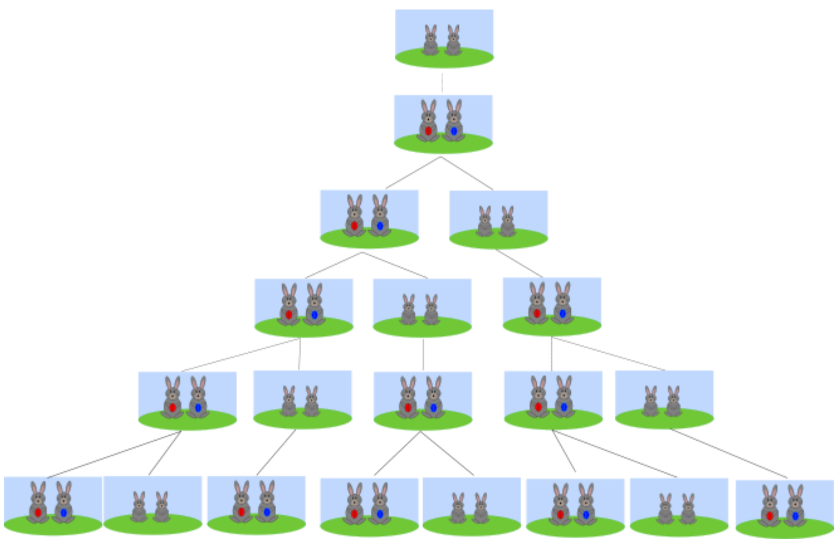
B2 – Mathématiques :

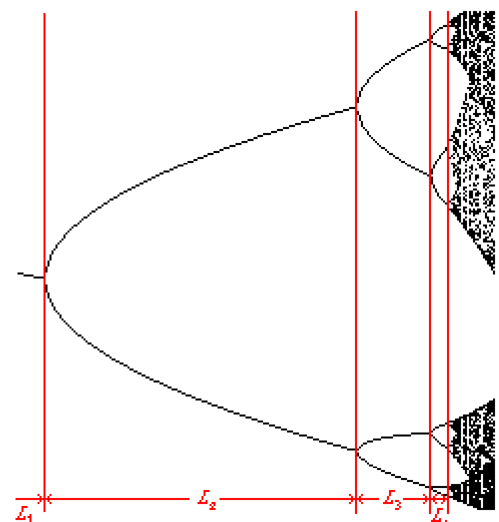
Les suites numériques

Amine ILMANE

106bombyx

Bombyx booming bylaw



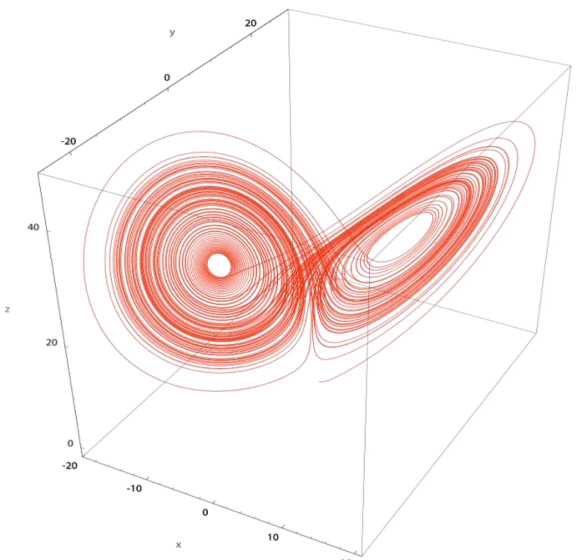


$$\delta = \lim_{n \to \infty} \frac{L_n}{L_{n+1}} = 4.6692016091\ldots$$

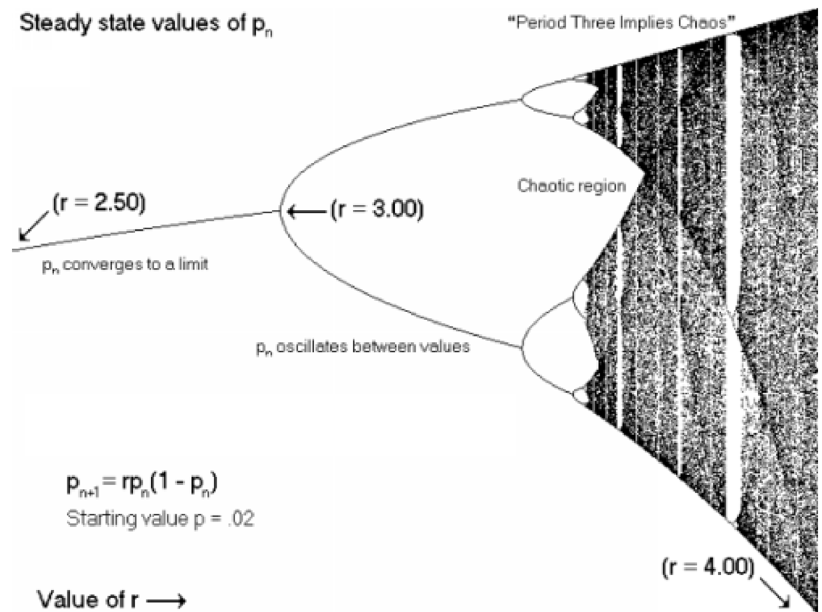
Le chaos

La théorie du chaos est un domaine à la frontière en mathématique est physique. On étudie dans cette théorie le comportement des **systèmes dynamiques sensibles aux conditions initiales.**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \sigma\big(y(t) - x(t)\big) \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \rho\, x(t) - y(t) - x(t)\, z(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = x(t)\, y(t) - \beta\, z(t) \end{cases}$$



Attracteur étrange de Lorenz (fractale)



Bifurcation vers le chaos

Projet 201 :bombyx

Let's call x_i the number of the i^{th} generation of butterflys. Here is a model for the evolution of x_i:

$$\begin{cases} x_1 = n & \text{where } n \text{ is the number of first generation individuals} \\ x_{i+1} = kx_i\frac{1000-x_i}{1000}, & \text{for } i \geq 1, k \text{ being the } \textit{growth rate}\text{, from 1 to 4.} \end{cases}$$

Terminal

```
~/B-MAT-200> ./105torus -h
USAGE
    ./106bombyx n [k | i0 i1]

DESCRIPTION
    n        number of first generation individuals
    k        growth rate from 1 to 4
    i0       initial generation (included)
    i1       final generation (included)
```

Projet 201 :bombyx

The curve representing the number of individuals in relation to the generation (varying from 1 to 100)

$$\begin{cases} x_1 = n & \text{where } n \text{ is the number of first generation individuals} \\ x_{i+1} = kx_i \frac{1000-x_i}{1000}, & \text{for } i \geq 1,\ k \text{ being the } \textit{growth rate}\text{, from 1 to 4.} \end{cases}$$

Terminal

```
~/B-MAT-200> ./106bombyx 10 3.3 > data
~/B-MAT-200> head data
1 10.00
2 32.67
3 104.29
4 308.26
5 703.68
6 688.10
7 708.24
8 681.89
9 715.82
10 671.29
~/B-MAT-200> tail data
91 823.60
92 479.43
93 823.60
94 479.43
95 823.60
96 479.43
97 823.60
98 479.43
99 823.60
100 479.43
```

$(n\ ;\ u_n)$

Projet 201 :bombyx

$$\begin{cases} x_1 = n \\ x_{i+1} = k x_i \frac{1000 - x_i}{1000}, \end{cases}$$

where n is the number of first generation individuals for $i \geq 1$, k being the *growth rate*, from 1 to 4.

