Ejemplo conceptual 3.4 Aceleración de una esquiadora

Una esquiadora se mueve sobre una rampa de salto, como se muestra en la figura 3.14a. La rampa es recta entre *A* y *C*, y es curva a partir de *C*. La rapidez de la esquiadora aumenta al moverse pendiente abajo de *A* a *E*, donde su rapidez es máxima, disminuyendo a partir de ahí. Dibuje la dirección del vector de aceleración en los puntos *B*, *D*, *E* y *F*.

SOLUCIÓN

La figura 3.14b muestra la solución. En el punto *B*, la esquiadora se mueve en línea recta con rapidez creciente, así que su aceleración apunta cuesta abajo, en la misma dirección que su velocidad.

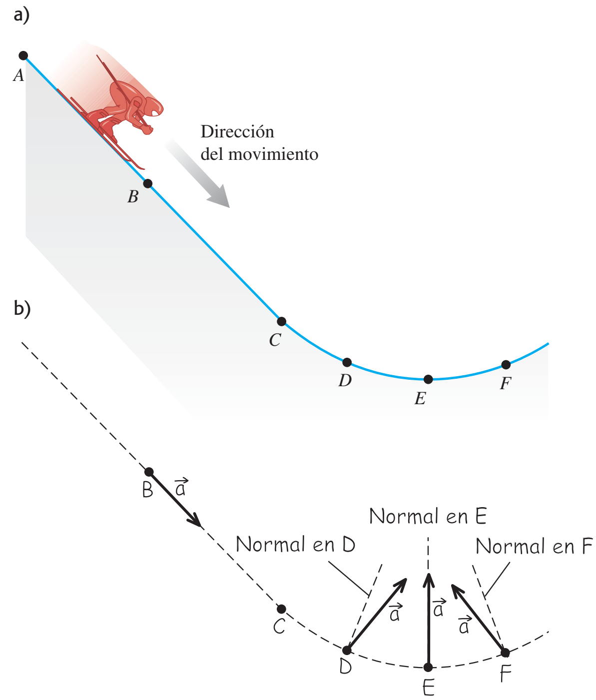
En *D* la esquiadora sigue una trayectoria curva, así que su aceleración tiene una componente perpendicular. También hay una componente en la dirección del movimiento porque su rapidez aún va en aumento en este punto. Por lo tanto, el vector de aceleración apunta *adelante* de la normal a su trayectoria en el punto *D*.

La rapidez de la esquiadora no cambia instantáneamente en *E*; la rapidez es máxima en este punto, así que su derivada es cero. Por lo tanto, no hay componente paralela de $\vec{a}$, y la aceleración es perpendicular al movimiento.

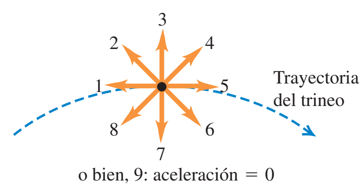
Por último, en *F* la aceleración tiene una componente perpendicular (porque la trayectoria es curva aquí) y una componente paralela *opuesta* a la dirección de su movimiento (porque la rapidez está disminuyendo). De manera que en este punto, el vector de aceleración apunta *hacia atrás* de la normal a la trayectoria.

En la siguiente sección examinaremos la aceleración de la esquiadora después de salir de la rampa.

3.14 a) La trayectoria de la esquiadora. b) Nuestra solución.



Evalúe su comprensión de la sección 3.2 Un trineo viaja por la cima de una montaña cubierta de nieve. El trineo disminuye su rapidez conforme asciende por un lado de la montaña y la aumenta cuando desciende por el otro lado. ¿Cuál de los vectores (1 a 9) en la figura muestra correctamente la dirección de la aceleración del trineo en la cima? (Considere el 9 como la aceleración cero.)



3.3 Movimiento de proyectiles

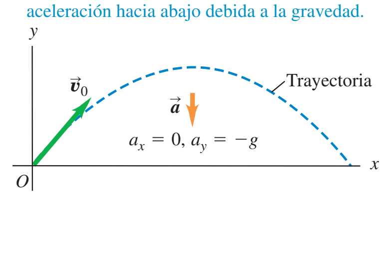
Un **proyectil** es cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada totalmente por los efectos de la aceleración gravitacional y la resistencia del aire. Una pelota bateada, un balón lanzado, un paquete soltado desde un avión y una bala disparada de un rifle son todos proyectiles. El camino que sigue un proyectil es su **trayectoria**.

Para analizar este tipo de movimiento tan común, partiremos de un modelo idealizado que representa el proyectil como una partícula con aceleración (debida a la gravedad) constante tanto en magnitud como en dirección. Despreciaremos los efectos de la resistencia del aire, así como la curvatura y rotación terrestres. Como todos los modelos, éste tiene limitaciones. La curvatura de la Tierra debe considerarse en el vuelo de misiles de largo alcance; en tanto que la resistencia del aire es de importancia vital para un paracaidista. No obstante, podemos aprender mucho analizando este modelo sencillo. En el resto del capítulo, la frase "movimiento de proyectil" implicará que se desprecia la resistencia del aire. En el capítulo 5 veremos qué sucede cuando la resistencia no puede despreciarse.

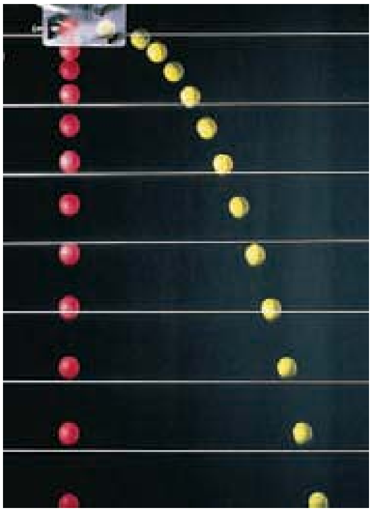
El movimiento de un proyectil siempre está limitado a un plano vertical determinado por la dirección de la velocidad inicial (figura 3.15). La razón es que la aceleración debida a la gravedad es exclusivamente vertical; la gravedad no puede mover un

3.15 La trayectoria de un proyectil.

- Un proyectil se mueve en un plano vertical que contiene el vector de velocidad inicial $\vec{v}_0$.
- Su trayectoria depende sólo de $\vec{v}_0$ y de la aceleración hacia abajo debida a la gravedad.



3.16 La bola roja se deja caer desde el reposo y la amarilla se proyecta horizontalmente al mismo tiempo; las imágenes sucesivas en esta fotografía estroboscópica están separadas por intervalos de tiempo iguales. En un instante dado, ambas bolas tienen la misma posición y, velocidad y y aceleración y, a pesar de tener diferente posición x y velocidad x.



ActivPhysics ONLINE

3.1 Resolución de problemas de movimiento de proyectiles
3.2 Dos pelotas que caen
3.3 Cambio de la velocidad en x
3.4 Aceleraciones x y y de proyectiles

proyectil lateralmente. Por lo tanto, este movimiento es *bidimensional*. Llamaremos al plano de movimiento, el plano de coordenadas xy, con el eje x horizontal y el eje y vertical hacia arriba.

