B1 – Mathématiques: Calcul matriciel

Amine ILMANE

Les ~~vecteurs~~ matrices en informatique

- les vecteurs sont des **tableaux ou champs ;**
- l'indexation commence par 1 mais peut commencer par 0 dans certains langages.
- En C, un tableau se déclare comme suit :

type nom_tableau[dimension]

Exemple : float mon_tableau[150]

Les matrices : type nom_tableau[dimension_1 , dimension_2]

Exemple : float mon_tableau[m =150 , n = 70]

Les lignes

Les colonnes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

103cipher

Mathematical Message Masking Multiplying Matrices

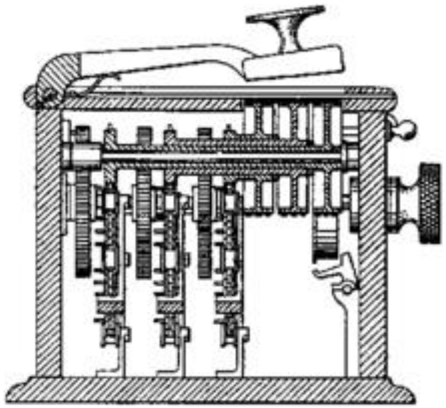
- Développé par le mathématicien Lester Hill ;
- On assigne à un groupe de **m** lettres un numéro de 0 à 25.

Clé de chiffrement

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} K_{12} K_{13} \\ K_{21} K_{22} K_{23} \\ K_{31} K_{32} K_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \bmod 26$$

$$C = KP \bmod 26$$

$$P = K^{-1} C \bmod 26 = KK^{-1} P = P$$



Projet 103 : cipher

```
Terminal
~/B-MAT-100> ./103cipher -h
USAGE
    ./103cipher message key flag

DESCRIPTION
    message     a message, made of ASCII characters
    key         the encryption key, made of ASCII characters
    flag        0 for the message to be encrypted, 1 to be decrypted
```

The use of library including matrix calculus (such as numpy) is prohibited!

Projet 103 : cipher

Terminal

```
~/B-MAT-100> ./103cipher "Just because I don't care doesn't mean I don't
understand." "Homer S" 0
Key matrix:
72	111	109
101	114	32
83	0	0

Encrypted message:
26690 21552 11810 19718 16524 13668 25322 22497 14177 28422 26097 16433 12333
11874 5824 27541 23754 14452 17180 17553 7963 26387 22047 13895 18804 14859 12033
27738 23835 15331 21487 16656 13238 21696 15978 6976 20750 23307 14093 16788 11751
8981 22339 24861 15619 21295 16524 13668 26403 23610 15190 29451 25764 16106 26394
23307 14093 3312 5106 5014
```

Elements of the key matrix are separated by tabulations in the final output.

Projet 103 : cipher

```
Terminal
~/B-MAT-100> ./103cipher "26690 21552 11810 19718 16524 13668 25322 22497 14177
28422 26097 16433 12333 11874 5824 27541 23754 14452 17180 17553 7963 26387 22047
13895 18804 14859 12033 27738 23835 15331 21487 16656 13238 21696 15978 6976 20750
23307 14093 16788 11751 8981 22339 24861 15619 21295 16524 13668 26403 23610 15190
29451 25764 16106 26394 23307 14093 3312 5106 5014" "Homer S" 1
Key matrix:
0.0      0.0      0.012
-0.004   0.012    -0.012
0.013    -0.013   0.004

Decrypted message:
Just because I don't care doesn't mean I don't understand.
```

For decryption, the key matrix is given as an indication, but will not be tested; do not bother having the exact same outuput!

