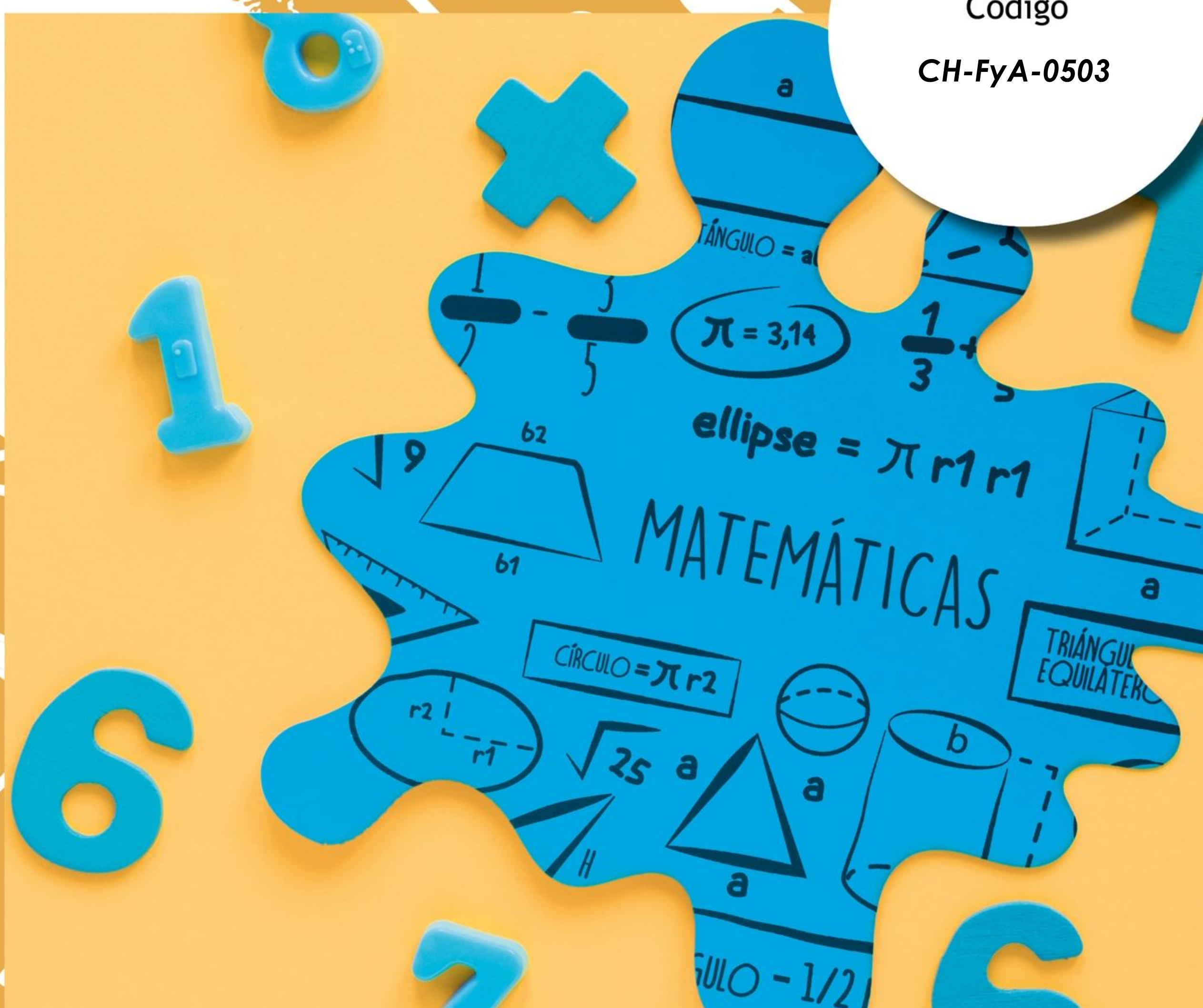
Código

CH-FyA-0503



Guía 87: Describimos figuras y cubrimos el plano

Guía
87
Meta 29

GRADO 9

GUÍA DEL ESTUDIANTE

DESCRIBAMOS FIGURAS Y CUBRAMOS EL PLANO CON ELLAS

Guías de Aprendizaje de Cualificar Matemáticas

Fe y Alegría Colombia

Fe y Alegría Colombia

Víctor Murillo

Director Nacional

Desarrollo de contenidos pedagógicos y educativos

Jaime Benjumea - Marcela Vega

Autores de la guía 87

Francy Paola González Castelblanco

Andrés Forero Cuervo

Coordinación pedagógica

Francy Paola González Castelblanco

Andrés Forero Cuervo

GRUPO LEMA www.grupolema.org

Revisores

Jaime Benjumea

Francy Paola González Castelblanco

Guía
87
GRADO 9

DESCRIBAMOS FIGURAS Y CUBRAMOS EL PLANO CON ELLAS

GRADO 9 - META 29 - PENSAMIENTOS MÉTRICO - ESPACIAL		
Guía 85 **(Duración 13 h)** • Clasificación de sólidos • Descomposición de sólidos • Estimación de volumen • Vértices, caras y aristas • Área de superficie de sólidos • Comparación entre volumen y área superficial de sólidos	**Guía 86** **(Duración 13 h)** • Aplicaciones del teorema de Pitágoras • Minimizar distancias • Diámetro de distintas figuras • Aplicaciones de semejanzas • El teorema de las rectas paralelas	**Guía 87** **(Duración 13 h)** **ACTIVIDAD 1** • Conjuntos en el plano • Descripción de conjuntos usando variables, parámetros y desigualdades **ACTIVIDAD 2** • Aplicaciones con transformaciones rígidas en el plano • Teselaciones • Teselaciones con polígonos regulares

META DE APRENDIZAJE 29

Argumento y razono al aplicar propiedades espaciales a proyectos como el diseño de estructuras en arquitectura, y la construcción de represas, para resolver problemas que aporten al bienestar común, donde debo aproximar la forma o volumen de objetos con sólidos conocidos, hallar su área superficial y volumen (pirámides, conos, esferas) y usar escalas. Ubico y describo figuras en el plano, las transformo y describo cómo cambia (o no) su forma y tamaño, y con ello hago patrones decorativos de baldosas. Comprendo y uso el teorema de Pitágoras y profundizo en criterios de semejanza de triángulos (teorema de Tales), para encontrar distancias geográficas y alturas. Así, uso lo que ya sé para resolver nuevos problemas geométricos de mi entorno.

PREGUNTAS ESENCIALES, GUÍA 87:

- Si tengo una región en el plano, ¿cómo la puedo describir de forma precisa sin usar dibujos?
- ¿Qué significa la palabra parámetro y cómo la uso al describir un conjunto en el plano?
- ¿Cómo puedo saber si puedo teselar (cubrir) todo el plano utilizando una sola figura?
- ¿Cómo podría usar ángulos para deducir que no es posible hacer una teselación del plano?

EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE, GUÍA 87:

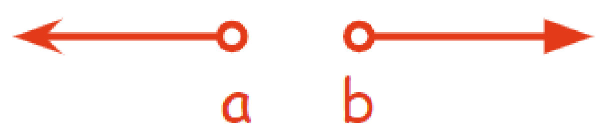
- Describo un conjunto del plano a partir de un dibujo usando parámetros y variables
- Dibujo un conjunto en el plano, dada su descripción con variables
- A partir de la descripción de un conjunto del plano, verifico si un punto dado está o no en el conjunto
- Aplico transformaciones rígidas a una figura plana
- Recubro el plano usando una figura plana a partir de transformaciones
- Dado un recubrimiento del plano, identifico una figura generadora del recubrimiento

ACTIVIDAD 1: CONJUNTOS EN EL PLANO

Aprendamos a describir y modelar regiones en el plano usando parámetros y variables, y a resolver problemas usando nuestras descripciones algebraicas.

A) Activando saberes previos

RECUERDA QUE...



En la recta real (1D), tenemos los siguientes ejemplos de conjuntos descritos usando desigualdades:

- $[a, \infty)$, descrito por la condición "$x \geq a$":
- $(-\infty, a]$, descrito por la condición "$x \leq a$":

- (a, b), descrito por la condición "x > a y x < b".

Para a < b, El conjunto "x < a o x > b" no es un intervalo sino es la unión de dos intervalos: $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$.

En los conjuntos anteriores, a y b se llaman PARÁMETROS (representan un conjunto dado), mientras que x es la variable, que representa un elemento cualquiera que pertenece al conjunto dado.

PRACTICA

i) Dibuja los siguientes conjuntos en la recta:

a) El intervalo (5, 8].

b) El conjunto dado por: " $x < -1$ o $x < -5$".

c) El conjunto de los x tales que x pertenece tanto a (1, 5) como a [4, 7].

ii) Describe los siguientes conjuntos usando parámetros y variables:

a) 

b) 

c) 

B) Conceptos

Exploración: Regiones microscópicas

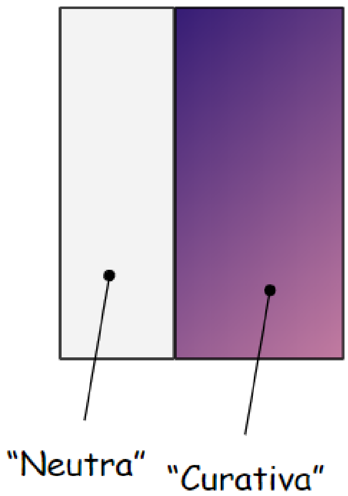
Antes de comenzar discute en clase: ¿Cuáles crees que son las ventajas de usar las ciencias y el trabajo en equipo para estudiar fenómenos del mundo? Si fueras a elegir una profesión de las ciencias como oficio, ¿cuáles te llamarían la atención y por qué?

