Oblig 1 MAT1001

Tormod Brændshøi/tormobr

February 16, 2017

Oppgave Del 1

a)

Det vi vet er at A vil avta med 20 prosent for hvert step, altså være 80 prosent av det den var forrige step. den blir verken påvirket av B eller C. B vil øke med 20 prosent, altså være 120 prosent av det den var forrige step. B blir heller ikke påvirket av A eller C. C vil aldri endre seg, og alltid være det samme.

$$M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

Vi har likningsettet:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0.8x_n \\ y_{n+1} = 1.2y_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}$$

Hvis vi skal finne egenverdiene til denne matrise må vi introdusere lambda. vi vet at:

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.8x = \lambda x \\ 1.2y = \lambda y \\ z = \lambda z \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 0.8x - \lambda x = 0 \\ 1.2y - \lambda y = 0 \\ z - \lambda z = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} (0.8 - \lambda)x = 0 \\ (1.2 - \lambda)y = 0 \\ (1 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

Dette gir oss en matrise som ser slik ut:

$$\begin{bmatrix} 0.8 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix}$$

Det vi vet er at determinanten til denne matrisen må være 0, fordi vi har et likningsett hvor vi kan sette $\boxed{x = y = z = 0}$, og gi oss en løsning. Dette kaller vi et homogent likningsystem. vi finner egenverdiene av matrisen ved å sette determinanten lik 0, og løse likningen

$$det\begin{vmatrix} 0.8-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1.2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Siden vi har en diagonalmatrise i dette tilfellet er det ekstra lett å regne ut egenverdiene. Vi får:

$$(0.8-\lambda) * (1.2-\lambda) * (1-\lambda) = 0$$

Det vi veldig enkelt kan se her er at vi har 3 ulike løsninger på likningen; $\boxed{\lambda = 0.8,\ \lambda = 1.2 \text{ eller } \lambda = 1}$

For å finne egenvektoren kan vi sette inn for λ med de tre ulike verdiene, og regne ut x, y og z. Det vi kan se med en gang, er at vi får 3 ulike egenvektorer.

$$\lambda = 0.8 \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} 0.8x = 0.8x & \leftrightarrow \quad x = 1 \\ 1.2y = 0.8y & \leftrightarrow \quad y = 0 \\ 1.0z = 0.8z & \leftrightarrow \quad z = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = 1.2 \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} 0.8x = 1.2x & \leftrightarrow \quad x = 0 \\ 1.2y = 1.2y & \leftrightarrow \quad y = 1 \\ 1.0z = 1.2z & \leftrightarrow \quad z = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = 1.0 \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} 0.8x = 1.0x & \leftrightarrow \quad x = 0 \\ 1.2y = 1.0y & \leftrightarrow \quad y = 0 \\ 1.0z = 1.0z & \leftrightarrow \quad z = 1 \end{cases}$$

Vi sitter da igjen med de tre egenvektorene:

$$\lambda = 0.8 \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad t \neq 0, \qquad t \epsilon \mathbb{R}$$

$$\lambda = 1.2 \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{bmatrix} \qquad s \neq 0, \qquad s \epsilon \mathbb{R}$$

$$\lambda = 1.0 \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \qquad u \neq 0, \qquad u \epsilon \mathbb{R}$$

c)

$$M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \cdot 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 \cdot 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.64 & 0 & 0 \\ 0 & 1.44 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{bmatrix} 0.64 & 0 & 0 \\ 0 & 1.44 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.51 & 0 & 0 \\ 0 & 1.73 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^4 = M^3 \cdot M = \begin{bmatrix} 0.51 & 0 & 0 \\ 0 & 1.73 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.41 & 0 & 0 \\ 0 & 2.07 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^5 = M^4 \cdot M = \begin{bmatrix} 0.41 & 0 & 0 \\ 0 & 2.07 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.33 & 0 & 0 \\ 0 & 2.49 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Det vi kan se at skjer her er at A minker, og at B øker, mens C forblir akkuratt det samme. Det som hadde skjedd hvis n $\rightarrow \infty$ er at A $\rightarrow 0$ mens B $\rightarrow \infty$, mens C ikke endrer seg i det hele tatt, men forblir det samme.