Projet 103 : cipher

H o m e r _ S

$$\text{Key\_vec} = (72,\ \ 111,\ \ 109,\ \ 101,\ \ 114,\ \ 32,\ \ 83,\ \ 0,\ \ 0)$$

- On complète par des $\mathbf{0}$ jusqu'à ce que la dimension du vecteur soit **un carré parfait**.
- dim (Key_vec) = $\boldsymbol{n^2}$
- $\boldsymbol{n}$ dimension de la matrice carrée ($\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$) : **integer key_matrix [$\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}$]**

$$\begin{pmatrix} 72 & 111 & 109 \\ 101 & 114 & 32 \\ 83 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Decimal	Character
65	A
66	B
67	C
68	D
69	E
70	F
71	G
72	H
73	I
74	J
75	K
76	L
77	M
78	N
79	O
80	P
81	Q
82	R
83	S
84	T
85	U
86	V
87	W
88	X
89	Y
90	Z

Decimal	Character
97	a
98	b
99	c
100	d
101	e
102	f
103	g
104	h
105	i
106	j
107	k
108	l
109	m
110	n
111	o
112	p
113	q
114	r
115	s
116	t
117	u
118	v
119	w
120	x
121	y
122	z

Projet 103 : cipher

Using the ASCII table, the clear message becomes:

74 117 115 116 32 98 101 99 97 117 115 101 32 73 32 100 111 110 39 116 32 99 97 114 101 32 100 111 101 115 110 39 116 32 109 101 97 110 32 73 32 100 111 110 39 116 32 117 110 100 101 114 115 116 97 110 100 46

Decimal	Character
65	A
66	B
67	C
68	D
69	E
70	F
71	G
72	H
73	I
74	J
75	K
76	L
77	M
78	N
79	O
80	P
81	Q
82	R
83	S
84	T
85	U
86	V
87	W
88	X
89	Y
90	Z

Decimal	Character
97	a
98	b
99	c
100	d
101	e
102	f
103	g
104	h
105	i
106	j
107	k
108	l
109	m
110	n
111	o
112	p
113	q
114	r
115	s
116	t
117	u
118	v
119	w
120	x
121	y
122	z

can be written as a 3-column-matrix:

$$\begin{pmatrix} 74 & 117 & 115 \\ 116 & 32 & 98 \\ 101 & 99 & 97 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 46 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 72 & 111 & 109 \\ 101 & 114 & 32 \\ 83 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26690 & 21552 & 11810 \\ 19718 & 16524 & 13668 \\ 25322 & 22497 & 14177 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 3312 & 5106 & 5014 \end{pmatrix}$$

On complète par des 0

La multiplication nous impose le nombre de colonne de Message_Matrix

gives the encrypted message.

Projet 103 : cipher

Using the ASCII table, the clear message becomes:

74 117 115 116 32 98 101 99 97 117 115 101 32 73 32 100 111 110 39 116 32 99 97 114 101 32 100 111 101 115 110 39 116 32 109 101 97 110 32 73 32 100 111 110 39 116 32 117 110 100 101 114 115 116 97 110 100 46

can be written as a 3-column-matrix:

$$\begin{pmatrix} 74 & 117 & 115 \\ 116 & 32 & 98 \\ 101 & 99 & 97 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 46 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 72 & 111 & 109 \\ 101 & 114 & 32 \\ 83 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26690 & 21552 & 11810 \\ 19718 & 16524 & 13668 \\ 25322 & 22497 & 14177 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 3312 & 5106 & 5014 \end{pmatrix}$$

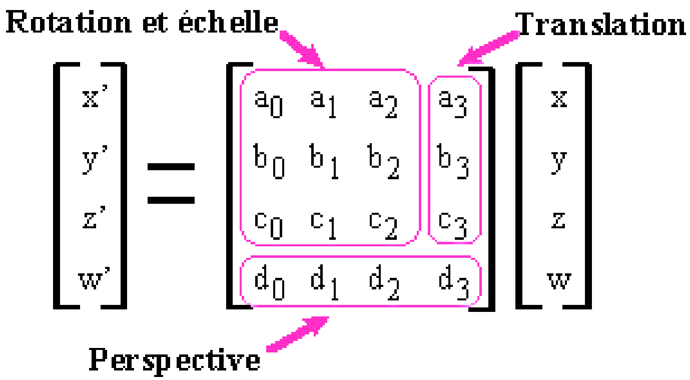
gives the encrypted message.