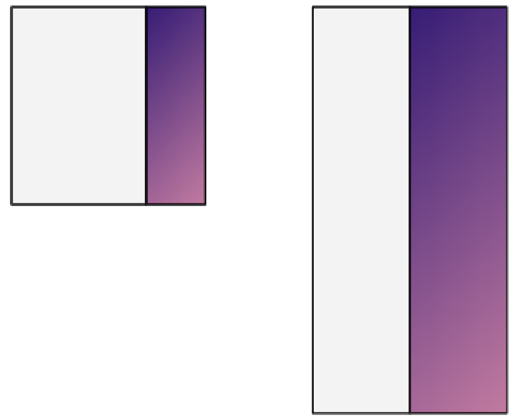
Un grupo de científicos de varios países se han reunido en Colombia para estudiar la estructura de distintos tejidos artificiales que imitan propiedades de organismos celulares.

El objetivo es poder crear distintos patrones que tengan varias funcionalidades. Hasta ahora están en la primera fase de su investigación, en donde quieren codificar imágenes de forma muy precisa, usando distintas variables. Este modelamiento les sirve para poder crear nuevos diseños a partir de las descripciones con las fórmulas.

Veamos varios ejemplos:

i) **LA REGIÓN CURATIVA**



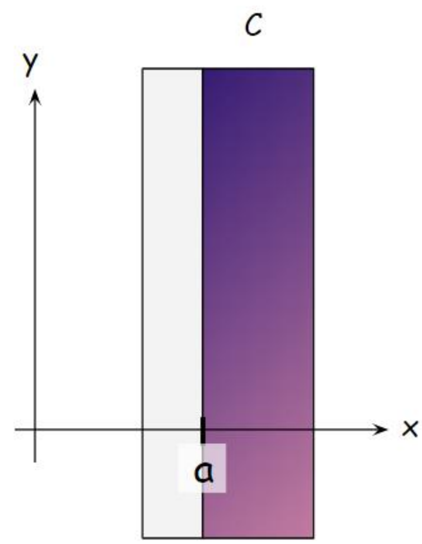


Los científicos se inspiran a partir de varios organismos para generar un tejido plano que tiene 2 regiones: una región neutra a la izquierda, sin moléculas especiales, y una región D de defensa a la derecha con moléculas que protegen la entrada de agentes contaminantes.

A partir de las muestras que vemos, ¿cuál es una buena forma de describir el conjunto de moléculas defensivas como un conjunto matemático, usando variables?

Antes de continuar, intenta responder a la pregunta anterior…

Podemos modelar este tipo de regiones con la siguiente descripción:
Para cada región hay un valor **a** fijo (a no cambia) que nos da la frontera.
A este valor a lo llamamos PARÁMETRO.



Moléculas: (x,y)
Condición: $x \geq \mathbf{a}$.

Es decir, de todos los puntos (x,y) que pertenecen al tejido, aquellos puntos que cumplen $x \geq \mathbf{a}$, pertenecen a la región C.

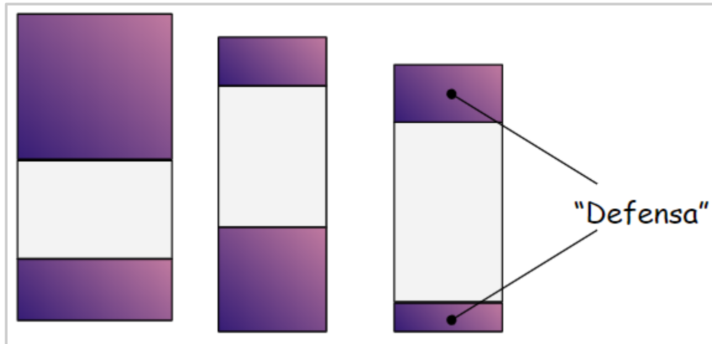
Por ejemplo: sea a = 5, y supongamos que tenemos los siguientes puntos dentro del tejido: (3, 4), (5, 3), (7, 8).

Entonces (5, 3) pertenece a *C*, (7, 8) pertenece a *C*, pero (3, 4) NO pertenece a *C*.

¿Hay alguna forma más detallada de modelar la situación?
La respuesta es que sí. Podríamos incluir otros parámetros además de a, que nos dieran los límites izquierdo, derecho, inferior y superior del tejido. Serían 4 nuevos parámetros: b, c, d, e.

¡Intenta describir esta situación con todos esos parámetros!

ii) **LA PARTE DEFENSIVA**

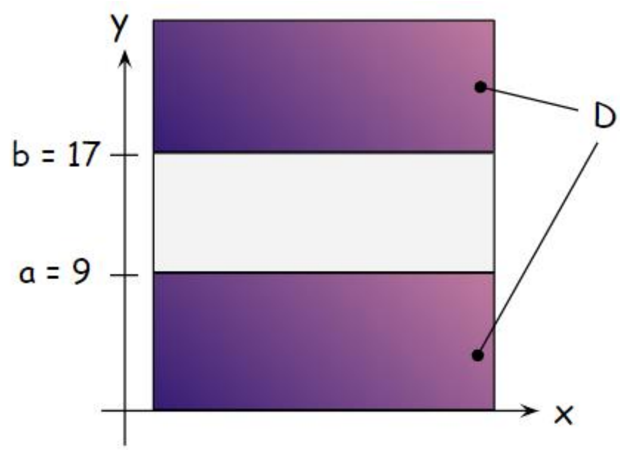


Los científicos observan los siguientes tejidos en donde una zona neutral está siendo defendida por otras dos zonas defensivas. A la unión de estas dos zonas la llamamos D, el conjunto de defensa.

¿Cómo lo podemos modelar?

Vamos a usar dos parámetros: a y b, con a < b.

Moléculas: (x,y)
Condición: y ≤ **a** o y ≥ **b**.



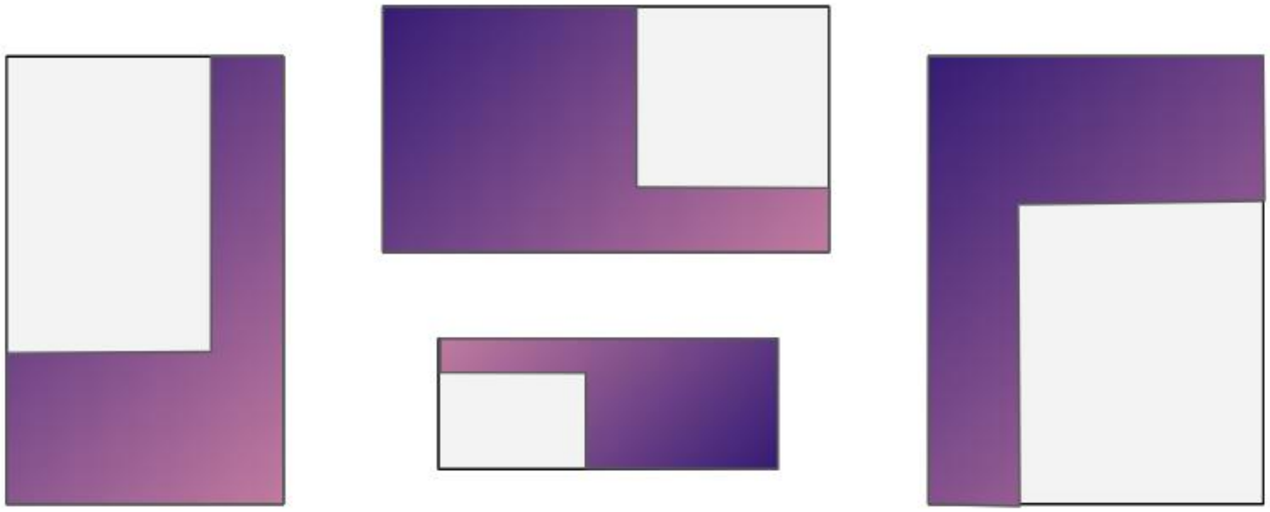
Es decir, de todos los puntos (x,y) que pertenecen al tejido, los que cumplen y ≤ **a** o y ≥ **b** (o ambas) pertenecen al conjunto D. D es la unión de dos franjas separadas por una distancia de b − a unidades.

Por ejemplo: supongamos que los parámetros a y b valen 9 y 17 respectivamente. De los puntos (2,8), (4, 10) y (7, 18) (todos dentro del tejido):

- (2,8) y (7, 18) pertenecen al conjunto D;
- (4, 10) pertenece al COMPLEMENTO de D (es decir, NO pertenece a D).

iii) **UN TERCER TIPO DE CONJUNTO**

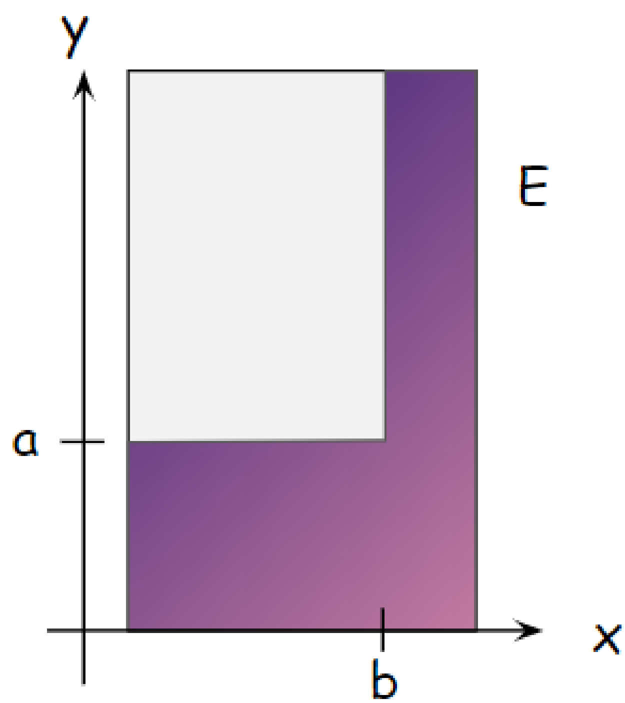
Los científicos observan los siguientes tejidos, en donde E se representa por la parte sombreada en cada rectángulo.



