi  $f : \overleftrightarrow{AB} \rightarrow \mathbb{R}$  være en koordinatfunksjon slik at  $f(A) = 0$  og  $f(B) > 0$ . Velg to punkter  $C, D \in \overrightarrow{AB}$  med  $f(C) < f(D)$ . Vi vil vise at  $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{AB}$ .

Siden  $C, D \in \overrightarrow{AB}$  vet vi at  $f(C) \geq 0$  og  $f(D) \geq 0$ . Fra teorem 3.2.17 får vi likheten

$$\overrightarrow{CD} = \{P | f(C) \leq f(P) \leq f(D)\},$$

som betyr at  $f(P) \geq f(C) \geq 0$  for alle punkter  $P \in \overrightarrow{CD}$ . Siden  $\overrightarrow{AB} = \{P | 0 \leq f(P)\}$  får vi at  $P \in \overrightarrow{AB}$  for alle punkter  $P \in \overrightarrow{CD}$ , som betyr at  $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{AB}$ .

- $\overleftarrow{AB}$ : Velg to punkter  $C$  og  $D$  på  $\overleftarrow{AB}$ . Vi vil vise at  $\overleftarrow{CD} \subset \overleftarrow{AB}$ .

For et punkt  $P \in \overleftarrow{CD}$  har vi enten  $P = C$ ,  $P = D$  eller  $C * P * D$ . I de to første tilfellene har vi åpenbart  $P \in \overleftarrow{AB}$ . Dersom  $C * P * D$  så må  $C, P$  og  $D$  ligge på en felles linje  $l$ . Siden to punkter ligger på en *unik* linje, og  $C$  og  $D$  ligger på både  $l$  og  $\overleftarrow{AB}$  må vi ha  $l = \overleftarrow{AB}$ . Dermed har vi  $P \in \overleftarrow{AB}$  som betyr at  $\overleftarrow{CD} \subset \overleftarrow{AB}$ , som var det vi ville vise.

- 3.3.4 a) Vi må vise at modellen tilfredstiller alle punktene i aksiom 3.3.2. Vi tolker her storsirkel som linje og halvsfære som halvplan. Det er klart at en storsirkel  $l$  deler sfæren inn i to halvsfærer  $H_1$  og  $H_2$ , og at disse er ikke-tomme og disjunkte.

Vi vil vise at  $H_1$  og  $H_2$  er konvekse. Anta at  $A$  og  $B$  er to punkter i  $H_1$ . Vi må altså vise at linjestykket  $\overline{AB} \subset H_1$ . Merk at siden  $A$  og  $B$  ligger i samme halvsfære kan de ikke være antipodale. Dermed kan vi bruke (som vist i øving

1, oppgave 3.2.6(a)) at  $\overline{AB}$  er den korteste delbuen mellom  $A$  og  $B$  langs den unike storsirkelen bestemt av  $A$  og  $B$ . Denne delbuen ligger i  $H_1$ , så  $H_1$  er en konveks mengde. Tilsvarende viser at  $H_2$  er konveks.

La  $C \in H_1$  og  $D \in H_2$  har vi to muligheter:

1.  $C$  og  $D$  er antipodale. Dette vil si at  $\overline{CD} = S^2$ , som vil si at  $\overline{CD} \cap l = l$ .
2.  $C$  og  $D$  er ikke antipodale. Siden  $C$  og  $D$  ligger i forskjellige halvsfærer vil enhver sti fra  $C$  til  $D$  krysse  $l$ , spesielt vil dette gjelde for  $\overline{CD}$ .

I begge tilfellene er snittet  $\overline{CD} \cap l \neq \emptyset$ . Oppgaven kan oppsummeres med følgende figur:

FIGUR

- b) Vi vet fra øving 1 at  $A * B * C$  hvis og bare hvis  $A, B, C$  ligger på samme storsirkel og  $s(A, B) + s(B, C) = s(A, C)$ . La nå  $l$  være storsirkelen bestemt av  $A$  og  $B$ . På en litt uformell måte kan vi si at  $s(A, B) + s(B, C) = s(A, C)$  dersom korteste vei mellom  $A$  og  $C$  på storsirkelen  $l$  går gjennom  $B$ . Dette skjer når  $C$  ligger på den *halve storsirkelen* bestemt av  $A$  og  $B$  – se figuren under. Merk at både  $A$  og dets antipodale punkt  $D$  ligger på strålen.

FIGUR

- c) Nei, teorem 3.3.9 holder ikke her. Hvis vi lar  $D$  være det antipodale punktet til  $A$ , ligger  $D$  på strålen  $\overrightarrow{AB}$  fra deloppgave b). Men,  $B$  og  $D$  ligger ikke begge på en felles side av storsirkelen  $l$ , ettersom  $D$  ligger *på* storsirkelen  $l$ . Se figuren under.

FIGUR

**3.3.5** Fra planseparasjonsaksiomet deler linjen  $l$  resten av planet i to halvplan  $H_1$  og  $H_2$ . Siden ingen av hjørnene  $A, B, C$  ligger på  $l$  må de ligge enten i  $H_1$  eller  $H_2$ . Vi har da tre punkter fordelt på to halvplan, som vil si at minst to av de må ligge i samme halvplan. Vi antar uten tap av generalitet at disse to punktene er  $A$  og  $B$ , og at de ligger i  $H_1$ . Siden  $H_1$  er en konveks mengde, vil også linjestykket  $\overline{AB}$  ligge i  $H_1$ . Dette betyr at ingen av punktene på  $\overline{AB}$  ligger på  $l$ , så  $l$  skjærer ikke siden  $\overline{AB}$  i trekanten.

Det er fullt mulig for en linje å skjære trekanten  $\triangle ABC$  i alle tre sidene. Linjen  $\overleftrightarrow{AB}$  vil skjære  $\overline{AB}$  i punktet  $A$ ,  $\overline{BC}$  i punktet  $B$  og  $\overline{AC}$  i punktet  $A$ .