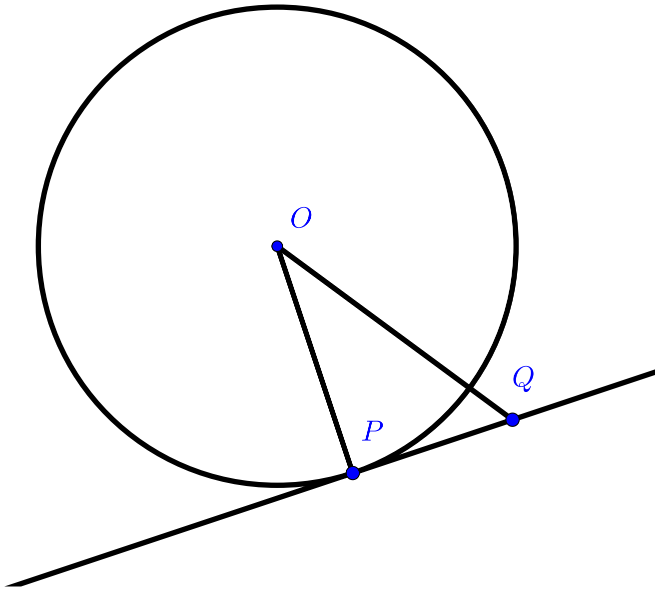
MA2401 Geometri
Vår 2022

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 11

$\boxed{8.1.1}$ La t være en linje og la $\gamma = C(O, r)$ være en sirkel slik at t og γ skjærer hverandre i punktet P. Vi antar at $\overleftrightarrow{OP} \perp t$, og ønsker å vise at t er tangenten til γ i P.

La Q være et punkt på t slik at $Q \neq P$. Siden P er foten til normalen fra O til t, har vi fra teorem 4.3.4 at $OP < OQ$. Dermed kan ikke Q ligge på γ, og vi får $t \cap \gamma = \{P\}$, som vil si at t er tangenten til γ i P.



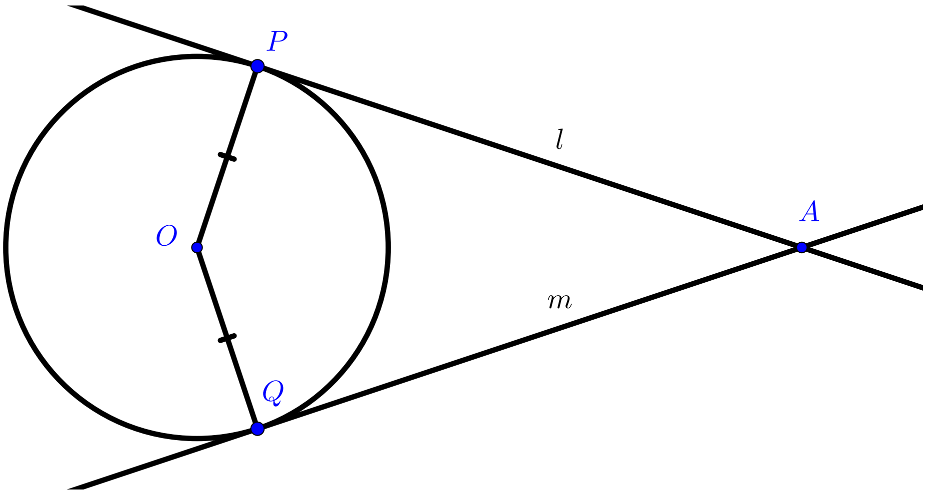
$\boxed{8.1.2}$ Dette følger direkte fra teorem 4.3.4. Se løsningen over for oppgave 8.1.1.

$\boxed{8.1.3}$ La $\gamma = C(O, r)$ være en sirkel, og la l være sekanten som skjærer γ i de to ulike punktene P og Q. Vi ønsker å vise at O ligger på midtnormalen til korden $\overline{PQ}$.

Siden P og Q begge ligger på γ må vi ha $OP = r = OQ$. Vi kan nå anvende teorem 4.3.7 om punktvis karakterisering av midtnormaler for å konkludere med at O ligger på midtnormalen til $\overline{PQ}$.

