



**Fe y Alegría**  
*Colombia*  
Una educación justa para todos

**CH-FyA-0502**

## Guía 86: Triángulos, distancias y razones

Guía

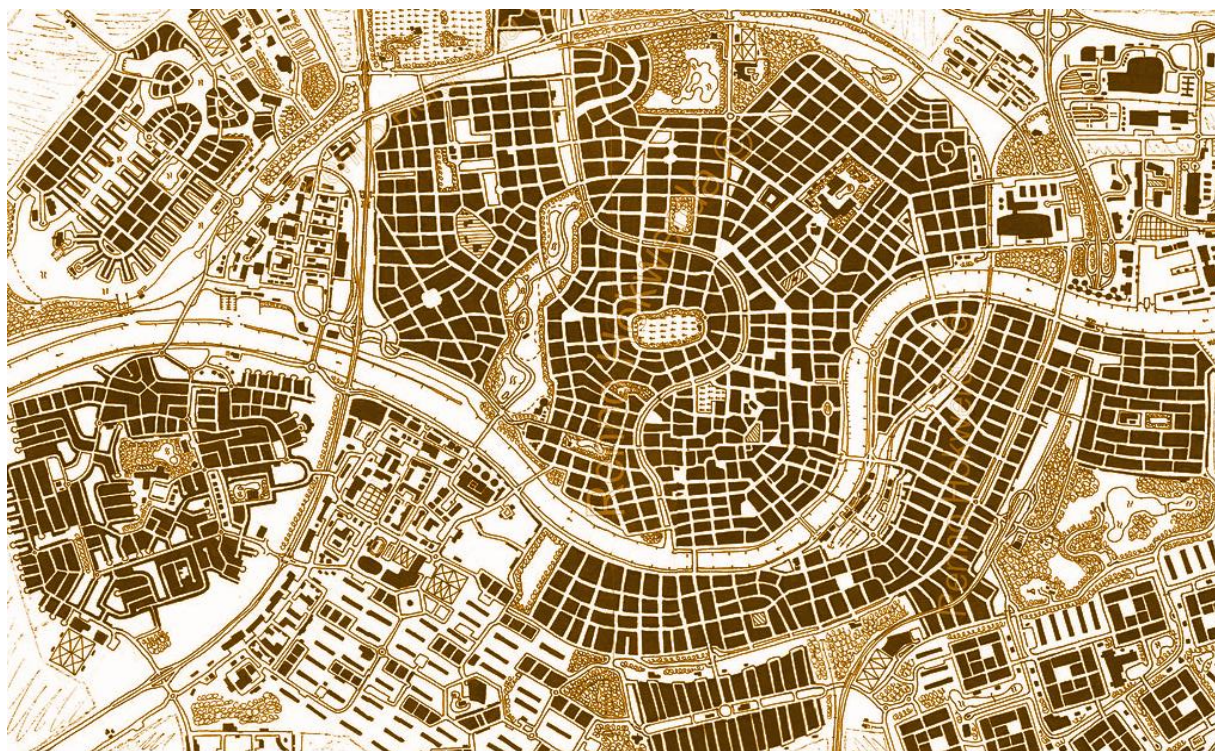
86

Meta 29

GRADO 9

## GUÍA DEL ESTUDIANTE

# TRIÁNGULOS, DISTANCIAS Y RAZONES





# Fe y Alegría

Movimiento de Educación Popular Integral y Promoción Social

## Guías de Aprendizaje de Cualificar Matemáticas Fe y Alegría Colombia

### Fe y Alegría Colombia

Víctor Murillo

Director Nacional

### Desarrollo de contenidos pedagógicos y educativos

Jaime Benjumea - Marcela Vega

### Autores de la guía 86

Francy Paola González Castelblanco

Andrés Forero Cuervo

### Coordinación pedagógica

Francy Paola González Castelblanco

Andrés Forero Cuervo

GRUPO LEMA [www.grupolema.org](http://www.grupolema.org)

### Revisores

Jaime Benjumea

Francy Paola González Castelblanco



# TRIÁNGULOS, DISTANCIAS Y RAZONES

## GRADO 9 - META 29 - PENSAMIENTOS MÉTRICO - ESPACIAL

<b>Guía 85</b> (Duración 13 h)	<b>Guía 86</b> (Duración 13 h)	<b>Guía 87</b> (Duración 13 h)
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Clasificación de sólidos</li> <li>• Descomposición de sólidos</li> <li>• Estimación de volumen</li> <li>• Vértices, caras y aristas</li> <li>• Área de superficie de sólidos</li> <li>• Comparación entre volumen y área superficial de sólidos</li> </ul>	<p><b>ACTIVIDAD 1</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Aplicaciones del teorema de Pitágoras</li> <li>• Minimizar distancias</li> <li>• Diámetro de distintas figuras</li> </ul> <p><b>ACTIVIDAD 2</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Aplicaciones de semejanzas</li> <li>• El teorema de las rectas paralelas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conjuntos en el plano</li> <li>• Descripción de conjuntos usando variables, parámetros y desigualdades</li> <li>• Aplicaciones con transformaciones rígidas en el plano</li> <li>• Teselaciones</li> <li>• Teselaciones con polígonos regulares</li> </ul>

### META DE APRENDIZAJE N. 29

Argumento y razono al aplicar propiedades espaciales a proyectos como el diseño de estructuras en arquitectura, y la construcción de represas, para resolver problemas que aporten al bienestar común, donde debo aproximar la forma o volumen de objetos con sólidos conocidos, hallar su área superficial y volumen (pirámides, conos, esferas) y usar escalas. Ubico y describo figuras en el plano, las transformo y describo cómo cambia (o no) su forma y tamaño, y con ello hago patrones decorativos de baldosas. Comprendo y uso el teorema de Pitágoras y profundizo en criterios de semejanza de triángulos (teorema de Tales), para encontrar distancias geográficas y alturas. Así, uso lo que ya sé para resolver nuevos problemas geométricos de mi entorno.

### PREGUNTAS ESENCIALES, GUÍA 86:

- ¿Por qué es tan importante el teorema de Pitágoras?
- ¿Qué significa minimizar una distancia? ¿Puedes dar ejemplos?
- ¿Cómo puedo hallar la máxima distancia posible entre dos puntos de una región?
- ¿Cómo puedo utilizar la semejanza de figuras en mi mundo cotidiano?
- ¿En qué situaciones encuentro 2 o más rectas que son paralelas? Explica.

### **EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE, GUÍA 86:**

- Razono para hallar la distancia entre dos puntos usando el teorema de Pitágoras
- Aplico el teorema de Pitágoras para hallar medidas en triángulos
- Analizo un conjunto geométrico para hallar su diámetro
- Comprendo cuándo podemos aplicar el teorema de las rectas paralelas
- Deduzco el teorema de las rectas paralelas utilizando el teorema de Tales
- Aplico el teorema de las rectas paralelas a situaciones del mundo real

## ACTIVIDAD 1: APLICANDO PITÁGORAS

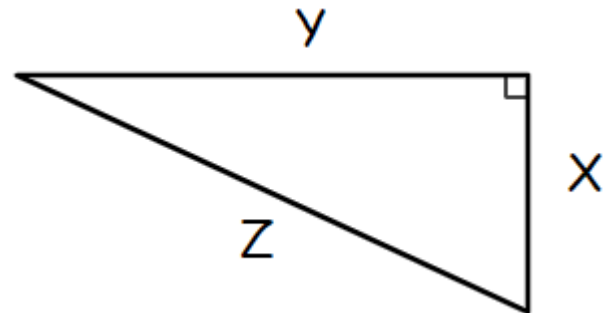
Aprendamos a usar el teorema de Pitágoras en distintas situaciones para encontrar distancias desconocidas conociendo otras.

### A) Activando saberes previos

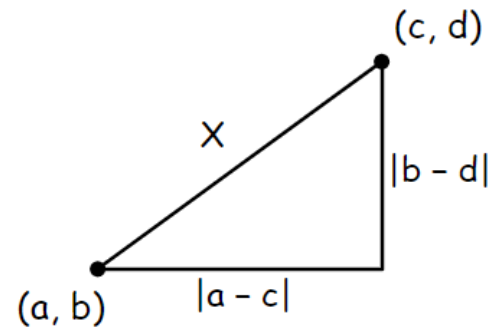
#### RECUERDA QUE...

- El teorema de Pitágoras lo usamos como herramienta para hallar uno de los lados de un triángulo rectángulo si conocemos los otros dos.
- El teorema nos da la fórmula  $Z^2 = X^2 + Y^2$ , en donde X y Y son los catetos del triángulo rectángulo y Z es su hipotenusa (lado opuesto al ángulo de 90 grados). En particular:

- $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$
- $Y = \sqrt{Z^2 - X^2}$
- $X = \sqrt{Z^2 - Y^2}$



- El teorema de Pitágoras solo aplica a triángulos rectángulos. Si el triángulo que estamos estudiando no es recto, muchas veces lo podemos partir por su altura en dos triángulos rectos, y aplicar el teorema de Pitágoras.
- La distancia entre dos puntos del plano cartesiano (a, b) y (c, d) la podemos hallar con el teorema de Pitágoras, así:
  - Paso 1: construimos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la distancia X que buscamos y los catetos miden  $|a - c|$  y  $|b - d|$
  - Paso 2: aplicamos el teorema:  $X = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$ .