Terminal

```
~/B-MAT-200> ./106bombyx 10 10000 10010 > data
~/B-MAT-200> head -n 30 data
1.00 0.10
1.00 0.10
1.00 0.10
1.00 0.10
1.00 0.10
1.00 0.10
1.00 0.10
1.00 0.10
1.00 0.10
1.00 0.10
1.00 0.10
1.01 9.90
1.01 9.90
1.01 9.90
1.01 9.90
1.01 9.90
1.01 9.90
1.01 9.90
1.01 9.90
1.01 9.90
1.01 9.90
1.01 9.90
1.02 19.61
1.02 19.61
1.02 19.61
1.02 19.61
1.02 19.61
1.02 19.61
1.02 19.61
1.02 19.61
```

$i_1 - i_0 + 1$

$(\boldsymbol{k}\ ;\ \boldsymbol{u}_{10\,000}) \rightarrow (\boldsymbol{k}\ ;\ \boldsymbol{u}_{10\,010})$

Projet 201 :bombyx

Terminal

```
~/B-MAT-200> cat drawer.gnu
set terminal dumb
set nokey
plot "data"
```

Terminal

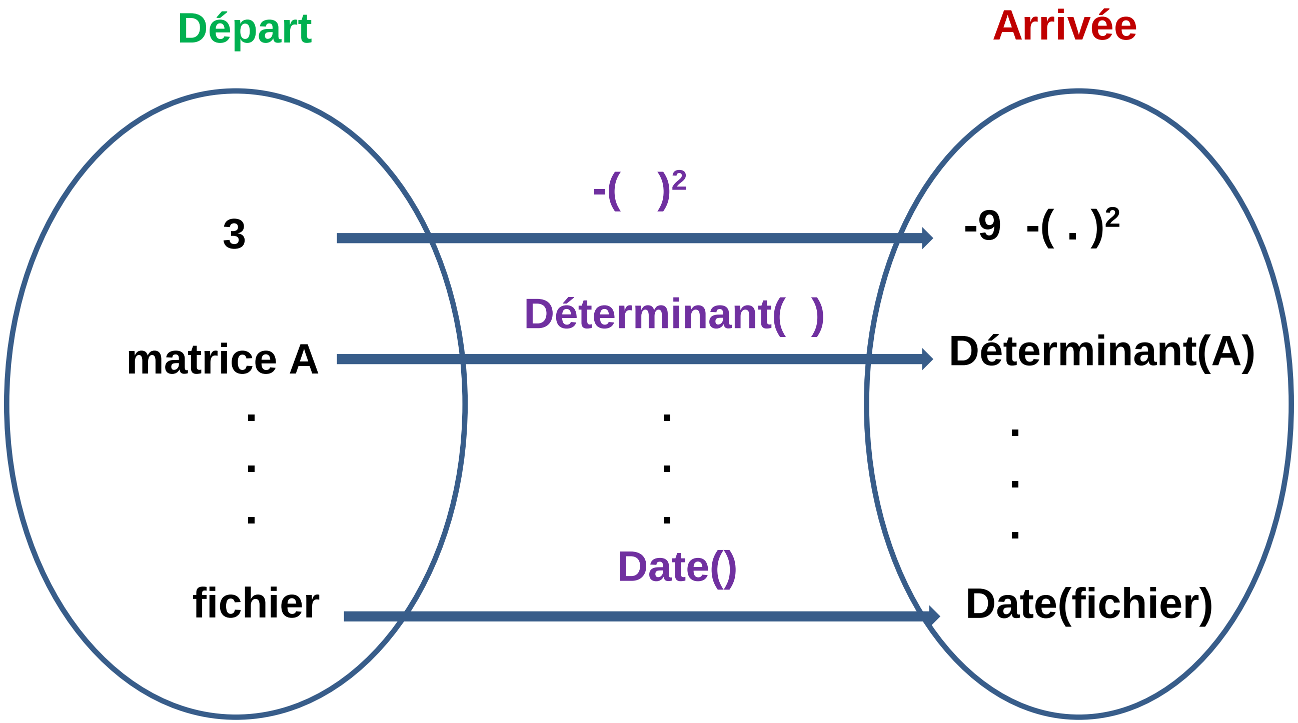
```
~/B-MAT-200> cat drawer.gnu | gnuplot


1000 +--------------------------------------------------------------------+
     |          +           +          +           +           +    AAAAAA|
 900 |-+                                                       AAAAAAAA A-|
     |                                                    AAAAAAAAAAAAAAAA|
 800 |-+                                              AAAAA    AAAAAAAAAAA|
     |                                             AAA            AAAA AAA|
 700 |-+                                           A              AAAA AAA|
     |                                     AAAAAAAAA              AAAAAAA |
 600 |-+                            AAAAAAAA       AA            AAAAAAAAA|
     |                        AAAAAAA                AAA        AAAA AAAAA|
 500 |-+                  AAAAA                        AAAA   AAAAA AAAAAA|
     |                AAAA                                 AAAA  AAAAA A A|
 400 |-+           AAAA                                       AAAAA  A AA-|
     |          AAA                                            AAAA  AA A |
 300 |-+      AAA                                                AAAAAA AA|
     |      AA                                                     AAA AAA|
 200 |-+  AAA                                                       AAAAAA|
     |  AAA                                                           AAAA|
 100 |-AA                                                              AAA|
     |AA        +           +          +           +           +        AA|
   0 +--------------------------------------------------------------------+
     1         1.5          2         2.5          3          3.5         4
```

Définitions

Application (fonction) :

