EPITECH.
L'ECOLE DE L'INNOVATION ET DE
L'EXPERTISE INFORMATIQUE

B1 – Mathématiques : Transformation géométriques

Amine ILMANE

Projet 101 : Pong

Généralisation : **utilisation de l'écriture vectorielle**

$$\vec{\mathbf{V}} = \frac{1}{(\boldsymbol{t}_{final} - \boldsymbol{t}_{initial})}\overrightarrow{\boldsymbol{x_0 x_1}} = \frac{1}{\Delta \boldsymbol{t}}\begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z\end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix}V_x \\ V_y \\ V_z\end{pmatrix} = \begin{cases} V_x = \dfrac{\boldsymbol{x}_{final} - \boldsymbol{x}_{initial}}{\boldsymbol{t}_{final} - \boldsymbol{t}_{initial}} \\ V_y = \dfrac{\boldsymbol{y}_{final} - \boldsymbol{y}_{initial}}{\boldsymbol{t}_{final} - \boldsymbol{t}_{initial}} \\ V_z = \dfrac{\boldsymbol{z}_{final} - \boldsymbol{z}_{initial}}{\boldsymbol{t}_{final} - \boldsymbol{t}_{initial}} \end{cases} = \begin{cases} V_x = \dfrac{1}{\Delta \boldsymbol{t}}\ \Delta x \\ V_y = \dfrac{1}{\Delta \boldsymbol{t}}\ \Delta y \\ V_z = \dfrac{1}{\Delta \boldsymbol{t}}\ \Delta z \end{cases} = \frac{1}{\Delta \boldsymbol{t}}\begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z\end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta \boldsymbol{t}}\overrightarrow{\boldsymbol{x_0 x_1}}$$

Terminal

```
~/B-MAT-100> ./101pong 1 3 5 7 9 -2 4
The velocity vector of the ball is:
(6.00, 6.00, -7.00)
At time t + 4, ball coordinates will be:
(31.00, 33.00, -30.00)
The ball won't reach the bat.
```

N.B. Le symbole ' Δ ' représente la différence entre une valeur finale est une valeur initiale $\Delta = x_2 - x_1$

Les ~~vecteurs~~ matrices en informatique

Les matrices : **type nom_tableau[dimension_1 , dimension_2]**

Il faut **deux indices** pour accéder à la donnée

- En C, un tableau se déclare comme suit : **type nom_tableau[dimension_1, dimension_2]**

Exemple : **double** mon_tableau[m =150 , n = 70]]

- En Python la structure de données est la **liste imbriquée** (nested list) :
  - La structure est plus souple, il faudra faire attention !

```
dimension_1 = 3
dimension_2 = 5

Matrix = [[0 for i in range(dimension_1)] for j in range(dimension_2)]
```

```
Matrix :  [[0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0]]
```

```
dimension_1 = 5
dimension_2 = 3

Matrix = [[0 for i in range(dimension_1)] for j in range(dimension_2)]
```

```
Matrix :  [[0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0]]
```

Les ~~vecteurs~~ matrices en informatique

Les lignes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les colonnes

```python
dimension_1 = 5
dimension_2 = 3
Matrix = [[0 for i in range(dimension_1)] for j in range(dimension_2)]

print('Matrix : ')
for i in range(len(Matrix)):
    print(Matrix[i])
```

```
Matrix :
[0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0]
```

```python
dimension_1 = 3
dimension_2 = 5
Matrix = [[0 for i in range(dimension_1)] for j in range(dimension_2)]

print('Matrix : ')
for i in range(len(Matrix)):
    print(Matrix[i])
```

```
Matrix :
[0, 0, 0]
[0, 0, 0]
[0, 0, 0]
[0, 0, 0]
[0, 0, 0]
```

Les ~~vecteurs~~ matrices en informatique

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Transposition}} \vec{u}^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

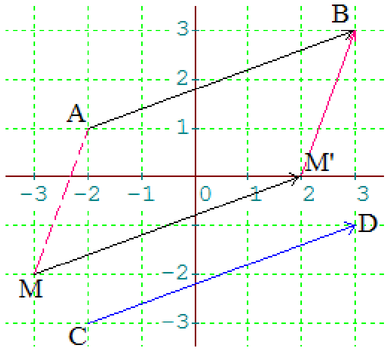
```
dimension_1 = 1
dimension_2 = 5
Matrix = [[0 for i in range(dimension_1)] for j in range(dimension_2)]
```

```
Matrix :  [[0], [0], [0], [0], [0]]
[0]
[0]
[0]
[0]
[0]
```

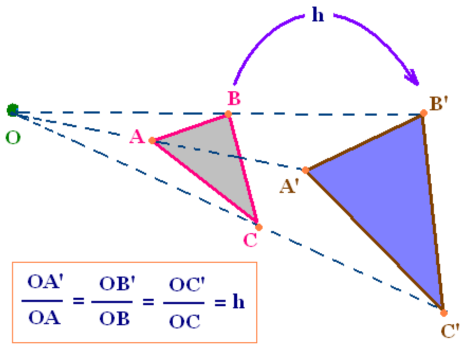
```
dimension_1 = 5
dimension_2 = 1
Matrix = [[0 for i in range(dimension_1)] for j in range(dimension_2)]
```

```
Matrix :  [[0, 0, 0, 0, 0]]
[0, 0, 0, 0, 0]
```