En este caso los patrones son similares, pero cambia un poco la descripción según la orientación de la "L". Tomemos el patrón de más a la izquierda y modelemos el conjunto E:

Vamos a usar dos parámetros: a y b.
Moléculas: (x,y)
Condición: $y \leq a$ o $x \geq b$.

Es decir, para cualquier molécula (x, y) dentro del tejido rectangular, (x, y) va a pertenecer a E exactamente en el caso de que $y \leq a$ o $x \geq b$ (o ambas).



Nota: También hubiéramos podido usar la siguiente condición: $y < a$ o $x > b$, en caso de que no quisiéramos incluir la frontera o borde del conjunto E en el conjunto.

Responde:

a) Describe el conjunto C de la parte i) usando los 5 parámetros que se recomiendan, con el fin de ganar más precisión al describir este conjunto.

b) ¿Cómo podrías describir el complemento del conjunto E de la parte iii)? Justifica tu respuesta.

c) Especula: ¿Qué sentido biológico se te ocurre darle a los tejidos que aparecen en la parte iii) y en particular al conjunto E?

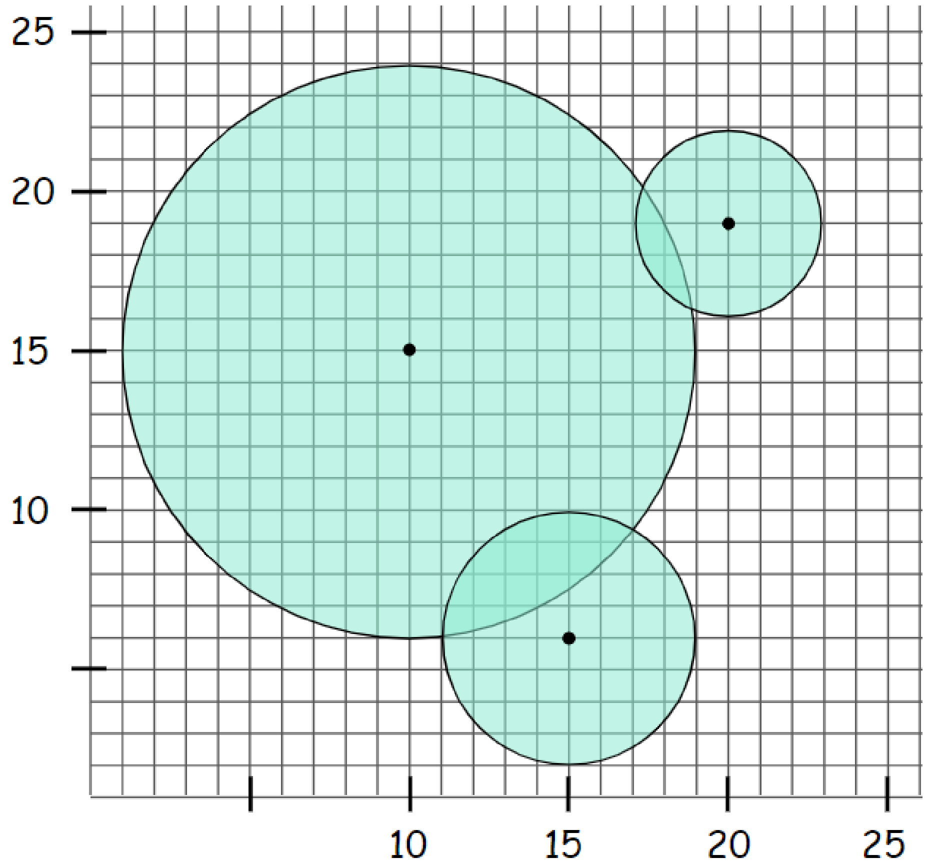
Mini-explicación: Describiendo regiones geométricas con variables y parámetros	
Describiendo regiones geométricas con variables y parámetros	Una región geométrica del plano es un conjunto de puntos (x, y) del plano. Para describir una región, podemos hacerlo informalmente en palabras, utilizando términos conocidos (cuadrado, recta, pendiente, distancia, etc). Otra forma que muchas veces es conveniente, ya que nos ayuda a entender mejor el conjunto, es con parámetros y variables. Los parámetros son números o pares de números que no cambian en la descripción del conjunto, y que nos dan más generalidad, al pensar en una familia de conjuntos similares. Las variables, x y y, son las que nos ayudan a definir lo que significa que un punto cualquiera (x, y) pertenezca al conjunto. Por ejemplo, para los parámetros (a, b), si pensamos en la condición "la distancia entre (x, y) y (a, b) es menor que 5". Es decir: $(x-a)^2+(y-b)^2<25$. Entonces estamos describiendo el interior de un círculo de radio 5, centrado en *C* = (a, b). Al usar letras para el parámetro, estamos describiendo una familia: la familia de TODOS los círculos con radio 5. Ese es el poder de los parámetros.

Paso 1: **Ejemplo: área de cobertura**

Una compañía de internet satelital instaló 3 antenas rurales. Unas antenas tienen más área de cobertura. La fuerza de la señal en todas las antenas desde el centro es la misma, y para cada antena, la fuerza de la señal en cualquier ubicación es decrece linealmente según la distancia de la antena a la ubicación. Este es el mapa, que está a una escala de **1 unidad : 150 metros**.

La compañía tiene un sistema inteligente que permite, de forma automática, detectar las coordenadas x y y de sus clientes según el mapa.

Por ejemplo, la coordenada (10, 15) corresponde a la ubicación de la antena con la mayor cobertura (9 unidades, es decir, 1 350 metros a la redonda).



Quisiéramos resolver las siguientes inquietudes:

i) ¿Cómo puedo elaborar un procedimiento que me permita decidir si una ubicación dada está en el área de cobertura?

ii) ¿Cómo puedo elaborar un procedimiento que me permita decidir, dado un punto en cobertura, cuál de las antenas es la que más le conviene usar? (solo se puede usar una antena para la señal).

Antes de responder, describamos la situación con ayuda de parámetros y variables.

Los parámetros son números o puntos en el plano que no cambian y nos sirven como base de los conjuntos que vamos a describir. En este caso los parámetros son los centros y los radios de cada círculo:

Círculo	**#1**	**#2**	**#3**
Centro	(10, 15)	(15, 6)	(20, 19)
Radio	9	4	3

Estas son las distancias de un punto cualquiera (x, y) a cada antena:

HEMOS USADO EL TEOREMA DE PITÁGORAS

#1: $\sqrt{(x-10)^2+(y-15)^2}$. #2: $\sqrt{(x-15)^2+(y-6)^2}$. #3: $\sqrt{(x-20)^2+(y-19)^2}$.

Ahora sí podemos responder:

i) Procedimiento para decidir si una ubicación dada está dentro del área de cobertura:

- Verificar si $\sqrt{(x-10)^2+(y-15)^2}<9$, o más simple, si $(x-10)^2+(y-15)^2<81$:

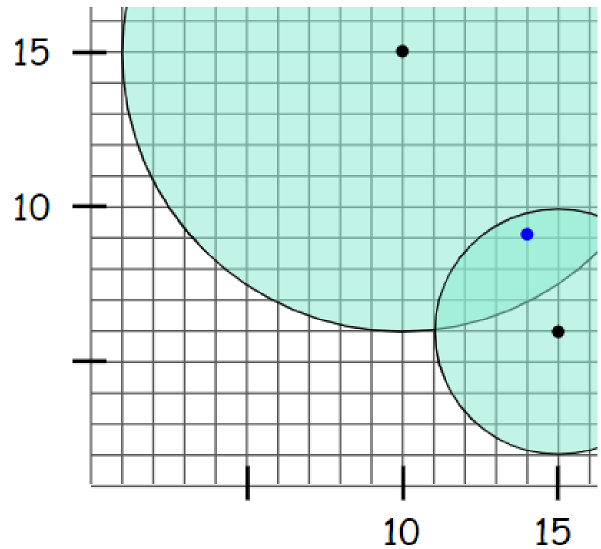
- Si sí, entonces el punto (x,y) está en la zona de cobertura.
- Si no, verificar si $(x-15)^2+(y-5)^2<16$:
    - Si sí, entonces el punto (x,y) está en la zona de cobertura.
    - Si no, verificar si $(x-20)^2+(y-20)^2<9$:
        - Si sí, entonces el punto (x,y) está en la zona de cobertura.
        - Si no, entonces (x, y) NO está cubierto por ninguna antena.

ii) Para decidir la mejor antena, dado un punto que esté en por lo menos alguna antena:

Calcular las siguientes fracciones, y solo considerar las que den un valor menor que 1:

#1: $\sqrt{(x-10)^2+(y-15)^2}\,/\,9$ #2: $\sqrt{(x-15)^2+(y-5)^2}\,/\,4$ #3: $\sqrt{(x-20)^2+(y-20)^2}\,/\,3$

Después, elegir el valor menor para saber qué antena usar.