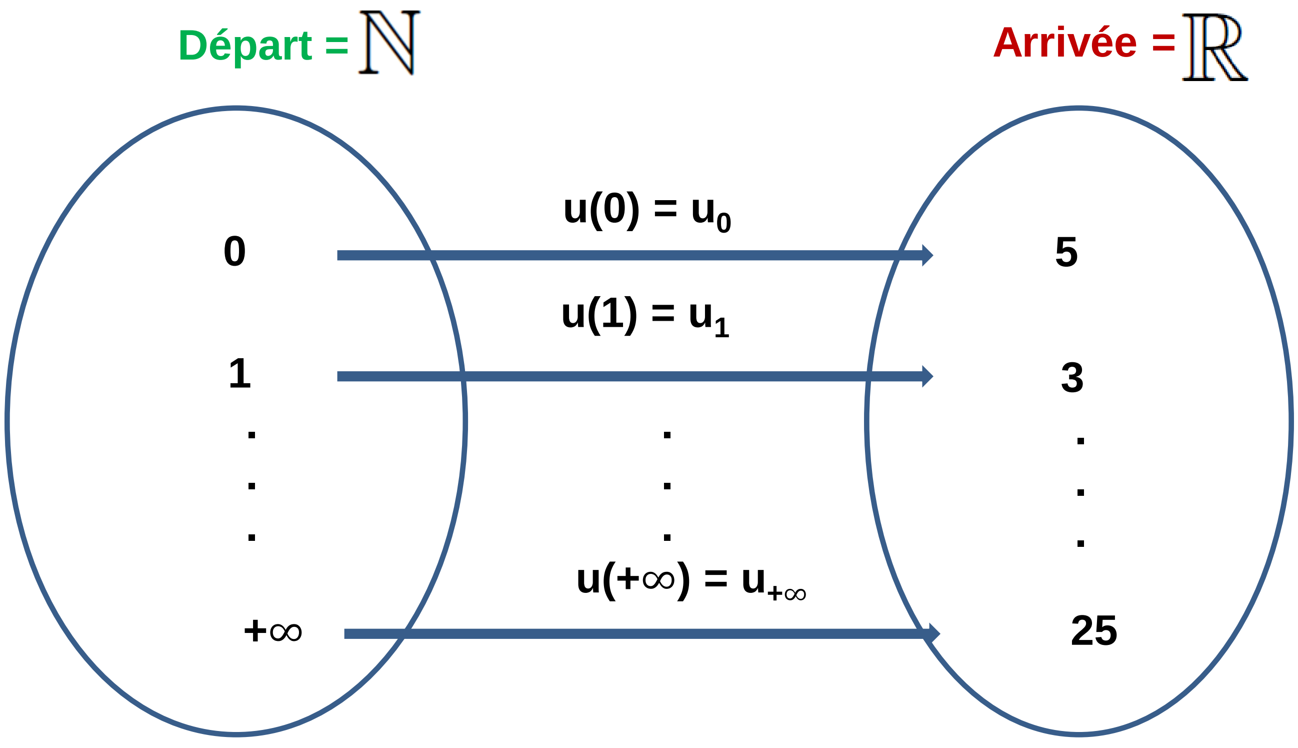
Une application est une **correspondance** entre **deux ensemble**, i.e., à chaque élément de l'ensemble de départ (noté **x** par tradition) j'associe un élément de l'ensemble d'arrivée (noté **f**(**x**) par tradition).

A priori, l'ensemble de départ et d'arrivée peuvent être n'importe quoi.



Définitions pratiques

- **La fonction :** est une application dont **l'ensemble de départ** est $\mathbb{R}$, notée **f**(**x**)
- **La suite :** est une application dont **l'ensemble de départ** est $\mathbb{N}$, notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- **La suite numérique:** référence au mot : numéro, est une suite dont **l'ensemble d'arrivée** est $\mathbb{R}$



Représentation des suites : Exemples

- **Par un vecteur :** $(u_n) = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots)$ $(u_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ $(u_n) = (1, 2, 3, \ldots)$

- **Par un tableau indexé :** ressemble beaucoup au schéma avec les ensembles

n	0	1	2	…	122	123	…
u_n				…			

- **Par une expression (terme générique) :** $u_n = \frac{n}{n+1}$ $u_n = \frac{1}{n}$ $u_n = n!$ $u_n = n$

- **Par une relation de récurrence à un pas :**

$$u_n = u_{n-1} + d \qquad u_n = u_{n-1} \times q \qquad u_{n+1} = \sin u_n$$

- **Par une relation de récurrence à deux pas :**

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \qquad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

Fibonacci : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8

Dans la pratique : exemples

Résolution d'une équation :

$$x^4 + x^2 + 4x - 2 = 0$$

	Bissection	Point fixe	Steffenson	Newton	Sécante
Solution	0,441707229614258	0,441707269052940	0,441707179090632	0,441707179090649	0,441707184105876
f(x)	2,6 E-07	4,7 E-07	-1,9 E-17	8,9 E-14	2,6 E-08
Nb. d'étapes	18	11	3	3	4

Traitement de données :

Apparition d'un carré bleu pour le même individu sur 7 séries

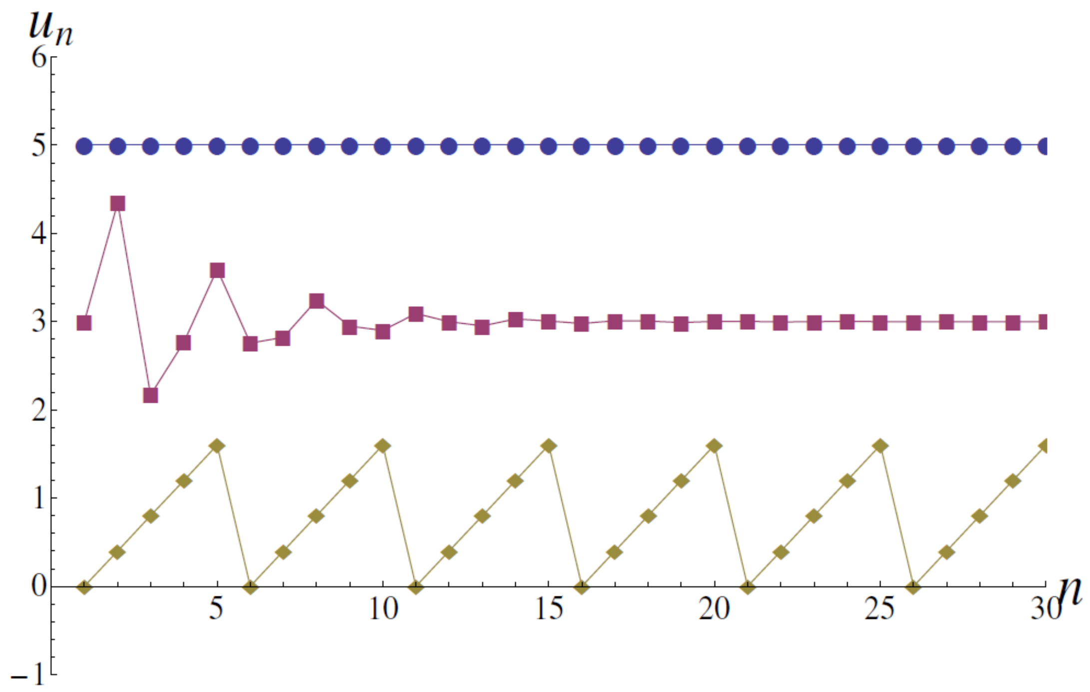
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		Moyenne de la série:
Série 1	375	327	328	374	378	359	327	359	671	312		381
Série 2	374	375	327	328	405	343	378	312	312	325		347,9
Série 3	328	297	296	312	297	375	374	343	405	356		338,3
Série 4	297	343	390	312	312	312	390	312	327	296		329,1
Série 5	343	312	312	359	343	297	281	296	328	297		316,8
Série 6	352	302	298	322	367	302	315	296	320	333		320,7
Série 7	302	326	314	286	332	347	296	314	301	320		313,8
Série 8	353	302	312	349	343	297	291	296	325	296		316,4
Série 9	323	356	298	310	310	317	303	297	289	346		314,9
Série 10	310	259	260	306	310	291	300	291	561	285		317,3

