

مبانی نظریه محاسبه

پاسخ کوییز اول

نمره کل: ۹ نمره

۱. یک مسئله مثال بزنید و سپس یک زبان را روی آن مسئله شرح دهید. (۳ نمره)^۱
پاسخ: یک مسئله تصمیم‌گیری^۲ مثال می‌زنیم. فرض کنید بخواهیم با ورودی گرفتن دو عدد طبیعی n و k ، مشخص کنیم n بر k بخش پذیر است یا خیر. مسئله پارامتر ثابت ندارد و ورودی آن دو عدد n و k و خروجی آن YES یا NO است. زبان این مسئله را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد:

$$L = \{ \langle n, k \rangle : n, k \in \mathbb{N}, k \mid n \}$$

منظور از $\langle n, k \rangle$ نوعی کد کردن^۳ دو عدد طبیعی با یک الفبا است. به عنوان مثال یک نوع کد کردن می‌تواند به کمک الفبای $\Sigma = \{a, \#\}$ باشد؛ یعنی دو عدد طبیعی n و k را به صورت $a^n \# a^k$ کد کنیم. در این صورت زبان L به صورت زیر خواهد بود:

$$L = \{ a^n \# a^k : n, k \in \mathbb{N}, k \mid n \}.$$

یک نوع دیگر می‌توانست به کمک الفبای $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ باشد و از نمایش مبنای دو اعداد n و k استفاده کنیم. در فصل ۷ خواهید دید که چگونه این نمایش‌ها برای ورودی دادن به ماشین‌های تورینگ—که مدلی ریاضی برای کامپیوتر در دستتان هستند—استفاده می‌شوند.

۲. مسئله معادل اجتماع دو زبان را چگونه توصیف می‌کنید؟ یک مثال بزنید. (۱ نمره)
پاسخ: مسئله معادل اجتماع دو زبان را می‌توان با قرار دادن کلمه «یا» بین آن دو مسئله توصیف کرد. به عنوان مثال مسئله معادل اجتماع دو زبان $L_1 = \{a^{3k+1} \mid k \in \mathbb{N}\}$ و $L_2 = \{a^{3k+2} \mid k \in \mathbb{N}\}$ را می‌توان به این صورت توصیف کرد که با ورودی گرفتن یک عدد طبیعی مانند n ، مشخص کنیم باقی مانده n بر ۳ برابر ۱ یا ۲ است یا خیر.

۳. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. برای پاسخ خود دلیل بیاورید؛ در صورت درستی اثبات و در غیر این صورت مثال نقض بیاورید. (هر مورد ۱ نمره و جمعاً ۵ نمره)

(آ) برای هر زبان L ، L^* نامتناهی است.

^۱ معرفی مسئله، ورودی و خروجی آن یک نمره، مشخص کردن زبان مسئله یک نمره و مشخص کردن الفبای زبان نیز یک نمره دارد.

^۲ Decision problem

^۳ Encoding

پاسخ: نادرست. اگر $L = \{\Lambda\}$ باشد، $L^* = \{\Lambda\}$ خواهد بود. اگر $x \in L$ و $x \neq \Lambda$ باشد، گزاره درست خواهد بود.

(ب) Λ می‌تواند الفبای یک زبان باشد.

پاسخ: نادرست. Λ رشته به طول صفر است اما الفبا یک مجموعه متناهی است.

(ج) برای زبان L ، اگر $\Lambda \in L^*$ باشد، آنگاه $\Lambda \in L$.

پاسخ: نادرست. اگر $L = \{a\}$ باشد، آنگاه $L^* = \{\Lambda, a, aa, aaa, \dots\}$.

(د) هیچ زبانی مانند L وجود ندارد که برای هر k داشته باشیم

$$\bigcup_{i=1}^k L^i = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i.$$

پاسخ: نادرست. زبان‌های $L = \Sigma^*$ یا $L = \{\Lambda\}$ دارای این ویژگی هستند.

$$\{a^*b^*\} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \quad (*)$$

پاسخ: نادرست. $a^3 b^4 \in \{a^*b^*\}$ اما $a^3 b^4 \notin \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.