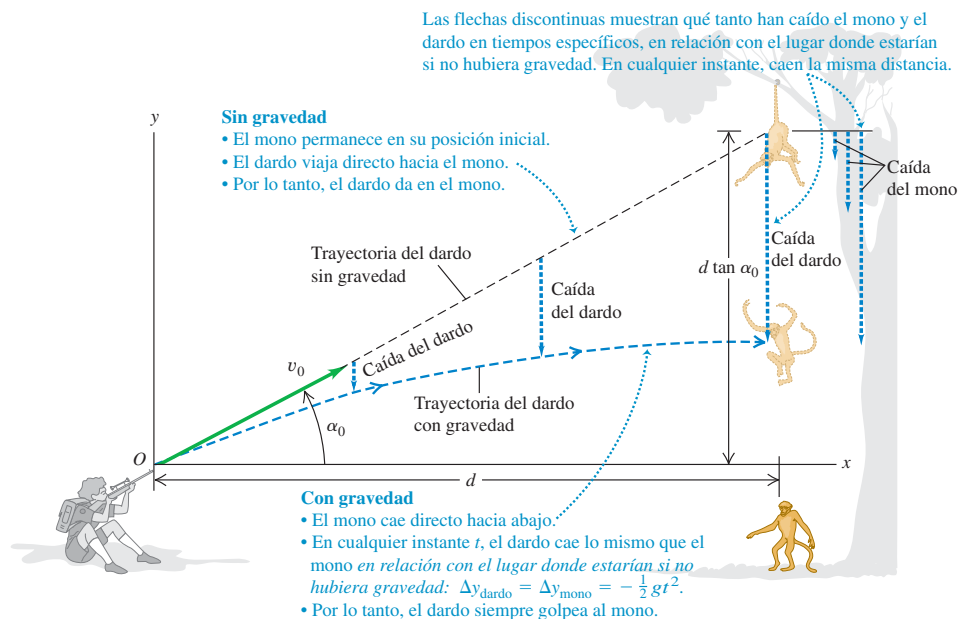


3.26 El dardo con sedante golpea al mono que cae.



Para el dardo, usamos la ecuación (3.21):

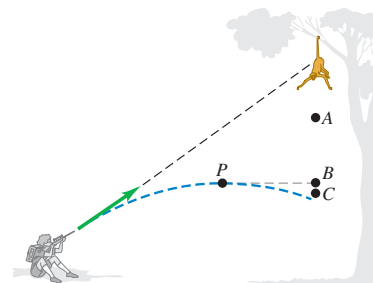
$$y_{\text{dardo}} = (v_0 \sin \alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Vemos que si $d \tan \alpha_0 = (v_0 \sin \alpha_0)t$ cuando las dos coordenadas x son iguales, entonces $y_{\text{mono}} = y_{\text{dardo}}$, y el dardo habrá acertado. Para demostrar que esto sucede, sustituimos t por $d/(v_0 \cos \alpha_0)$, el instante en que $x_{\text{mono}} = x_{\text{dardo}}$; así,

$$(v_0 \sin \alpha_0)t = (v_0 \sin \alpha_0) \frac{d}{v_0 \cos \alpha_0} = d \tan \alpha_0$$

EVALUAR: Hemos demostrado que, cuando las coordenadas x son iguales, las y también lo son; un dardo dirigido a la posición inicial del mono *siempre* lo golpeará, sin importar v_0 . Este resultado también es independiente de g , la aceleración debida a la gravedad. Sin gravedad ($g = 0$), el mono no se movería, y el dardo viajaría en línea recta para golpearlo. Con gravedad, ambos “caen” la misma distancia ($\frac{1}{2}gt^2$) por debajo de sus posiciones con $g = 0$ y el dardo de todos modos golpea al mono (figura 3.26).

