Oblig 2 MAT1001

Tormod Brændshøi/tormobr

April 3, 2017

Oppgave Del 1

a)

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt}} \qquad \boxed{L = r^2 \frac{d\phi}{dt}}$$

$$\frac{L}{r^2} = \frac{d\phi}{dt}$$

Hvis vi setter dette inn i det første formelen får vi at:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \cdot \frac{L}{r^2}$$

b)

$$\boxed{u = \frac{1}{r} \quad \rightarrow \quad r = \frac{1}{u} \quad \rightarrow \quad r^2 = \frac{1}{u^2}}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \cdot \frac{L}{r^2} \quad \rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \cdot Lu^2$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{d\phi}(u^{-1}) \cdot Lu^2$$

Det vi nå kan gjøre er å bruke kjerne-reglen for derivasjon for å utrykke $\frac{d}{d\phi}(u^{-1})$ på en annen måte:

$$\frac{d}{d\phi}(u^{-1}) = -u^{-2} \cdot \frac{du}{d\phi}$$

Hvis vi nå setter dette inn i formelen vi hadde får vi at:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{du}{d\phi} \cdot -u^{-2} \cdot Lu^2 = \frac{du}{d\phi} \cdot -\frac{1}{u^2} \cdot Lu^2$$

Her ser vi at vi kan forkorte utrykket litt, og hvis vi gjør dette sitter vi igjen med nettopp:

$$\frac{dr}{dt} = -L\frac{du}{d\phi}$$

c)

Vi bruker det vi fant ut i forrige oppgave og setter det inn i ligningen, og regner oss frem til det vi er ute etter:

$$\frac{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - E^2}{1 - \frac{R_s}{r}} + \frac{L^2}{r^2} = 0$$

$$\frac{-L^2\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - E^2}{1 - R_s \cdot u} + L^2 \cdot u^2 = 0$$

$$-L^2\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - E^2 + L^2u^2 - L^2u^3R_s = 0$$

$$-L^2\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = E^2 - L^2u^2 + L^2u^3R_s$$

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = R_su^3 - u^2 + \frac{E^2}{L^2}$$

d)

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = R_su^3 - u^2 + \frac{E^2}{L^2}$$

Hvis vi når deriverer begge sidene får vi noe som ser slik ut:

$$\frac{d}{d\phi}\left(\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2\right) = 3R_su^2\frac{du}{d\phi} - 2u\frac{du}{d\phi} \quad \leftrightarrow \quad 2\frac{du}{d\phi} \cdot \frac{d^2u}{d\phi^2} = 3R_su^2\frac{du}{d\phi} - 2u\frac{du}{d\phi}$$

Hvis vi nå deler med $\boxed{2\frac{du}{d\phi}}$ og er erstatter $\frac{3}{2}R_s$ med k får vi svaret vi er ute etter.

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = ku^2$$

e)

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0}$$

Vi skal nå vise at $\boxed{u = \frac{\cos\phi}{b}}$ er en løsning på ligningen over. Det vi da gjør er å sette inn for u, og å dobbelt derivere utrykket til u, og sette det inn for $\boxed{\frac{d^2u}{d\phi^2}}$ og se om det stemmer.

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{d^2u}{d\phi^2} + \frac{\cos\phi}{b} = 0$$

$$\boxed{u = \frac{\cos\phi}{b}}$$

$$\frac{du}{d\phi} = -\frac{sin\phi}{b} \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{d^2u}{d\phi^2} = -\frac{\cos\phi}{b}$$

Hvis vi når setter inn for den dobbelt deriverte til u finner vi ut at ytrykket stemmer, og at $\boxed{\frac{\cos\phi}{b}}$ er en løsning av den homogene diffligningen

$$-\frac{\cos\phi}{b} + \frac{\cos\phi}{b} = 0, \qquad 0 = 0$$

f)

Vi har fra forrige en løsning på den homogene ligningen, så vi setter det slik:

$$u_h = \frac{\cos\phi}{b}$$

I oppgaven får vi litt informasjon, det vi vet er at:
$u = u_h + u_s$, som er løsningen av en innhomogen diffligning. Nå skal vi sette dette inn i ligningen $\boxed{\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = ku^2}$ Da får vi noe som se slik ut:

$$\frac{d^2}{d\phi^2}(u_h + u_s) + (u_h + u_s) = k(u_h + u_s)^2 = k(u_h^2 + 2u_h u_s + u_s^2)$$

Hvis vi nå bruker tillnærmingene:

$$u_h^2 \approx 0 \qquad og \qquad u_h + 2u_s \approx u_h$$

Kan vi forenkle utrykket vi har til noe som ser slik ut:

$$\frac{d^2u_h}{d\phi^2} + \frac{d^2u_s}{d\phi^2} + (u_h + u_s) \approx k(u_h^2)$$

Hvis vi nå setter inn $\boxed{\frac{\cos\phi}{b}}$ for u_h får vi noe som ser slik ut:

$$-\frac{\cos\phi}{b} + \frac{d^2u_s}{d\phi^2} + \frac{\cos\phi}{b} + u_s \approx k\left(\frac{\cos\phi}{b}\right)^2$$

Dette utryket kan vi skrive enklere på nettopp denne måten:

$$\frac{d^2u_s}{d\phi^2} + u_s \approx \frac{k}{b^2}\cos^2\phi$$

g)

Det vi må gjøre for å finne den spessielle løsningen er som sagt å gjette på en løsning som er på formen.

$$u_s = A\cos^2\phi + B$$

Så det vi gjør er å sette inn dette for u_s i ligningen: $\boxed{\frac{d^2u_s}{d\phi^2} + u_s \approx \frac{k}{b^2}\cos^2\phi}$

$$\frac{d^2}{d\phi^2}(A\cos^2\phi + B) + A\cos^2\phi + B \approx \frac{k}{b^2}\cos^2\phi$$