Decimal	Character	Decimal	Character
65	A	97	a
66	B	98	b
67	C	99	c
68	D	100	d
69	E	101	e
70	F	102	f
71	G	103	g
72	H	104	h
73	I	105	i
74	J	106	j
75	K	107	k
76	L	108	l
77	M	109	m
78	N	110	n
79	O	111	o
80	P	112	p
81	Q	113	q
82	R	114	r
83	S	115	s
84	T	116	t
85	U	117	u
86	V	118	v
87	W	119	w
88	X	120	x
89	Y	121	y
90	Z	122	z

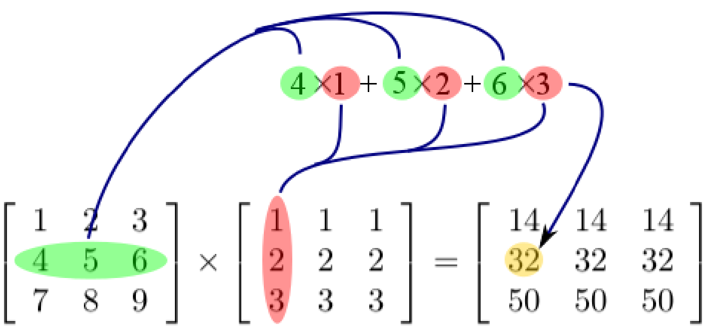
$$\begin{pmatrix} 26690 & 21552 & 11810 \\ 19718 & 16524 & 13668 \\ 25322 & 22497 & 14177 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 3312 & 5106 & 5014 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,004 & 0,012 & -0,012 \\ 0,013 & -0,013 & 0,004 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} = \begin{pmatrix} 74 & 117 & 115 \\ 116 & 32 & 98 \\ 101 & 99 & 97 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 46 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

float key_inverse_matrix [n , n]

Chapitre 3 : Le calcul matriciel



- Calcul matriciel
  - Définition et propriétés
  - Opérations sur les matrices
  - Matrices carrées
  - Valeurs et vecteur propres
- Arithmétiques en base **a**



Définitions

- Une matrice **A** est un tableau à deux dimensions dont les coefficients sont des nombres réels;
- Une matrice contenant **m** lignes et **n** colonnes est dite de dimension **m** x **n** ;
- On note $\mathbf{a_{ij}}$ l'élément de la matrice situé à la $\mathbf{i^{ème}}$ ligne et $\mathbf{j^{ème}}$ colonne.

- On note une matrice :

En abrégé : $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) \quad avec \quad \boldsymbol{i} = 1, \dots, \boldsymbol{m} \quad ; \quad \boldsymbol{j} = 1, \dots, \boldsymbol{n}$

En extension :

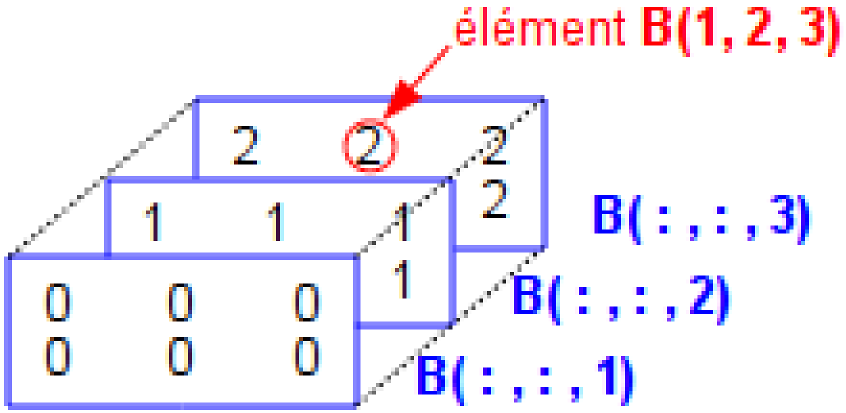
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En informatique :

- les matrices sont représentés comme des quantités indexées ;
- Les indices débutent **souvent par 1** sauf dans certains langages **ça débute à 0.**
- Pour connaitre les dimensions il faut utiliser la fonction **len(),** ou un équivalent (tout dépend du langage).