Evalúe su comprensión de la sección 3.3 En el ejemplo 3.10, suponga que el dardo sedante tiene una velocidad inicial relativamente baja, de modo que el dardo alcanza su altura máxima en un punto P antes de golpear al mono, como se indica en la figura. Cuando el dardo está en P , ¿el mono estará en i) el punto A (más alto que P), ii) en el punto B (a la misma altura que P) o iii) en el punto C (más abajo que P)? Desprecie la resistencia del aire.



3.4 Movimiento en un círculo

Cuando una partícula se mueve en una trayectoria curva, la dirección de su velocidad cambia. Como vimos en la sección 3.2, esto implica que la partícula *debe* tener una componente de aceleración perpendicular a la trayectoria, incluso si la rapidez es constante (véase la figura 3.11b). En esta sección calcularemos la aceleración para el caso especial importante de movimiento en un círculo.

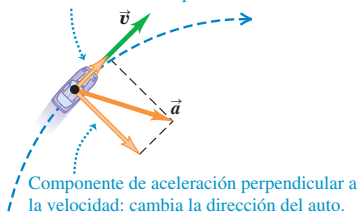


4.1 Magnitud de aceleración centrípeta

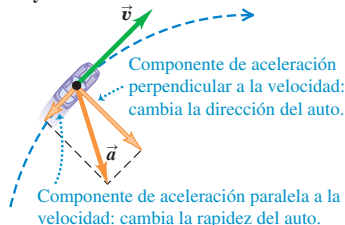
3.27 Un automóvil con movimiento circular uniforme. La rapidez es constante y la aceleración se dirige hacia el centro de la trayectoria circular.

El automóvil aumenta su rapidez en una trayectoria circular

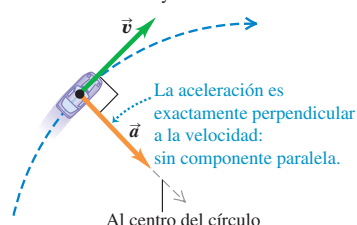
Componente de aceleración paralela a la velocidad: cambia la rapidez del auto.



El automóvil disminuye su rapidez en una trayectoria circular

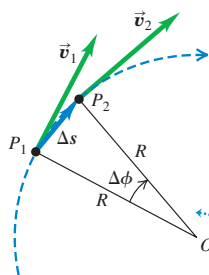


Movimiento circular uniforme: rapidez constante en una trayectoria circular

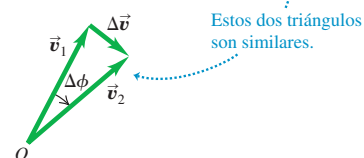


3.28 Determinación del cambio de velocidad $\Delta \vec{v}$, aceleración media \vec{a}_{med} y aceleración instantánea \vec{a}_{rad} de una partícula que se mueve en un círculo con rapidez constante.

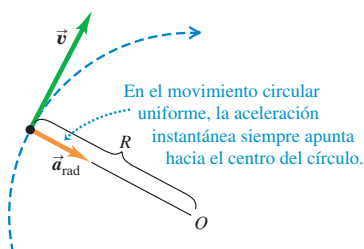
a) Un punto se mueve una distancia Δs a rapidez constante en una trayectoria circular



b) El cambio correspondiente en velocidad y aceleración media



c) La aceleración instantánea



Movimiento circular uniforme

Cuando una partícula se mueve en un círculo con *rapidez constante*, tiene un **movimiento circular uniforme**. Un automóvil que da vuelta a una curva de radio constante con rapidez constante, un satélite en órbita circular y un patinador que describe un círculo con rapidez constante son ejemplos de este movimiento (figura 3.27; compárela con la figura 3.12). No hay componente de aceleración paralela (tangente) a la trayectoria; si la hubiera, la rapidez cambiaría. El vector de aceleración es perpendicular (normal) a la trayectoria y, por lo tanto, se dirige hacia adentro (¡nunca hacia fuera!) al centro de la trayectoria circular. Esto causa el cambio en la dirección de la velocidad, sin cambiar la rapidez. Nuestro siguiente trabajo consiste en demostrar que la magnitud de la aceleración en el movimiento circular uniforme se relaciona de manera sencilla con la rapidez de la partícula y el radio del círculo.