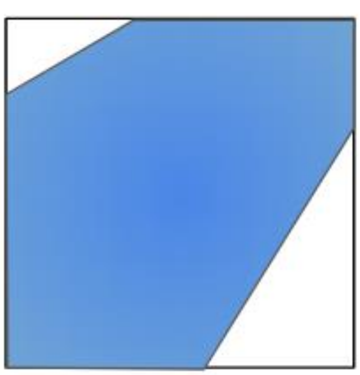
Ejemplo: si un hogar está ubicado en (14, 9), vemos que:

#1: $\sqrt{(14-10)^2+(9-15)^2}\,/\,9 = 0{,}801$
#2: $\sqrt{(14-15)^2+(9-6)^2}\,/\,4 = 0{,}790$
#3: $\sqrt{(14-20)^2+(9-19)^2}\,/\,3 = 3{,}887$

La expresión en #3 es mayor que 1, así que el punto NO está dentro del círculo #3. Como 0,801 y 0,790 son muy cercanos, cualquier antena entre #1 y #2 es igual de adecuada.

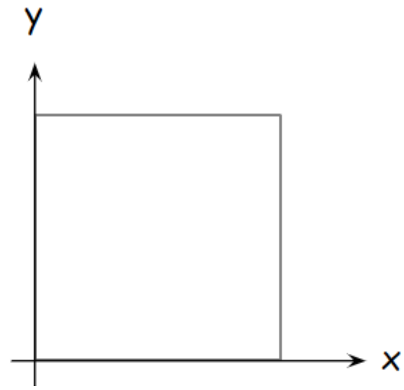
Ambas antenas van a proveer solo el 20% de la fuerza máxima de señal. ¿Puedes justificar por qué 20%?

<u>Paso 2</u>: **Completa este ejemplo: La zona de profundidad**




Cada uno de los cuadrados representa una piscina vista desde arriba, donde la región sombreada indica una zona de más profundidad que el resto. Llamemos D a esta zona.

a) ¿Cómo podemos describir la zona D en palabras?



R:/ D es un polígono de 6 lados, es decir, un hexágono.
Completa esta descripción en tus palabras, sin usar todavía ninguna variable…

b) ¿Cómo podemos describir D usando parámetros y variables?

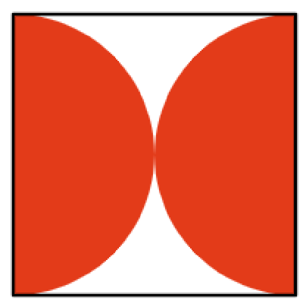
R:/ Para hacer todo más fácil, podemos pensar que el cuadrado siempre es de 1 x 1 y está pegado a los ejes, como se ve en la figura. Otra opción es usar una letra para el lado del cuadrado.

Para los parámetros, podemos pensar en las pendientes de las rectas más algunos de sus puntos de corte, o hacerlo todo con puntos de corte y sin las pendientes. Ambas formas son posibles.

Escoge los parámetros, dando su significado, y da la condición de que un punto cualquiera (x,y) pertenezca a la región D.

c) Elige valores particulares de los parámetros, haciendo un dibujo de la región, y da un ejemplo de 3 puntos dentro de D, y de 3 puntos dentro del cuadrado pero afuera de D.
Usa la parte b) para verificar todo esto.

Paso 3: **Tu turno: dos medios círculos**



Describe la región sombreada en la figura usando los parámetros que quieras, y variables x, y.

Después pon a prueba tu descripción, con varios ejemplos de puntos que pertenecen a la región, y varios ejemplos de puntos que NO pertenecen a la región.

PROYECTO GRUPAL	**APLIQUEMOS LO APRENDIDO**

Formen grupos de 4 estudiantes. Vamos a trabajar en un proyecto para aplicar lo que aprendimos.
Instrucciones:

1. Dibujen un rectángulo cuya razón entre lados sea 1:2, en una cartulina. También dibujen ejes cartesianos x, y, donde quieran, de forma que podamos hacer referencia a cada punto del rectángulo.

2. Dentro del rectángulo, inventen una región, dibújenla y sombréenla. La región puede ser un polígono, o una combinación entre un polígono y uno o varios círculos o medio-círculos.

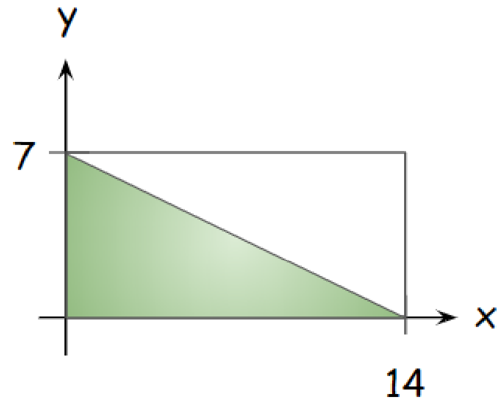
3. Describan la región de todas las formas posibles, incluyendo una en donde usen parámetros y variables.

4. Invéntense un problema de la vida real que use a la región que dibujaron, y resuélvanlo.

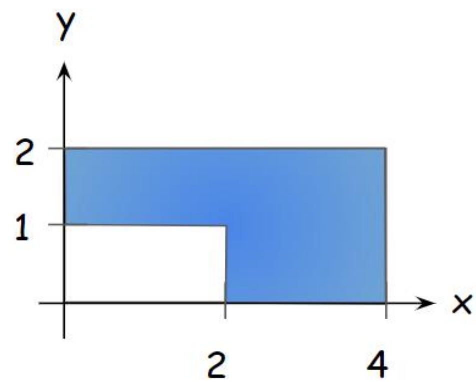
C) Resuelve y practica

1) Para cada una de las siguientes regiones sombreadas, descríbela en palabras y usando variables.

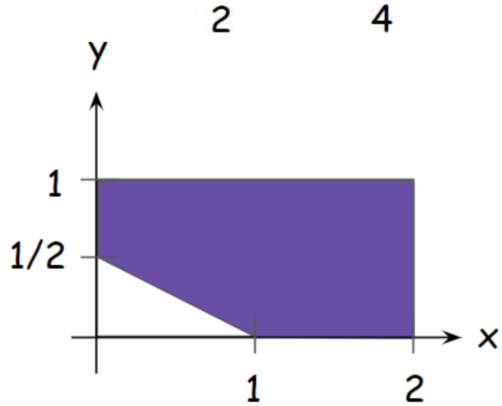
a)



b)

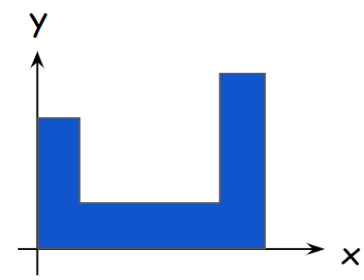


c)

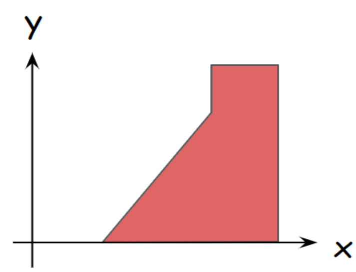


2) Para cada una de las siguientes regiones sombreadas, descríbela en palabras y usando parámetros y variables.

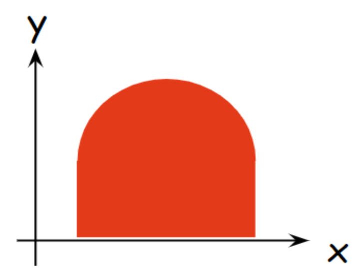
a)



b)