La clave del análisis del movimiento de proyectiles es que podemos tratar por separado las coordenadas x y y. La componente x de la aceleración es cero, y la componente y es constante e igual a $-g$. (Por definición, g siempre es positiva, pero por las direcciones de coordenadas elegidas, a_y es negativa.) Así, *podemos analizar el movimiento de un proyectil como una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante.* La figura 3.16 muestra dos proyectiles con diferente movimiento x, pero con idéntico movimiento y: uno se deja caer desde el reposo y el otro se proyecta horizontalmente, aunque ambos proyectiles caen la misma distancia en el mismo tiempo.

Podemos expresar todas las relaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración del proyectil, con ecuaciones independientes para las componentes horizontales y verticales. Las componentes de $\vec{a}$ son

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g \quad \text{(movimiento de proyectil, sin resistencia del aire)} \tag{3.14}$$

Dado que las aceleraciones x y y son constantes, podemos usar las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) directamente. Por ejemplo, suponga que en $t = 0$ la partícula está en el punto (x_0, y_0) y que en este tiempo sus componentes de velocidad tienen los valores iniciales v_{0x} y v_{0y}. Las componentes de la aceleración son $a_x = 0$, $a_y = -g$. Considerando primero el movimiento x, sustituimos 0 por a_x en las ecuaciones (2.8) y (2.12). Obtenemos

$$v_x = v_{0x} \tag{3.15}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t \tag{3.16}$$

Para el movimiento y, sustituimos y por x, v_y por v_x, v_{0y} por v_{0x} y $a_y = -g$ por a_x:

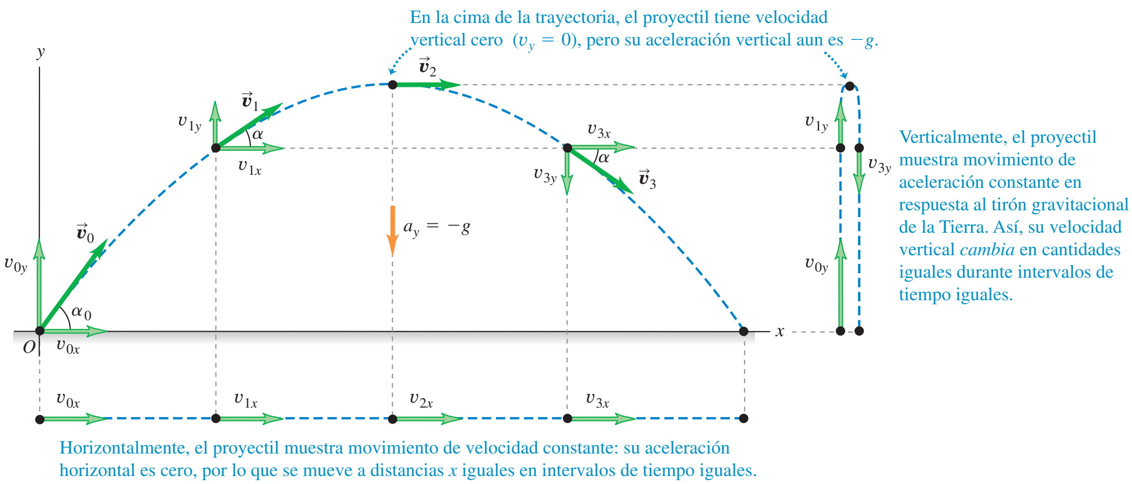
$$v_y = v_{0y} - gt \tag{3.17}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.18}$$

Por lo general, lo más sencillo es tomar la posición inicial (en $t = 0$) como origen; así, $x_0 = y_0 = 0$. Este punto podría ser la posición de una pelota cuando sale de la mano del lanzador, o la posición de una bala cuando sale del cañón de un arma.

La figura 3.17 muestra la trayectoria de un proyectil que parte de (o pasa por) el origen en el tiempo $t = 0$. La posición, la velocidad, las componentes de velocidad y

3.17 Si se desprecia la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil es una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante.



aceleración se muestran en una serie de instantes equiespaciados. La componente x de la aceleración es 0, así que v_x es constante. La componente y de la aceleración es constante pero no cero, así que v_y cambia en cantidades iguales a intervalos de tiempo iguales, justo igual que si el proyectil fuera lanzado verticalmente con la misma velocidad y inicial. En el punto más alto de la trayectoria, $v_y = 0$.

También podemos representar la velocidad inicial $\vec{v}_0$ con su magnitud v_0 (la rapidez inicial) y su ángulo α_0 con el eje $+x$ (como se muestra en la figura 3.18). En términos de estas cantidades, las componentes v_{0x} y v_{0y} de la velocidad inicial son

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 \qquad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 \tag{3.19}$$

Usando estas relaciones en las ecuaciones (3.15) a (3.18) y haciendo $x_0 = y_0 = 0$, tenemos

$$x = (v_0 \cos\alpha_0)t \qquad \text{(movimiento de proyectil)} \tag{3.20}$$

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{(movimiento de proyectil)} \tag{3.21}$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0 \qquad \text{(movimiento de proyectil)} \tag{3.22}$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 - gt \qquad \text{(movimiento de proyectil)} \tag{3.23}$$

Estas ecuaciones describen la posición y velocidad del proyectil de la figura 3.17 en cualquier instante t.

Podemos obtener mucha información de estas ecuaciones. Por ejemplo, en cualquier instante, la distancia r del proyectil al origen (la magnitud del vector de posición $\vec{r}$) está dada por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.24}$$

La rapidez del proyectil (la magnitud de su velocidad) en cualquier instante es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{3.25}$$

La *dirección* de la velocidad, en términos del ángulo α que forma con el eje $+x$ (véase la figura 3.17), está dada por

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \tag{3.26}$$

El vector de velocidad $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria en todos los puntos.

Podemos deducir una ecuación para la forma de la trayectoria en términos de x y y eliminando t. De las ecuaciones (3.20) y (3.21), que suponen $x_0 = y_0 = 0$, obtenemos $t = x/(v_0 \cos\alpha_0)$ y

$$y = (\tan\alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}x^2 \tag{3.27}$$

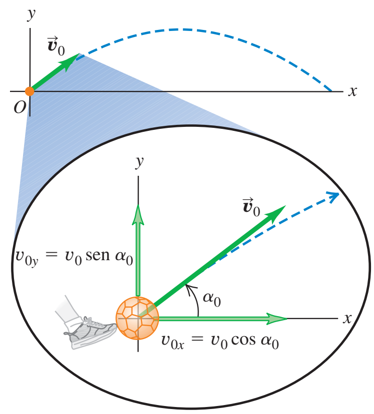
No se preocupe por los detalles de esta ecuación; lo importante es su forma general. Las cantidades v_0, tan α_0, cos α_0 y g son constantes, así que la ecuación tiene la forma

$$y = bx - cx^2$$

donde b y c son constantes. Ésta es la ecuación de una *parábola*. En el movimiento de proyectiles, con nuestro modelo simplificado, la trayectoria siempre es una parábola (figura 3.19).

Cuando la resistencia del aire *no* es insignificante y debe incluirse, calcular la trayectoria se vuelve mucho más complicado; los efectos de dicha resistencia dependen

3.18 Las componentes de la velocidad inicial v_{0x} y v_{0y} de un proyectil (como un balón de fútbol) se relacionan con la rapidez inicial v_0 y el ángulo inicial α_0.