#### PRACTICA

i) Dibuja un triángulo rectángulo con medidas de 6, 10 y 8. Usa una regla. Verifica que se cumple el teorema de Pitágoras.

iii) Encuentra 6 puntos distintos (x, y) que estén todos a la misma distancia de 3 unidades del punto (1, 1), y dibújalos.

ii) ¿Hay triángulos rectángulos cuyos lados midan 11, 3 y 6?  
Explica.

Usa el teorema de Pitágoras para  
verificar tus respuestas.

## B) Conceptos

### Exploración: Minimizando la distancia

Antes de comenzar discute en clase: ¿Cómo haces en tu vida cotidiana para encontrar la mínima distancia entre dos puntos cuando viajas? ¿Qué tienes en cuenta?



Sofía acaba de mudarse a una nueva ciudad y quiere ir de su casa a una tienda que le gusta mucho, recorriendo la menor distancia posible. Dado que en la ciudad hay edificios, no todas las rutas son posibles.

Tres amigos le recomiendan cada uno una ruta distinta.

Ricardo le recomienda la ruta a, diciéndole: "Te mueves al sur durante unos 8 minutos, después al este durante unos 24 minutos.

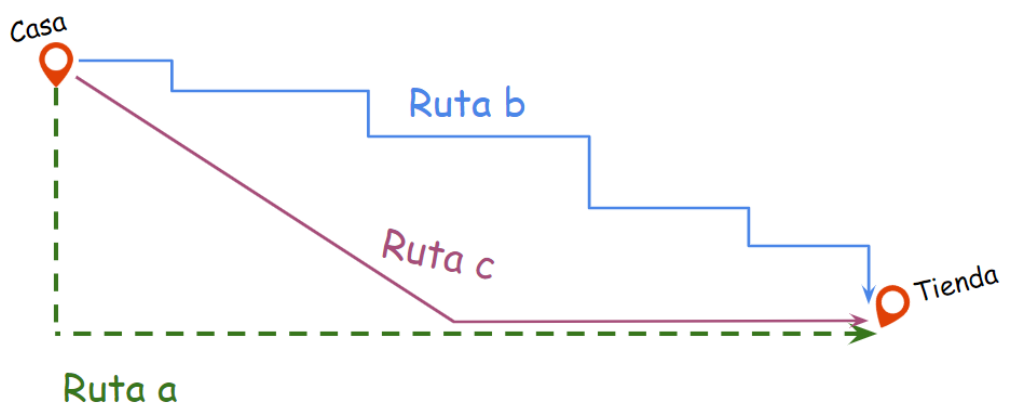
María Paula le recomienda la ruta b. Ella le dice que la ruta b es más diagonal que la a, por lo que se demorará menos.

Jacinto le recomienda la ruta c, diciéndole: "no es perfecta, pero es fácil de seguir y es corta".

¿Qué ruta debe seguir Sofía? ¿Habrá una mejor ruta posible? Piensa esto antes de continuar...

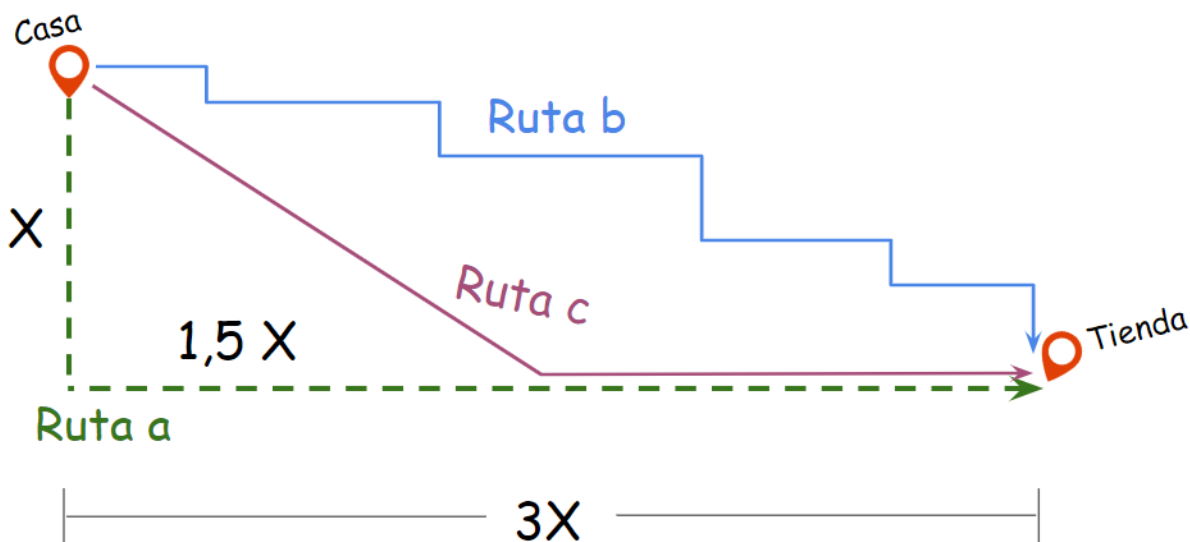
Resolvamos el problema. A partir de los tiempos de la ruta a (8 minutos y 24

minutos), la razón de tiempos, y también de longitudes de los dos segmentos de recta es de 8:24, es decir, 1:3.



Una buena estrategia es usar la razón  $X : 3X$ . La variable  $X$  es una medida de longitud.

Además, a partir de la información, nos queda un triángulo recto de catetos  $X$  y  $1,5X$ .



Analicemos cada ruta y vamos comparándolas entre sí:

**Ruta a:** Como vemos, la longitud de esta ruta es igual a  $X + 3X = 4X$ .

**Ruta b:** De la ruta b no tenemos información particular de cada segmento. Pero si observamos bien, al sumar las longitudes de los segmentos verticales obtenemos  $X$  y al sumar las longitudes de los segmentos horizontales obtenemos  $3X$ . Así, la longitud de esta ruta es igual a  $X + 3X = 4X$ .

Entonces María Paula se equivoca al creer que la ruta b es mejor que la a: son exactamente iguales.

**Ruta c:** Esta se compone de una diagonal junto con un segmento horizontal (que mide  $1,5X$ ).

$$X^2 + (1,5X)^2 = Y^2$$

$$X^2 + \frac{9}{4} X^2 = Y^2 \quad (\text{aquí usamos que } 1,5 = \frac{3}{2}).$$

Para hallar longitud  $Y$  de la diagonal, usamos el teorema de Pitágoras:

$$Y^2 = \frac{13}{4} X^2$$

$$Y = \frac{\sqrt{13}}{2} X \approx 1,8 X.$$

Entonces la ruta c mide aproximadamente  $1,8X + 1,5X = 3,3X$ . Es la mejor de las 3, pues  $3,3 < 4$ .



**Responde:**

a) Da un ejemplo de una ruta que sea más larga que las 3 anteriores, y otra que sea más corta que las 3 anteriores. No tienes que calcular sus longitudes, pero sí justificar.

b) Dibuja la ruta más corta que te puedas imaginar. Calcula su longitud en términos de  $X$ . ¿Crees que es probable que esta ruta esté disponible en la ciudad? Justifica tu respuesta.



### Mini-explicación: Usando el teorema de Pitágoras para minimizar distancias

**Usando el teorema de Pitágoras para minimizar distancias**

En general, la distancia más corta entre 2 puntos en el plano (o en el espacio) se halla calculando la longitud del único segmento de recta que los une. Al hacer eso muchas veces podemos dibujar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es precisamente la distancia buscada. Los otros catetos se pueden hallar a partir de la información que tengamos disponible.

Hay situaciones geográficas donde no es posible ir de un punto al otro en línea recta, sino combinando distintas rectas. Aún así, entre más "diagonal" vayamos, menos distancia vamos a recorrer, y podemos usar el teorema de Pitágoras para calcular las longitudes de las distintas partes que componen la ruta.

El principio fundamental para usar Pitágoras es buscar un triángulo rectángulo (a veces está dado pero a veces hay que "descubrirlo" o construirlo).

### Paso 1: Ejemplo: Analizando 3 triángulos "Famosos"

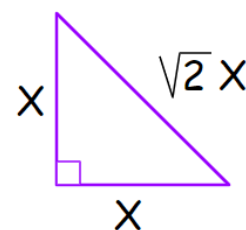
Apliquemos el teorema de Pitágoras para analizar 3 triángulos importantes:

**Triángulo isósceles rectángulo:** sus ángulos son 45, 45 y 90 grados.

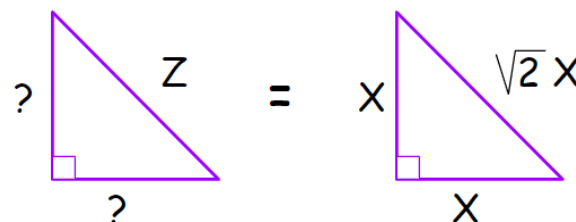
Si  $X, X$  son sus dos lados iguales, entonces podemos usar el teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa  $Y$ :

$$X^2 + X^2 = Y^2, 2X^2 = Y^2, Y = \sqrt{2X^2} = \sqrt{2}X \approx 1,4X.$$

Así, en este triángulo, la diagonal es aproximadamente 1,4 veces el largo de cada uno de los otros lados. En particular, la diagonal de un cuadrado de lado  $X$  es  $\sqrt{2}X$ . Por ejemplo, la diagonal de un cuadrado de lado 30 mide aproximadamente  $1,4 \cdot 30 = 42$ .