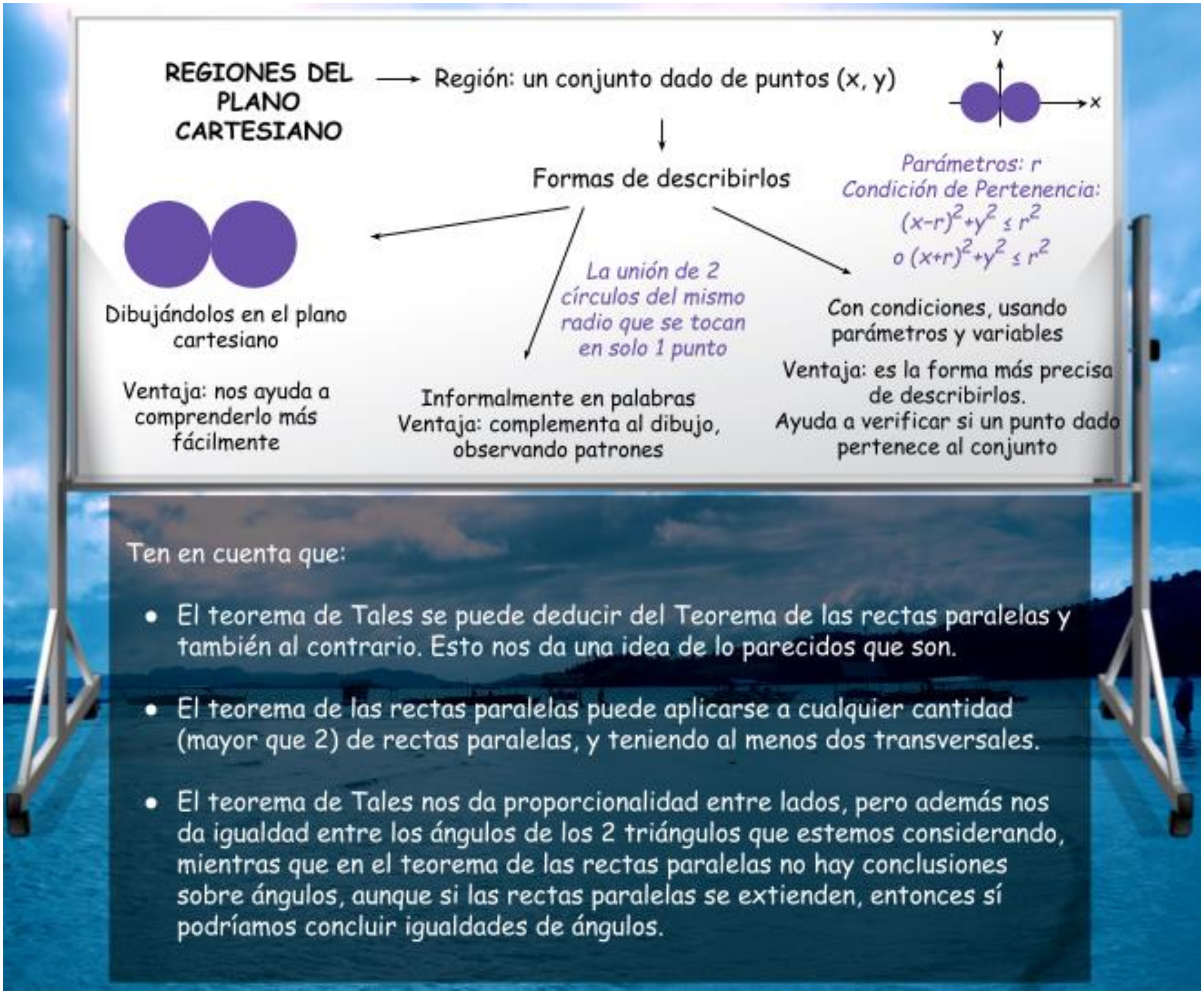


c)



3) Descubre y dibuja la región E descrita así:
Parámetros: $a < b < c$; $d < e < f$.
(x, y) pertenece a E si cumple:
"($0 < x < a$, $0 < y < f$) o ($a \leq x < b$, $0 < y < d$) o
($a \leq x < b$, $e < y < f$) o ($b \leq x < c$, $0 < y < f$)".

D) Resumen


REGIONES DEL PLANO CARTESIANO
Región: un conjunto dado de puntos (x, y)
y
x
Formas de describirlos
Dibujándolos en el plano cartesiano
Ventaja: nos ayuda a comprenderlo más fácilmente
La unión de 2 círculos del mismo radio que se tocan en solo 1 punto
Informalmente en palabras
Ventaja: complementa al dibujo, observando patrones
Parámetros: r
Condición de Pertenencia:
$(x-r)^2+y^2 \leq r^2$
o $(x+r)^2+y^2 \leq r^2$
Con condiciones, usando parámetros y variables
Ventaja: es la forma más precisa de describirlos.
Ayuda a verificar si un punto dado pertenece al conjunto
Ten en cuenta que:
El teorema de Tales se puede deducir del Teorema de las rectas paralelas y también al contrario. Esto nos da una idea de lo parecidos que son.
El teorema de las rectas paralelas puede aplicarse a cualquier cantidad (mayor que 2) de rectas paralelas, y teniendo al menos dos transversales.
El teorema de Tales nos da proporcionalidad entre lados, pero además nos da igualdad entre los ángulos de los 2 triángulos que estemos considerando, mientras que en el teorema de las rectas paralelas no hay conclusiones sobre ángulos, aunque si las rectas paralelas se extienden, entonces sí podríamos concluir igualdades de ángulos.

E) Valoración

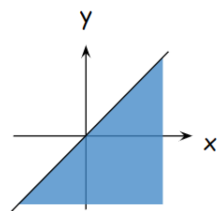
i) Califica tu comprensión por tema en tu cuaderno

Tema	●○○ No entiendo los conceptos (TODAVÍA)	●●○ Voy bien pero quiero más práctica	●●● Comprendí muy bien el tema
Describo un conjunto del plano a partir de un dibujo usando parámetros y variables			
Dibujo un conjunto en el plano, dada su descripción con variables			
A partir de la descripción de un conjunto del plano, verifico si un punto dado está o no en el conjunto			

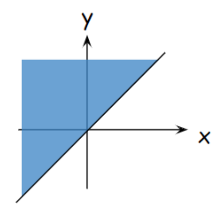
ii) Preguntas de comprensión

1) El conjunto dado por "x > y" es...

[ ]

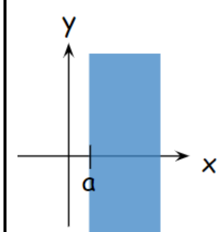


[ ]

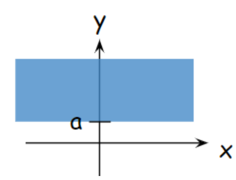


2) El conjunto dado por "y > a" es...

[ ]

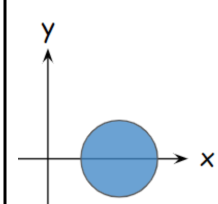


[ ]

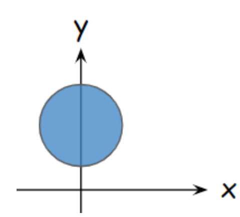


3) Sea a > 0 El conjunto dado por "$(x-a)^2 + y^2 < 1$" es...

[ ]



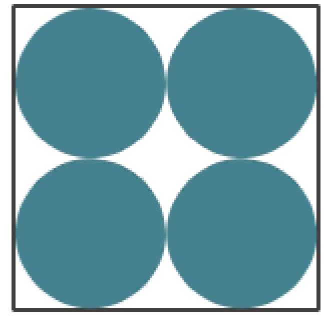
[ ]



(Verifica las respuestas con tu profesor)

iii) Resuelvo un problema

Describe el siguiente conjunto en palabras y también usando ejes, variables y parámetros:



ACTIVIDAD 2: TRANSFORMACIONES RÍGIDAS Y TESELACIONES EN EL PLANO

Profundicemos en conceptos de transformaciones, analizándolas en el plano cartesiano: traslaciones, rotaciones y reflexiones. Usemos esto para recubrir el plano.

A) Activando saberes previos

RECUERDA QUE...

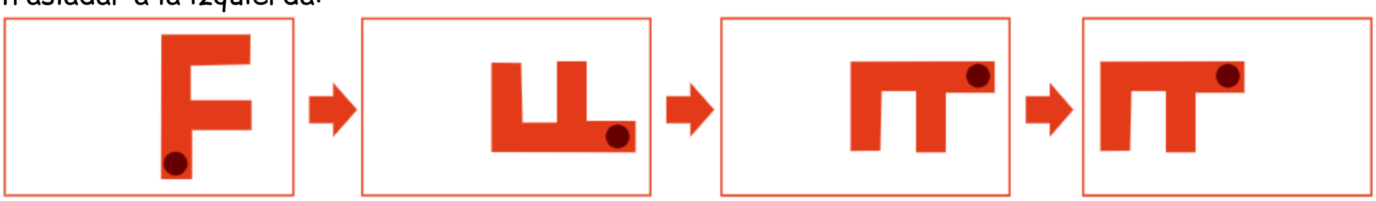
Las TRANSFORMACIONES RÍGIDAS de una figura plana son aquellas en donde la figura transformada es una copia idéntica (CONGRUENTE) a la figura inicial. Tiene el mismo tamaño y la misma forma, ángulos, simetrías, distancias entre puntos correspondientes, etc, aunque puede estar en una posición distinta, incluyendo haber sido "volteada".

Hay 3 tipos básicos de transformaciones rígidas:

- Traslación: "mover la figura en cualquier dirección"
- Rotación: "girar la figura con respecto a cierto punto, cierto número de grados"
- Reflexión con respecto a un eje: "voltear la figura, cambiando su orientación".

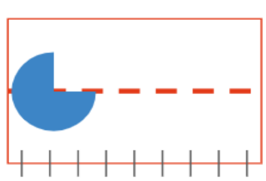
Sin embargo, podemos combinar las 3 formas básicas para obtener otras transformaciones rígidas. Por ejemplo: rotar y luego trasladar; reflejar y luego rotar, etc.

Ejemplo: La letra F se puede rotar 90 grados en contra de las manecillas, reflejar verticalmente y trasladar a la izquierda:



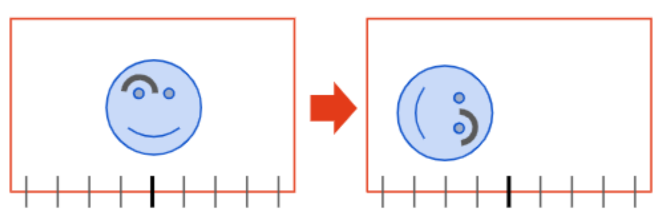
PRACTICA

i) Considera esta figura:



a) Rótala 180 grados, luego refléjala con respecto al eje horizontal y finalmente muévela a la derecha 4 unidades.

ii) Considera esta transformación:



b) ¿Puedes pensar en otras secuencias de transformaciones que hagan lo mismo que arriba?	Describe una posible secuencia de transformaciones rígidas que al seguirlas sean iguales a la transformación. Usa lenguaje preciso.