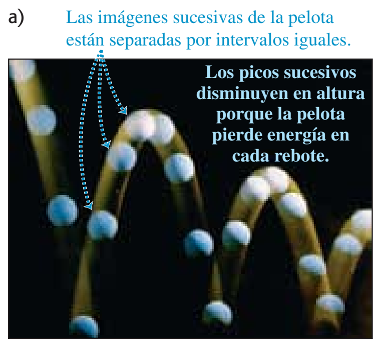


ActivPhysics Online

3.5 Componentes de la velocidad inicial
3.6 Práctica de tiro al blanco I
3.7 Práctica de tiro al blanco II

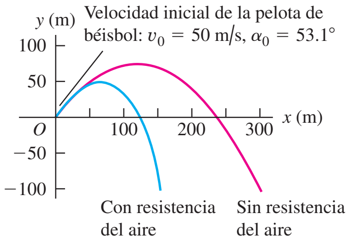
3.19 Las trayectorias casi parabólicas a) de una pelota que rebota y b) de borbotones de roca fundida expulsada de un volcán.

a)



b)

3.20 La resistencia del aire tiene un efecto acumulativo considerable sobre el movimiento de una pelota de béisbol. En esta simulación, permitimos que la pelota caiga por debajo de la altura desde la cual se lanzó (por ejemplo, la pelota podría haberse lanzado desde un acantilado).



de la velocidad, por lo que la aceleración ya no es constante. La figura 3.20 es una simulación computarizada de la trayectoria de una pelota de béisbol tanto sin resistencia del aire como con una resistencia proporcional al cuadrado de la rapidez de la pelota. Vemos que el efecto de la resistencia es muy grande, la altura máxima y el alcance se reducen, y la trayectoria ya no es parabólica. (Si usted observa cuidadosamente la figura 3.19b, se dará cuenta de que las trayectorias de los borbotones volcánicos se desvían de una manera similar de una forma parabólica.)

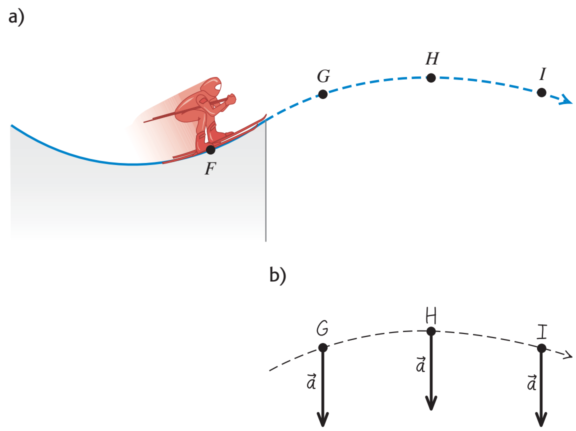
Ejemplo conceptual 3.5 Aceleración de una esquiadora, continuación

Consideremos de nuevo a la esquiadora del ejemplo conceptual 3.4. ¿Qué aceleración tiene en los puntos G, H e I de la figura 3.21a *después* de que sale de la rampa? Desprecie la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

La figura 3.21b muestra nuestra respuesta. La aceleración de la esquiadora cambió de un punto a otro mientras estaba en la rampa pero, apenas la esquiadora sale de la rampa, se convierte en un proyectil. Así, en los puntos G, H e I, y de hecho en *todos* los puntos después de salir de la rampa, la aceleración de la esquiadora apunta verticalmente hacia abajo y tiene magnitud g. Por más compleja que sea la aceleración de una partícula antes de convertirse en proyectil, su aceleración como proyectil está dada por $a_x = 0$, $a_y = -g$.

3.21 a) Trayectoria de la esquiadora durante el salto. b) Nuestra solución.



Estrategia para resolver problemas 3.1 Movimiento de proyectil

NOTA: Las estrategias que usamos en las secciones 2.4 y 2.5 para problemas de aceleración constante en línea recta también sirven aquí.

IDENTIFICAR *los conceptos importantes:* El concepto clave que debemos recordar es que durante todo el movimiento de un proyectil, la aceleración es hacia abajo y tiene magnitud constante g. Advierta que las ecuaciones para el movimiento de proyectiles no son válidas durante el lanzamiento de una pelota, porque ahí actúan sobre la pelota tanto la mano del lanzador como la gravedad. Las ecuaciones sólo se aplican una vez que la pelota sale de la mano del lanzador.

PLANTEAR *el problema con los siguientes pasos:*

1. Defina su sistema de coordenadas y dibuje sus ejes. Normalmente lo más sencillo es tomar el eje x como horizontal y el eje y hacia arriba y colocar el origen en la posición inicial ($t = 0$), donde el cuerpo se vuelve primero un proyectil (como donde la pelota sale de la mano del lanzador). Así, las componentes de la aceleración (constante) son $a_x = 0$, $a_y = -g$, y la posición inicial es $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$.

2. Haga una lista de las cantidades conocidas e incógnitas, y decida cuáles incógnitas son sus objetivos. Por ejemplo, en algunos problemas se da la velocidad inicial (ya sea las componentes, o la magnitud y dirección) y se pide obtener las coordenadas y componentes de velocidad en un instante posterior. En todo caso, usará las ecuaciones (3.20) a (3.23). (Algunas otras ecuaciones dadas en la sección 3.3 también podrían ser útiles.) Asegúrese de tener tantas ecuaciones como incógnitas por determinar.
3. Plantee el problema con palabras y luego tradúzcalo a símbolos. Por ejemplo, ¿*cuándo* llega la partícula a cierto punto? (Es decir, ¿con qué valor de t?) ¿*Dónde* está la partícula cuando la velocidad tiene cierto valor? (Es decir, ¿cuánto valen x y y cuando v_x o v_y tiene ese valor?) Puesto que $v_y = 0$ en el punto más alto de la trayectoria, la pregunta "¿cuándo alcanza el proyectil su punto más alto?" se traduce a "¿cuánto vale t cuando $v_y = 0$?" Asimismo, "¿cuándo vuelve el proyectil a su altura inicial?" se traduce a "¿cuánto vale t cuando $y = y_0$?"

EJECUTAR *la solución:* Use las ecuaciones (3.20) a (3.23) para obtener las incógnitas. Resista la tentación de dividir la trayectoria en segmentos y analizarlos individualmente. ¡No hay que volver a comenzar cuando el proyectil llega a su altura máxima! Lo más fácil suele ser usar los mismos ejes y escala de tiempo durante todo el problema. Utilice el valor $g = 9.8\ \text{m/s}^2$.

EVALUAR *la respuesta:* Como siempre, examine sus resultados para ver si son lógicos y si los valores numéricos son razonables.

Ejemplo 3.6 Cuerpo que se proyecta horizontalmente

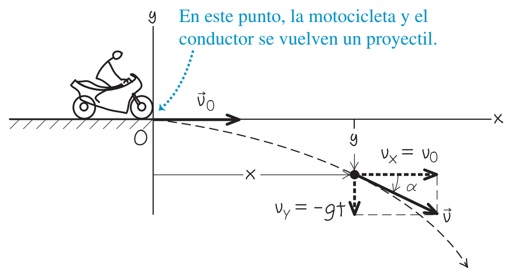
Un acróbata en motocicleta se lanza del borde de un risco. Justo en el borde, su velocidad es horizontal con magnitud de 9.0 m/s. Obtenga la posición, distancia desde el borde y velocidad de la motocicleta después de 0.50 s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Una vez que el acróbata sale del risco, se mueve como un proyectil. Por lo tanto, su velocidad en el borde del risco es su velocidad inicial.