Si comenzamos con un triángulo isósceles rectángulo donde sabemos el valor  $Z$  de su hipotenusa, podemos hallar los otros lados usando el triángulo de arriba como "molde" o modelo, como ves en la imagen.



Entonces  $Z = \sqrt{2}X$ , por lo que  $X = \frac{1}{\sqrt{2}}Z \approx 0,7Z$ .

Por ejemplo, si un cuadrado tiene diagonal igual a 1, entonces su lado es aproximadamente de 0,7.

**Triángulo "mitad de equilátero":** Si tomamos un triángulo equilátero de lado  $X$  y lo partimos por su altura, nos queda un triángulo "mitad de equilátero", con ángulos de 30, 60 y 90 grados.

Podemos usar el teorema de Pitágoras para hallar la altura  $H$ :

$$\left(\frac{1}{2}X\right)^2 + H^2 = X^2, H^2 = X^2 - \frac{1}{4}X^2 = \frac{3}{4}X^2, H = \frac{\sqrt{3}}{2}X \approx 0,86 X.$$

Concluimos que para un triángulo rectángulo de ángulos 30, 60 y 90 grados, si  $X$  es la hipotenusa, entonces los otros lados miden  $\frac{1}{2}X$  y  $\frac{\sqrt{3}}{2}X$ .

Un modelo EQUIVALENTE para este triángulo es el que parte de  $Y$  como base y lado menor: entonces la altura es  $\sqrt{3}Y$  y la hipotenusa es  $2Y$ . Este modelo tiene la ventaja de que no tiene los "medios".

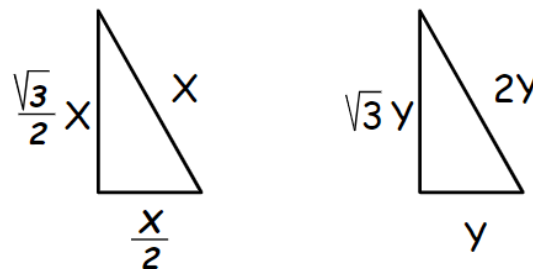
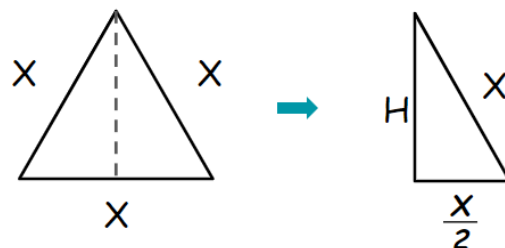
Por ejemplo, supongamos que un triángulo de 30, 60 y 90 grados tiene lado intermedio igual a 6. ¿Cuál es su perímetro?

Solución: usando el segundo molde (el de  $Y$ ), tenemos que  $\sqrt{3}Y = 6$ , así que  $Y = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ . Entonces el perímetro  $P$  es:  $P = Y + 2Y + \sqrt{3}Y = (3 + \sqrt{3})2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} + 6 \approx 16,4$ .

**Triángulo equilátero:** A partir del ejemplo anterior concluimos que un triángulo equilátero de lado  $X$  tiene una altura  $H$  igual a  $\frac{\sqrt{3}}{2}X$ .

## Paso 2: Completa este ejemplo: Máximas distancias

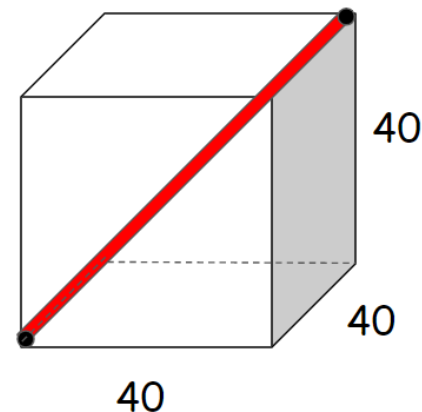
a) Supongamos que tenemos una caja cúbica de 40 cm de lado y queremos poner adentro un tubo delgado para enviar junto con otras cosas más pequeñas. ¿Cuál es la máxima longitud posible del tubo?



**Idea de solución:** Imaginemos dónde estarían los extremos del tubo. Es fácil ver que para **MAXIMIZAR** la distancia, los extremos deben estar en vértices del cubo que estén lo más alejados posibles, como ves en la figura.

Ahora dibuja un triángulo rectángulo dentro del cubo que tenga al tubo como hipotenusa. El triángulo debe ser rectángulo, para que podamos usar el teorema de Pitágoras.

Finalmente, comprueba que el largo del tubo es de cerca de 69 cm.



b) Tenemos una caja 40 cm x 50 cm x 20 cm y queremos poner adentro un tubo delgado para enviar junto con otras cosas más pequeñas.  
¿Cuál es la máxima longitud posible del tubo?

Para solucionar este problema, dibuja primero la caja y ensaya con todas las posiciones que se te ocurran para el tubo. Verifica que en todas las posiciones, si bien usas distintos triángulos rectángulos, llegas a la misma respuesta!

### Paso 3: Tu turno: El diámetro de un cono y el diámetro de un cilindro

Supongamos que tenemos un conjunto geométrico que es una figura plana o un sólido cualquiera. Pensemos en puntos dentro del conjunto que estén lo más lejanos posibles y midamos su distancia. A esa distancia se le conoce como el **DIÁMETRO** del conjunto. Por ejemplo, el diámetro de un cuadrado de largo  $a$  es igual a  $\sqrt{2}a$  y el diámetro de un círculo de radio  $R$  es igual a  $2R$ .

Encuentra el diámetro de:

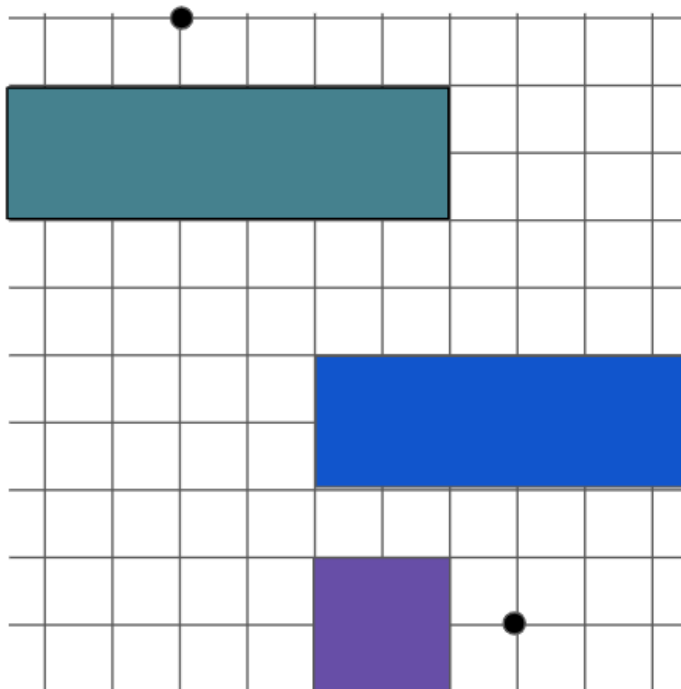
- Una esfera de radio  $R$ ,
- Un cono de radio  $R$  y altura  $H$
- Un cilindro circular de radio  $R$  y altura  $H$
- Un tetraedro de lado  $X$
- Un prisma cuya base es un triángulo isósceles rectángulo de lado  $X$ , y la altura del prisma es  $H$ .

**PROYECTO**  
**GRUPAL**

**APLIQUEMOS LO APRENDIDO**

Formen grupos de 4 estudiantes. Vamos a trabajar en un proyecto para aplicar lo que aprendimos.  
Instrucciones:

1. Unan los puntos con una ruta de forma que la longitud de la ruta sea la mínima posible. Hay 3 obstáculos en el mapa que deben tener en cuenta y no pueden atravesar (son muros).
2. Calculen la longitud de la ruta hallada (en unidades lineales, mostrando todos los cálculos).
3. Si no hubiera ningún obstáculo, encuentren cuál sería la ruta óptima que une los puntos, y su longitud.
4. Creen entre todos un nuevo mapa con 2 puntos y varios obstáculos entre ellos y de nuevo hallen una ruta óptima.



## C) Resuelve y practica

1) Encuentra el perímetro de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden  $3X$  y  $4X$ .

2) Vas de paseo por tu barrio, de repente observas una muchedumbre cerca de un poste abandonado. Las personas están viendo un gato que ha quedado atrapado en lo alto de un poste que está al otro lado de un río muy caudaloso, que tiene cierto ancho.

Piensas que con una escalera podrás bajar el gato, la gente te informa que desconocen la altura del poste, sin embargo, te informan que del lado que tú estás hay un pedazo de un antiguo poste que mide la tercera parte del poste en el que está el gato, y la mitad del ancho del río.

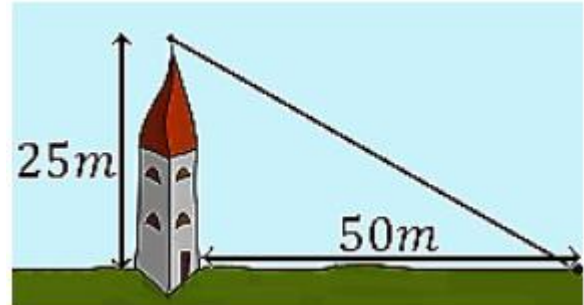
(Ten en cuenta que no tienes en el momento herramientas de medición, solo tu creatividad).