Chapitre 2 : Les symétries dans le plan et l'espace



- **Transformations géométriques dans le plan**
  - Translation, rotation, homothétie
  - Symétrie par rapport à une droite
- **Coordonnées homogènes**
- **Composition de transformation**
- **Complément Transformations géométriques dans le plan**
- **Transformations géométriques dans l'espace**
  - Translation, rotation, homothétie
  - Symétrie par rapport à un plan, une droite
  - Symétrie axiale



Transformations dans le plan

Nous noterons le point d'origine $P(x,y)$ et le point transformé $P'(x',y')$

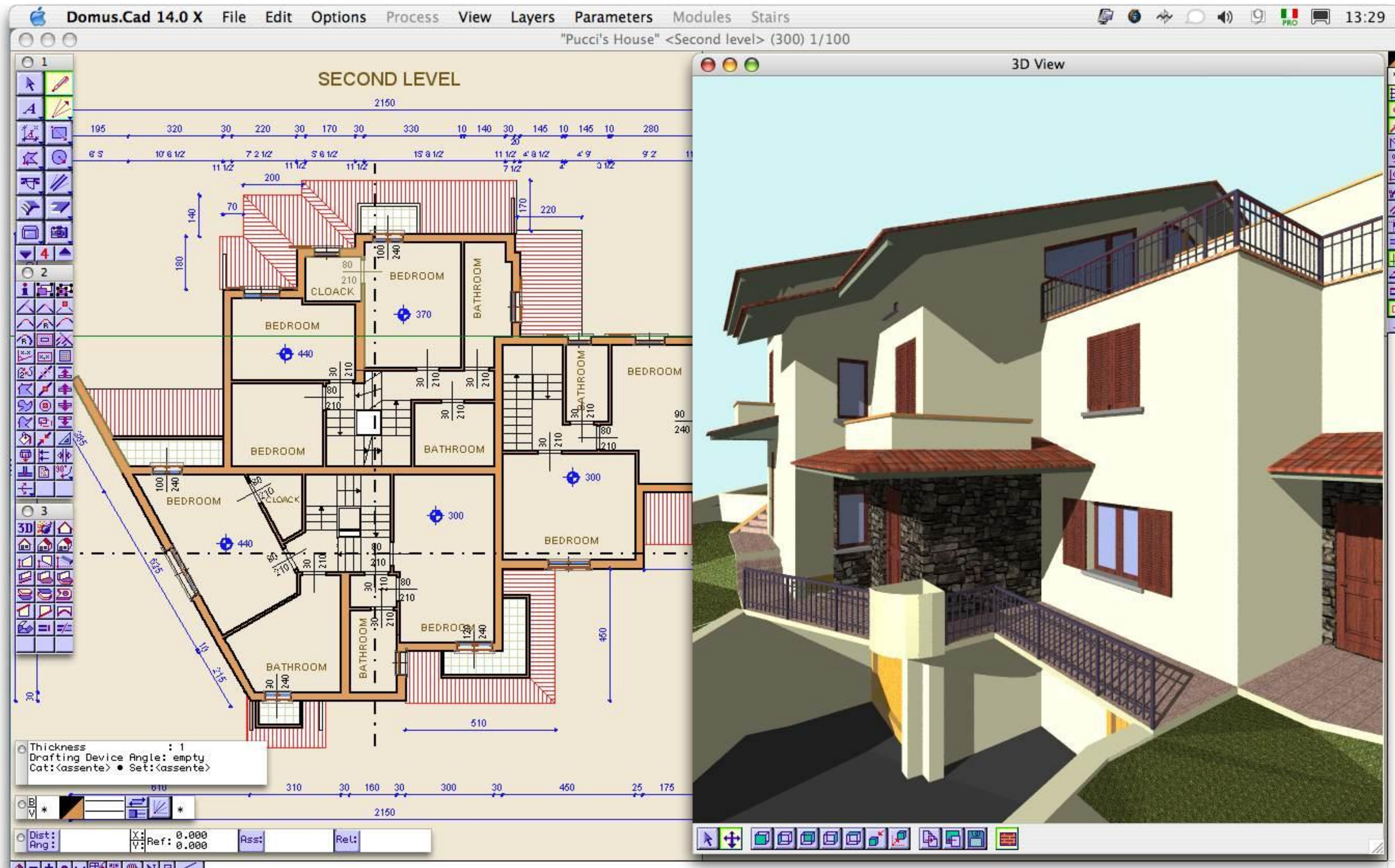
$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

```
def geometric_transformation(transformation_operation, vector):

    some_operations

    return vector_transformed
```

- La translation
- L'homothétie
- La rotation par rapport à un point
- La symétrie par rapport à une droite

102architect

Home planning and homogeneous coordinates



Projet 102 : architect

You need to develop a program to compute the coordinates of a point after several transformations. To make it nice and clean, you chose to use homogeneous coordinates. O being the origin of both axis, here are the transformations to be implemented:

Terminal

```
~/B-MAT-100> ./102architect -h
USAGE
   ./102architect x y transfo1 arg11 [arg12] [transfo2 arg12 [arg22]] ...

DESCRIPTION
    x       abscissa of the original point
    y       ordinate of the original point

    transfo arg1 [arg2]
    -t i j       translation along vector (i, j)
    -z m n       scaling by factors m (x-axis) and n (y-axis)
    -r d         rotation centered in O by a d degree angle
    -s d         reflection over the axis passing through O with an inclination
                 angle of d degrees
```

The use of library including matrix calculus (such as numpy) is prohibited !