PLANTEAR: El esquema se muestra en la figura 3.22. Elegimos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el borde del risco, donde la motocicleta se convierte en proyectil, así que $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$. La velocidad inicial es puramente horizontal (es decir, $\alpha_0 = 0$), así que sus componentes son $v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 = 9.0\ \text{m/s}$ y $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 = 0$. Para determinar la posición de la motocicleta en $t = 0.50$ s, usamos las ecuaciones (3.20) y (3.21), que dan x y y en función del tiempo. Dados estos valores, calcularemos la distancia del origen con la ecuación (3.24). Por último, usaremos las ecuaciones (3.22) y (3.23) para determinar las componentes de velocidad v_x y v_y en $t = 0.50$ s.

3.22 Esquema para este problema.



EJECUTAR: ¿Dónde está la motocicleta en $t = 0.50$ s? Por las ecuaciones (3.20) y (3.21), las coordenadas x y y son

$$x = v_{0x}t = (9.0\ \text{m/s})(0.50\ \text{s}) = 4.5\ \text{m}$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}(9.8\ \text{m/s}^2)(0.50\ \text{s})^2 = -1.2\ \text{m}$$

El valor negativo de y indica que en este instante la motocicleta está debajo de su punto inicial.

¿A qué distancia está ahora la motocicleta del origen? Por la ecuación (3.24),

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4.5\ \text{m})^2 + (-1.2\ \text{m})^2} = 4.7\ \text{m}$$

¿Qué velocidad tiene en $t = 0.50$ s? Por las ecuaciones (3.22) y (3.23), las componentes de la velocidad en ese momento son

$$v_x = v_{0x} = 9.0\ \text{m/s}$$
$$v_y = -gt = (-9.8\ \text{m/s}^2)(0.50\ \text{s}) = -4.9\ \text{m/s}$$

La motocicleta tiene la misma velocidad horizontal v_x que cuando salió del risco en $t = 0$ pero, además, hay una velocidad vertical v_y hacia abajo (negativa). Si usamos vectores unitarios, la velocidad en $t = 0.50$ s es

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (9.0\ \text{m/s})\hat{\imath} + (-4.9\ \text{m/s})\hat{\jmath}$$

También podemos expresar la velocidad en términos de magnitud y dirección. Por la ecuación (3.25), la rapidez (magnitud de la velocidad) en este instante es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$
$$= \sqrt{(9.0\ \text{m/s})^2 + (-4.9\ \text{m/s})^2} = 10.2\ \text{m/s}$$

Por la ecuación (3.26), el ángulo α del vector de velocidad es

$$\alpha = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\left(\frac{-4.9\ \text{m/s}}{9.0\ \text{m/s}}\right) = -29°$$

En este instante la velocidad está dirigida 29° por debajo de la horizontal.

EVALUAR: Al igual que en la figura 3.17, el aspecto horizontal del movimiento no cambia por la gravedad; la motocicleta se sigue moviendo horizontalmente a 9.0 m/s, cubriendo 4.5 m en 0.50 s. Dado que la motocicleta tiene cero velocidad inicial vertical, cae verticalmente igual que un objeto que se suelta desde el reposo y desciende una distancia de $\frac{1}{2}gt^2 = 1.2$ m en 0.50 s.

Ejemplo 3.7 Altura y alcance de un proyectil I: Una pelota de béisbol

Un bateador golpea una pelota de béisbol de modo que ésta sale del bate a una rapidez $v_0 = 37.0$ m/s con un ángulo $\alpha_0 = 53.1°$, en un lugar donde $g = 9.80$ m/s^2. *a*) Calcule la posición de la pelota y la magnitud y dirección de su velocidad cuando $t = 2.00$ s. *b*) Determine cuándo la pelota alcanza el punto más alto y su altura h en ese punto. *c*) Obtenga el *alcance horizontal R*, es decir, la distancia horizontal desde el punto de partida hasta donde la pelota cae al suelo.

SOLUCIÓN

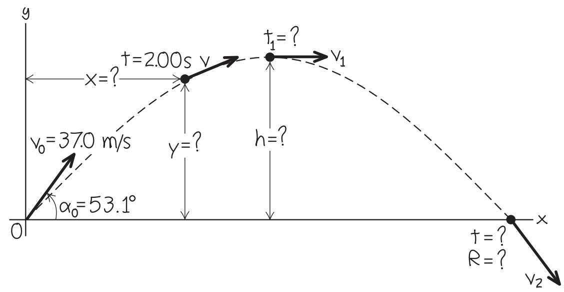
IDENTIFICAR: Como muestra la figura 3.20, los efectos de la resistencia del aire sobre el movimiento de una pelota de béisbol no son insignificantes; no obstante, por sencillez, los despreciaremos en este ejemplo y usaremos las ecuaciones del movimiento de proyectiles para describir el movimiento.

PLANTEAR: El esquema se muestra en la figura 3.23. Usaremos el mismo sistema de coordenadas que en las figuras 3.17 o 3.18. Así, podremos usar las ecuaciones (3.20) a (3.23) sin modificaciones. Las incógnitas son **1.** la posición y velocidad de la pelota 2.00 s después de perder contacto con el bate, **2.** el tiempo transcurrido entre que la pelota sale del bate y alcanza su altura máxima (cuando $v_y = 0$) y la coordenada y en ese momento, y **3.** la coordenada x en el momento en que la coordenada y es igual al valor inicial y_0.

La pelota sale del bate más o menos un metro sobre el suelo, pero ignoraremos esta distancia y supondremos que parte del nivel del suelo ($y_0 = 0$). La velocidad inicial de la pelota tiene componentes

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 = (37.0 \text{ m/s}) \cos 53.1° = 22.2 \text{ m/s}$$
$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 = (37.0 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 53.1° = 29.6 \text{ m/s}$$

3.23 Esquema para este problema.



EJECUTAR: *a*) Queremos obtener x, y, v_x y v_y en el instante $t = 2.00$ s. Por las ecuaciones (3.20) a (3.23),

$$x = v_{0x}t = (22.2 \text{ m/s})(2.00 \text{ s}) = 44.4 \text{ m}$$
$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$= (29.6 \text{ m/s})(2.00 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s})^2$$
$$= 39.6 \text{ m}$$
$$v_x = v_{0x} = 22.2 \text{ m/s}$$
$$v_y = v_{0y} - gt = 29.6 \text{ m/s} - (9.80 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s})$$
$$= 10.0 \text{ m/s}$$

La componente y de la velocidad es positiva, lo cual significa que la pelota todavía va en ascenso en este instante (figura 3.23). La magnitud y dirección de la velocidad se obtienen de las ecuaciones (3.25) y (3.26):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(22.2 \text{ m/s})^2 + (10.0 \text{ m/s})^2}$$
$$= 24.3 \text{ m/s}$$
$$\alpha = \arctan\left(\frac{10.0 \text{ m/s}}{22.2 \text{ m/s}}\right) = \arctan 0.450 = 24.2°$$