d)

Det vi vet er at når vi har likevekt kan vi multiplisere startverdiene S_0 med M så mange ganger vi vil, og fortsatt på det samme. Da har vi likevekt. Vi får at:

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.8x = x \\ 1.2y = y \\ z = z \end{cases}$$

Det vi ser med en gang her er at x og y må beggge være 0, mens z kan være hva som helst, en fri variabel med andre ord. vi får da en likevektsfordeling som ser slik ut

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \qquad u \neq 0, \qquad u \epsilon \mathbb{R}$$

Dette er også egenvektoren, med den tilhørende egenverdien 1.

e)

Vi setter opp en lineær kombinasjon av de tre ulike egenvektorene vi har:

$$\lambda_1^n \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2^n \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}$$

$$0.8^n \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1.2^n \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + 1^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}$$

Det vi må kreve er at s = 0, hvis ikke vil dette leddet bare vokse og ta overhånd over det dynamisk systemet, og vi vil ikke få en likevekt. så vi får:

$$0.8^n \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} t \neq 0, & t \epsilon \mathbb{R} \\ u \neq 0, & u \epsilon \mathbb{R} \end{matrix}$$

Det vi ser er at når n går mot uendelig vil 0.8^n gå mot 0, noe som gjør at dette vil forsvinne, og vektoren, med den tillhørende egenverdien $\lambda = 1$ vil virke som en atraktor.

Del 2

f)

$$M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1.2 & -0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.8x + 0.1z = \lambda x \\ 1.2y - 0.1z = \lambda y \\ z = \lambda z \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 0.8x - \lambda x + 0.1z = 0 \\ 1.2y - \lambda y - 0.1z = 0 \\ z - \lambda z = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} (0.8 - \lambda)x + 0.1z = 0 \\ (1.2 - \lambda)y - 0.1z = 0 \\ (1 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0.8 - \lambda & 0 & 0.1 \\ 0 & 1.2 - \lambda & -0.1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix}$$

Vi vet at determinanten må være 0 igjen. så vi regner ut den, og løser med hensyn på lambda, for å finne egenverdiene.

$$det \begin{vmatrix} 0.8 - \lambda & 0 & 0.1 \\ 0 & 1.2 - \lambda & -0.1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(0.8 - \lambda) \cdot (1.2 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) = 0$$

Vi får da de tre samme løsningene for lambda som i forrige oppgave, nemlig $\boxed{\lambda = 0.8,\ \lambda = 1.2 \text{ og } \lambda = 1.0}$ Vi setter nå inn de tre ulike egenverdiene for å finne egenvektorene.

$$\lambda = 0.8 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0.8x + 0.1z = 0.8x & \leftrightarrow \quad x = t \\ 1.2y - 0.1z = 0.8y & \leftrightarrow \quad y = 0 \quad t \neq 0, t \,\epsilon\, \mathbb{R} \\ 1.0z = 0.8z & \leftrightarrow \quad z = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = 1.2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0.8x + 0.1z = 1.2x & \leftrightarrow \quad x = 0 \\ 1.2y - 0.1z = 1.2y & \leftrightarrow \quad y = s \quad s \neq 0, s \,\epsilon\, \mathbb{R} \\ 1.0z = 1.2z & \leftrightarrow \quad z = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = 1.0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0.8x + 0.1z = 1.0x & \leftrightarrow \quad x = 0.5u \\ 1.2y - 0.1z = 1.0y & \leftrightarrow \quad y = 0.5u \quad u \neq 0, u \,\epsilon\, \mathbb{R} \\ 1.0z = 1.0z & \leftrightarrow \quad z = u \end{cases}$$