La figura 3.28a muestra una partícula que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular de radio R con centro en O . La partícula se mueve de P_1 a P_2 en un tiempo Δt . El cambio vectorial en la velocidad $\Delta \vec{v}$ durante este tiempo se muestra en la figura 3.28b.

Los ángulos rotulados $\Delta \phi$ en las figuras 3.28a y 3.28b son iguales porque \vec{v}_1 es perpendicular a la línea OP_1 y \vec{v}_2 es perpendicular a la línea OP_2 . Por lo tanto, los triángulos en las figuras 3.28a y 3.28b son *semejantes*. Los cocientes de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales, así que

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{v_1} = \frac{\Delta s}{R} \quad \text{o} \quad |\Delta \vec{v}| = \frac{v_1}{R} \Delta s$$

La magnitud a_{med} de la aceleración media durante Δt es entonces

$$a_{\text{med}} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

La magnitud a de la aceleración *instantánea* \vec{a} en el punto P_1 es el límite de esta expresión conforme P_2 se acerca a P_1 :

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Sin embargo, el límite de $\Delta s / \Delta t$ es la rapidez v_1 en el punto P_1 . Además, P_1 puede ser cualquier punto de la trayectoria, así que podemos omitir el subíndice y con v representar la rapidez en cualquier punto. Así,

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} \quad (\text{movimiento circular uniforme}) \quad (3.28)$$

Agregamos el subíndice “rad” para recordar que la dirección de la aceleración instantánea siempre sigue un radio del círculo, hacia su centro. Como la rapidez es constan-

te, la aceleración siempre es perpendicular a la velocidad instantánea. Esto se muestra en la figura 3.28c; compárela con la ilustración derecha de la figura 3.27.

En conclusión, *en el movimiento circular uniforme, la magnitud a de la aceleración instantánea es igual al cuadrado de la velocidad v dividido entre el radio R del círculo; su dirección es perpendicular a \vec{v} y hacia adentro sobre el radio.*

Puesto que la aceleración siempre apunta al centro del círculo, en ocasiones se le llama **aceleración centrípeta**. La palabra “centrípeta” significa “que busca el centro” en griego. La figura 3.29a muestra las direcciones de los vectores de velocidad y aceleración en varios puntos para una partícula con movimiento circular uniforme.

CUIDADADO **Movimiento circular uniforme contra movimiento de proyectiles** La aceleración en el movimiento circular uniforme tiene algunas similitudes con la aceleración en el movimiento de proyectiles que no enfrenta resistencia del aire, pero también existen algunas diferencias importantes entre ambas. Tanto en el movimiento circular uniforme (figura 3.29a) como en el movimiento de proyectiles (figura 3.29b) la *magnitud* de la aceleración siempre es la misma. Sin embargo, en el movimiento circular uniforme la *dirección* de \vec{a} cambia continuamente, de manera que siempre apunta hacia el centro del círculo. (En la parte superior del círculo, la aceleración apunta hacia abajo; en la parte inferior del círculo, la aceleración apunta hacia arriba.) En contraste, en el movimiento de proyectiles la dirección de \vec{a} es la misma en todo momento. ■

También podemos expresar la magnitud de la aceleración en un movimiento circular uniforme en términos del **periodo** T del movimiento, el tiempo de una revolución (una vuelta completa al círculo). En un tiempo T , la partícula recorre una distancia igual a la circunferencia $2\pi R$ así que su rapidez es

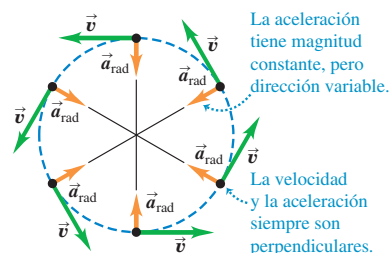
$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad (3.29)$$