Tableau à 3 entrèes

Tableau 3D



La transposée

La matrice transposée de **A** de dimension $m \times n$, est la matrice, notée $\mathbf{A}^T$, de dimension $n \times m$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes :

Les coefficients sont donnés par : $a^T{}_{ij} = aji$

Exemple : 3 x **2**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Transposition}} A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

N. B.

Le vecteur est un cas particulier de matrice : c'est une matrice colonne **m** x **1**

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Transposition}} \vec{u}^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

m x **1**

1 x **m**

Addition

Deux matrices peuvent être **additionnées** seulement si elles **ont la même dimension** (même nombre de ligne et de colonnes). **Le résultat** est une **matrice de même taille**

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad 1 \leq i \leq m, \qquad 1 \leq j \leq n$$

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+7 & 2+8 & 3+9 \\ 4+10 & 5+11 & 6+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

Multiplication par un nombre

La multiplication d'une matrice **A** par un nombre **λ** revient à multiplier tous les coefficients de **A** par **λ.** Le résultat est une matrice de même dimension notée **λ.A.**

On peut voir cette opération comme une homothétie pour les matrices.

$$(\lambda.A)_{ij} = \lambda.a_{ij} \qquad 1 \leq i \leq m, \qquad 1 \leq j \leq n$$

$$\lambda.A = \begin{pmatrix} \lambda.a_{11} & \lambda.a_{12} & \dots & \lambda.a_{1n} \\ \lambda.a_{21} & \lambda.a_{22} & \dots & \lambda.a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda.a_{m1} & \lambda.a_{m2} & \dots & \lambda.a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad 2A = \begin{pmatrix} 2\times 1 & 2\times 2 & 2\times 3 \\ 2\times 4 & 2\times 5 & 2\times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$

Multiplication d'un vecteur par une matrice

Soit **A** une matrice de dimension **m** x **n** et $\vec{u}$ un vecteur de dimension **n**. Le résultat est un vecteur de dimension **m** dont les éléments se calcule comme suit :

$$(A.\vec{u})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.u_j \qquad 1 \leq i \leq m$$

$$A.\vec{u} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}.u_1 + a_{12}.u_2 + \dots + a_{1n}.u_n \\ a_{21}.u_1 + a_{22}.u_2 + \dots + a_{2n}.u_n \\ \vdots \\ a_{m1}.u_1 + a_{m2}.u_2 + \dots + a_{mn}.u_n \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$A.\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 8 + 3 \times 9 \\ 4 \times 7 + 5 \times 8 + 6 \times 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 16 + 27 \\ 28 + 40 + 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}$$

Produit de deux matrices

Condition : le produit de la matrice **A** par une matrice **B** n'est défini qui si le nombre de colonne de **A** est égal au nombre de lignes de **B.**

Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice de dimension $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ alors $\boldsymbol{B}$ est de dimension $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p}$ et le résultat est une matrice de dimension $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$.

$$(A.B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj} \qquad 1 \leq i \leq m, \qquad 1 \leq j \leq p$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32} \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 5 + 14 & 6 + 16 \\ 15 + 28 & 18 + 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 5 \times 1 + 6 \times 3 & 5 \times 2 + 6 \times 4 \\ 7 \times 1 + 8 \times 3 & 7 \times 2 + 8 \times 4 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 5 + 18 & 10 + 24 \\ 7 + 24 & 14 + 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

N. B. Le produit matriciel n'est pas commutatif : $\mathbf{A.B} \neq \mathbf{B.A}$

Les matrices carrées

Une **matrice carrée** est matrice dont le **nombre de lignes** est **égal** au **nombre de colonnes** :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A est de dimension $n \times n$ ou de dimension n.