Projet 102 : architect

Terminal

```
~/B-MAT-100> ./102architect 5 0 -t -1 1
Translation along vector (-1, 1)
1.00    0.00    -1.00
0.00    1.00    1.00
0.00    0.00    1.00
(5.00, 0.00) => (4.00, 1.00)
```

Terminal

```
~/B-MAT-100> ./102architect 2 2 -z -1 1
Scaling by factors -1 and 1
-1.00   0.00    0.00
0.00    1.00    0.00
0.00    0.00    1.00
(2.00, 2.00) => (-2.00, 2.00)
```

Projet 102 : architect

Terminal

```
~/B-MAT-100> ./102architect 1 0 -r 90
Rotation by a 90 degree angle
0.00    -1.00   0.00
1.00    0.00    0.00
0.00    0.00    1.00
(1.00, 0.00) => (0.00, 1.00)
```

Terminal

```
~/B-MAT-100> ./102architect 3 -1 -s 270
Reflection over an axis with an inclination angle of 270 degrees
-1.00   0.00    0.00
0.00    1.00    0.00
0.00    0.00    1.00
(3.00, -1.00) => (-3.00, -1.00)
```

Projet 102 : architect

Terminal

```
~/B-MAT-100> ./102architect 1 2 -t 2 3 -z 1 -2 -r 45 -s 30
Translation along vector (2, 3)
Scaling by factors 1 and -2
Rotation by a 45 degree angle
Reflection over an axis with an inclination angle of 30 degrees
0.97    -0.52   0.38
0.26    1.93    6.31
0.00    0.00    1.00
(1.00, 2.00) => (0.31, 10.44)
```

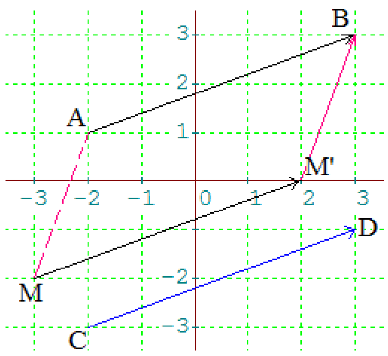
Chapitre 2 : Les symétries dans le plan et l'espace

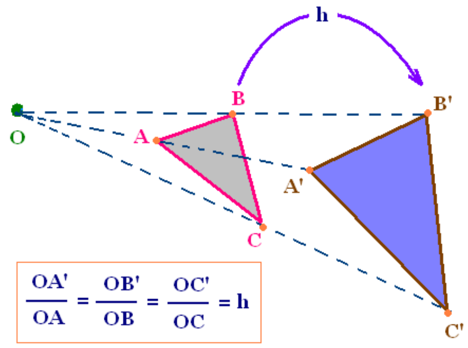
- **Transformations géométriques dans le plan**
  - Translation, rotation, homothétie
  - Symétrie par rapport à un plan, une droite

- **Coordonnées homogènes**

- **Composition de transformation**

- **Transformations géométriques dans l'espace**
  - Translation, rotation, homothétie
  - Symétrie par rapport à un plan, une droite
  - Symétrie axiale





Transformations dans le plan

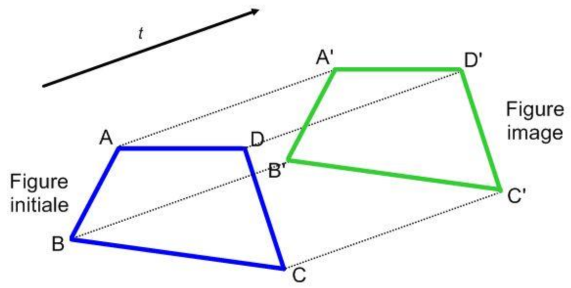
Nous noterons le point d'origine $P(x,y)$ et le point transformé $P'(x',y')$

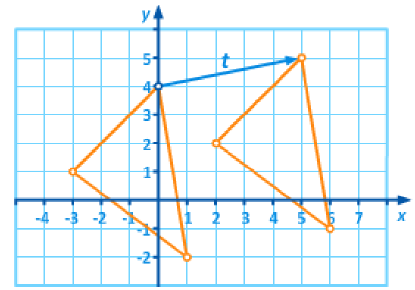
$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

```
def geometric_transformation(transformation_operation, vector):

    some_operations

    return vector_transformed
```

- La translation
- L'homothétie
- La rotation par rapport à un point
- La symétrie par rapport à une droite