Un peu de jargon

Suite constante : tous les termes sont égaux (au premier) $u_n = u_0$

Suite stationnaire : à partir d'un certain rang (d'un certain indice) la suite devient constante

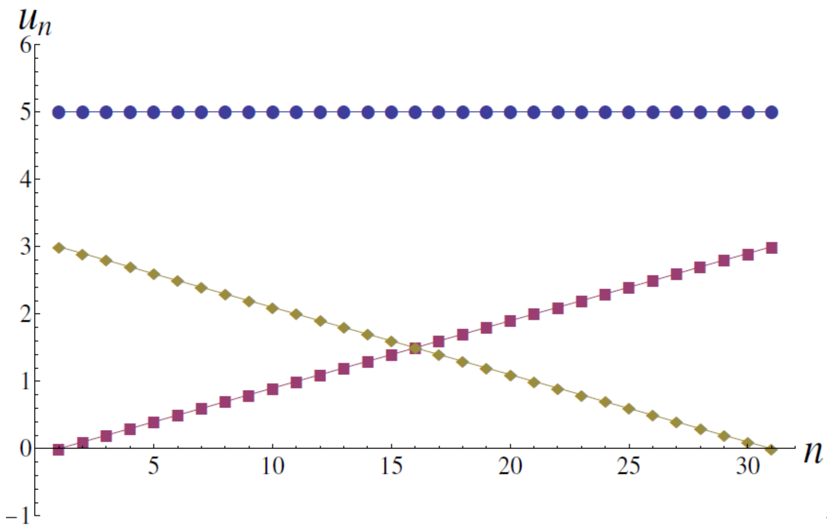
Suite Périodique: les mêmes valeurs reviennent chaque **N fois** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+N} = u_n$

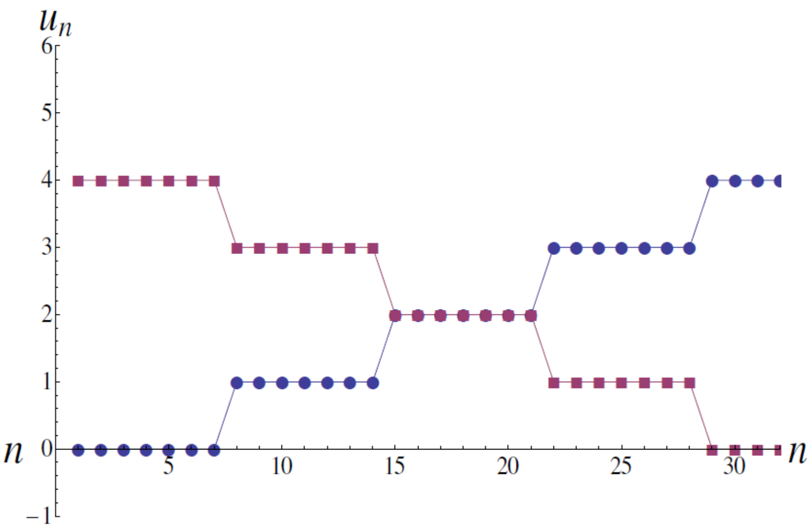


Un peu de jargon

Suite monotone : quand elle n'a **qu'un sens de variation**

$$
\begin{array}{ll}
(u_n) \ \textit{est constante si} & u_n = u_{n+1} \\
(u_n) \ \textit{est croissante si} & u_n \leq u_{n+1} \\
(u_n) \ \textit{est strictement croissante si} & u_n < u_{n+1} \\
(u_n) \ \textit{est décroissante si} & u_n \geq u_{n+1} \\
(u_n) \ \textit{est strictement décroissante si} & u_n > u_{n+1}
\end{array}
$$





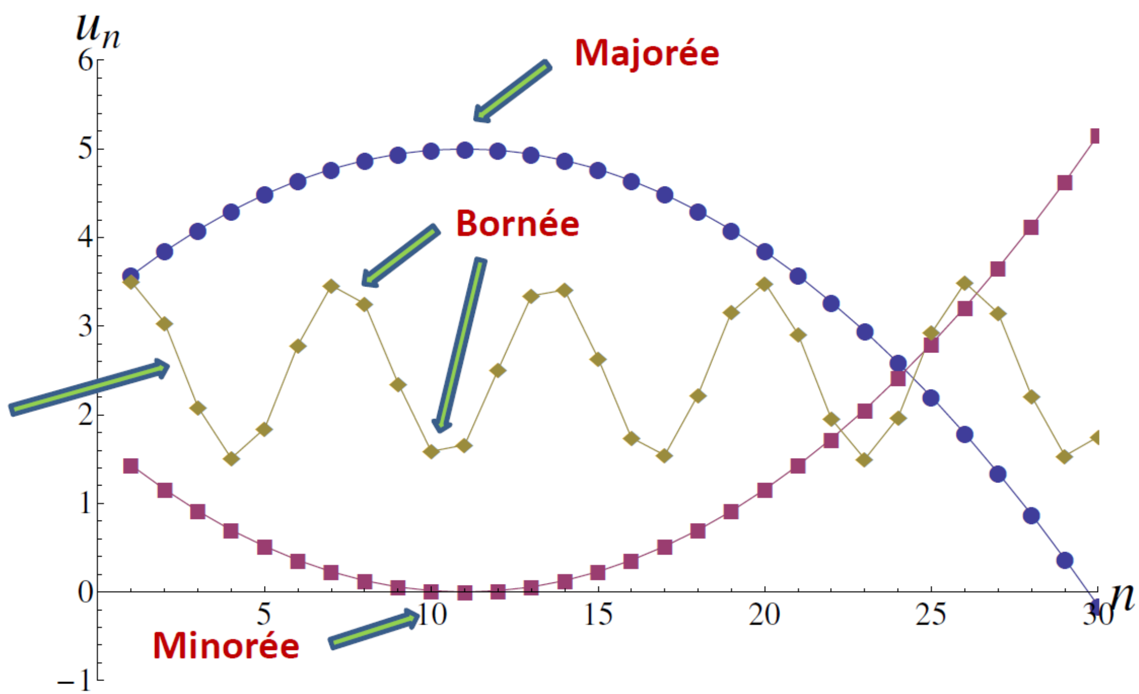
Un peu de jargon

Suite bornée : est une suite qui ne dépassera pas un certain nombre

$$(u_n) \text{ est majorée s'il existe } M \text{ tel que } \quad u_n \leq M$$
$$(u_n) \text{ est minorée s'il existe } m \text{ tel que } \quad u_n \geq m$$

$$(u_n) \text{ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.}$$

$\boxed{-1 \leq cos(n) \leq 1}$



La limite

On parle de limite quand on veut savoir ce qui se passe, en avançant pas à pas, lorsque l'on se rapproche de quelque chose qu'**on sait qu'on n'atteindra jamais**. Ou, que l'on essaye d'atteindre **un point qui nous est interdit**.