Nå skal vi bare fokusere på den venstre siden av ligningen, så legger den høyre siden til side for nå. Vi løser det som står på høyre side:

$$\frac{d^2}{d\phi^2}(A\cos^2\phi + B) + A\cos^2\phi + B \quad \rightarrow \quad A\frac{d^2}{d\phi^2}(\cos^2\phi + B) + A\cos^2\phi + B$$

$$A\frac{d^2}{d\phi^2}(\cos\phi\cdot\cos\phi)+A\cos^2\phi+B \quad \rightarrow \quad A\frac{d}{d\phi}(-2(\cos\phi\cdot\sin\phi))+A\cos^2\phi+B$$

$$-2A\frac{d}{d\phi}(\cos\phi\cdot\sin\phi)+A\cos^2\phi+B \quad \rightarrow \quad -2A(\cos^2\phi-\sin^2\phi)+A\cos^2\phi+B$$

$$-2A(\cos^2\phi-(-cos^2\phi+1)+A\cos^2\phi+B \quad \rightarrow \quad -2A(2\cos^2\phi-1)+A\cos^2\phi+B$$

$$-4A\cos^2\phi + 2A + A\cos^2\phi + B \quad \rightarrow \quad -3A\cos^2\phi + 2A + B$$

Nå har vi forenklet dette ytrykket mye, da er det på tide å hente høyre siden av den opprinelige ligningen for å regne ut A og B.

$$-3A\cos^2\phi + 2A + B = \frac{k}{b^2}\cos^2\phi$$

Ut i fra dette kan vi dra ut to likninger, nemlig $\boxed{-3A = \frac{k}{b^2}}$ og $\boxed{2A + B = 0}$

$$-3A = \frac{k}{b^2} \quad \rightarrow \quad A = -\frac{k}{3b^2}$$

$$2A + b = 0 \quad \rightarrow \quad B = -2A = \frac{2k}{3b^2}$$

Nå har vi funnet verdien til de to konstantene A og B, og kan sette inn i ligningen $\boxed{u_s = A\cos^2\phi + B}$ som vi hadde i starten av oppgaven. Da får vi at:

$$u_s = A\cos^2\phi + B \quad \rightarrow \quad u_s = -\frac{k}{3b^2}\cos^2\phi + \frac{2k}{3b^2}$$

Hvis vi nå velger å sette leddet $\boxed{\dfrac{k}{3b^2}}$ utenfor, siden det er med i begge leddene kan vi utrykket det på nettopp denne måten:

$$u_s = \frac{k}{3b^2}(2 - \cos^2 \phi)$$

h)

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \quad \rightarrow \quad \cos(\phi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos(\phi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos(\phi) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Siden vi har tilnærmingen at $\sin\theta \approx \theta$ når theta er en veldig liten vinkel. Dette vil da også gjelde for tilfellet vårt hvor vi har $\frac{\theta}{2}$. så vi får med andre ord:

$$\cos\phi = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx -\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\phi \approx -\frac{\theta}{2}$$

i)

Det vi vet fra de andre oppgavene er at:

$$u_h = \frac{\cos\phi}{b} \qquad u_s = \frac{k}{3b^2}(2 - \cos^2 \phi) \qquad \cos\phi \approx \frac{\theta}{2}$$

Hvis vi når bruker alle disse formelene til å regne ut u, kommer vi frem til det i oppgaven. Hvis vi bruker formelen $u = u_h + u_s$ får vi:

$$u = \frac{k}{3b^2}(2 - \cos^2 \phi) + \frac{\cos\phi}{b} \quad \rightarrow \quad u \approx \frac{2k}{3b^2} - \frac{k}{3b^2} \cdot \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - \frac{\theta}{2b}$$

Hvis vi nå bruker tilnærmingen som sier at hvis theta er veldig liten så er theta opphøyd i andre lik 0, og sette dette inn i formelen vår. og da får vi:

$$u \approx \frac{2k}{3b^2} - \frac{\theta}{2b}$$

Som er svaret vi er ute etter.

j)

I oppgaven sier vi at u er tillnærmet lik 0 når lysstrålen er veldig langt unna. Derfor setter vi inn 0 for u og regner ut likningen med hensyn på θ

$$0 \approx \frac{2k}{3b^2} - \frac{\theta}{2b} \quad \rightarrow \quad \theta \approx \frac{4kb}{3b^2}$$

Nå setter vi inn igjen for k, som vi brukte som substitusjon i en av de tidligre oppgavene. Vi har at: $\boxed{k = \frac{3}{2}R_s}$. Hvis vi setter inn dette får vi:

$$\theta \approx \frac{3 \cdot 4R_S b}{2 \cdot 3b^2}$$

Her kan vi forkorte bort litt forskjellige ting, og hvis vi gjør dette sitter vi igjen med nettopp:

$$\theta \approx \frac{2R_S}{b}$$

k)

Vi har ligningen vår fra forrige oppgave:

$$\theta \approx \frac{2R_S}{b}$$

Det vi nå gjør er rett og slett å sette inn verdier for variablene våre.

$$\theta \approx \frac{2 \cdot 3km}{6.96 \cdot 10^5 km} \approx 8.62 \cdot 10^{-6}$$

Hvis vi regner om dette til grader får vi $4.94 \cdot 10^{-4}$ som er en ekstremt liten vinkel. Jeg vil si at antagelsen vi har brukt stemmer meget godt, og lyset avbøyes veldig lite, som vi ser i svaret på denne oppgaven.