La translation





La translation est un glissement rectiligne d'un point. Il est représenté par le **vecteur translation** :

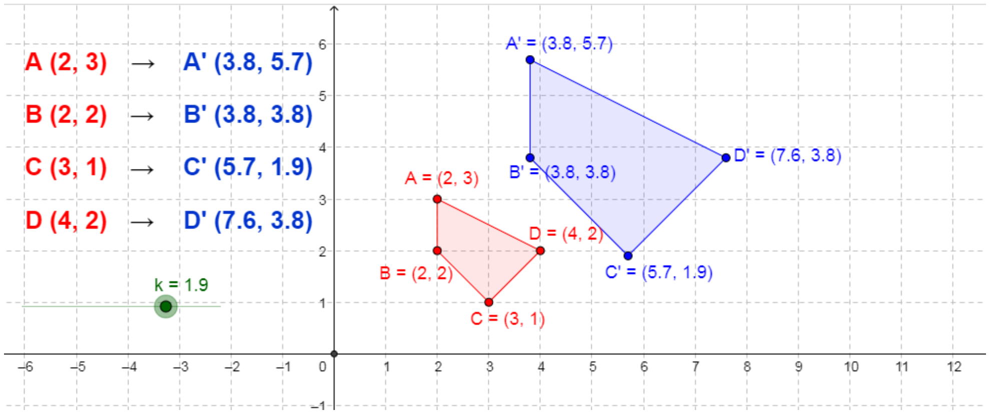
$$\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix}$$

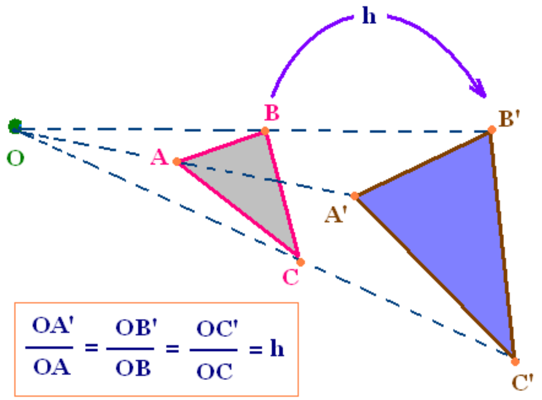
La même translation appliquée à l'ensemble des points d'un objet géométrique aura comme effet **de déplacer** tout l'objet sans :

- modifier ses longueurs
- le tourner, ni le retourner

Application d'une translation $\quad \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{T} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x' = x + T_x \\ y' = y + T_y \end{cases}$

L'homothétie





Le préfixe *homo-* pour « semblable » et *thesis* pour « position ».

L'homothétie de centre **O** est de rapport **H** est une opération qui envoie un point **P** sur un point **P'** situé sur la droite (**OP**) par un agrandissement ou une réduction de rapport **H**

$$\overrightarrow{OP'} = H.\overrightarrow{OP} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x' = H \ .x \\ y' = H \ .y \end{cases}$$

Une homothétie à pour effet **d'agrandir ou de réduire** la taille d'un objet sans en modifier **les proportions**. On parle de changement d'**échelle.**

Transformations dans le plan : L'homothétie

Si on veut effectuer un zoom sur l'axe (**Ox**) différent du zoom sur l'axe (**Oy**) le rapport **H**, qui était un nombre, devient une **matrice 2 x 2**

$$H = \begin{pmatrix} H_x & 0 \\ 0 & H_y \end{pmatrix}$$

Homothétie de centre **O** :

$$\begin{cases} x' = H_x . x \\ y' = H_y . y \end{cases}$$

Homothétie de centre **O** en **écriture matricielle**

$$\overrightarrow{OP'} = H.\overrightarrow{OP} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x & 0 \\ 0 & H_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x . x \\ H_y . y \end{pmatrix}$$

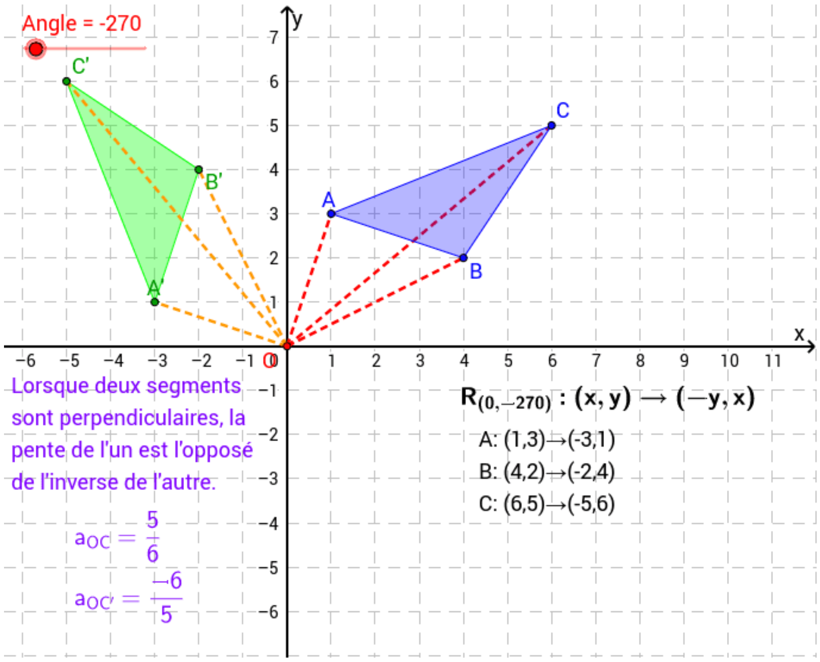
La rotation

- La rotation dans le plan est une transformation géométrique définie par son **centre** et son **angle**.