La dirección de la velocidad (es decir, la dirección del movimiento) es 24.2° sobre la horizontal.

b) En el punto más alto, la velocidad vertical v_y es cero. ¿Cuándo sucede esto? Sea ese instante t_1; entonces,

$$v_y = v_{0y} - gt_1 = 0$$
$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{29.6 \text{ m/s}}{9.80 \text{ m/s}^2} = 3.02 \text{ s}$$

La altura h en este instante es el valor de y cuando $t = t_1 = 3.02$ s:

$$h = v_{0y}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$
$$= (29.6 \text{ m/s})(3.02 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(3.02 \text{ s})^2$$
$$= 44.7 \text{ m}$$

c) Obtendremos el alcance horizontal en dos pasos. Primero, ¿*cuándo* cae la pelota al suelo? Esto ocurre cuando $y = 0$, digamos, en t_2; entonces,

$$y = 0 = v_{0y}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = t_2\left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt_2\right)$$

Ésta es una ecuación cuadrática en t_2. Con dos raíces:

$$t_2 = 0 \qquad \text{y} \qquad t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2(29.6 \text{ m/s})}{9.80 \text{ m/s}^2} = 6.04 \text{ s}$$

Hay dos instantes en los que $y = 0$; $t_2 = 0$ es cuando la pelota *sale* del suelo y $t_2 = 2v_{0y}/g = 6.04$ s es cuando regresa. Esto es exactamente el doble del tiempo que tarda en llegar al punto más alto que encontramos en el inciso *b*) $t_1 = v_{0y}/g = 3.02$ s, así que el tiempo de bajada es igual al tiempo de subida. Esto *siempre* sucede si los puntos inicial y final están a la misma altura y se puede despreciar la resistencia del aire.

El alcance horizontal R es el valor de x cuando la pelota vuelve al suelo, es decir, en $t = 6.04$ s:

$$R = v_{0x}t_2 = (22.2 \text{ m/s})(6.04 \text{ s}) = 134 \text{ m}$$

La componente vertical de la velocidad cuando la pelota toca el suelo es

$$v_y = v_{0y} - gt_2 = 29.6 \text{ m/s} - (9.80 \text{ m/s}^2)(6.04 \text{ s})$$
$$= -29.6 \text{ m/s}$$

Es decir, v_y tiene la misma magnitud que la velocidad vertical inicial v_{0y} pero dirección opuesta (hacia abajo). Dado que v_x es constante, el ángulo $\alpha = -53.1°$ (debajo de la horizontal) en este punto es el negativo del ángulo inicial $\alpha_0 = 53.1°$.

EVALUAR: A menudo es útil verificar los resultados obteniéndolos de una forma distinta. Por ejemplo, podemos verificar nuestra respuesta para la altura máxima del inciso *b*) aplicando la fórmula de aceleración constante, ecuación (2.13), al movimiento y:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$$

En el punto más alto, $v_y = 0$ y $y = h$. Al sustituirlos, junto con $y_0 = 0$, obtenemos

$$0 = v_{0y}^2 - 2gh$$

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(29.6\ \mathrm{m/s})^2}{2(9.80\ \mathrm{m/s^2})} = 44.7\ \mathrm{m}$$

que es la misma altura que obtuvimos en el inciso *b*).

Es interesante destacar que $h = 44.7$ m del inciso *b*) es comparable con la altura de 52.4 m del techo sobre el campo de juego en el Metrodomo Hubert H. Humphrey en Minneapolis, y el alcance horizontal $R = 134$ m del inciso *c*) es mayor que la distancia de 99.7 m entre home y la barda del jardín derecho en el Campo Safeco en Seatle. (La altura de la pelota cuando cruza la barda es más que suficiente para librarla, así que el batazo es un jonrón.)

En el mundo real, una pelota bateada con la rapidez y el ángulo iniciales que usamos aquí no alcanzará ni la altura ni la distancia que calculamos. (Si lo hiciera, los jonrones serían mucho más comunes y el béisbol sería un juego mucho menos interesante.) El motivo es que la resistencia del aire, que no se tomó en cuenta en este ejemplo, en realidad es un factor importante a las velocidades que suelen tener las pelotas lanzadas y bateadas (véase la figura 3.20).

Ejemplo 3.8 Altura y alcance de un proyectil II: Altura máxima, alcance máximo

Para un proyectil lanzado con rapidez v_0 y ángulo inicial α_0 (entre 0° y 90°), deduzca expresiones generales para la altura máxima h y el alcance horizontal R (figura 3.23). Para una v_0, dada, ¿qué valor de α_0 da la altura máxima? ¿Y qué valor da el alcance horizontal máximo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Éste es realmente el mismo ejercicio que los incisos *b*) y *c*) del ejemplo 3.7. La diferencia es que buscamos expresiones generales para h y R. También nos interesan los valores de α_0 que dan los valores máximos de h y R.

PLANTEAR: En el inciso *b*) del ejemplo 3.7 vimos que el proyectil alcanza el punto máximo de su trayectoria (por lo que $v_y = 0$) en el tiempo $t_1 = v_{0y}/g$ y en el inciso *c*) del ejemplo 3.7 determinamos que el proyectil regresa a su altura inicial (por lo que $y = y_0$) en el tiempo $t_2 = 2v_{0y}/g$. (Como vimos en el ejemplo 3.7, $t_2 = 2t_1$.) Para determinar la altura h en el punto máximo de la trayectoria, usaremos la ecuación (3.21) para calcular la coordenada y en t_1. Para determinar R, sustituimos t_2 en la ecuación (3.20) para calcular la coordenada x en t_2. Expresaremos nuestras respuestas en términos de la rapidez de lanzamiento v_0 y el ángulo de disparo α_0 usando la ecuación (3.19).

EJECUTAR: Por la ecuación (3.19), $v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0$ y $v_{0x} = v_0 \operatorname{sen} \alpha_0$. Por lo tanto, podemos escribir el tiempo t_1 en que $v_y = 0$ como

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}$$

Luego, por la ecuación (3.21), la altura en ese instante es

$$h = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}\right)^2$$
$$= \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha_0}{2g}$$

Para una rapidez de lanzamiento dada v_0, el valor máximo de h se da con sen $\alpha_0 = 1$ y $\alpha_0 = 90°$; es decir, cuando el proyectil se lanza verticalmente. Esto es lo que deberíamos esperar. Si se lanza horizontalmente, como en el ejemplo 3.6, $\alpha_0 = 0$ ¡y la altura máxima es cero!

El tiempo t_2 en que el proyectil regresa al suelo es

$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}$$

El alcance horizontal R es el valor de x en el este instante. Por la ecuación (3.20),

$$R = (v_0 \cos\alpha_0)t_2 = (v_0 \cos\alpha_0)\frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}$$

Ahora podemos usar la identidad trigonométrica 2 sen α_0 cos α_0 = sen $2\alpha_0$ para rescribir esto como

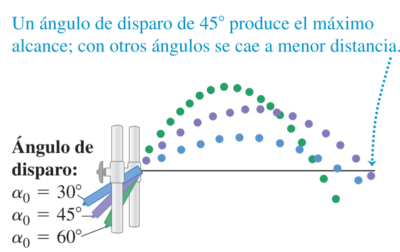
$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha_0}{g}$$

El valor máximo de sen $2\alpha_0$ es 1; esto ocurre cuando $2\alpha_0 = 90°$, o bien, $\alpha_0 = 45°$. Este ángulo da el alcance máximo para una rapidez inicial dada.