$\boxed{8.1.6}$ La $\gamma = C(O, r)$ være en sirkel, og l og m to ikke-paralelle tangenter til γ i punktene P og Q respektivt. Ettersom l og m ikke er paralelle skjærer de hverandre i et punkt, A.

a) Fra definisjonen av vinkelhalveringsstråle (definisjon 3.4.6) må vi vise at O ligger i det indre av $\angle PAQ$ og at $\angle PAO \cong \angle QAO$.

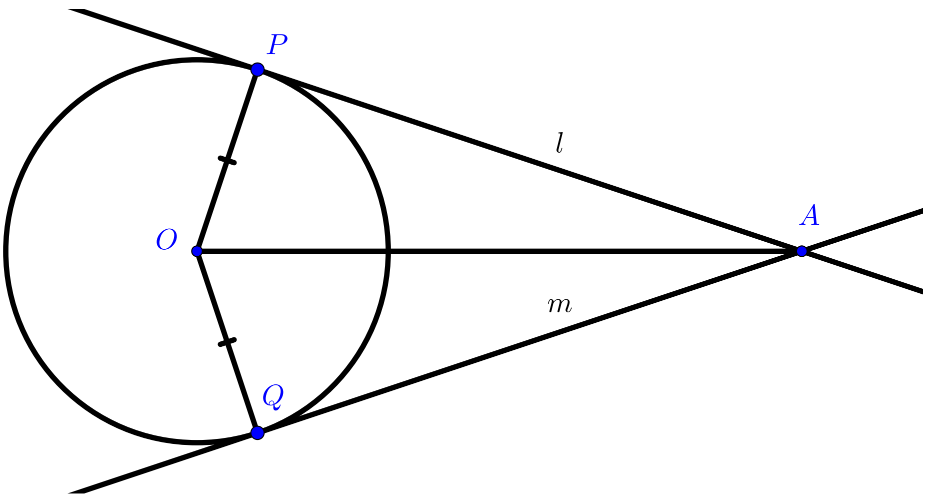


For å vise den første påstanden viser vi at $\overline{OP} \cap m = \emptyset$.

Merk at vi ikke kan ha $P \in \overline{OP} \cap m$, ettersom da ville både A og P vært felles punkter for l og m. Hvis $A \in \overline{OP}$, har vi fra definisjonen av linjestykke at $r = OP = OA + AP$, slik at $OA \leq r$. Dersom $A \in m$ og $A \neq P$, sier teorem 8.1.8. at A ligger utenfor γ, altså at $OA > r$. Dermed ser vi at vi ikke kan ha $A \in \overline{OP} \cap m$, siden dette ville implisert både $OA \leq r$ og $OA > r$. Dermed må vi ha $\overline{OP} \cap m = \emptyset$. På tilsvarende måte får vi at $\overline{OQ} \cap l = \emptyset$. Dette betyr at O ligger i det indre av $\angle PAQ$.

For å vise at $\angle PAO \cong \angle QAO$ bruker vi først at både $\angle OPA$ og $\angle OQA$ er rette vinkler fra tangentlinjeteoremet (teorem 8.1.7). Dermed er P foten til normalen fra O til l, og Q er foten til normaln fra O til m. Dette betyr at $r = OP = d(O, l)$ og $r = OQ = d(O, m)$. Punitvis karakterisering av vinkelhalveringsstråle (teorem 4.3.6) gir dermed at $\angle PAO \cong \angle QAO$.

b) Betrakt trekantene $\triangle OPA$ og $\triangle OQA$.



Vi vet at

- $\angle PAO \cong \angle QAO$ fra forrige deloppgave,
- $\angle OPA \cong \angle OQA$ siden begge er rette vinkler,
- OA er en felles side for trekantene.

Dermed gir vinkel-vinkel-side (VVS) oss at $\triangle OPA \cong \triangle OQA$, som spesielt betyr at $PA = QA$.

c) Siden $PA = QA$ fra forrige deloppgave, gir punktvis karakterisering av midtnormaler (teorem 4.3.7.) oss at punktet A ligger på midtnormalen til linjestykket $\overline{QA}$. Fra sekantlinjeteoremet (teorem 8.1.9.) vet vi også at O ligger på denne midtnormalen. Siden en linje er entydig bestemt av to punkter, må $\overline{OA}$ være midtnormalen til $\overline{PQ}$. Spesielt betyr dette at $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overleftrightarrow{OA}$, som var det vi skulle vise.