- L'idée est de transporter un point **P** vers un point **P'** le long d'un arc de cercle de rayon la longueur entre **P** est le **centre**

$$\overrightarrow{OP'} = R.\overrightarrow{OP}$$

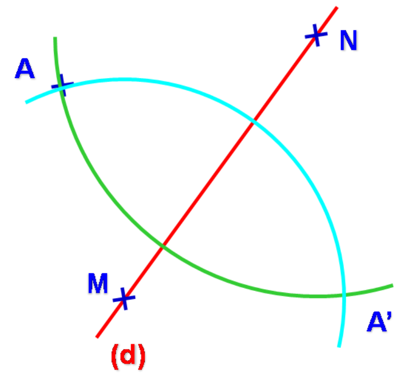
$$R = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix}$$



Rotation autour de l'origine **O :** $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\varphi).x - sin(\varphi).y \\ sin(\varphi).x + cos(\varphi).y \end{pmatrix}$$

Rotation de centre **A :** $$\overrightarrow{AP'} = R.\overrightarrow{AP} \qquad \overrightarrow{OP'} = R.\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) + \overrightarrow{OA}$$

Symétrie par rapport à un axe



Deux points **P** et **P'** sont symétriques par rapport à une droite (**D**) alors la droite (**D**) est la **médiatrice** du segment [**PP'**].

- La droite (**D**) est l'**axe de la symétrie**.
- Chaque point de (**D**) est son propre symétrique par rapport à (**D**).
- Elle peut également être vu comme une rotation d'angle 2φ.

Par rapport à une droite passant par l'origine **O** : $\overrightarrow{OP'} = S.\overrightarrow{OP}$ $\quad S = \begin{pmatrix} cos(2.\varphi) & sin(2.\varphi) \\ sin(2.\varphi) & -cos(2.\varphi) \end{pmatrix}$

Par rapport à une droite **quelconque** passant par le point **A** :

$$\overrightarrow{AP'} = S.\overrightarrow{AP} \qquad \overrightarrow{OP'} = S.\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) + \overrightarrow{OA}$$

Coordonnées Homogènes

- Les coordonnées homogènes ont était introduites afin de faire des calculs de géométrie projective (traitement de l'infini). Elles sont largement utilisé en infographie. La notation matricielle est utilisée dans les bibliothèque 3D.

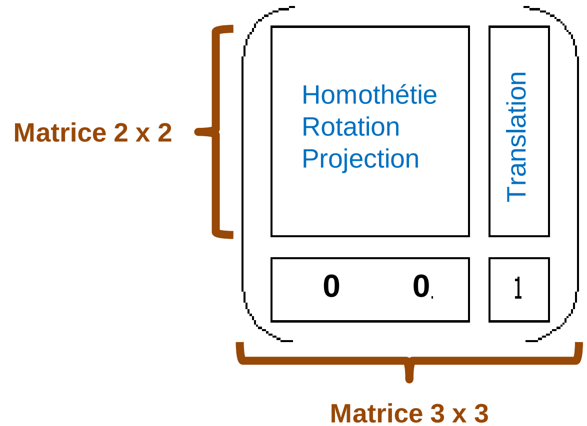
- En coordonnées homogènes les transformations sont représenté par des matrices et l'application d'une transformation revient à multiplier le vecteur d'origine par cette matrice.

- L'application de plusieurs transformation revient à faire le produit matricielle des matrices les représentant. Ceci aura pour résultats de générer une seule matrice que l'on pourra ensuite appliqué au point que l'on veut transformé.

- Le gain en terme de nombre d'opération est important car au lieu de calculer la transformation pour chaque point, une seule matrice est calculée et ça sera la même pour tous les points.

Coordonnées Homogènes

Forme générale :



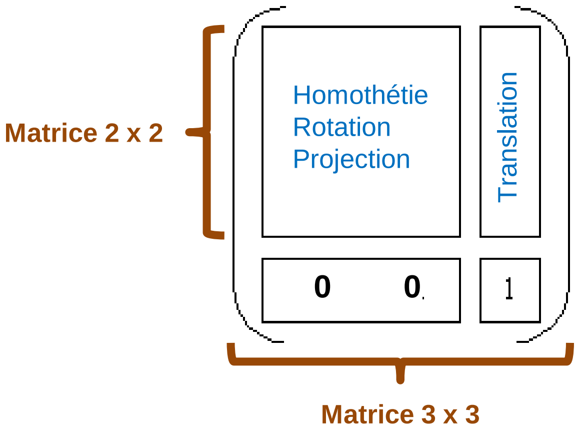
En 2D : $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{k})$ avec $\mathbf{k}$ un réel non nul et $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{k}}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{k}}$