N. B.
Tout ce qui suit ne concerne que les matrices carrées

Matrices remarquables :

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice Nulle

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice unité

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice identité

$$A.I = I.A = A$$

Élément neutre de la multiplication

Les matrices carrées

Tout ce qui suit ne concerne que les matrices carrées

Inverse d'une matrice

La matrice notée $\boldsymbol{A^{-1}}$, si elle existe, est l'**inverse** de $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{I}$ la matrice identité) si : $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

- Le calcul de l'inverse est assez complexe pour de grandes matrices
- L'inverse d'une matrice n'existe que si son **déterminant** est **non nulle**.

Le **déterminant** d'une matrice $\boldsymbol{A}$, noté $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A})$ ou $|\boldsymbol{A}|$, est un nombre qui caractérise $\boldsymbol{A}$. Il a beaucoup de propriétés et il est important en algèbre. Il peut être vu comme la généralisation de la notion de volume aux espaces à n dimensions. On le calcule avec la **formule de Leibniz**.

Exemple : <u>2 x 2 :</u> $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad det(A) = a.d - b.c \quad$ $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

<u>3 x 3 :</u>

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}.$$

Déterminant d'une matrice 3 x 3 à vous de chercher

Formes particulières

La matrice symétrique : $A = A^T \qquad a_{ij} = a_{ji} \qquad 1 \leq i,j \leq n$

La matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Cas particulier

$$\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 & ... & 0 \\ 0 & a & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a \end{pmatrix} = a.I$$

La matrice triangulaire **supérieure**

$$U_{(pper)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La matrice triangulaire **inférieure**

$$L_{(ower)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Systèmes linéaires

Un système linéaire est un ensemble d'équations linéaire à $\boldsymbol{n}$ inconnues $\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}$.

- Toutes les variables sont à la puissance 1 ;
- Le nombre de solutions pour un système linéaire dépend du nombre d'équation :
  - s'il est strictement plus grand que $\boldsymbol{n}$: pas de solutions ;
  - s'il est égal à $\boldsymbol{n}$: la solution est un $\boldsymbol{n}$-uplet unique
  - s'il est inférieur à $\boldsymbol{n}$: il existe une infinité de solutions (droite, plan, hyperplan)

Un Système linéaire prend la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ 1a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On peut le réécrire sous forme matricielle qui nous permettra d'utiliser des méthodes efficaces pour le résoudre :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Systèmes linéaires

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On pose pour $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = 1, \ldots, \boldsymbol{n}$:

- $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$ la matrice des coefficients (matrice carrée!!);
- $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x_i})$ le vecteur des variables ;
- $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_i})$ le vecteur second membre. (si $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ on donne le nom de système homogène)

Ainsi la forme matricielle d'un système linéaire est donnée par :

$$\boldsymbol{A.X = B}$$

Le système admet une solution si la matrice A est **inversible** (seulement et seulement si le déterminant est non nul). La solution est alors donnée par :

$$\boldsymbol{A.X = B} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A^{-1}.A.X = A^{-1}.B} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{X = A^{-1}.B}$$

Systèmes linéaires

La solution est alors donnée par :

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}.\boldsymbol{B}$$

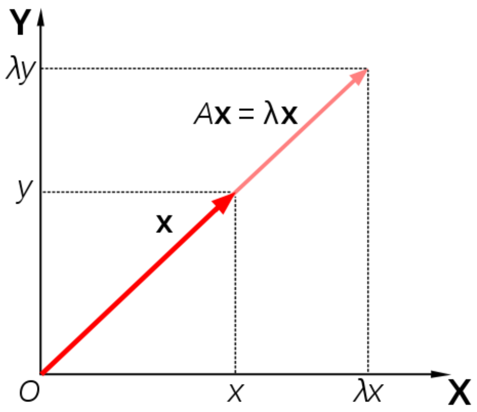
Le calcul de $\boldsymbol{A}^{-1}$ peu rapidement devenir complexe et infaisable en un temps raisonnable.