- Representa de manera gráfica la situación.
- ¿Cómo empleamos el teorema de Pitágoras para resolver dicho problema?
- ¿Cómo planteamos la solución en términos de una variable?

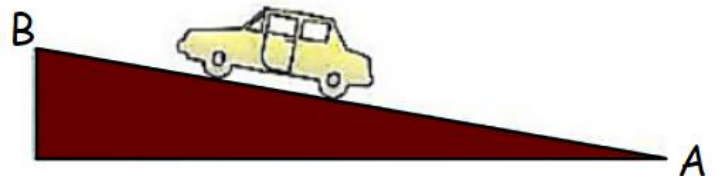
3) La altura de una portería de fútbol es de 2,4 metros y la distancia desde el punto de penalti hasta la raya de gol es de 10,8 metros.

a) ¿Qué distancia recorre un balón que se lanza desde el punto de penalti y se estrella en el punto central del larguero?

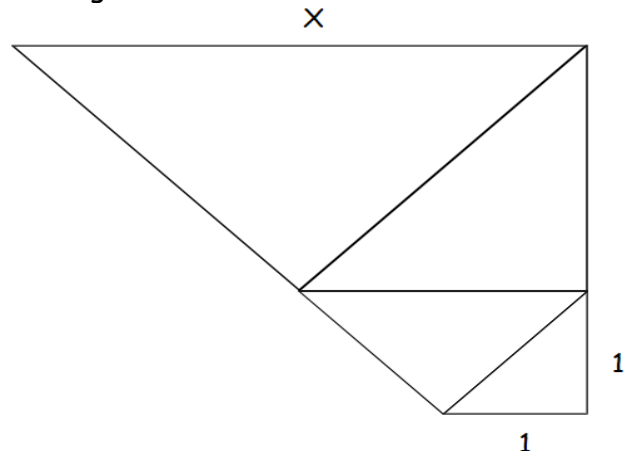
4) Se quiere colocar un cable desde la cima de una torre de 25 metros altura hasta un punto situado a 50 metros de la base de la torre. ¿Cuánto debe medir el cable?



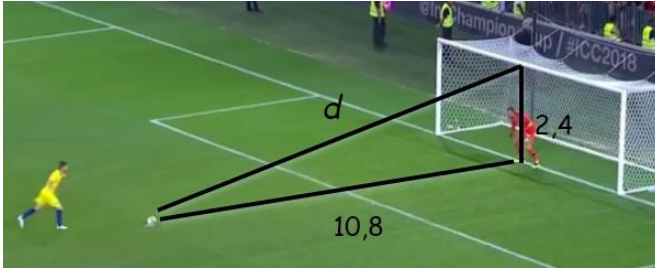
5) Un coche que se desplaza desde el punto A hasta el punto B recorre una distancia horizontal de 35 m, mientras se eleva una altura de 12 m. ¿Cuál es la distancia, en metros, que separa a los puntos A y B?



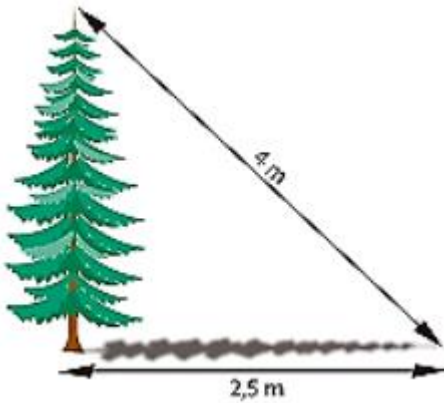
6) Suponiendo que todos los triángulos son isósceles rectángulos, halla la medida X:







- b) Si la pelota pega en la esquina superior derecha del arco, ¿qué datos necesitas conocer para calcular la distancia que recorre? Busca esta información y halla la distancia buscada.
- 7) Al atardecer, un árbol proyecta una sombra de 2,5 metros de longitud. Si la distancia desde la parte más alta del árbol al extremo más alejado de la sombra es de 4 metros, ¿cuál es la altura del árbol?

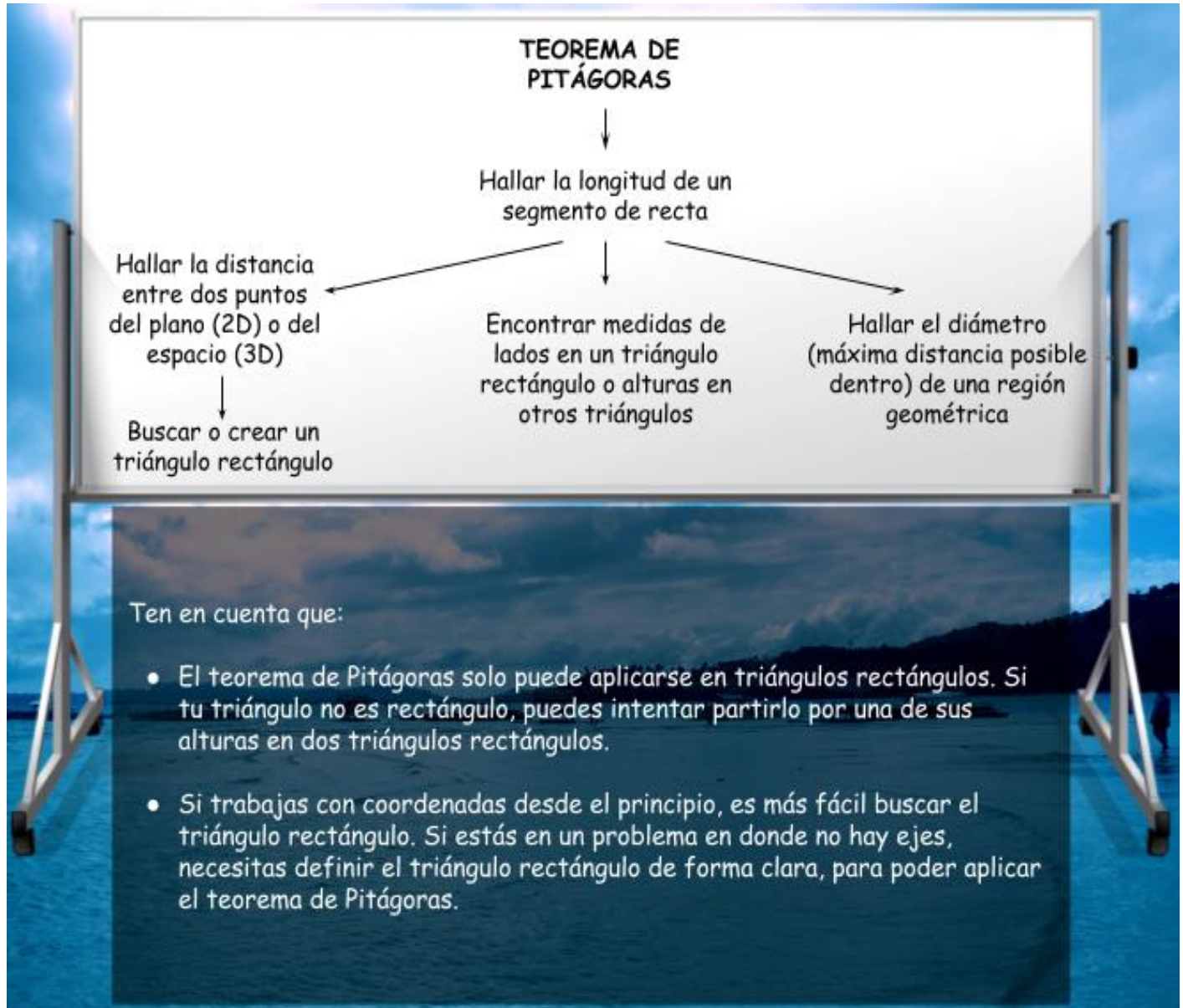


- 8) Calcula la altura que podemos alcanzar con una escalera de 3 metros apoyada sobre la pared si la parte inferior la situamos a 70 centímetros de ésta.



- 9) Los postes telefónicos por lo general forman un ángulo recto horizontalmente con el piso y son soportados por un cable de amarre. Un cable de amarre de 13 pies (4 m) está conectado al poste telefónico a 12 pies (3,6 m) de su base. ¿Qué tan lejos de la base del poste telefónico está el cable de amarre conectado al piso?
- 10) Encuentra la distancia entre los puntos (1, 2, 2) y (4, 5, 3). Para ello, haz un dibujo primero e intenta aplicar el teorema de Pitágoras.
- 11) Halla el diámetro (máxima distancia entre dos puntos) de una pirámide de base cuadrada, con área de la base 16 y altura 5.
- 12) Halla el diámetro de un ortoedro cuyos lados miden 1, 3 y 3.
- 13) Halla el perímetro de un triángulo rectángulo en donde la hipotenusa es el triple de uno de sus catetos, y el área es igual a 64 unidades cuadradas.
- 14) Práctica en Khan Academy:  
<https://es.khanacademy.org/math/math2/xe2ae2386aa2e13d6:trig#xe2ae2386aa2e13d6:pyth-theorem>

D) Resumen



## E) Valoración

### i) Califica tu comprensión por tema en tu cuaderno

Tema	●○○ No entiendo los conceptos (TODAVÍA)	●●○ Voy bien pero quiero más práctica	●●● Comprendí muy bien el tema
Razono para hallar la distancia entre dos puntos usando el teorema de Pitágoras			
Aplico el teorema de Pitágoras para hallar medidas en triángulos			
Analizo un conjunto geométrico para hallar su diámetro			

### ii) Preguntas de comprensión

1) Si un triángulo rectángulo tiene lados que miden  $\sqrt{2}$  y  $\sqrt{2}$ , entonces el otro lado mide...