Al sustituir esto en la ecuación (3.28), obtenemos la expresión alterna

$$a_{\text{rad}} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad (\text{movimiento circular uniforme}) \quad (3.30)$$

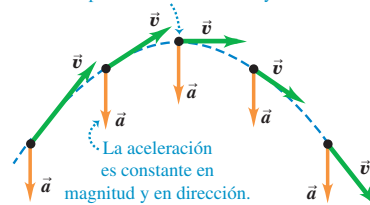
3.29 Aceleración y velocidad a) para una partícula con movimiento circular uniforme y b) para un proyectil sin resistencia del aire.

a) Movimiento circular uniforme



b) Movimiento del proyectil

La velocidad y la aceleración son perpendiculares sólo en el punto más alto de la trayectoria.



Ejemplo 3.11 Aceleración centrípeta en un camino curvo

Un automóvil deportivo Aston Martin V8 Vantage tiene una “aceleración lateral” de $0.96g$, que es $(0.96)(9.8 \text{ m/s}^2) = 9.4 \text{ m/s}^2$. Ésta es la aceleración centrípeta máxima que puede lograr el auto sin salirse de la trayectoria circular derrapando. Si el auto viaja a 40 m/s (cerca de 89 mi/h o 144 km/h), ¿cuál es el radio mínimo de curva que puede describir? (Suponga que no hay peralte.)

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Puesto que el coche se mueve en una curva —es decir, un arco de círculo— con rapidez constante, podemos aplicar las ideas del movimiento circular uniforme.

PLANTEAR: Usamos la ecuación (3.28) para obtener la incógnita R (el radio de la curva) en términos de la aceleración centrípeta dada a_{rad} y la rapidez v .

EJECUTAR: Nos dan a_{rad} y v , así que despejamos R de la ecuación (3.28):

$$R = \frac{v^2}{a_{\text{rad}}} = \frac{(40 \text{ m/s})^2}{9.4 \text{ m/s}^2} = 170 \text{ m (aprox. 560 ft)}$$

EVALUAR: Nuestro resultado muestra que el radio de giro requerido R es proporcional al *cuadrado* de la rapidez. Por lo tanto, incluso una reducción pequeña en la rapidez puede reducir R considerablemente. Por ejemplo, si v disminuye en un 20% (de 40 a 32 m/s), R disminuirá en un 36% (de 170 m a 109 m).

Otra forma de reducir el radio requerido es *peraltar* la curva. Investigaremos esta opción en el capítulo 5.

Ejemplo 3.12 Aceleración centrípeta en un juego mecánico

En un juego mecánico, los pasajeros viajan con rapidez constante en un círculo de 5.0 m de radio, dando una vuelta completa cada 4.0 s. ¿Qué aceleración tienen?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La rapidez es constante, así que es un problema de movimiento circular uniforme.

PLANTEAR: Nos dan el radio $R = 5.0$ m y el periodo $T = 4.0$ s, así que podemos usar la ecuación (3.30) para calcular la aceleración. Como alternativa, podríamos calcular primero la rapidez v con la ecuación (3.29) y luego obtener la aceleración con la ecuación (3.28).

EJECUTAR: Por la ecuación (3.30),

$$a_{\text{rad}} = \frac{4\pi^2(5.0 \text{ m})}{(4.0 \text{ s})^2} = 12 \text{ m/s}^2$$

Verificaremos esta respuesta usando la ecuación (3.28) después de calcular la rapidez v . Por la ecuación (3.29), la rapidez es la circunferencia dividida entre el periodo T :

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(5.0 \text{ m})}{4.0 \text{ s}} = 7.9 \text{ m/s}$$

La aceleración centrípeta es, entonces,

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} = \frac{(7.9 \text{ m/s})^2}{5.0 \text{ m}} = 12 \text{ m/s}^2$$

Obtenemos el mismo valor de a_{rad} con ambas estrategias.