En pratique $\mathbf{k} = \mathbf{1}$

On fait comme si on ajoute une dimension supplémentaire, l'idée est que les matrice ne soit plus 2 x 2 mais 3 x 3, ce qui permet un découpage et un encodage matricielle de toutes les transformations (on pense par exemple à la translation qui n'est qu'une addition contrairement aux autres qui interviennent via la multiplication)

Coordonnées Homogènes

Forme générale :



En 2D : $\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{k})$ avec $\mathbf{k}$ un réel non nul et $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{k}}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{k}}$

Exemple : **La translation**

Coordonnées cartésienne :

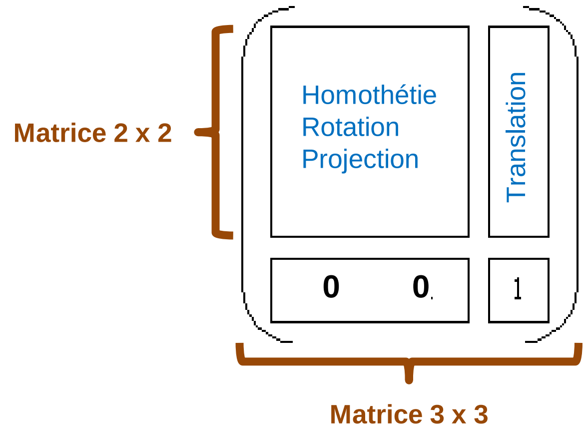
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + T_x \\ y + T_y \end{pmatrix}$$

Coordonnées homogènes :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + T_x \\ y + T_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Coordonnées Homogènes

Forme générale :



En 2D : $\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{k})$ avec $\mathbf{k}$ un réel non nul et $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{k}}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{k}}$

Exemple :

Coordonnées cartésienne :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}.x + m_{12}.y \\ m_{21}.x + m_{22}.y \end{pmatrix}$$

Coordonnées homogènes :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}.x + m_{12}.y \\ m_{21}.x + m_{22}.y \\ 1 \end{pmatrix}$$

A vous de voir à quoi ça correspond

Composition de plusieurs transformations

Soit trois transformations géométriques représentées par leurs matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$. Si l'on veut appliquer ces transformations à un vecteur $\vec{\mathbf{V}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ on procédera comme suit :

- En coordonnées homogènes $\vec{\mathbf{V}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \mathbf{1})$
- On applique $\mathbf{A}$, puis $\mathbf{B}$, puis $\mathbf{C}$: $\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{transformé}} = \mathbf{C} \,.\, \mathbf{B} \,.\, \mathbf{A} \,.\, \vec{\mathbf{V}}$

1. **Transformation totale :** $\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{transformé}} = \mathbf{C} \,.\, \mathbf{B} \,.\, \mathbf{A} \,.\, \vec{\mathbf{V}} = \mathbf{Transf}_{\boldsymbol{Total}} \,.\, \vec{\mathbf{V}}$

$$\mathbf{Transf}_{\mathbf{total}} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_{11} & \mathbf{t}_{12} & \mathbf{t}_{13} \\ \mathbf{t}_{21} & \mathbf{t}_{22} & \mathbf{t}_{23} \\ \mathbf{t}_{31} & \mathbf{t}_{32} & \mathbf{t}_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{C} \,.\, \mathbf{B} \,.\, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{11} & \mathbf{c}_{12} & \mathbf{c}_{13} \\ \mathbf{c}_{21} & \mathbf{c}_{22} & \mathbf{c}_{23} \\ \mathbf{c}_{31} & \mathbf{c}_{32} & \mathbf{c}_{33} \end{pmatrix} \,.\, \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} & \mathbf{b}_{13} \\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} & \mathbf{b}_{23} \\ \mathbf{b}_{31} & \mathbf{b}_{32} & \mathbf{b}_{33} \end{pmatrix} \,.\, \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{pmatrix}$$

2. **Calcul séquentiel** $\vec{\mathbf{V}}_1 = \mathbf{A} \,.\, \vec{\mathbf{V}} \implies \vec{\mathbf{V}}_2 = \mathbf{B} \,.\, \vec{\mathbf{V}}_1 \implies \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{transformé}} = \mathbf{C} \,.\, \vec{\mathbf{V}}_2$

N.B.

Le produit matriciel n'est pas commutatif : $\mathbf{A}.\mathbf{B} \neq \mathbf{B}.\mathbf{A}$ ce qui veut dire que les transformations **ne peuvent pas être faites dans n'importe quel ordre**.