[ ] 2.

[ ]  $2\sqrt{2}$ .

2) La distancia entre (1,1) y (7, 9) es...

[ ] 10.

[ ] 14.

3) El diámetro de un cuadrado de área 8 es:

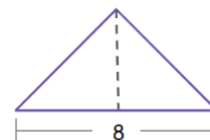
[ ]  $\sqrt{8}$

[ ] 4.

4) La altura H del triángulo mostrado tipo "sombbrero chino" cuya base es el lado mayor del triángulo isósceles recto, es igual a...

[ ]  $H = 4\sqrt{2}$

[ ]  $H = 4$



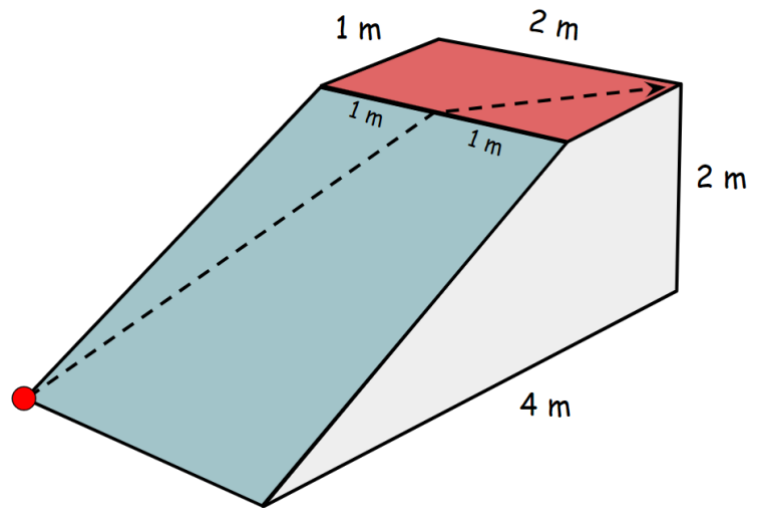
(Verifica las respuestas con tu profesor)

### iii) Resuelvo un problema

Hay una rampa con una parte inclinada seguida por una parte plana. Un carro de juguete que está abajo en la esquina izquierda va a subir hasta arriba en la esquina derecha, siguiendo la trayectoria que se muestra.

a) Calcula la distancia total recorrida por el carro.

b) Invéntate otra ruta posible que lleve el carro de abajo a la izquierda hacia arriba a la derecha, y calcula la distancia recorrida. ¿Es mayor o menor que lo que encontraste en a)?

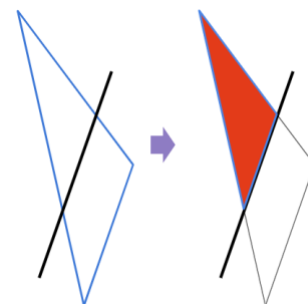


## ACTIVIDAD 2: USEMOS LAS SEMEJANZAS

Apliquemos propiedades de semejanzas de triángulos y proporcionalidad a partir de varias rectas paralelas para hallar valores desconocidos en situaciones de la vida cotidiana.

### A) Activando saberes previos

#### RECUERDA QUE...



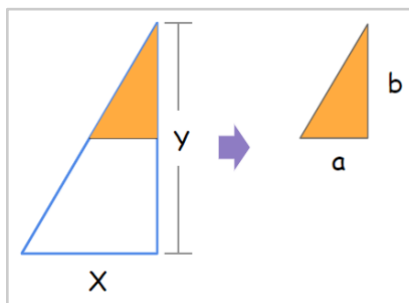
- Si tenemos un triángulo cualquiera y dibujamos un segmento (dentro del triángulo) paralelo a uno de sus lados, obtenemos un triángulo más pequeño semejante al triángulo inicial.
  - En particular, cualquier razón entre dos lados de un triángulo es la misma razón entre los lados correspondientes en el otro triángulo. Es decir:

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}, \frac{B}{C} = \frac{b}{c} \text{ y } \frac{A}{C} = \frac{a}{c}.$$

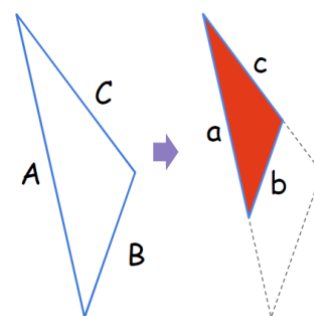
- En particular, ambos triángulos tienen los mismos ángulos.

- En particular, si aplicamos esta propiedad de proporcionalidad a un triángulo rectángulo de base  $X$  y altura  $Y$ , nos queda que ambos triángulos tienen la hipotenusa de pendiente igual a

$$m = \frac{Y}{X} = \frac{b}{a}.$$



triángulos tienen los

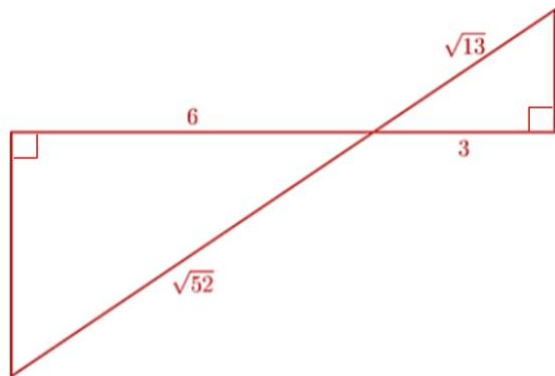


#### PRACTICA

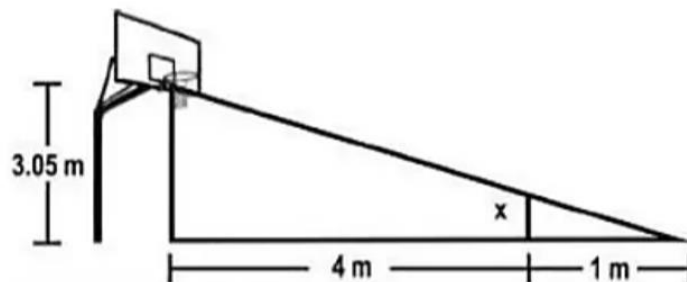
i) ¿Son estos triángulos semejantes?  
Justifica tu respuesta.

ii) Observa la figura donde se muestra dos triángulos semejantes, si los datos corresponden a la medida del piso





hasta el tablero de básquetbol y  $x$  representa a Juan parado sobre el piso, ¿cuánto mide Juan?



## B) Conceptos

**Exploreemos: ¿Cuánto mide cada calle?**

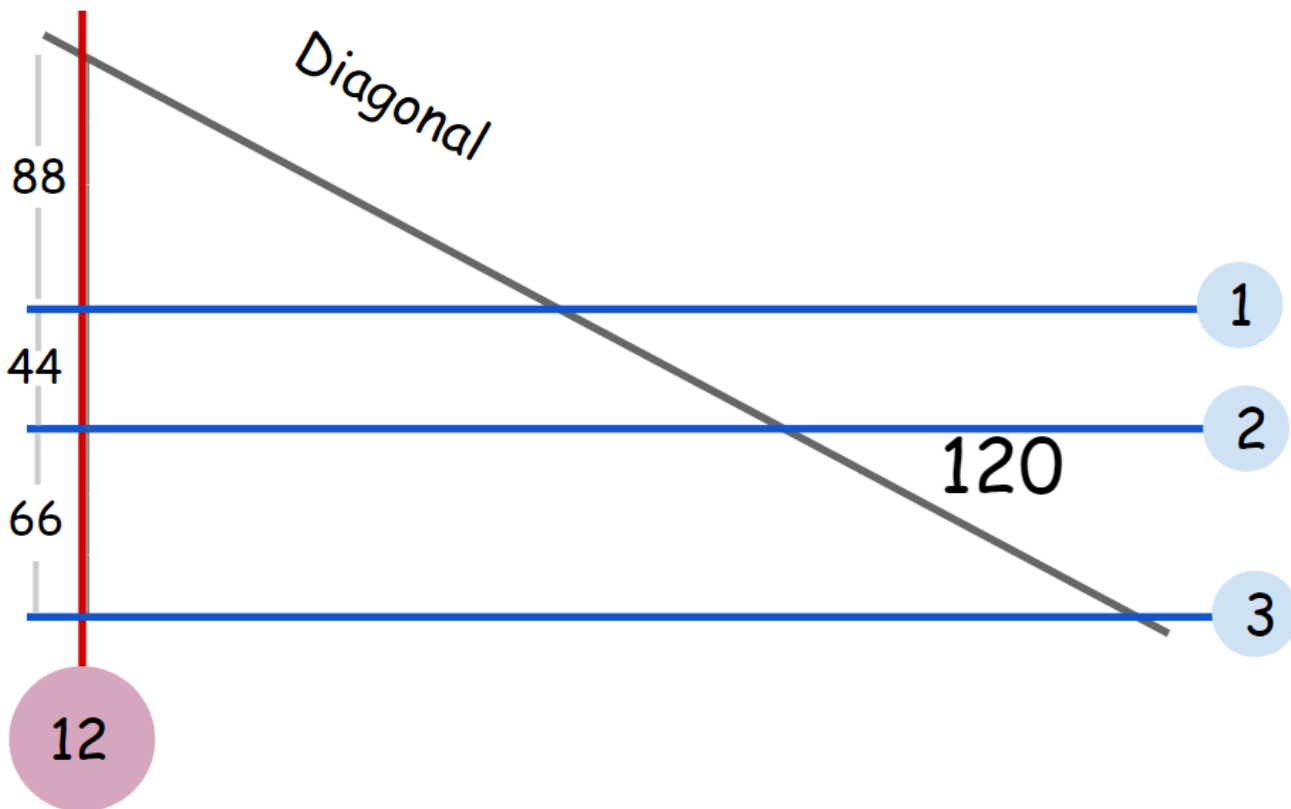
Antes de comenzar discute en clase: Cuando miras el mapa de las calles de un pueblo, ¿todas son paralelas o perpendiculares? ¿Qué figuras planas puedes identificar que estén bordeadas por distintas vías?