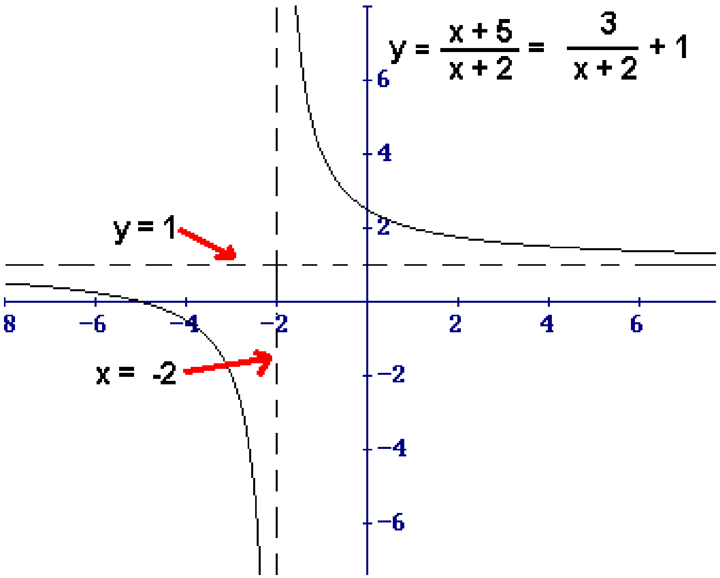
Ce qui nous donne pour :

- **''on sait que l'on n'atteindra jamais'' :** c'est essayer d'atteindre l'infini $\pm\infty$;
- **''un point qui nous est interdit'' :** un point qui génère des divisions par **0.**

N. B.

- Pour notre étude des suites nous nous intéresserons qu'à l'infini **n =** ($\pm\infty$).

- L'infini dans la pratique représente les très grand nombre.

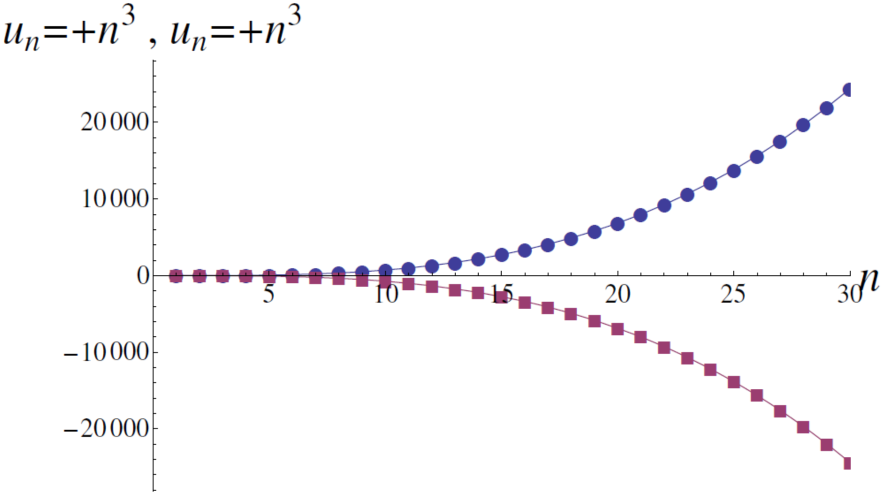


La limite d'une suite : 1/3 - **limite infinie**

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \pm \infty$$

Intérêt de la monotonie d'une suite :

- Suite décroissante non minorée
- Suite croissante non majorée

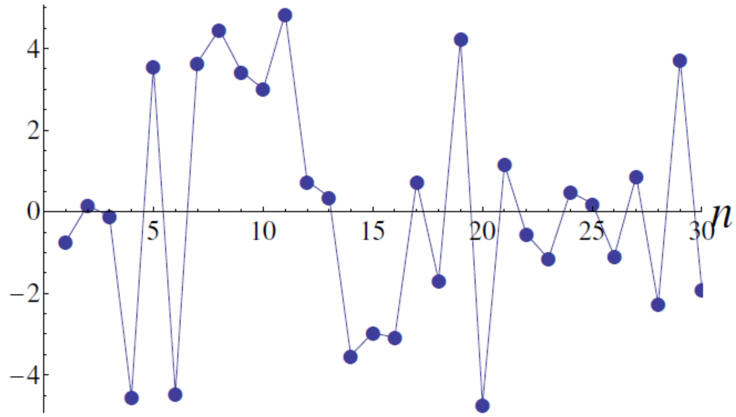


La limite d'une suite : 2/3 - **limite non existante**

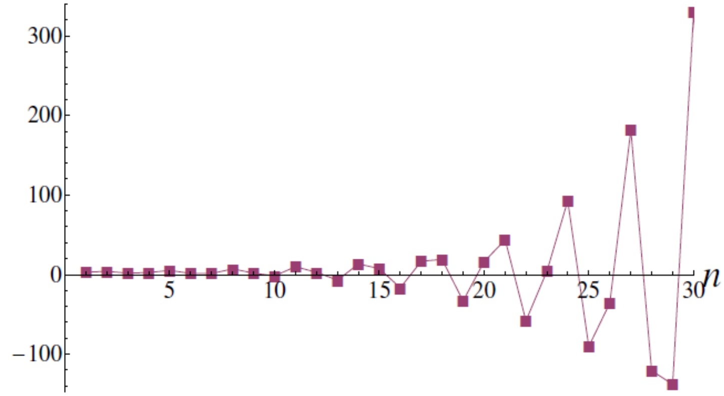
$$\lim_{n\to\infty} u_n = ??$$

N. B.
Ça arrive quand la suite oscille de façon périodique ou aléatoire

u_n=RandomReal [−5,5]