EVALUAR: La figura 3.24 se basa en una fotografía compuesta de tres trayectorias de una pelota proyectada desde un cañón de resorte con ángulos de 30, 45 y 60°. La rapidez inicial v_0 es aproximadamente igual en los tres casos. Los alcances horizontales son casi iguales con los ángulos de 30 y 60°, y el alcance de 45° es el mayor que ambos. ¿Puede demostrar que para una v_0 dada el alcance es igual para un ángulo inicial α_0 que para $90° - \alpha_0$?

CUIDADO **Altura y alcance de un proyectil** No recomendamos memorizar las expresiones anteriores para h y R; son aplicables sólo en las circunstancias especiales que describimos. En particular, la expresión para el alcance R *sólo* puede utilizarse cuando las alturas de lanzamiento y aterrizaje son iguales. En muchos de los problemas al final de este capítulo *no* deben aplicarse estas ecuaciones.

3.24 Un ángulo de disparo de 45° produce el alcance horizontal máximo. El alcance es menor con ángulos de 30 y 60°.



Ejemplo 3.9 Alturas inicial y final distintas

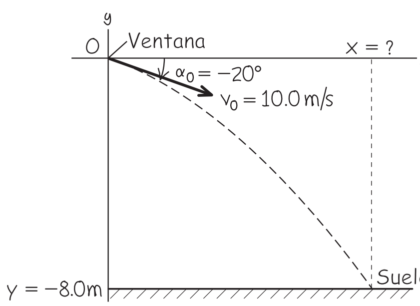
Usted lanza una pelota desde su ventana a 8.0 m del suelo. Cuando la pelota sale de su mano, se mueve a 10.0 m/s con un ángulo de 20° debajo de la horizontal. ¿A qué distancia horizontal de su ventana la pelota llegará al piso? Desprecie la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que en nuestro cálculo del alcance horizontal en los ejemplos 3.7 y 3.8, estamos tratando de hallar la coordenada horizontal de un proyectil cuando está a un valor dado de y. La diferencia en este caso es que este valor de y *no* es igual a la coordenada y inicial.

PLANTEAR: Una vez más, elegimos el eje x como horizontal, y el eje y, hacia arriba. Colocamos el origen de coordenadas en el punto donde la pelota sale de su mano (figura 3.25). Así, tenemos $v_0 = 10.0$ m/s y $\alpha_0 = -20°$; el ángulo es negativo porque la velocidad inicial está debajo de la horizontal. Nuestra variable meta es el valor de x en el punto donde la pelota llega al suelo; es decir, cuando $y = -8.0$ m. Dado que las alturas inicial y final de la pelota son distintas, no podemos usar la expresión para el alcance horizontal del ejemplo 3.8. En vez de ello, usamos primero la ecuación (3.21) para hallar el instante t en que la pelota llega a $y = -8.0$ m y, después, calculamos el valor de x en ese instante con la ecuación (3.20).

3.25 Esquema para este problema.



EJECUTAR: Para determinar t, rescribimos la ecuación (3.21) en la forma estándar de una ecuación cuadrática en t:

$$\frac{1}{2}gt^2 - (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t + y = 0$$

Las raíces de esta ecuación son

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 \pm \sqrt{(-v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)^2 - 4\left(\frac{1}{2}g\right)y}}{2\left(\frac{1}{2}g\right)}$$

$$= \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 \pm \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha_0 - 2gy}}{g}$$

$$= \frac{\left[\begin{array}{l}(10.0\text{ m/s})\operatorname{sen}(-20°) \\ \pm\sqrt{(10.0\text{ m/s})^2\operatorname{sen}^2(-20°) - 2(9.80\text{ m/s}^2)(-8.0\text{ m})}\end{array}\right]}{9.80\text{ m/s}^2}$$

$$= -1.7\text{ s} \quad \text{o} \quad 0.98\text{ s}$$

Podemos desechar la raíz negativa, ya que se refiere a un tiempo previo al lanzamiento. La raíz positiva nos indica que la pelota tarda 0.98 s en llegar al suelo. Por la ecuación (3.20), la coordenada x en ese instante es

$$x = (v_0 \cos\alpha_0)t = (10.0\text{ m/s})[\cos(-20°)](0.98\text{ s})$$
$$= 9.2\text{ m}$$

La pelota llega al suelo a una distancia horizontal de 9.2 m de la ventana.

EVALUAR: La raíz $t = -1.7$ s es un ejemplo de solución "ficticia" a una ecuación cuadrática. Ya vimos esto en el ejemplo 2.8 de la sección 2.5; le recomendamos repasarlo.

Con el origen que elegimos, teníamos alturas inicial y final $y_0 = 0$ y $y = -8.0$ m. ¿Puede demostrar, con las ecuaciones (3.16) y (3.18), que se obtienen los mismos valores de t y x si se coloca el origen en el suelo, inmediatamente abajo de donde la pelota sale de la mano?

Ejemplo 3.10 La cuidadora y el mono

Un mono escapa del zoológico y sube a un árbol. Como no logra atraerlo, la cuidadora apunta su rifle con un dardo sedante directamente hacia el mono y dispara (figura 3.26). El astuto mono se suelta en el instante en que el dardo sale del cañón del rifle, intentando caer al suelo y escapar. Demuestre que el dardo *siempre* golpea al mono, sea cual fuere la velocidad inicial del dardo (siempre que dé en el mono antes de que éste llegue al piso).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este ejemplo, tenemos *dos* cuerpos que se mueven como proyectiles, el dardo sedante y el mono. Ambos tienen posición y velocidad iniciales distintas; sin embargo, entran en movimiento de proyectil al mismo tiempo. Para demostrar que el dardo golpea al mono, debemos probar que hay un instante en que el mono y el dardo tienen las mismas coordenadas x y y.

PLANTEAR: Elegimos las direcciones x y y acostumbradas, y colocamos el origen en el extremo del cañón del rifle (figura 3.26). Primero usaremos la ecuación (3.20) para encontrar el tiempo t en que las coordenadas x_{mono} y x_{dardo} sean iguales. Luego, usaremos la ecuación (3.21) para verificar si y_{mono} y y_{dardo} también son iguales en ese instante; si lo son, el dardo golpeará al mono.