Estás diseñando una diagonal que conecte a tres vías horizontales (1, 2, 3) así como a una vía vertical (12), como se muestra en la figura, con cifras en metros.

Sabemos lo siguiente:

- Las vías 1, 2 y 3 son paralelas.
- Habrá 88 metros yendo al sur por la vía #12, desde la diagonal hasta la intersección con la vía #1.
- Hay 44 metros yendo al sur por la vía #12, desde la intersección con la vía #1 hasta la intersección con la vía #2.
- Hay 66 metros yendo al sur por la vía #12, desde la intersección con la vía #2 hasta la intersección con la vía #3.

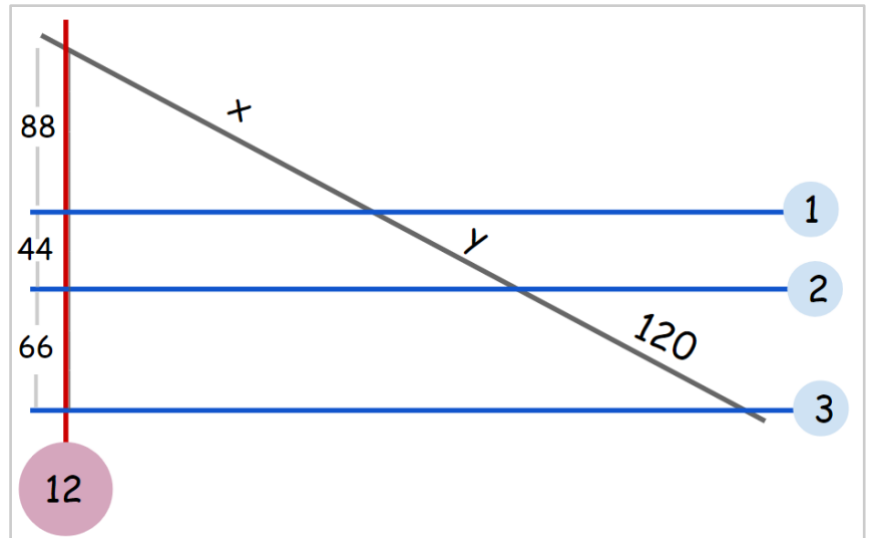
En tus especificaciones de la diagonal, quieres que haya exactamente 120 metros para ir de la intersección con la vía #2 hasta la intersección con la vía #3.



Queremos averiguar la longitud de los otros dos tramos de la diagonal, marcados X y Y, para poder saber la cantidad de material lineal que necesitamos.

### ¿Qué nos dice nuestra intuición?

A partir del dibujo vemos que de los tres valores X, Y y 120, X es el mayor. ¿Por qué? Mirando las longitudes verticales correspondientes (88, 44 y 66), vemos que también 88 es la mayor.



Entonces podemos formular la siguiente hipótesis: hay una PROPORCIONALIDAD entre los valores verticales y los valores diagonales. Es importante que las vías #1, #2 y #3 son todas paralelas, o de lo contrario los ángulos formados con la diagonal no serían los mismos y no podríamos tener la proporcionalidad.

En otras palabras, la razón triple 88:44:66 es equivalente a la razón X:Y:120 (en ese orden).

Dado que la razón 88:44:66 es igual a 4P:2P:3P (P es un valor distinto de cero, que llamamos parámetro), podemos proponer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$X = 4P$$

$$Y = 2P$$

$$120 = 3P. \quad \text{Entonces: } P = 40, X = 160 \text{ y } Y = 80.$$

### Verifiquemos esto usando el teorema de Tales:

¿Cómo podemos verificar las respuestas anteriores usando la proporcionalidad de triángulos?

Podemos ver un triángulo rectángulo con lado 88+44+66, otro con lado 88+44 y otro con lado 88. Por el teorema de Tales, todos los triángulos son semejantes (aquí usamos que las vías 1, 2 y 3 son paralelas).

Entonces, por ejemplo,  $\frac{x}{88} = \frac{x+y}{88+44}$ . Una buena idea es "limpiar los denominadores" para facilitar nuestro trabajo con los cálculos. Entonces:

$$x(88+44) = (x+y)88 \Rightarrow 88x + 44x = 88x + 88y \Rightarrow 44x = 88y \Rightarrow x = 2y.$$

Esto es consistente con la razón 2:1 que descubrimos arriba entre x y y.



**Responde:**

a) Usa el teorema de Tales involucrando el triángulo de lado  $88+44+66$  para terminar de completar la verificación.

b) ¿Crees que si hubiera 6 calles paralelas en vez de solo 3 podríamos establecer una proporcionalidad similar? Haz un dibujo y explica. No olvides etiquetar las medidas con variables para poder escribir las relaciones de proporcionalidad (en razones, o en ecuaciones).

La anterior exploración nos sirve para presentar el siguiente nuevo teorema (que es parecido al teorema de Tales), que vamos a llamar el Teorema de las rectas paralelas.

### Mini-explicación: El Teorema de las rectas paralelas

#### El teorema de las rectas paralelas

El Teorema de las rectas paralelas nos dice que si 2 o más rectas paralelas se cortan por 3 rectas transversales, entonces estas últimas quedan divididas en distintos segmentos con las mismas proporciones.

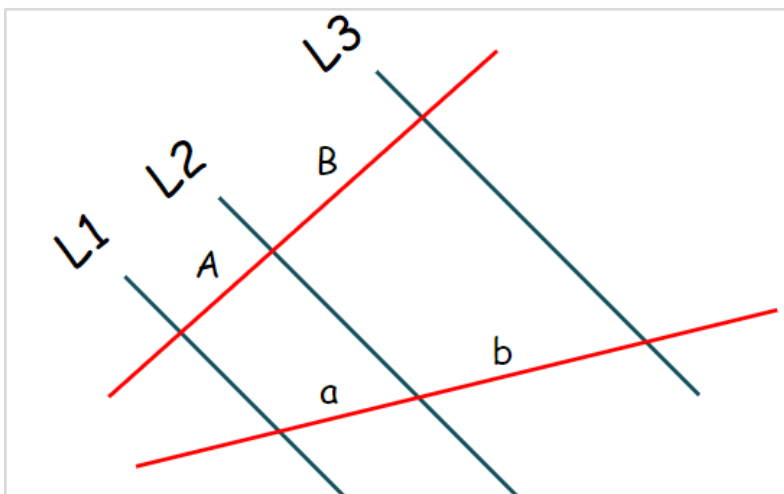
De forma más precisa, y para el caso de 3 rectas  $L1, L2, L3$ , tenemos:

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}, \text{ o lo que es igual, } \frac{A}{a} = \frac{B}{b}.$$

Dicho de otra forma, las razones  $A:B$  y  $a:b$  son

equivalentes. Por ejemplo, si  $A$  es el 40% del largo yendo de  $L1$  a  $L3$ , entonces  $a$  también es, en la otra transversal, el 40% del camino yendo de  $L1$  a  $L3$ .

Nota: las rectas transversales no necesitan ser paralelas entre sí. Simplemente deben cortar a las 3 o más rectas que son paralelas.



### Ejemplo: Deducción del Teorema de las rectas paralelas para el caso de 3 rectas paralelas

El Teorema de Tales (que habla de la proporcionalidad de triángulos) implica (es decir, garantiza) el teorema de las rectas paralelas. Veamos por qué, al menos para el caso de 3 rectas paralelas.

Vamos a suponer entonces que tenemos esta situación, donde L1, L2 y L3 son todas paralelas.

Queremos ver que las proporciones en que se divide cada una de las transversales son las mismas.

Si las rectas transversales fueran paralelas entre sí, sería fácil darse cuenta de que esto es verdadero. No solo serían las mismas proporciones, sino exactamente las mismas medidas de cada segmento.