$u_n=e^{0.2\,n}\sin(2n)$

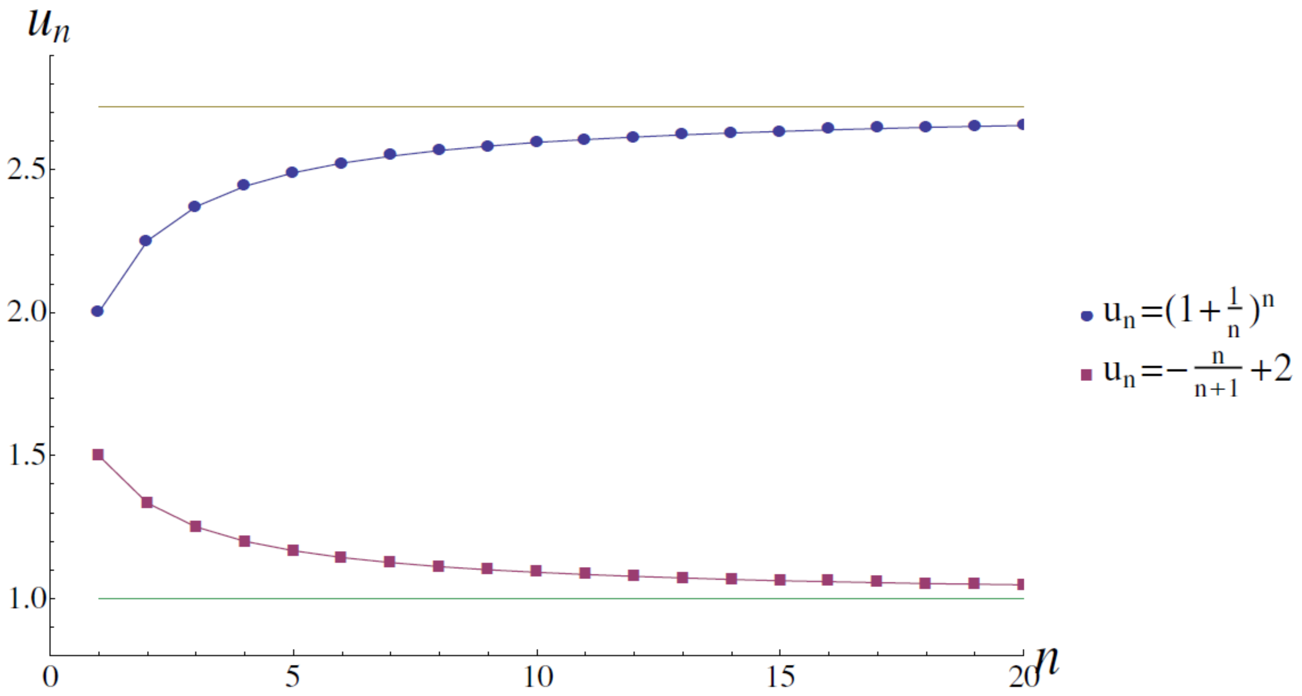


La limite d’une suite : 3/3 - **limite finie**

$$\lim_{n \to \infty} u_n = l$$

La limite finie est souvent ce que l’on attend d’une suite car dans la majorité des cas à la solution recherché n’est autre que cette limite. On parle, dans le cas ou elle existe, de **convergence**.

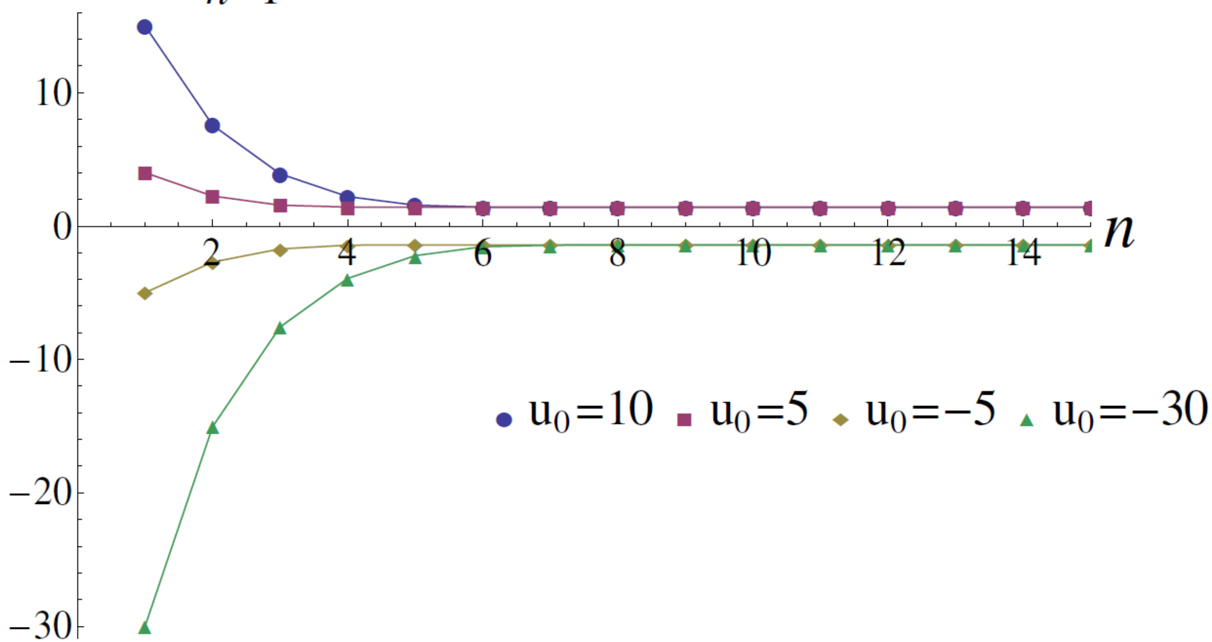
Petite illustration de la convergence, Cliquez pour y aller !!