Composition de plusieurs transformations

Méthode globale

$$\vec{V}_{\text{transformé}} = \mathbf{C} \,.\, \mathbf{B} \,.\, \mathbf{A} \,.\, \vec{V} = \mathbf{Transf}_{\text{total}} \,.\, \vec{V} \xrightarrow{\text{yields}} \vec{V}_{\text{transformé}} = \mathbf{Transf}_{Total} \,.\, \vec{V}$$

$$\mathbf{Transfo}_{\text{total}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Transf}_{\text{total}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \qquad t_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} t_{kj}$$

$$\mathbf{Transf}_{\text{total}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \qquad t_{ij} = \sum_{k=1}^{3} b_{ik} t_{kj}$$

$$\mathbf{Transf}_{\text{total}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \qquad t_{ij} = \sum_{k=1}^{3} c_{ik} t_{kj}$$

$$\vec{V}_{\text{transformé}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Fonction à compléter

```python
def matrix_product(matrix1, matrix2):
    result = [[0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0]]
    result[i][j] += matrix1[i][k] * matrix2[k][j]

    return result
```

```python
def matrix_vector_product(matrix, vector):
    result = [0, 0, 0]

    result[i] += matrix[i][j] * vector[j]

    return result
```

Composition de plusieurs transformations

Méthode séquentiel

$$\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{transform\acute{e}}} = \mathbf{C}\,.\,\mathbf{B}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\vec{\mathbf{V}} = \mathbf{Transf}_{\mathbf{total}}\,.\,\vec{\mathbf{V}} \xrightarrow{\text{yields}} \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{transform\acute{e}}} = \mathbf{Transf}_{\boldsymbol{Total}}\,.\,\vec{\mathbf{V}}$$

$$\vec{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{V}}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad v'_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} v_k$$

$$\vec{\mathbf{V}}_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v''_i = \sum_{k=1}^{3} b_{ik} v'_k$$

$$\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{transform\acute{e}}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v'''_i = \sum_{k=1}^{3} c_{ik} v''_k$$

Fonction à compléter

```
def matrix_vector_product(matrix, vector):
    result = [0, 0, 0]

    result[i] += matrix[i][j] * vector[j]

    return result
```

Transformations dans le plan : L'homothétie

Homothétie de centre **A** (x_A, y_A) $\overrightarrow{AP'} = H.\overrightarrow{AP}$

Relation de Chasles : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP'} = H.\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}\right)$

$$\Downarrow$$

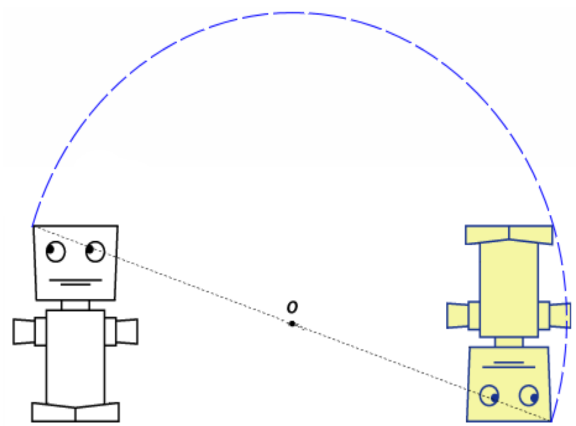
$$\overrightarrow{OP'} = H.\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) + \overrightarrow{OA}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} H_x & 0 \\ 0 & H_y \end{pmatrix}}_{\text{Homothétie}} \underbrace{\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}}_{\text{Translation } -\overrightarrow{OA}} + \underbrace{\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}}_{\text{Translation } \overrightarrow{OA}}$$

Homothétie de centre **A** (x_A, y_A)

$$\begin{cases} x' = H_x.(x - x_A) + x_A \\ y' = H_y.(y - y_A) + y_A \end{cases}$$

Symétrie par rapport à un point



Le symétrique du point **P** par rapport à un point **A** est le point **P’** tel que **A** soit le milieu du segment [**PP’**]. On dit que **P** et **P’** sont symétriques par rapport à **A.**

- Elle peut également être vu comme une rotation d’angle 180°.

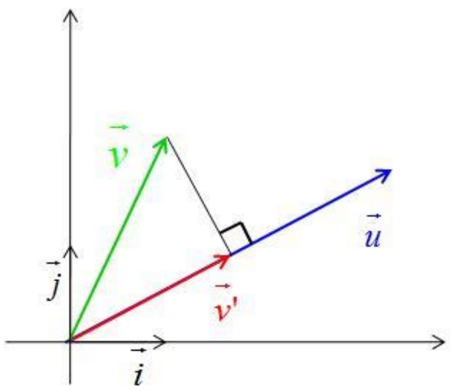
Par rapport à l’origine **O** :

$$\overrightarrow{OP'} = -\overrightarrow{OP} = C.\overrightarrow{OP} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Par rapport à un point **A** :

$$\overrightarrow{AP'} = C.\overrightarrow{AP} \qquad \overrightarrow{OP'} = C.\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) + \overrightarrow{OA}$$

Projection orthogonale



Le projeté **P’** du point **P** sur la droite (**D**) est un point de la droite(D) tel que le segment [**PP’**] est **orthogonale à la droite**.

- On définit l’angle ***φ*** comme l’angle entre la droite (**D**) est l’axe des abscisses (**Ox**).