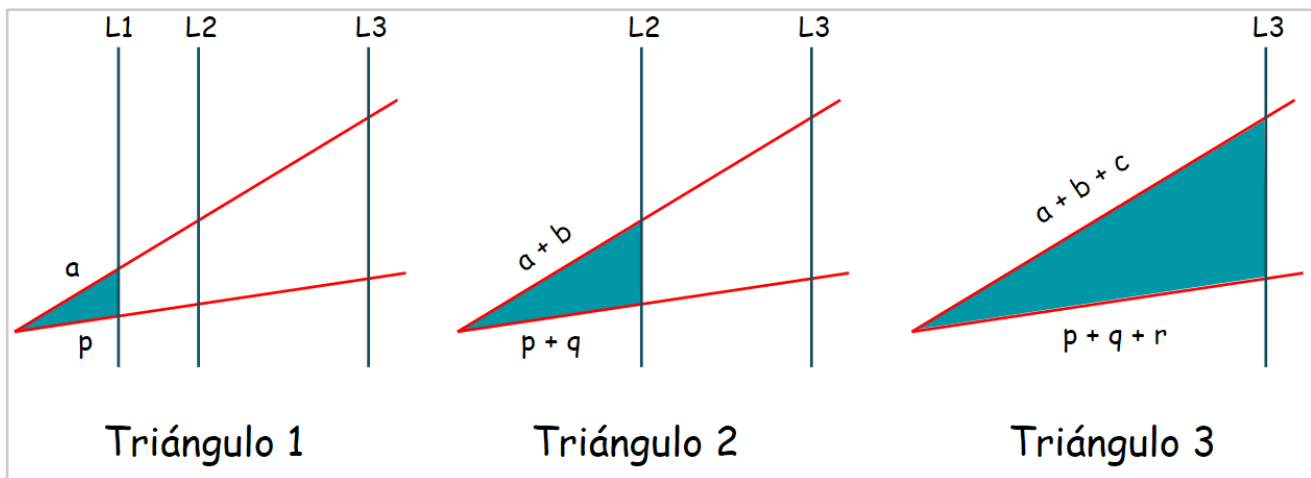
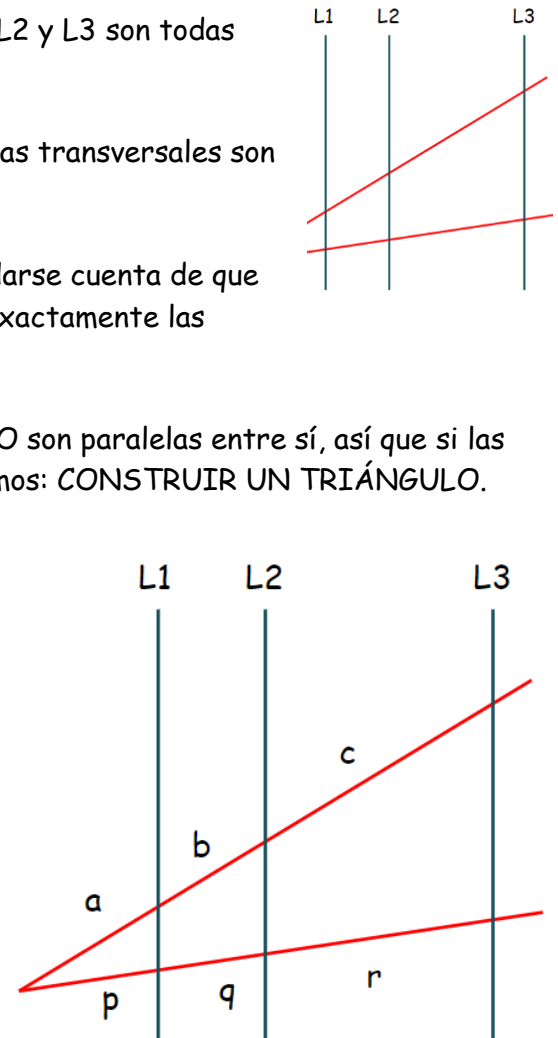
Supongamos entonces, como en el dibujo, que las transversales NO son paralelas entre sí, así que si las extendemos un poco se van a encontrar. Este es el truco que usamos: **CONSTRUIR UN TRIÁNGULO**.

Hemos nombrado a, b y c las tres longitudes que forman una de las transversales, y p, q y r las longitudes que forman la otra transversal.

Queremos demostrar que las razones  $b:c$  y  $q:r$  son equivalentes (es decir, que  $br = cq$ ), y para eso vamos a utilizar el Teorema de Tales varias veces. Es por eso que extendimos las transversales para formar triángulos

Consideremos los siguientes 3 triángulos:

- Triángulo 1: lados a, p, con base paralela a L1
- Triángulo 2: lados a+b, p+q, con base paralela a L2
- Triángulo 3: lados a+b+c, p+q+r, con base paralela a L3





Primero, si aplicamos el teorema de Tales a los triángulos 1 y 2 (que lo podemos hacer pues L1 y L2 son paralelas), obtenemos:  $\frac{a}{p} = \frac{a+b}{p+q}$ . Multiplicando nos queda:

$$a(p+q) = p(a+b) \Rightarrow \underline{ap} + aq = \underline{ap} + pb \Rightarrow aq = bp.$$

Después, si aplicamos el teorema de Tales a los triángulos 2 y 3 (que lo podemos hacer pues L2 y L3 son paralelas), obtenemos:  $\frac{a+b}{p+q} = \frac{a+b+c}{p+q+r}$ . Multiplicando nos queda:

$$(a+b)(p+q+r) = (p+q)(a+b+c) \Rightarrow \underline{ap} + \underline{aq} + ar + \underline{bp} + \underline{bq} + br = \underline{ap} + \underline{bp} + cp + \underline{aq} + \underline{bq} + cq \Rightarrow ar + br = cp + cq$$

Finalmente, la semejanza entre los triángulos 1 y 3 (dada por el Teorema de Tales) nos da:

$$a(p+q+r) = p(a+b+c) \Rightarrow ap + aq + ar = ap + bp + cp \Rightarrow aq + ar = bp + cp.$$

Las tres conclusiones son: (1)  $aq = bp$  ; (2)  $ar + br = cp + cq$  ; (3)  $aq + ar = bp + cp$ .

Si reemplazamos (1) en (3), concluimos que  $ar = cp$ . Si reemplazamos esto último en (2), nos queda que  $br = cq$ , es decir,  $b:c$  y  $q:r$  son equivalentes. ¡Lo hemos logrado!

### Paso 2: Completa este ejemplo: cuatro rectas paralelas

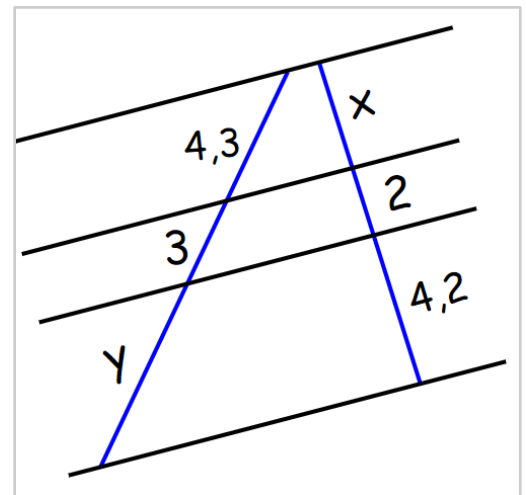
Observa este dibujo, en donde hay 4 rectas paralelas y 2 transversales.

a) Sin hacer cálculos: ¿cuál de las dos transversales en el dibujo es más larga? ¿La más corta es qué fracción de la más larga?

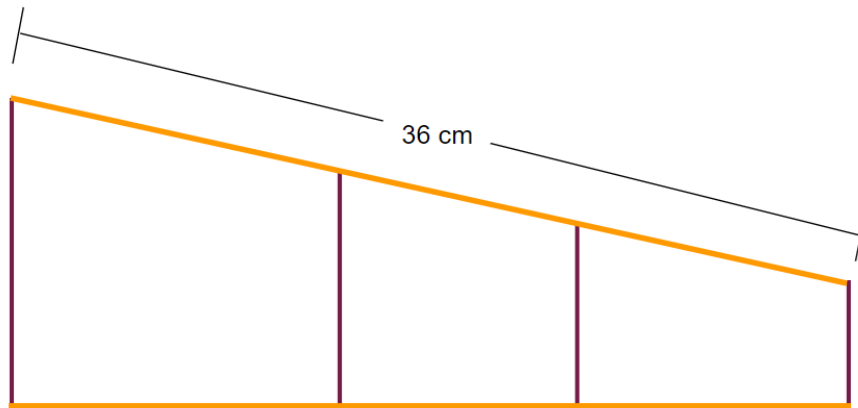
b) Para hallar  $x$ , podemos escribir: por el teorema de las rectas paralelas,  $\frac{3}{2} = \frac{4,3}{x}$ . Usa esto para hallar  $x$  y verifica que tiene sentido en el dibujo.


c) ¿Cómo encontrarías  $y$ ? Encuéntralo.

d) Ahora que tienes todos los valores, devuélvete a la pregunta a) y verifica tu respuesta.





### Paso 3: 1-2-4: Tu turno (individual, en parejas y en grupos de 4)



 En una cartulina o papel grande, elabora el dibujo arriba que tiene 4 rectas paralelas y una transversal que mide exactamente 36 cm.

- Usando regla lo mínimo posible (y la proporcionalidad lo más posible), encuentra el valor de cada tramo de cada transversal.
- Verifica con regla tus mediciones hechas y corrige si hay errores, usando proporcionalidad.
- Inventa una situación tal que tu dibujo sea una copia a escala de una región real, y determina las medidas reales, usando el factor de escala que hayas elegido.