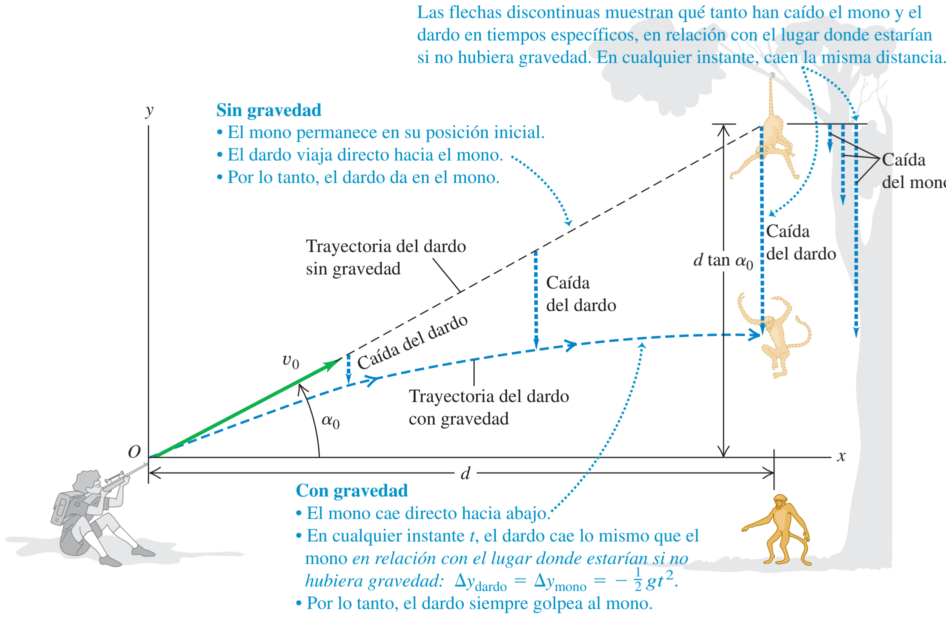
EJECUTAR: El mono cae verticalmente, así que $x_{mono} = d$ en *todo* momento. En el caso del dardo, la ecuación (3.20) nos indica que $x_{dardo} = (v_0 \cos \alpha_0)t$. Cuando las coordenadas x son iguales, $d = (v_0 \cos \alpha_0)t$, o bien,

$$t = \frac{d}{v_0 \cos\alpha_0}$$

Para que el dardo golpee al mono, debe cumplirse que $y_{mono} = y_{dardo}$ en este instante. El mono está en caída libre unidimensional; su posición en cualquier momento está dada por la ecuación (2.12) cambiando debidamente los símbolos. La figura 3.26 muestra que la altura inicial del mono es $d \tan \alpha_0$ (el cateto opuesto de un triángulo rectángulo con ángulo a_0 y cateto adyacente d), y obtenemos

$$y_{mono} = d\tan\alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

3.26 El dardo con sedante golpea al mono que cae.



Para el dardo, usamos la ecuación (3.21):

$$y_{\text{dardo}} = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

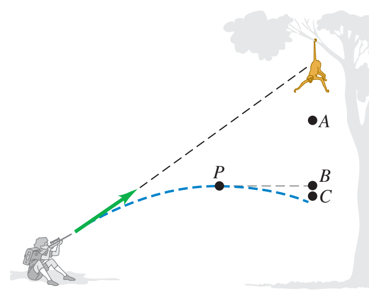
Vemos que si $d \tan \alpha_0 = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t$ cuando las dos coordenadas x son iguales, entonces $y_{\text{mono}} = y_{\text{dardo}}$, y el dardo habrá acertado. Para demostrar que esto sucede, sustituimos t por $d/(v_0 \cos \alpha_0)$, el instante en que $x_{\text{mono}} = x_{\text{dardo}}$; así,

$$(v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)\frac{d}{v_0 \cos \alpha_0} = d \tan \alpha_0$$

EVALUAR: Hemos demostrado que, cuando las coordenadas x son iguales, las y también lo son; un dardo dirigido a la posición inicial del mono *siempre* lo golpeará, sin importar v_0. Este resultado también es independiente de g, la aceleración debida a la gravedad. Sin gravedad ($g = 0$), el mono no se movería, y el dardo viajaría en línea recta para golpearlo. Con gravedad, ambos "caen" la misma distancia $\left(\frac{1}{2}gt^2\right)$ por debajo de sus posiciones con $g = 0$ y el dardo de todos modos golpea al mono (figura 3.26).

Evalúe su comprensión de la sección 3.3 En el ejemplo 3.10, suponga que el dardo sedante tiene una velocidad inicial relativamente baja, de modo que el dardo alcanza su altura máxima en un punto P antes de golpear al mono, como se indica en la figura. Cuando el dardo está en P, ¿el mono estará en i) el punto A (más alto que P), ii) en el punto B (a la misma altura que P) o iii) en el punto C (más abajo que P)? Desprecie la resistencia del aire.

MP

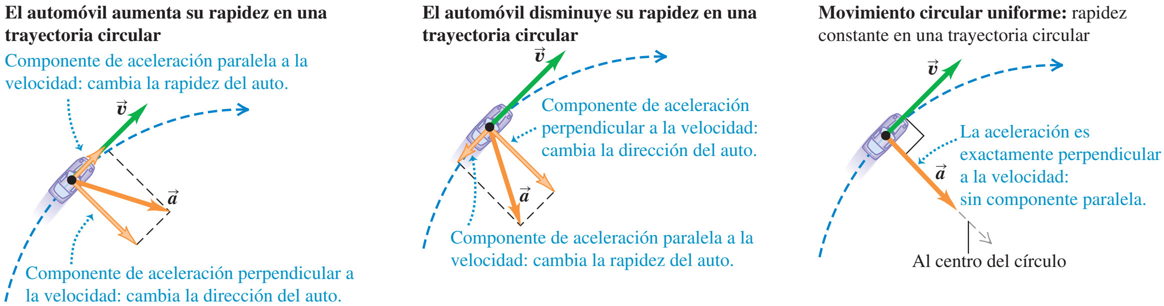


3.4 Movimiento en un círculo

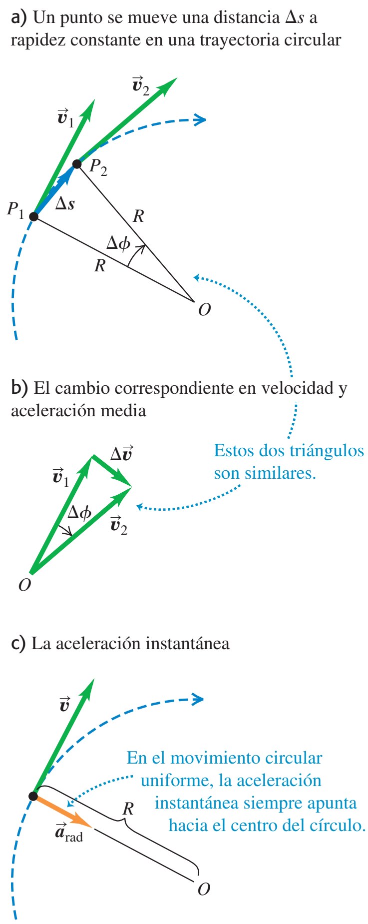
Cuando una partícula se mueve en una trayectoria curva, la dirección de su velocidad cambia. Como vimos en la sección 3.2, esto implica que la partícula *debe* tener una componente de aceleración perpendicular a la trayectoria, incluso si la rapidez es constante (véase la figura 3.11b). En esta sección calcularemos la aceleración para el caso especial importante de movimiento en un círculo.

ActivPhysics ONLINE
4.1 Magnitud de aceleración centrípeta

3.27 Un automóvil con movimiento circular uniforme. La rapidez es constante y la aceleración se dirige hacia el centro de la trayectoria circular.