EVALUAR: Al igual que en el ejemplo anterior, la dirección de \vec{a} siempre es hacia el centro del círculo. La magnitud de \vec{a} es mayor que g , la aceleración debida a la gravedad, así que este juego mecánico sólo es para los audaces. (Algunas montañas rusas someten a sus pasajeros a aceleraciones de hasta $4g$.)

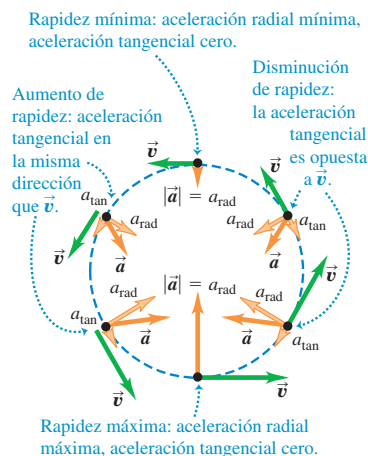
Movimiento circular no uniforme

En esta sección, hemos supuesto que la rapidez de la partícula es constante. Si la rapidez varía, tenemos un **movimiento circular no uniforme**. Un ejemplo es un carro de montaña rusa que frena y se acelera al moverse en un lazo vertical. En el movimiento circular no uniforme, la ecuación (3.28) nos sigue dando la componente *radial* de la aceleración $a_{\text{rad}} = v^2/R$, que siempre es *perpendicular* a la velocidad instantánea y dirigida al centro del círculo. Sin embargo, dado que la rapidez v tiene diferentes valores en diferentes puntos del movimiento, a_{rad} no es constante. La aceleración radial (centrípeta) es mayor donde la rapidez es mayor.

En el movimiento circular no uniforme también hay una componente de aceleración *paralela* a la velocidad instantánea. Ésta es la componente a_{\parallel} que vimos en la sección 3.2, y aquí la llamamos a_{tan} para destacar que es *tangente* al círculo. Por lo dicho al final de la sección 3.2, sabemos que la componente de aceleración tangencial a_{tan} es igual a la tasa de cambio de la *rapidez*. Entonces,

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} \quad \text{y} \quad a_{\text{tan}} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad (\text{movimiento circular no uniforme}) \quad (3.31)$$

3.30 Partícula que se mueve en un lazo vertical, como un carrito de montaña rusa, con rapidez variable.



El vector de aceleración de una partícula que se mueve con rapidez variable en un círculo es la suma vectorial de las componentes de aceleración radial y tangencial. Esta última tiene la dirección de la velocidad si la partícula está acelerando, y la dirección opuesta si está frenando (figura 3.30).

En el movimiento circular *uniforme*, la aceleración no tiene componente tangencial; no obstante, la componente radial es la magnitud de $d\vec{v}/dt$.

CUIDADADO **Movimiento circular uniforme contra no uniforme** Observe que las dos cantidades

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad \text{y} \quad \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|$$

no son iguales. La primera, al igual que la aceleración tangencial, es la tasa de cambio de la rapidez; es igual a cero siempre que una partícula se mueve con rapidez constante, incluso cuando cambia la dirección de su movimiento (como en el movimiento circular *uniforme*). La segunda es la magnitud de la aceleración vectorial; es igual a cero cuando el vector de *aceleración* de la partícula es cero, es decir, cuando la partícula se mueve en línea recta con rapidez constante. En el movimiento circular *uniforme* $|d\vec{v}/dt| = a_{\text{rad}} = v^2/r$; en el movimiento circular *no uniforme* también existe una componente tangencial de la aceleración, de manera que $|d\vec{v}/dt| = \sqrt{a_{\text{rad}}^2 + a_{\text{tan}}^2}$.

Evalúe su comprensión de la sección 3.4 Suponga que, en la parte inferior del lazo, la partícula de la figura 3.30 experimenta una aceleración cuatro veces mayor que en la parte superior del mismo. En comparación con la parte superior del lazo, la rapidez de la partícula en la parte inferior es i) $\sqrt{2}$ veces mayor; ii) 2 veces mayor; iii) $2\sqrt{2}$ veces mayor; iv) 4 veces mayor; o v) 16 veces mayor.