$\boxed{8.3.1}$ La $\triangle ABC$ være en trekant og M være midtpunktet på AB. Vi ønsker å vise at dersom $\angle ACB$ er rett, oså er $AM = MC$.

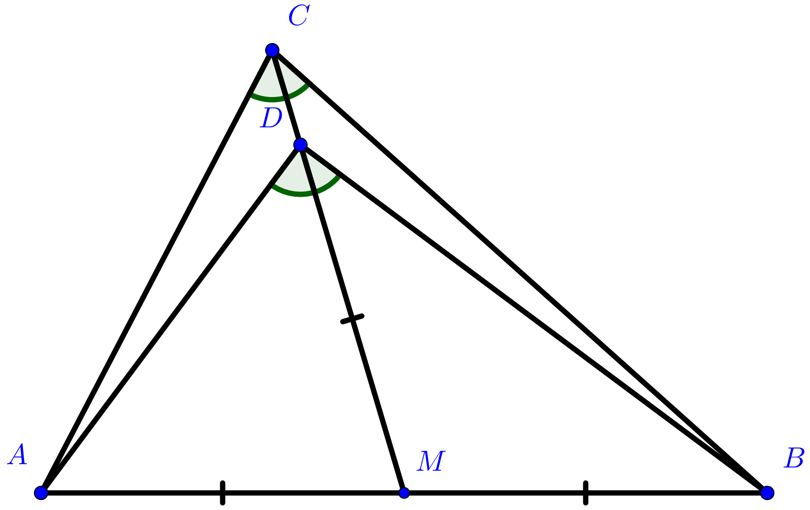
Vi antar først at $CM > AM$, og jakter en motsigelse. Bruk linjalpostulatet til å finne et punkt D slik at $M * D * C$ og $AM = MD$, se figuren. Vet å bruke teorem 8.3.1 på $\triangle ABD$, vet vi at $\angle ADB$ er rett. Siden $\angle BDM$ er en ytre vinkel til $\triangle ADC$ og $\angle ADM$ er en ytre vinkel til $\triangle BDC$, gir ytre vinkel-teoremet at

- $\mu(\angle BDM) > \mu(\angle BCM)$
- $\mu(\angle ADM) > \mu(\angle ACM)$.

Men dette må bety at

$$\begin{aligned} 90 = \mu(\angle BDA) &= \mu(\angle ADM) + \mu(\angle BDM) \\ &> \mu(\angle ACM) + \mu(\angle BCM) \\ &= \mu(\angle BCA) = 90. \end{aligned}$$

som åpenbart er en motsigelse siden det er en ekte ulikhet i utregningen. Derfor kan vi ikke ha at $CM > AM$, og samme bevis gir at vi ikke kan ha $AM > CM$ – i dette tilfellet finner vi et punkt D slik at $M * C * D$ og $MD = AM$, og fullfører beviset som over.



$\boxed{8.3.2}$ Vi antar at vi har en trekant $\triangle ABC$ med vinkler av størrelse 30, 60 og 90, og skal vise at siden motsatt vinkelen på 30 er halvparten så lang som hypotenusen.