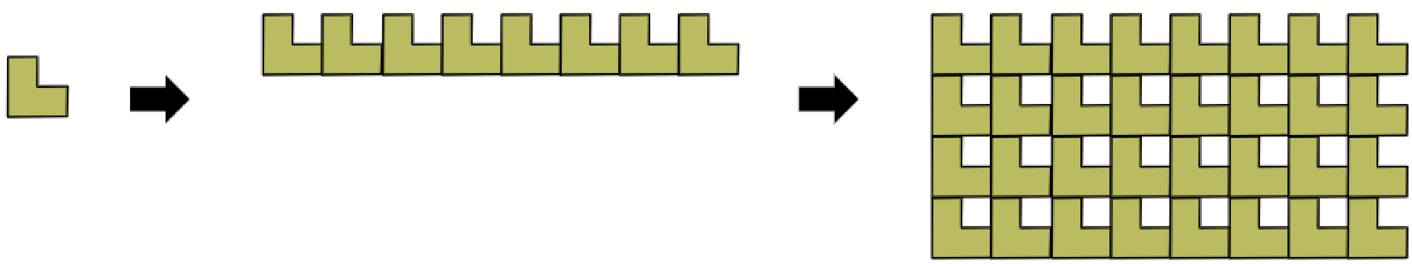
B) Conceptos

Exploremos: Patrones repetitivos

Antes de comenzar discute en clase:

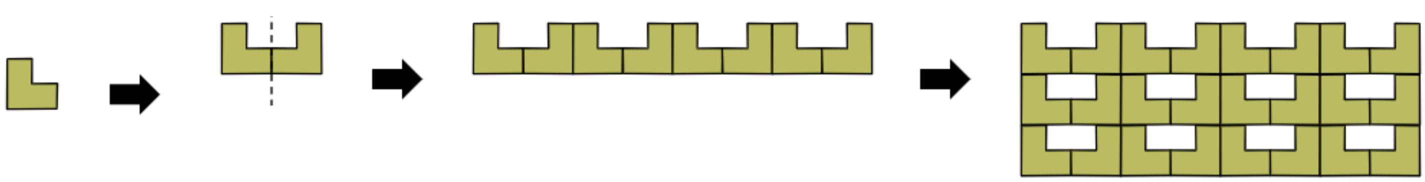
Un decorador de interiores quiere hacer motivos para recubrir una pared con un papel tapiz.

Su primer intento es el siguiente: Comienza con una figura de L, y la va trasladando, copiando la figura, primero hacia la derecha, y luego hacia abajo:



Como puedes ver, las figuras no se sobreponen, pero no cubren toda la pared, pues dejan huecos.

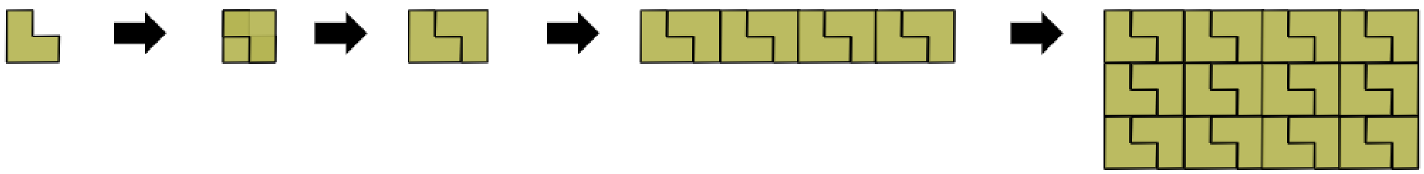
El decorador tiene otra idea:
Primero, reflejar la L con respecto a un eje vertical.
Después, trasladar ambas figuras (la inicial y su reflejo). Observa:



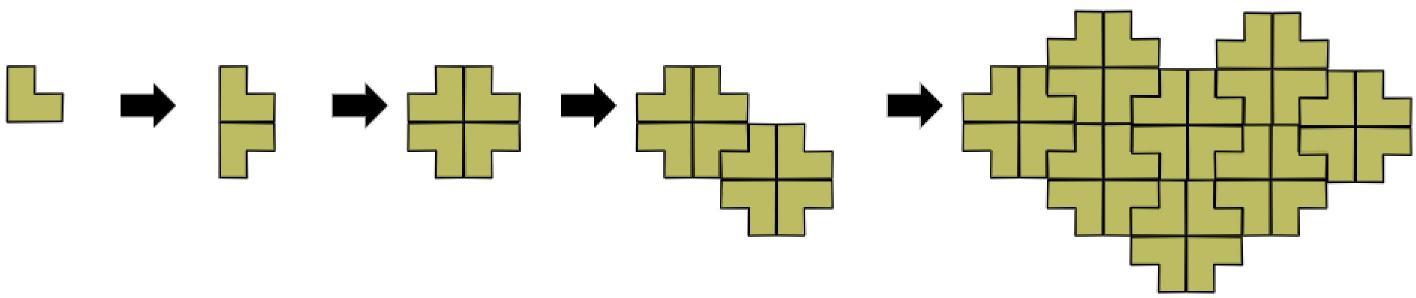
Todavía hay huecos…

Entonces, el decorador tiene una nueva idea:
Primero, rotar la L 180 grados.
Después trasladarla,

Después, trasladar ambas figuras (la inicial y su reflejo). Observa:



¡Misión cumplida! Se ha cubierto toda la pared con la misma figura. Sabemos que es la misma figura ya que al rotar y trasladar una figura, esta NO cambia (es decir, es CONGRUENTE a la figura inicial).
Otra posibilidad es la siguiente:



Esta opción incluye varias reflexiones, y después traslaciones.

Responde:

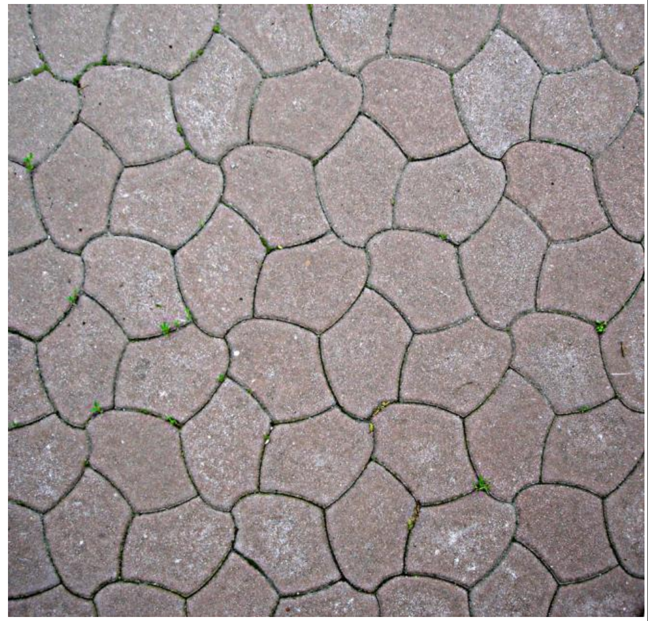
a) ¿Crees que la última posibilidad puede cubrir la pared sin dejar huecos? Explica.

b) Se te ocurren otras ideas de cómo usar rotaciones y reflexiones para lograr el objetivo, comenzando con la L inicial? Dibuja tus ideas.

c) ¿Es posible lograr el objetivo de cubrir la pared solo usando traslaciones? Inténtalo.

Mini-explicación: Teselación del plano usando transformaciones	
Teselación del plano usando transformaciones	Una teselación del plano o mosaico es una repetición de figuras planas que cubren a todo el plano cartesiano, sin dejar huecos y sin que las figuras se intersequen (solo

pueden tocarse en sus fronteras). Es decir, no puede haber superposiciones.



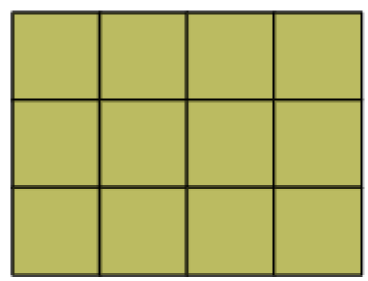
Un GENERADOR es una figura plana que al copiarse y aplicarle transformaciones rígidas (que no le cambien su forma y tamaño) puedan lograr el recubrimiento o teselación.

Si la teselación está hecha de polígonos, entonces en cualquier punto o vértice de la teselación, la suma de ángulos que rodean al punto debe ser igual a 360 grados. Esta suma nos ayuda a pensar en cómo hacer teselaciones, o a justificar por qué no es posible hacerlas.

Paso 1: **Ejemplo: Teselando con polígonos regulares**

Intentemos usar un único polígono regular para teselar el plano, es decir, cubrirlo sin dejar huecos ni superponer las figuras. Es decir, las figuras solo se pueden tocar en vértices o en sus bordes:

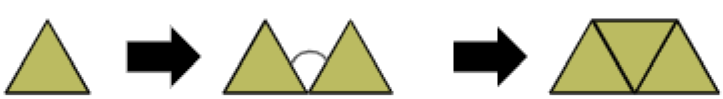
Con un cuadrado (N=4):



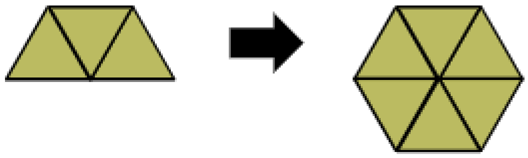
Vemos que con simples traslaciones podemos lograrlo: si el cuadrado es de lado x, entonces se va copiando y trasladando x unidades a la derecha, izquierda, arriba o abajo, para ir cubriendo el plano.