La limite d'une suite : 3/3 - **limite finie**

$$\lim_{n\to\infty} u_n = Signe(u_0)\sqrt{r} \quad ; \quad r = 2$$

$$u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{r}{u_{n-1}}\right)$$



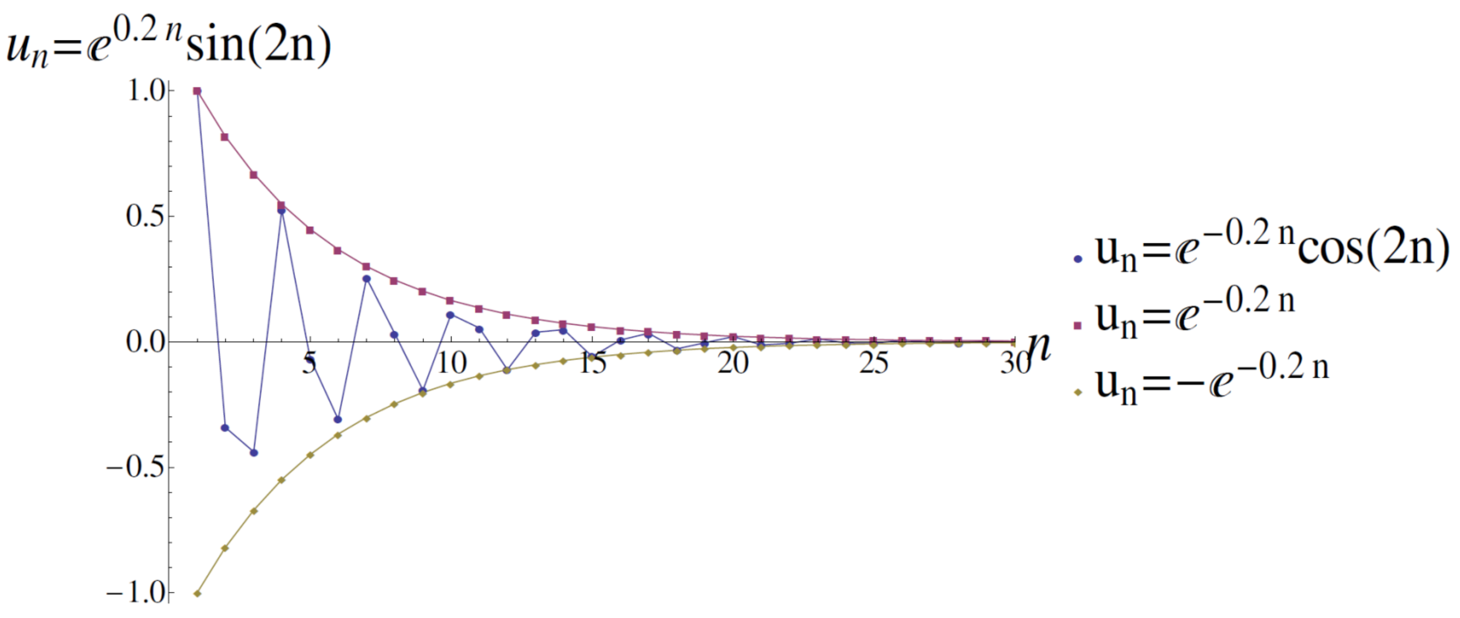
La convergence d'une suite

- Si $\mathbf{u_n}$ est une suite convergente. Alors $\mathbf{u_n}$ admet **une seule limite** ;

- Si $\mathbf{w_n} \leq \mathbf{u_n} \leq \mathbf{v_n}$ et $\mathbf{v_n}$ et $\mathbf{w_n}$ convergent vers $\boldsymbol{l}$ alors $\mathbf{u_n}$ est convergente est a pour limite $\boldsymbol{l}$

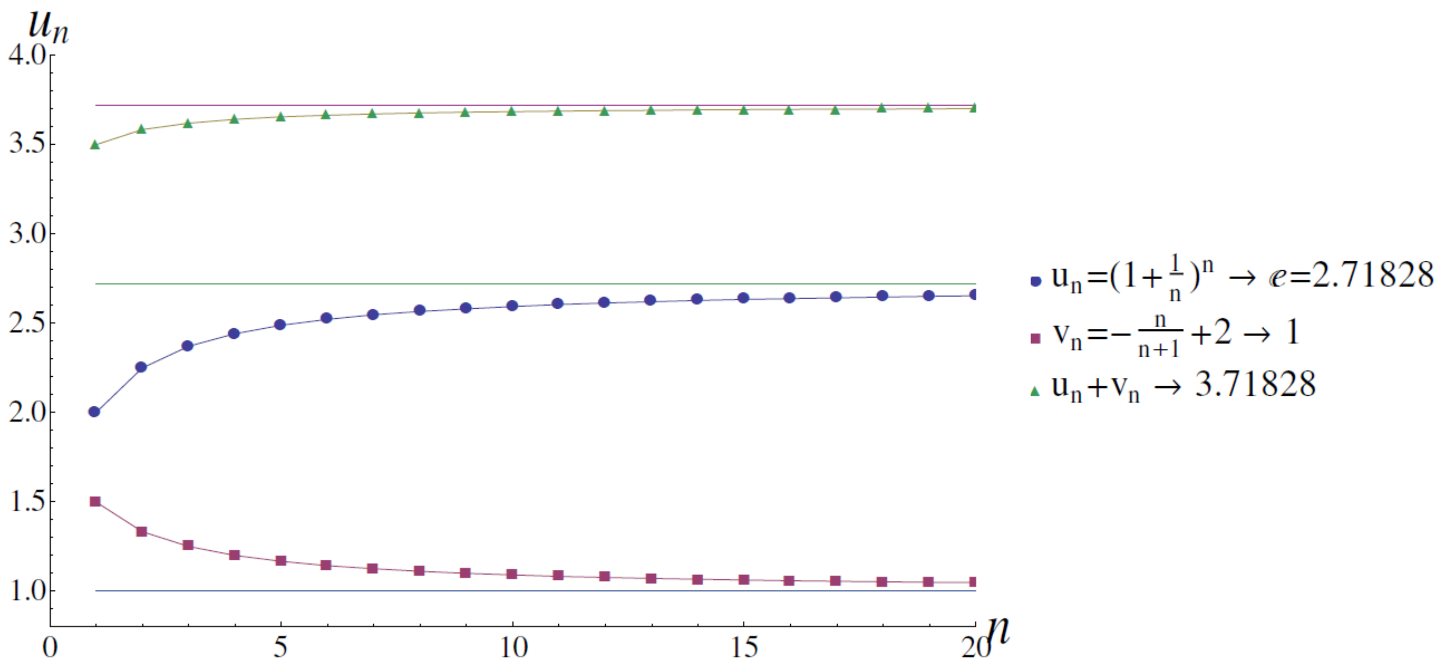
Monotonie et convergence :

- Si $\mathbf{u_n}$ est croissante est majorée alors $\mathbf{u_n}$ est convergente ;
- Si $\mathbf{u_n}$ est décroissante est minorée alors $\mathbf{u_n}$ est convergente .