3.5 Velocidad relativa

Sin duda usted ha observado que un automóvil que avanza lentamente parece moverse hacia atrás cuando usted lo rebasa. En general, si dos observadores miden la velocidad de un cuerpo, obtienen diferentes resultados si un observador se mueve en relación con el otro. La velocidad que un observador dado percibe es la velocidad *relativa* a él, o simplemente **velocidad relativa**. La figura 3.31 muestra una situación en la que se entiende que la velocidad relativa es muy importante.

Primero consideraremos la velocidad relativa en línea recta, y luego la generalizaremos a un plano.

Velocidad relativa en una dimensión

Una mujer camina con una velocidad de 1.0 m/s por el pasillo de un vagón de ferrocarril que se mueve a 3.0 m/s (figura 3.32a). ¿Qué velocidad tiene la mujer? Es una pregunta sencilla, pero no tiene una sola respuesta. Para un pasajero sentado en el tren, la mujer se mueve a 1.0 m/s. Para un ciclista parado junto al tren, la mujer se mueve a 1.0 m/s + 3.0 m/s = 4.0 m/s. Un observador en otro tren que va en la dirección opuesta daría otra respuesta. Debemos especificar quién es el observador y dar la velocidad *relativa* a él. La velocidad de la mujer relativa al tren es 1.0 m/s, relativa al ciclista es 4.0 m/s, etcétera. Cada observador, equipado en principio con un metro y un cronómetro, constituye lo que llamamos un **marco de referencia**. Así, un marco de referencia es un sistema de coordenadas más una escala de tiempo.

Llamemos A al marco de referencia del ciclista (en reposo con respecto al suelo) y B al marco de referencia del tren en movimiento. En el movimiento rectilíneo, la posición de un punto P relativa al marco de referencia A está dada por $x_{P/A}$ (la posición de P con respecto a A), y la posición de P con respecto al marco B está dada por $x_{P/B}$ (véase la figura 3.32b). La distancia del origen de A al origen de B es $x_{B/A}$. La figura 3.32b muestra que

$$x_{P/A} = x_{P/B} + x_{B/A} \quad (3.32)$$

Esto nos dice que la distancia total del origen de A al punto P es la distancia del origen de B al punto P más la distancia del origen de A al origen de B .

La velocidad de P relativa al marco A , denotada con $v_{P/A-x}$, es la derivada de $x_{P/A}$ con respecto al tiempo. Las otras velocidades se obtienen de igual manera, así que la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (3.32) nos da la relación entre las velocidades:

$$\frac{dx_{P/A}}{dt} = \frac{dx_{P/B}}{dt} + \frac{dx_{B/A}}{dt} \quad \text{o}$$

$$v_{P/A-x} = v_{P/B-x} + v_{B/A-x} \quad (\text{velocidad relativa en una línea}) \quad (3.33)$$

Volviendo a la mujer en el tren de la figura 3.32, vemos que A es el marco de referencia del ciclista, B es el marco de referencia del tren, y el punto P representa a la mujer. Usando la notación anterior, tenemos

$$v_{P/B-x} = +1.0 \text{ m/s} \quad v_{B/A-x} = +3.0 \text{ m/s}$$

3.31 Los pilotos de acrobacias aéreas enfrentan un complicado problema de velocidades relativas. Deben estar pendientes de su movimiento relativo al aire (para mantener un flujo de aire sobre las alas suficiente para la sustentación), su movimiento relativo a los otros aviones (para mantener una formación cerrada sin chocar) y su movimiento relativo al público (para que los espectadores no los pierdan de vista).



3.32 a) Una mujer camina dentro de un tren. b) La posición de la mujer (partícula P) relativa al marco de referencia del ciclista y al marco de referencia del tren.