Con un triángulo equilátero (N=3):

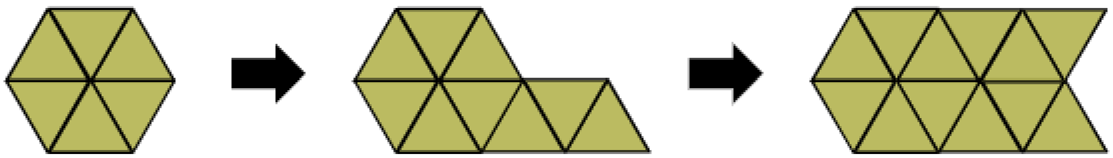
Partamos de un triángulo equilátero. Si generamos una copia y la trasladamos como se ve, se forma un ángulo de 60 grados. Entonces podemos generar una nueva copia del triángulo y rotarlo (o reflejarlo) para que "encaje" en este ángulo.



Si ahora generamos una copia de todo lo que tenemos y la reflejamos con respecto a la base (eje horizontal), obtenemos un hexágono.

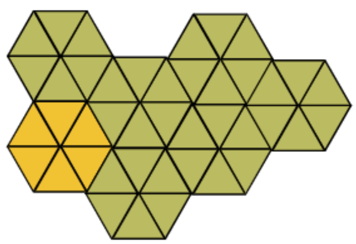


Usando la parte formada por los 3 triángulos (trapecio) y traslaciones, podemos seguir cubriendo el plano como se muestra:



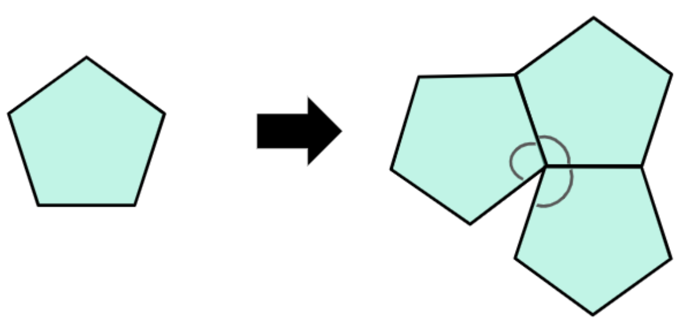
Así, vemos que es posible cubrir el plano con copias de un único triángulo equilátero.
¿Se te ocurren otros procesos para cubrir el plano con el triángulo? Explícalos.

El caso del hexágono regular (N=6) es similar.



Con un pentágono (N=5):

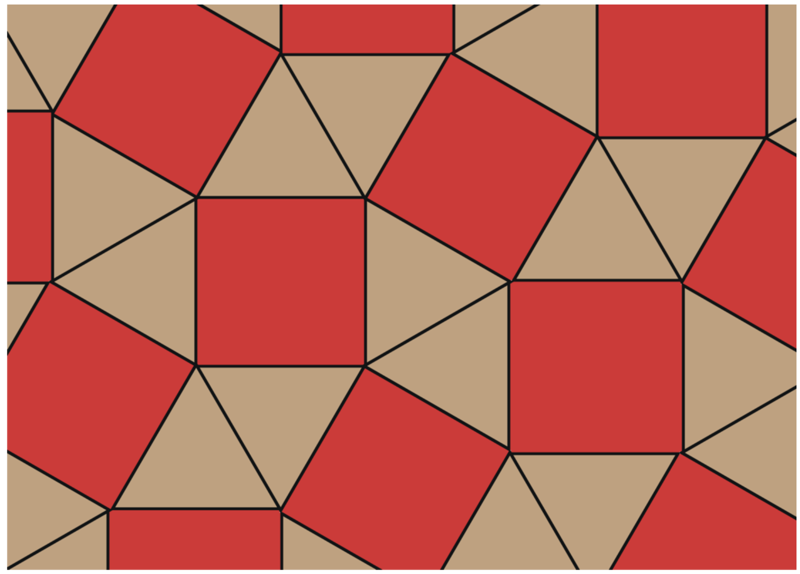
Al intentar cubrir el plano con pentágonos, vemos que sin importar cómo tratemos, quedan algunos huecos dados por ángulos incompletos: no logramos "rellenar" los 360 grados como sí pudimos en los otros casos.



Recordando que el ángulo interno en un pentágono regular es de 108 grados, vemos que como 108 + 108 + 108 = 324, entonces nos faltaron 36 grados para poder cubrir los 360 grados.

Así, NO podemos teselar el plano con copias de un pentágono regular, pues 108 no es un divisor de 360.

Paso 2: **Completa este ejemplo:**
Encontremos el generador del patrón



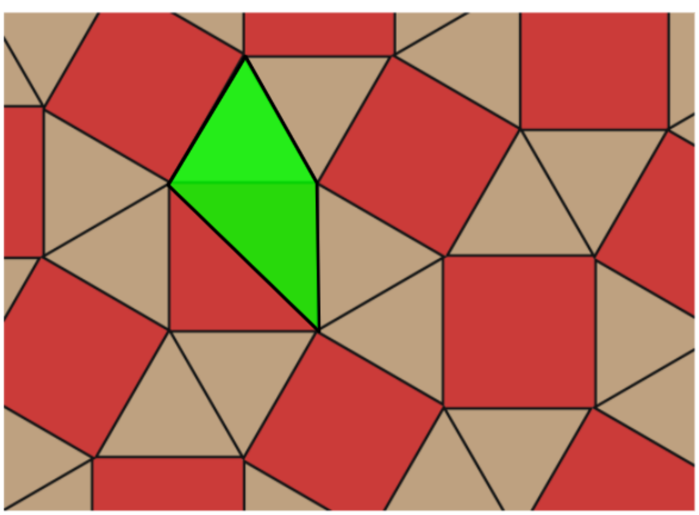
Observa la figura que recubre el plano.

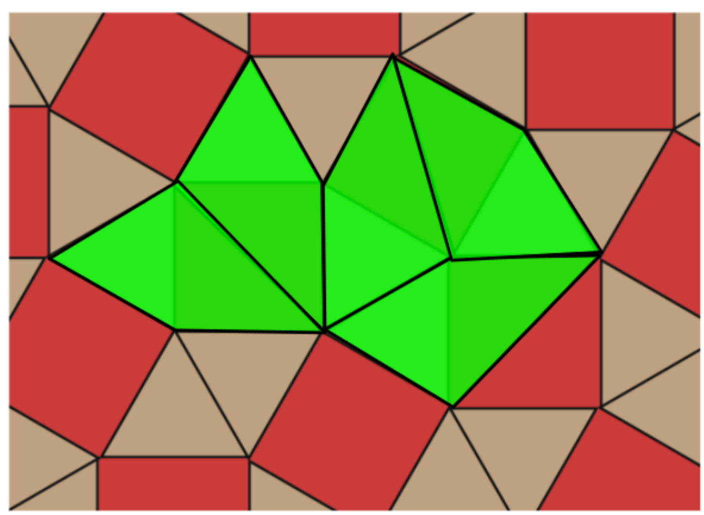
a) ¿Qué observas?
R:/ observamos cuadrados y triángulos equiláteros.

b) Verifica que en cada vértice, la suma de los ángulos que lo rodean es en efecto 360 grados.

c) ¿Cuál podría ser una figura generadora del patrón?

R:/ El cuadrado NO es un generador, ya que solo con el cuadrado no podemos generar los triángulos. Una opción es el cuadrilátero que ves, que es la unión de un triángulo equilátero con uno recto isósceles:





Para lograr cubrir el plano, debemos reflejar esta figura, formando una especie de "avión de papel", y rotar y trasladar las partes.

Encuentra por lo menos otras dos opciones de generadores, y describe si necesitas solo traslaciones, o también rotaciones o reflexiones para lograr cubrir el plano.

Paso 3: **1-2-4: Tu turno (individual, en parejas y en grupos de 4)**

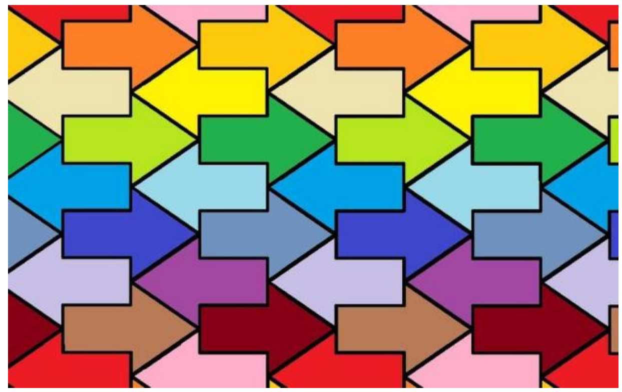
En una cartulina o papel grande, dibuja una figura plana que creas que pueda servir para teselar toda la cartulina.

Intenta hacer esto, describiendo las transformaciones que debes hacer. Si no consigues tu objetivo, puedes cambiar la forma de tu figura.

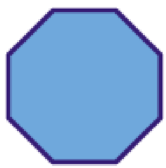
Júntate con otro estudiante e intercambien sus intentos de teselado, trabajando en equipo. Anoten sus dudas comunes y sus diferencias en cómo midieron y cómo usaron las transformaciones.

Júntense con otra pareja y compartan sus soluciones. Encuentren errores o dibujos que puedan mejorar, y comparen sus apreciaciones.
Finalmente, busquen a su profesor para dialogar y compartir sus estrategias y respuestas, aclarando los conceptos.