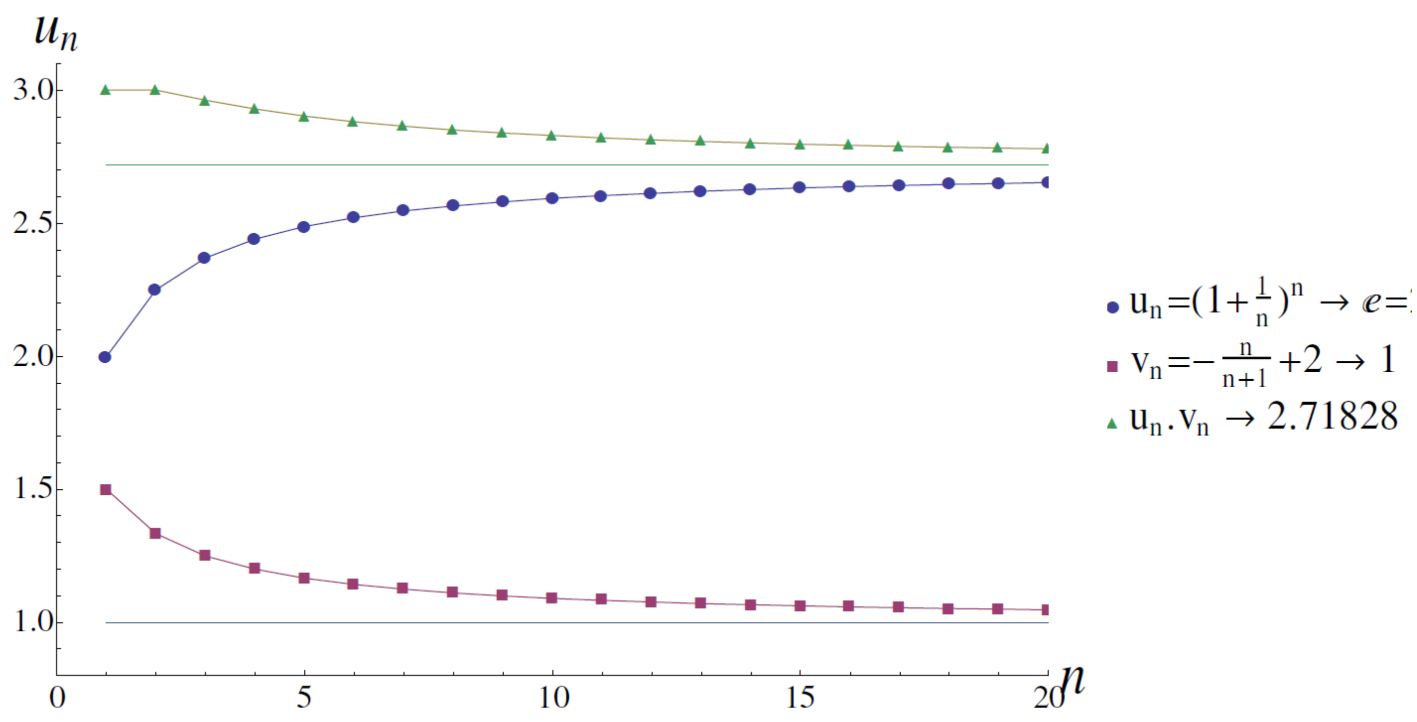
Propriétés des limites

$$\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n$$



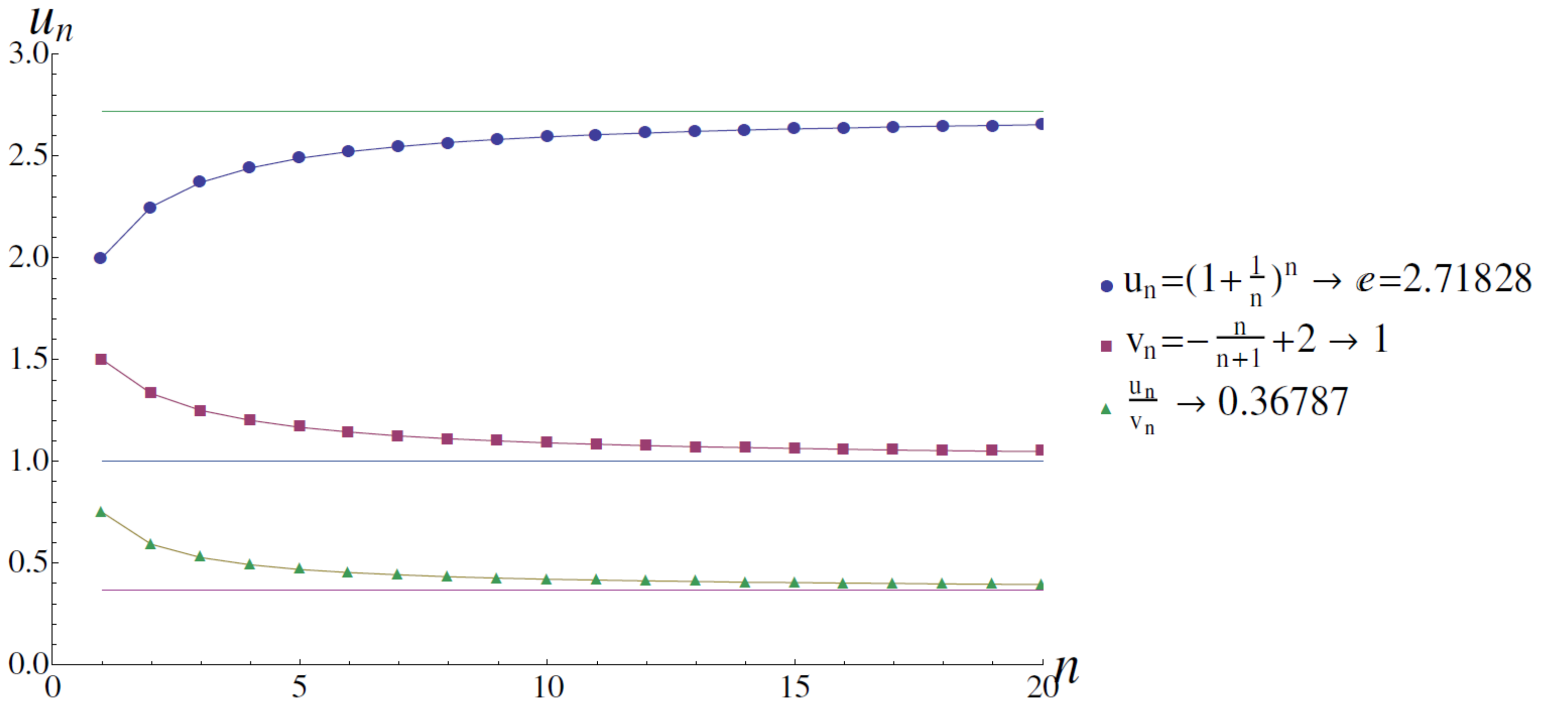
Propriétés des limites

$$\lim_{n\to\infty}(u_n.v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \;.\; \lim_{n\to\infty} v_n$$



Propriétés des limites

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n} \qquad si \lim_{n\to\infty} v_n \neq 0$$



Les séries numérique

Une série **S** est suite particulière où chacun de ses termes est la somme d'un certains nombre de termes d'une autre suite **u_n.**

Ça a commencé ainsi : Après avoir compris les suites, on s'est dit tiens faisons la chose suivante :

Soit **S_n** la somme des **n** premiers termes d'une suite **u_n** (on parle de somme partielle), et voyons **ce qui se passe** quand **n devient grand** (tend vers l'infini).

Est-ce qu'il y aura convergence ou pas ?

$$\mathbf{S}(u)_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

$$\lim_{N \to +\infty} S_N = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n$$

Les séries numériques

Les réponse est : dans certains oui dans d'autres non !

Quelques critères de convergence :

- Critère de Cauchy
- Critère de d'Alembert

Leur utilité :

- **Série et intégrale :** les séries permettent de définir l'intégrale au sens de Riemann.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \longrightarrow \int_{1}^{\infty} f(t)$$

- **Série de fonctions :** permet d'approximer les fonctions.

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{e}^{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

- **Séries vectorielles :** permet d'écrire le développement d'une vecteur dans une base.

- **Séries trigonométrique :** utilisée beaucoup dans le traitement de signal (série de Fourier)

Étude d'une suite

$$u_0 = 0$$
$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où } \mathrm{f(x)} = x^2 + \mathrm{c}$$

- Pour **c < -2** ou **c > 0,25**, la suite diverge vers l'infini
- Pour **c** ∈ **[-2, 0,25]** la suite reste bornée avec $\mathbf{u_n}$ ∈ **[-2,2]**
- Traçons le graphique de $\mathbf{u_n}$ en fonction de **c** :
  - Les points ont des coordonnées du type (c, $\mathbf{u_n}$) ;
  - **N** varie de **10000** à **10 100** :on s'intéresse au **comportement limite ;**
  - **c** varie avec un pas de **Δc = 0,01?**

Cherchez ce que veut dire discrétisation d'une variable continue