Ce qu'on va faire est que l'on va transformer $\boldsymbol{A}$ en une matrice triangulaire supérieure ou inférieure et on applique la méthode de la remontée :

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n &= b_{n-1} \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} x_n &= b_n/a_{nn} \\ x_{n-1} &= (b_{n-1} - a_{n-1n}x_n)/a_{n-1n-1} \\ \vdots &= \vdots \\ x_1 &= (b_1 - a_{1n}x_n - \ldots - a_{12}x_2)/a_{11} \end{aligned}\right.$$

$$U_{(pper)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Valeurs et vecteurs propres



- Le **vecteur propre** $\boldsymbol{X_\lambda}$ d'une matrice carrée associé à la **valeur propre** **λ (réel)** est un vecteur solution du système :

$$\boldsymbol{A} \, . \, \boldsymbol{X_\lambda} = \lambda \, . \, \boldsymbol{X_\lambda}$$

- Les vecteurs propres définissent des axes privilégiés pour lesquels l'application de la matrice revient à faire un homothétie.

- L'ensemble des valeurs propres d'une matrice **A** est appelé **spectre de A** **: spec(A)**

Application linéaire

Les vecteurs de dimension $\boldsymbol{n}$ peuvent être regroupés dans un **ensemble** qu'on appelle **espace vectoriel** de dimension $\boldsymbol{n}$ que l'on note $\boldsymbol{E_n}$.

Pour chaque espace vectoriel on peut **définir des vecteurs** qui formeront **une base** i.e. que tous les vecteurs de $\boldsymbol{E_n}$ s'écriront comme **combinaison linéaire** des ces vecteurs :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a_1} \boldsymbol{v_1} + \ldots + \boldsymbol{a_n} \boldsymbol{v_n}$$

Les coefficients $\boldsymbol{a_1}$, … , $\boldsymbol{an}$ sont appelés coordonnées, et $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}, \ldots$,les vecteurs de base.

Exemple: les vecteurs qui appartiennent au plan sont tous de dimensions **2**. Ils forment l'espace $\boldsymbol{E_2}$ que l'on appelle aussi plan $(\boldsymbol{Oxy})$ ou le plan euclidien.

Tous les vecteurs du plan $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ s'écrivent dans la base $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ comme

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} . \boldsymbol{i} + \boldsymbol{y} . \boldsymbol{j}$$

Calcul matriciel : Application linéaire

- Soit $\boldsymbol{E_n}$ et $\boldsymbol{E_m}$ deux espaces vectoriels resp. de dimension $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{m}$;

- soit $\boldsymbol{\varphi}$ **une application** de $\boldsymbol{E_n}$ vers $\boldsymbol{E_m}$ **:** $\left\{\begin{array}{llll} \boldsymbol{\varphi} & \boldsymbol{:} & \boldsymbol{E_n} \longrightarrow & \boldsymbol{E_m} \\ & & \boldsymbol{u} \longrightarrow & \boldsymbol{\varphi(u)} \end{array}\right.$

On dit que $\boldsymbol{\varphi}$ est linéaire si :

- $\boldsymbol{\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)}$ pout tout **u** et **v** de $\boldsymbol{E_n}$
- $\boldsymbol{\varphi(\lambda\, u) = \lambda\, \varphi(u)}$ pour tout $\boldsymbol{u}$ de $\boldsymbol{E_n}$ et pour tout **λ** réel

Une fois qu'une base est défini pour $\boldsymbol{E_n}$ et $\boldsymbol{E_m}$ l'application ▯ peut être représentée par une matrice de dimension $\boldsymbol{n\ x\ m}$**.** Si $\boldsymbol{n = m}$ alors la matrice est carrée.