C) Resuelve y practica

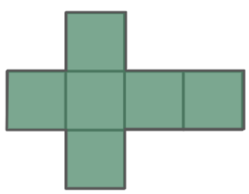


1) ¿Es posible recubrir todo el plano usando un octágono regular? Justifica tu respuesta.



2) ¿Es posible recubrir todo el plano usando un triángulo rectángulo isósceles? Justifica tu respuesta.

3) ¿Es posible recubrir todo el plano usando la cruz que ves? Justifica tu respuesta.

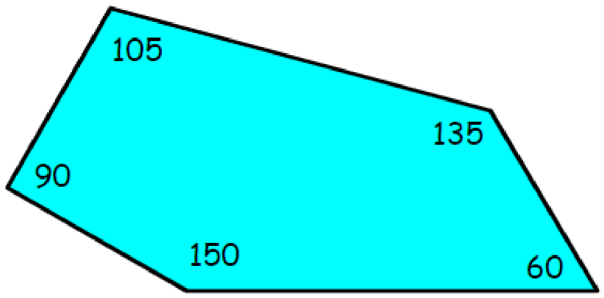


6) Para cada una de las siguientes teselaciones del plano, encuentra un posible generador, y describe las transformaciones necesarias para copiar el generador y cubrir el plano.

a)

b)

4) Observa el siguiente pentágono, junto con las

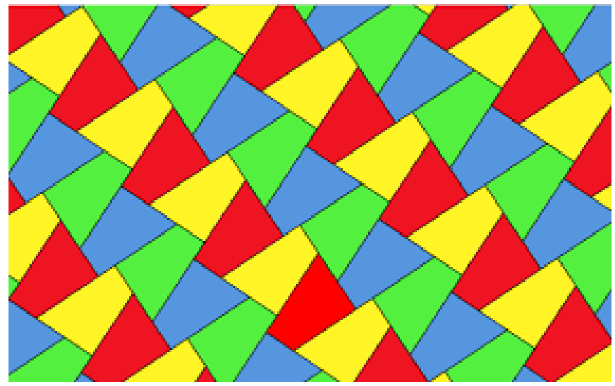


medidas de sus ángulos.

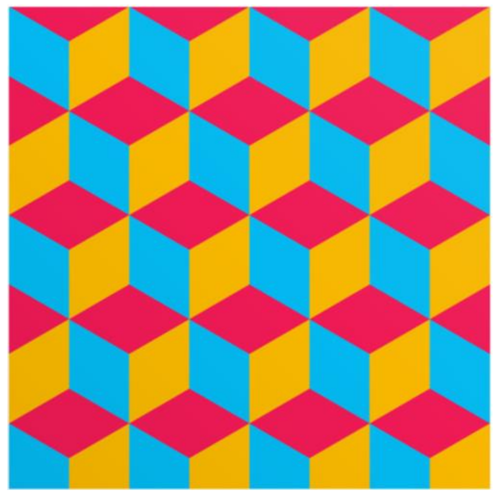
a) Usando los ángulos como guía, intenta unir varias copias del pentágono alrededor de un vértice, verificando que la suma es 360 grados.

b) Cubre el plano con copias del pentágono e indica qué tipos de transformaciones necesitaste.

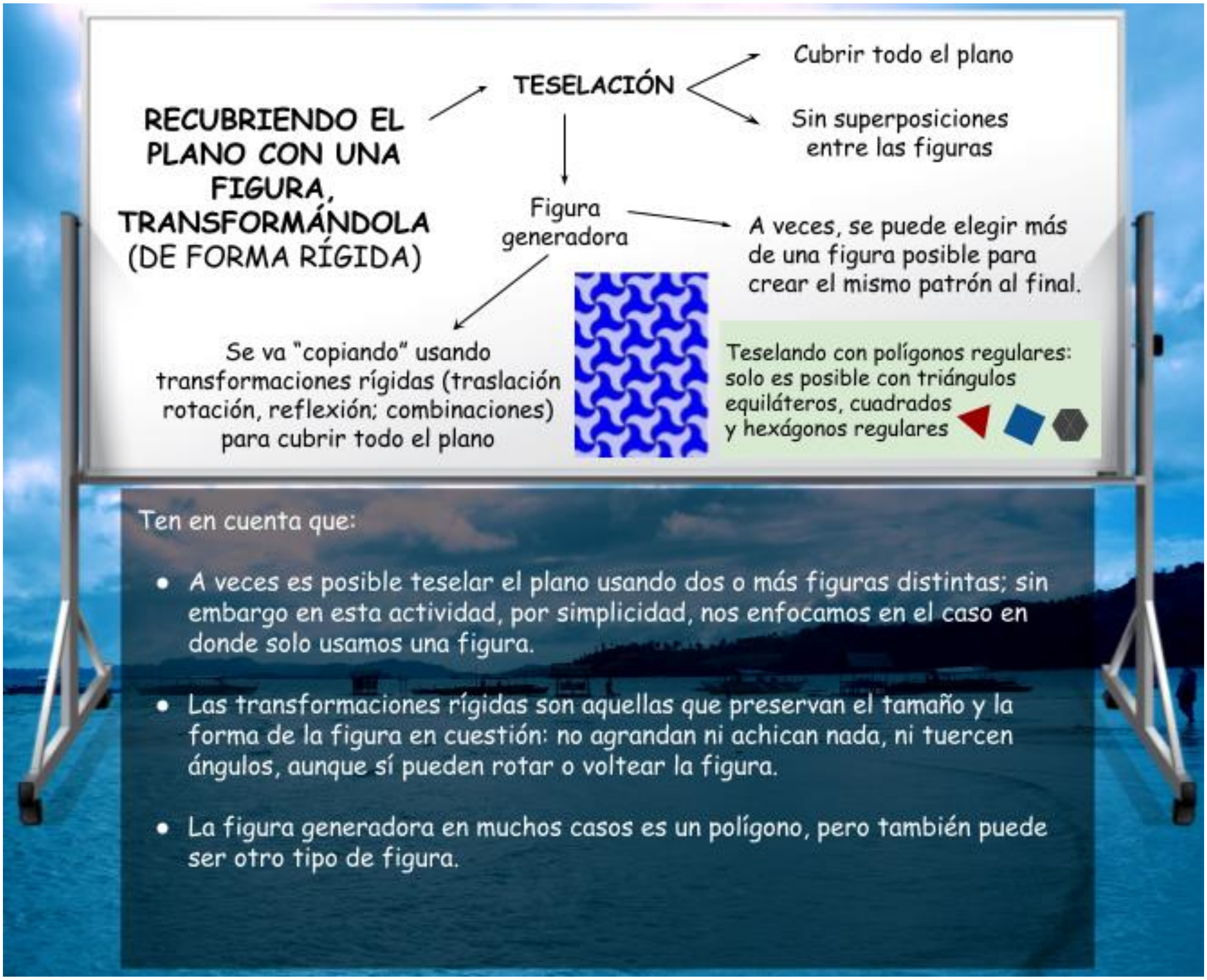
5) ¿Crees que es posible teselar el plano usando *cualquier* triángulo como generador? Ensaya con varios triángulos. [Ayuda: recuerda que la suma de ángulos de un triángulo siempre vale 180 grados.]



c)



D) Resumen


RECUBRIENDO EL PLANO CON UNA FIGURA, TRANSFORMÁNDOLA (DE FORMA RÍGIDA)
TESELACIÓN
Cubrir todo el plano
Sin superposiciones entre las figuras
Figura generadora
A veces, se puede elegir más de una figura posible para crear el mismo patrón al final.
Se va "copiando" usando transformaciones rígidas (traslación rotación, reflexión; combinaciones) para cubrir todo el plano
Teselando con polígonos regulares: solo es posible con triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares
Ten en cuenta que:
• A veces es posible teselar el plano usando dos o más figuras distintas; sin embargo en esta actividad, por simplicidad, nos enfocamos en el caso en donde solo usamos una figura.
• Las transformaciones rígidas son aquellas que preservan el tamaño y la forma de la figura en cuestión: no agrandan ni achican nada, ni tuercen ángulos, aunque sí pueden rotar o voltear la figura.
• La figura generadora en muchos casos es un polígono, pero también puede ser otro tipo de figura.

E) Valoración

i) Califica tu comprensión por tema en tu cuaderno

Tema	●○○ **No entiendo los conceptos (TODAVÍA)**	●●○ **Voy bien pero quiero más práctica**	●●● **Comprendí muy bien el tema**
Aplico transformaciones rígidas a una figura plana			
Recubro el plano usando una figura plana a partir de transformaciones			
Dado un recubrimiento del plano, identifico una figura generadora del recubrimiento			

ii) Preguntas de comprensión

1) Para recubrir el plano con copias de un triángulo...
[ ] este debe ser equilátero.
[ ] este puede ser cualquier triángulo.

2) Para recubrir el plano con copias de un rectángulo...
[ ] este debe ser un cuadrado.
[ ] este puede ser cualquier rectángulo.

3) Al recubrir el plano con un triángulo equilátero...
[ ] necesitamos hacer traslaciones, y además reflexiones o rotaciones.
[ ] basta con hacer traslaciones

4) Al intentar recubrir el plano con un pentágono...

[ ] Siempre fallaremos
[ ] A veces fallaremos, pero a veces lo lograremos, dependiendo del pentágono.

(Verifica las respuestas con tu profesor)

iii) Resuelvo un problema

Intenta cubrir una cuadrícula de 12 x 12 utilizando esta figura de área 7 como generadora. No importa que te salgas de la cuadrícula. Lo importante es que no dejes huecos y que las figuras no se sobrepongan.