Vi løser likningssytemet for alle ulike lambda med hensyn på x, y og z, og finner verdiene. Da sitter vi igjen med disse tre egenvektorene.

$$\lambda = 0.8 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t \neq 0, \qquad t \epsilon \mathbb{R}$$

$$\lambda = 1.2 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{bmatrix} s \neq 0, \qquad s \epsilon \mathbb{R}$$

$$\lambda = 1.0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0.5u \\ 0.5u \\ u \end{bmatrix} u \neq 0, \qquad u \epsilon \mathbb{R}$$

g)

$$\begin{bmatrix} 0,8 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1.2 & -0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$0.8x + 0.1z = x$$
$$1.2y - 0.1z = y$$
$$z = z$$

$$\begin{array}{ll} z = t & \\ y = 0.5t, & t \neq 0,\ t \epsilon \mathbb{R} \\ x = 0.5t & \end{array}$$

V Vi ser at også her blir likevektsfordeligen den egenvektoren som har den tillhørende egenverdien 1, i likhet med i oppgave d.

Vi setter opp en lineær kombinasjon av de tre ulike egenvektorene vi har:

$$\lambda_1^n \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2^n \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3^n \begin{bmatrix} 0.5u \\ 0.5u \\ u \end{bmatrix}$$

$$0.8^n \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1.2^n \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + 1^n \begin{bmatrix} 0.5u \\ 0.5u \\ u \end{bmatrix}$$

Det vi må kreve er at s = 0, hvis ikke vil dette leddet bare vokse og ta overhånd over det dynamisk systemet, og vi vil ikke få en likevekt. Så vi får:

$$0.8^n \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1^n \begin{bmatrix} 0.5u \\ 0.5u \\ u \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{ll} t \neq 0, & t \epsilon \mathbb{R} \\ u \neq 0, & u \epsilon \mathbb{R} \end{array}$$

Vi ser at svaret er nesten helt likt det vi fikk i oppgave e, bare at egenvektoren hvor lambda er lik 1 er litt ulik det den var i den forrige oppgaven.

Del 3

h)

$$M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (0.8-\lambda) & 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & (1.2-\lambda) & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & (1-\lambda) \end{bmatrix}$$

For å finne det karakteristiske polynomet må vi regne ut deterimanten til matrisen, og sette det lik 0

$$det \begin{bmatrix} (0.8-\lambda) & 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & (1.2-\lambda) & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & (1-\lambda) \end{bmatrix} = 0$$

$$((0.8-\lambda)\cdot(1.2-\lambda)\cdot(1-\lambda)) + (0.1\cdot -0.1 \cdot -0.1) + (0.1 \cdot -0.1 \cdot 0.1)$$
$$-(0.1\cdot(1.2-\lambda)\cdot -0.1) - (0.1\cdot -0.1\cdot(1-\lambda)) - ((0.8-\lambda)\cdot -0.1\cdot 0.1) = 0$$

Hvis vi regner ut dette får vi det karakteristiske polynomet som svar:

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2.99\lambda + 0.99 = 0$$

Vi bruker så f.eks. polynomdivisjon til å regne ut de tre forskjellige lambda verdiene, og sitter igjen med:

$$\lambda = 1.1,\ \lambda = 1\ eller\ \lambda = 0.9$$

i)

For å finne de tilhørende egenvektoren, kan vi sette inn får de tre ulike lambda verdiene våre i likningsettet

$$\lambda = 0.9 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0.8x + 0.1y + 0.1z = 0.9x & \rightarrow \quad x = 2t \\ -0.1x + 1.2y - 0.1z = 0.9y & \rightarrow \quad y = t \qquad t \neq 0, t \,\epsilon\, \mathbb{R} \\ -0.1x + 0.1y + 1.0z = 0.9z & \rightarrow \quad z = t \end{cases}$$