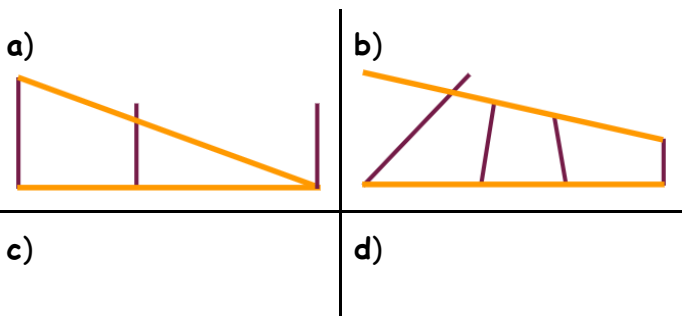
 Júntate con otro estudiante e intercambien sus procesos de solución, trabajando en equipo. Anoten sus dudas comunes y sus diferencias en cómo midieron y cómo usaron la proporcionalidad.

 Júntense con otra pareja y compartan sus soluciones. Encuentren errores o dibujos que puedan mejorar, y comparen sus apreciaciones.

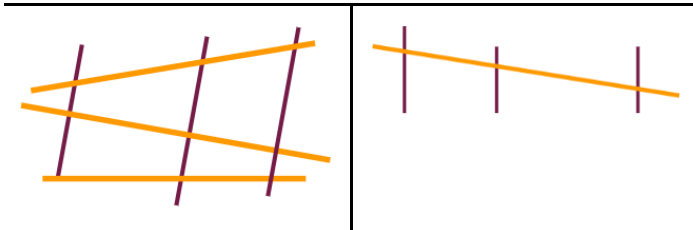
Finalmente, busquen a su profesor para dialogar y compartir sus estrategias y respuestas, aclarando los conceptos.

### C) Resuelve y practica

1) En las siguientes situaciones, explica si se puede utilizar el teorema de las rectas paralelas y cómo lo harías, o explica por qué crees que no se puede utilizar.



4) ¿Cómo puedes usar el teorema de las rectas paralelas acá? Explica en detalle y úsalo.



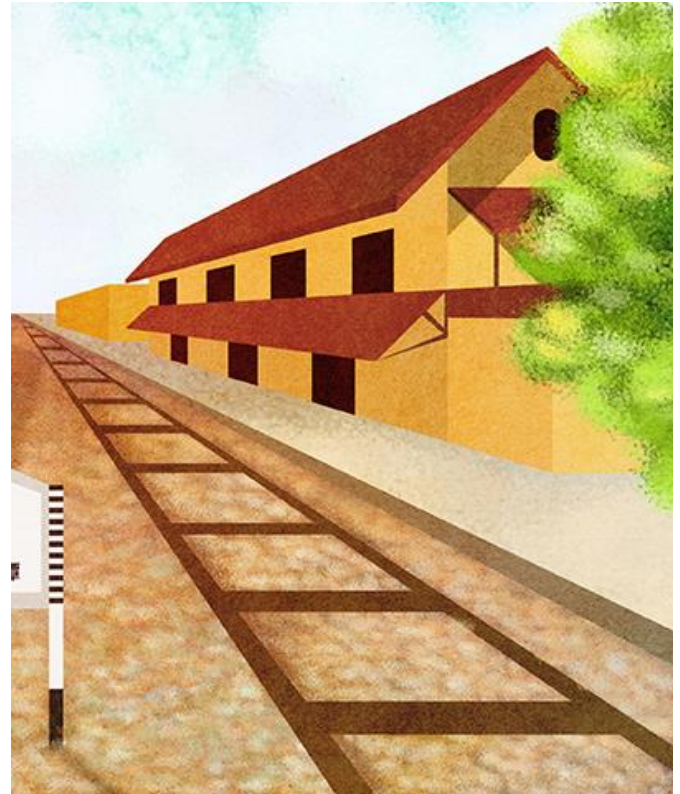
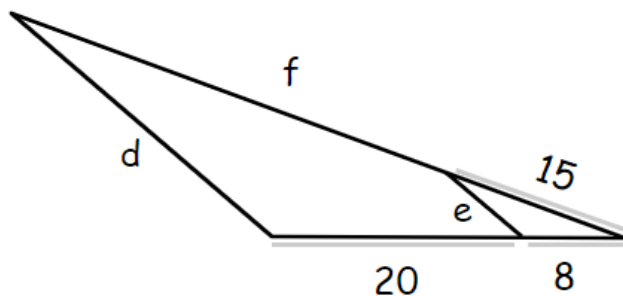
2) Usa regla o Geogebra para construir dos segmentos de recta:

El primero debe estar dividido en cuatro partes que midan (en unidades que elijas) 2, 2, 4 y 5;

El segundo debe estar dividido en cuatro partes que midan 5, 5, 10 y 12,5.

Además, une las marcas que parten cada segmento con rectas paralelas.

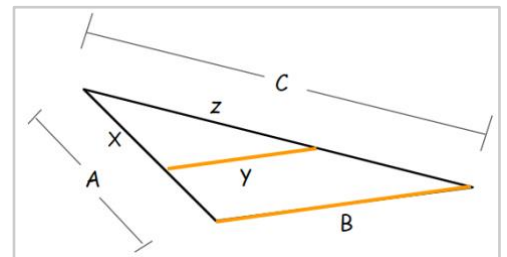
3) Suponiendo que en el dibujo los lados marcados  $d$  y  $e$  son paralelos, encuentra la medida de  $f$ :



(<https://dribbble.com/shots/4793021-The-Old-Train-Station>)

5) Reto: En este ejercicio queremos usar el teorema de las rectas paralelas para demostrar el Teorema de Tales. Es decir, lo que hicimos en el ejemplo de la página 15, pero al contrario.

Así, supongamos que tenemos este triángulo de lados  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , junto con una recta paralela a uno de sus lados:



¡Intenta usar el teorema de los lados paralelos junto con algún criterio de congruencia de triángulos para probar que el triángulo de lados  $A$ ,  $B$ ,  $C$  es congruente al triángulo de lados  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . [Ayuda: necesitas 3 rectas paralelas y ya tienes 2...]. Pide ayuda si la necesitas.

## D) Resumen

**ALGUNOS TEOREMAS DE SEMEJANZA**


↓  
Encontrar longitudes desconocidas usando razones

**Teorema de Tales**

↓

Necesito:  
**2 rectas paralelas**  
2 rectas transversales

Obtengo: triángulos semejantes




Formo 2 triángulos, uno "dentro" del otro.

**Teorema de las rectas paralelas**

↓

Necesito:  
**3 o más rectas paralelas**  
2 rectas transversales

Obtengo: segmentos proporcionales



**Ten en cuenta que:**

- El teorema de Tales se puede deducir del Teorema de las rectas paralelas y también al contrario. Esto nos da una idea de lo parecidos que son.
- El teorema de las rectas paralelas puede aplicarse a cualquier cantidad (mayor que 2) de rectas paralelas, y teniendo al menos dos transversales.
- El teorema de Tales nos da proporcionalidad entre lados, pero además nos da igualdad entre los ángulos de los 2 triángulos que estemos considerando, mientras que en el teorema de las rectas paralelas no hay conclusiones sobre ángulos, aunque si las rectas paralelas se extienden, entonces sí podríamos concluir igualdades de ángulos.



## E) Valoración

### i) Califica tu comprensión por tema en tu cuaderno

Tema	●○○○ No entiendo los conceptos (TODAVÍA)	●●○○ Voy bien pero quiero más práctica	●●●● Comprend í muy bien el tema
Comprendo cuándo podemos aplicar el teorema de las rectas paralelas			
Deduzco el teorema de las rectas paralelas utilizando el teorema de Tales			
Aplico el teorema de las rectas paralelas a situaciones del mundo real			

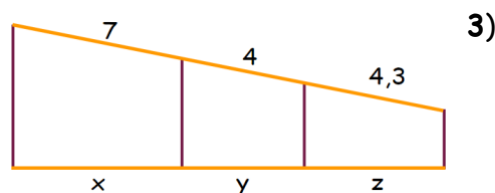
### ii) Preguntas de comprensión

1) Al usar el teorema de las rectas paralelas necesitamos...

- [ ] mínimo 2 rectas paralelas.  
[ ] mínimo 3 rectas paralelas.

2) Para aplicar el teorema de las rectas paralelas...

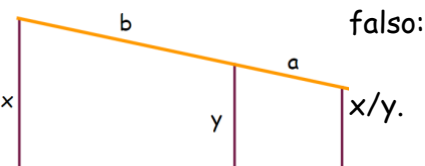
- [ ] las transversales deben ser paralelas.  
[ ] no es necesario que las transversales sean paralelas entre sí.



En el dibujo anterior, el teorema de las rectas paralelas nos sirve para...

- [ ] encontrar  $x + y + z$   
[ ] encontrar  $(x+y)/z$ .

4) Verdadero o  
según este  
diagrama,  $b/a = x$



- [ ] Verdadero  
[ ] Falso

(Verifica las respuestas con tu profesor)

### iii) Resuelvo un problema

Supongamos que los segmentos ax, by, cz, dw son paralelos.

Escribe todas las igualdades o equivalencias de razones que puedas sobre longitudes de segmentos. Por ejemplo:

$$\underline{ab} \cdot \underline{gf} = \underline{cb} \cdot \underline{ef}.$$