Exemple : l'application rotation dans le plan d'un angle **θ** autour de l'origine

$$\left\{\begin{array}{llll} \boldsymbol{\varphi} & \boldsymbol{:} & \boldsymbol{E_2} \longrightarrow & \boldsymbol{E_2} \\ & & \boldsymbol{u} \longrightarrow & \boldsymbol{u' = \varphi_{2 \times 2} . u} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} . \boldsymbol{u} \end{array}\right.$$

Quelques liens intéressants

Exercices :
http://math.unice.fr/~phm/L1.15-16/EC3.15-16.pdf

Cours :
https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~meilhan/cm.pdf
http://maths.cnam.fr/IMG/pdf/Alg.1_calcul_matriciel.pdf
http://math.univ-lyon1.fr/~malbos/Ens/amalaa11.pdf

Bases arithmétiques

Un système numérique est un **ensemble de symboles** appartenant à une **base arithmétique** qui sont les **chiffres du système numérique**.

Binaire : 0, 1
Hexadécimal : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

○ **Ecriture d'un nombre :**

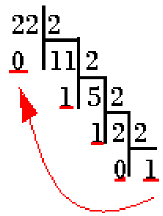
Un nombre dans une base **B** donnée s'écrit sous la forme d'additions des puissances successives de cette base :

$$n_B = a_p \ldots a_1 a_0 = a_0 \cdot B^0 + a_1 \cdot B^1 + a_2 \cdot B^2 + \ldots + a_p \cdot B^p$$

Exemple : $n_{10} = 3847 = 7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3$

$0_{hex} = 0_{dec} = 0_{oct}$	0	0	0	0
$1_{hex} = 1_{dec} = 1_{oct}$	0	0	0	1
$2_{hex} = 2_{dec} = 2_{oct}$	0	0	1	0
$3_{hex} = 3_{dec} = 3_{oct}$	0	0	1	1
$4_{hex} = 4_{dec} = 4_{oct}$	0	1	0	0
$5_{hex} = 5_{dec} = 5_{oct}$	0	1	0	1
$6_{hex} = 6_{dec} = 6_{oct}$	0	1	1	0
$7_{hex} = 7_{dec} = 7_{oct}$	0	1	1	1
$8_{hex} = 8_{dec} = 10_{oct}$	1	0	0	0
$9_{hex} = 9_{dec} = 11_{oct}$	1	0	0	1
$A_{hex} = 10_{dec} = 12_{oct}$	1	0	1	0
$B_{hex} = 11_{dec} = 13_{oct}$	1	0	1	1
$C_{hex} = 12_{dec} = 14_{oct}$	1	1	0	0
$D_{hex} = 13_{dec} = 15_{oct}$	1	1	0	1
$E_{hex} = 14_{dec} = 16_{oct}$	1	1	1	0
$F_{hex} = 15_{dec} = 17_{oct}$	1	1	1	1

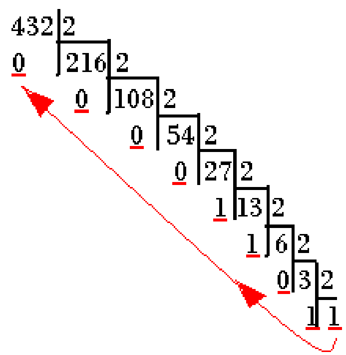
Bases arithmétiques



On retient le résultat final et les restes qui doivent toujours être inférieurs à la base "b"

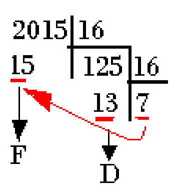
$$(22)_{10} = (10110)_2$$

Exemple2: convertir le nombre 432 en base 2



$$(432)_{10} = (110110000)_2$$

Exemple3: convertir le nombre 2015 en base 16



$$(2015)_{10} = (7DF)_{16}$$