3.28 Determinación del cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$, aceleración media $\vec{a}_{med}$, y aceleración instantánea $\vec{a}_{rad}$ de una partícula que se mueve en un círculo con rapidez constante.



Movimiento circular uniforme

Cuando una partícula se mueve en un círculo con *rapidez constante*, tiene un **movimiento circular uniforme**. Un automóvil que da vuelta a una curva de radio constante con rapidez constante, un satélite en órbita circular y un patinador que describe un círculo con rapidez constante son ejemplos de este movimiento (figura 3.27; compárela con la figura 3.12). No hay componente de aceleración paralela (tangente) a la trayectoria; si la hubiera, la rapidez cambiaría. El vector de aceleración es perpendicular (normal) a la trayectoria y, por lo tanto, se dirige hacia adentro (¡nunca hacia fuera!) al centro de la trayectoria circular. Esto causa el cambio en la dirección de la velocidad, sin cambiar la rapidez. Nuestro siguiente trabajo consiste en demostrar que la magnitud de la aceleración en el movimiento circular uniforme se relaciona de manera sencilla con la rapidez de la partícula y el radio del círculo.

La figura 3.28a muestra una partícula que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular de radio R con centro en O. La partícula se mueve de P_1 a P_2 en un tiempo Δt. El cambio vectorial en la velocidad $\Delta\vec{v}$ durante este tienpo se muestra en la figura 3.28b.

Los ángulos rotulados $\Delta\phi$ en las figuras 3.28a y 3.28b son iguales porque $\vec{v}_1$ es perpendicular a la línea OP_1 y $\vec{v}_2$ es perpendicular a la línea OP_2. Por lo tanto, los triángulos en las figuras 3.28a y 3.28b son *semejantes*. Los cocientes de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales, así que

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v_1} = \frac{\Delta s}{R} \qquad \text{o} \qquad |\Delta\vec{v}| = \frac{v_1}{R}\Delta s$$

La magnitud a_{med} de la aceleración media durante Δt es entonces

$$a_{med} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

La magnitud a de la aceleración *instantánea* $\vec{a}$ en el punto P_1 es el límite de esta expresión conforme P_2 se acerca a P_1:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Sin embargo, el límite de $\Delta s/\Delta t$ es la rapidez v_1 en el punto P_1. Además, P_1 puede ser cualquier punto de la trayectoria, así que podemos omitir el subíndice y con v representar la rapidez en cualquier punto. Así,

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \qquad \text{(movimiento circular uniforme)} \qquad (3.28)$$

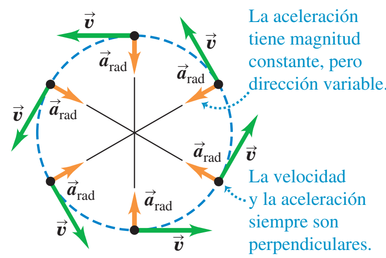
Agregamos el subíndice "rad" para recordar que la dirección de la aceleración instantánea siempre sigue un radio del círculo, hacia su centro. Como la rapidez es constante, la aceleración siempre es perpendicular a la velocidad instantánea. Esto se muestra en la figura 3.28c; compárela con la ilustración derecha de la figura 3.27.

En conclusión, *en el movimiento circular uniforme, la magnitud a de la aceleración instantánea es igual al cuadrado de la velocidad v dividido entre el radio R del círculo; su dirección es perpendicular a* $\vec{v}$ *y hacia adentro sobre el radio*.

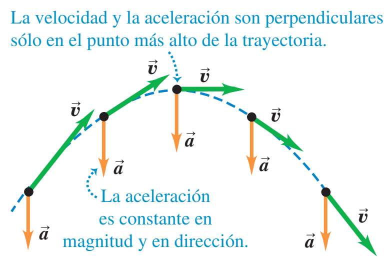
Puesto que la aceleración siempre apunta al centro del círculo, en ocasiones se le llama **aceleración centrípeta**. La palabra "centrípeta" significa "que busca el centro" en griego. La figura 3.29a muestra las direcciones de los vectores de velocidad y aceleración en varios puntos para una partícula con movimiento circular uniforme.

3.29 Aceleración y velocidad a) para una partícula con movimiento circular uniforma y b) para un proyectil sin resistencia del aire.

a) Movimiento circular uniforme



b) Movimiento del proyectil



CUIDADO **Movimiento circular uniforme contra movimiento de proyectiles** La aceleración en el movimiento circular uniforme tiene algunas similitudes con la aceleración en el movimiento de proyectiles que no enfrenta resistencia del aire, pero también existen algunas diferencias importantes entre ambas. Tanto en el movimiento circular uniforme (figura 3.29a) como en el movimiento de proyectiles (figura 3.29b) la *magnitud* de la aceleración siempre es la misma. Sin embargo, en el movimiento circular uniforme la *dirección* de $\vec{a}$ cambia continuamente, de manera que siempre apunta hacia el centro del círculo. (En la parte superior del círculo, la aceleración apunta hacia abajo; en la parte inferior del círculo, la aceleración apunta hacia arriba.) En contraste, en el movimiento de proyectiles la dirección de $\vec{a}$ es la misma en todo momento.

También podemos expresar la magnitud de la aceleración en un movimiento circular uniforme en términos del **periodo** T del movimiento, el tiempo de una revolución (una vuelta completa al círculo). En un tiempo T, la partícula recorre una distancia igual a la circunferencia $2\pi R$ así que su rapidez es

$$v = \frac{2\pi R}{T} \tag{3.29}$$

Al sustituir esto en la ecuación (3.28), obtenemos la expresión alterna

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad \text{(movimiento circular uniforme)} \tag{3.30}$$

Ejemplo 3.11 Aceleración centrípeta en un camino curvo

Un automóvil deportivo Aston Martin V8 Vantage tiene una "aceleración lateral" de $0.96g$, que es $(0.96)(9.8\ \text{m/s}^2) = 9.4\ \text{m/s}^2$. Ésta es la aceleración centrípeta máxima que puede lograr el auto sin salirse de la trayectoria circular derrapando. Si el auto viaja a 40 m/s (cerca de 89 mi/h o 144 km/h), ¿cuál es el radio mínimo de curva que puede describir? (Suponga que no hay peralte.)

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Puesto que el coche se mueve en una curva —es decir, un arco de círculo— con rapidez constante, podemos aplicar las ideas del movimiento circular uniforme.

PLANTEAR: Usamos la ecuación (3.28) para obtener la incógnita R (el radio de la curva) en términos de la aceleración centrípeta dada a_{rad} y la rapidez v.

EJECUTAR: Nos dan a_{rad} y v, así que despejamos R de la ecuación (3.28):

$$R = \frac{v^2}{a_{rad}} = \frac{(40\ \text{m/s})^2}{9.4\ \text{m/s}^2} = 170\ \text{m (aprox. 560 ft)}$$

EVALUAR: Nuestro resultado muestra que el radio de giro requerido R es proporcional al *cuadrado* de la rapidez. Por lo tanto, incluso una reducción pequeña en la rapidez puede reducir R considerablemente. Por ejemplo, si v disminuye en un 20% (de 40 a 32 m/s), R disminuirá en un 36% (de 170 m a 109 m).

Otra forma de reducir el radio requerido es *peraltar* la curva. Investigaremos esta opción en el capítulo 5.