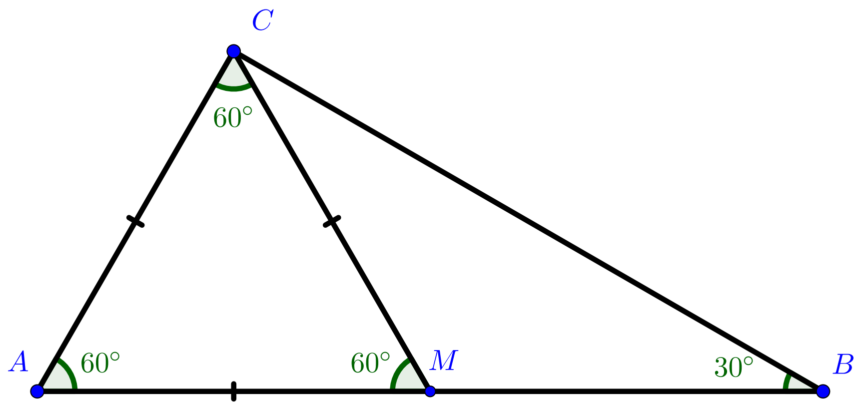
Vi antar uten tap av generalitet at vi har $\mu(\angle ABC) = 30$, $\mu(\angle CAB) = 60$ og at $\mu(\angle BCA) = 90$, da må vi vise at $AB = 2AC$ – se også figuren. La M være midtpunktet på AB. Siden $\angle BCA$ er rett, gir teorem 8.3.3 at $AM = CM$. Dermed gir likebeint trekant-teoremet at $\mu(\angle MCA) = \mu(\angle CAB) = 60$. Da vinkelsummen i en trekant er 180 i euklidsk geometri, må

$$\mu(\angle AMC) = 180 - 60 - 60 = 60.$$

Derfor kan vi anvende det motsatte av likebeint trekant-teoremet (teorem 4.2.2) på $\triangle AMC$, og får at $AM = AC$. Siden M er midtpunktet på AB, følger det at

$$AB = 2AM = 2AC,$$

som var det vi skulle vise.



$\boxed{8.3.3}$ Vi skal vise følgende: hvis $\triangle ABC$ er en rettvinklet trekant slik at den ene kateten er halvparten så lang som hypotenusen, så må vinklene i trekanten være av størrelse 30, 60, 90.

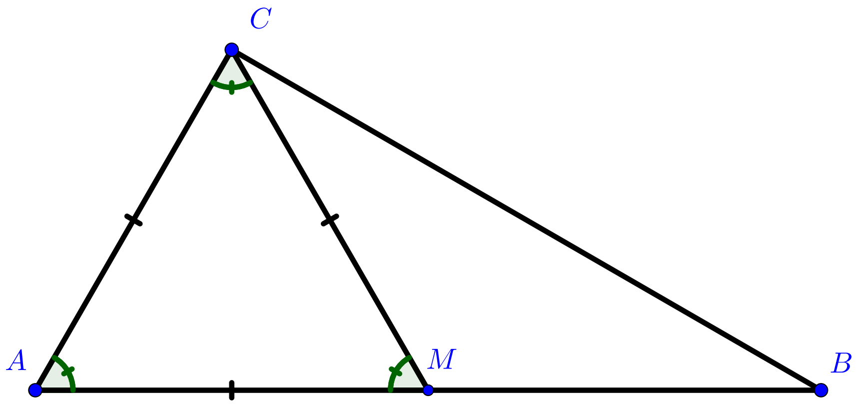
Vi antar uten tap av generalitet at $\mu(\angle BCA) = 90$ og $AC = \frac{1}{2}AB$, se også figuren. La M være midtpunktet på AB. Da er $AC = \frac{1}{2}AB = AM$, siden vi antar at $AC = \frac{1}{2}AB$ og M er midtpunktet på AB. Av teorem 8.3.3 får vi også at $AM = MC$ siden $\angle BCA$ er rett. Altså er $\triangle AMC$ en likesidet trekant, og det følger at alle vinklene i $\triangle AMC$ er like store. For eksempel kan vi argumentere ved likebeint trekant-teoremet:

- Siden $AM = MC$, må $\angle CAM \cong \angle MCA$ av likebeint trekant-teoremet.
- Siden $AC = AM$, må $\angle MCA \cong \angle AMC$ av likebeint trekant-teoremet.

Siden alle vinklene i $\triangle AMC$ er like store og vinkelsummen i en trekant er 180, må alle vinklene i $\triangle AMC$ være av størrelse 60. Spesielt må $\mu(\angle CAM) = 60$, og da $\angle CAM = \angle CAB$ følger det at $\mu(\angle CAB) = 60$. Siden vinkelsummen i $\triangle ABC$ også er 180, får vi at

$$\mu(\angle ABC) = 180 - \mu(\angle BCA) - \mu(\angle CAB) = 180 - 90 - 60 = 30,$$

og dermed er resultatet vist.


C
A
M
B