$$\lambda = 1.1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0.8x + 0.1y + 0.1z = 1.1x & \rightarrow \quad x = s \\ -0.1x + 1.2y - 0.1z = 1.1y & \rightarrow \quad y = 2s \qquad s \neq 0, s \,\epsilon\, \mathbb{R} \\ -0.1x + 0.1y + 1.0z = 1.1z & \rightarrow \quad z = s \end{cases}$$

$$\lambda = 1.0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0.8x + 0.1y + 0.1z = 1.0x & \rightarrow \quad x = u \\ -0.1x + 1.2y - 0.1z = 1.0y & \rightarrow \quad y = u \qquad u \neq 0, u \,\epsilon\, \mathbb{R} \\ -0.1x + 0.1y + 1.0z = 1.0z & \rightarrow \quad z = u \end{cases}$$

Å regne ut disse likniongsettene er meget trivielt, vi kan bruke flere forskjellige metoder. Vi kan enten bruke radopperasjoner, innsettingsmetoden, adisjonsmetoden eller kanskje mest sannsynelig en kombinasjon av flere. Vi får i hvertfall svarene:

$$\lambda = 0.9 \qquad \rightarrow \qquad t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t \neq 0, t \,\epsilon\, \mathbb{R}$$

$$\lambda = 1.1 \qquad \rightarrow \qquad s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} s \neq 0, s \,\epsilon\, \mathbb{R}$$

$$\lambda = 1.0 \qquad \rightarrow \qquad u \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \neq 0, u \,\epsilon\, \mathbb{R}$$

j)

Hvis vi skal skrive opp en startfordeling som en linær kombinasjon får vi dette:

$$\begin{bmatrix}8\\5\\5\end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{gathered}a + 2b + c = 8\\2a + b + c = 5\\a + b + c = 5\end{gathered} \qquad \begin{gathered}2a + b + c = 5\\a + b + c = 5\end{gathered} \qquad a - 2a = 5 - 5 \qquad a = 0$$

$$b + c = 5 \qquad b = 5 - c \qquad 2b + c = 8 \qquad 2(5 - c) + c = 8$$

$$10 - 2c + c = 8 \qquad c = 2 \qquad b + c = 5 \qquad b = 3$$

Vi får at a = 0, b = 3 og c = 2 og da den lineære kombinasjonen:

$$\begin{bmatrix}8\\5\\5\end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}8\\5\\5\end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

k)

Her må vi gange med egenverdiene i e'nte for få finne en funksjon:

$$M^n \cdot \begin{bmatrix}8\\5\\5\end{bmatrix} = 3 \cdot M^n \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + 2 \cdot M^n \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$M^n \cdot \begin{bmatrix}8\\5\\5\end{bmatrix} = 3 \cdot 0.9^n \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + 2 \cdot 1^n \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

l)

Det vi ser at skjer hvis n $\to \infty$ er at det leddet hvor lambda er lik 0.9 vil gå mot null, og vi sitter igjen med det leddet hvor lambda er lik 1, fordi 1 vil bare fortsette å være 1 uansett hvor mange ganger man ganger det med seg selv. Mens når lambda er 0.9 vil det som sagt minke. Fordelingen vi sitter igjen med er:

$$2 \cdot 1^n \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

m)

Det vil som skal til for at den ikke skal konvergere mot en likevektstilstand er at a(i oppgave j) $\neq 0$. Det som skjer hvis a ikke er null er det at leddet med egenvektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ikke blir borte. Og siden den tilhørende egenverdien til denne egenvektoren er over 1, vil dette bare vokse mot uendelig, hvis n går mot uendelig, og ta overhånd over det dynamiske systemet. Hvis vi ser på den lineære kombinasjonen vi har i oppagave j så har vi likningen:

$$a - 2a = 5 - 5$$

$$-a = 0$$

Det vi ser er at siden vi har både 5 på y og z plassen, så vil vi få at a = 0. det som skal til for at a ikke er 0 er at vi ikke har både 5 på y og z plassen, men to ulike tall, og dette er modifikasjonen vi letter etter i startfordelingen.