Par rapport à l’origine **O** : $\overrightarrow{OP'} = \Pi.\overrightarrow{OP}$ $\quad \Pi = \begin{pmatrix} cos^2(\varphi) & cos(\varphi).sin(\varphi) \\ cos(\varphi).sin(\varphi) & sin^2(\varphi) \end{pmatrix}$

Par rapport à l’axe (**Ox**) : $\varphi = 0 \quad \Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x' = x \quad y' = 0$

Par rapport à l’axe (**Oy**) : $\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x' = 0 \quad y' = y$

Par rapport à un point **A** : $\overrightarrow{AP'} = \Pi.\overrightarrow{AP}$ $\quad \overrightarrow{OP'} = \Pi.\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) + \overrightarrow{OA}$

Transformations dans l'espace

Nous noterons le point d'origine **P** et le point transformé **P'**

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

- La translation
- L'homothétie
- La rotation autour d'un ~~**point**~~ axe
- La symétrie par rapport à un plan
- La symétrie par rapport à une droite ou un point
- La projection orthogonale sur un plan
- La projection orthogonale sur un axe

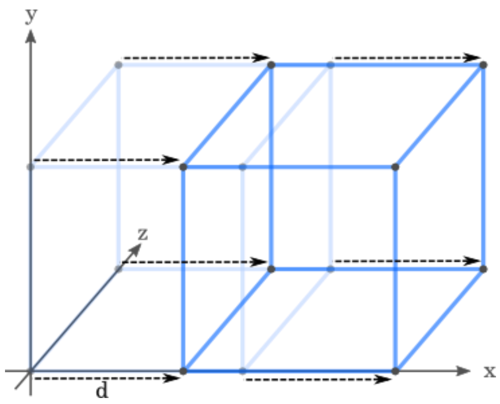
Transformations dans l'espace

Nous noterons le point d'origine **P** et le point transformé **P'**

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

- La translation
- L'homothétie
- La rotation autour d'un ~~point~~ axe
- La symétrie par rapport à un plan
- La symétrie par rapport à une droite ou un point
- La projection orthogonale sur un plan
- La projection orthogonale sur un axe

Transformations dans l'espace : La translation



La translation est un glissement rectiligne d'un point elle représenté par le **vecteur translation** :

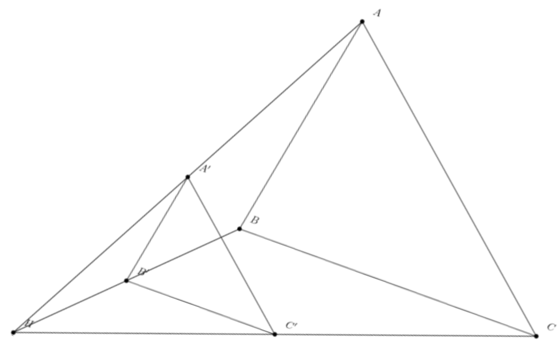
$$\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix}$$

La même translation appliquée à l'ensemble des points d'un objet géométrique aura comme action **de déplacer** tout l'objet sans :

- Modifier ses longueurs
- Le tourner, ni le retourner

Application d'une translation $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{T} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix}$

L’homothétie



L’homothétie de centre **O** est de rapport **H** est une opération qui envoie un point **P** sur un point **P’** situé sur la droite (**OP**) par un agrandissement ou une réduction de rapport **H**

$$\overrightarrow{OP'} = H.\overrightarrow{OP} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x & 0 & 0 \\ 0 & H_y & 0 \\ 0 & 0 & H_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x' &= H_x.x \\ y' &= H_y.y \\ z' &= H_z\, z \end{aligned}$$

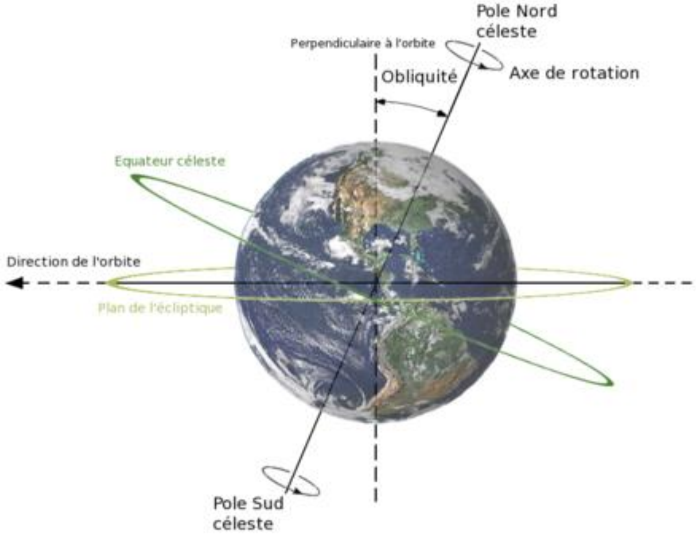
Une homothétie à pour action **d’agrandir ou de réduire** la taille d’un objet sans en modifier **les proportions**. On parle de changement d’**échelle.**

Homothétie de centre **A :** $\overrightarrow{AP'} = H.\overrightarrow{AP}$

Relation de Chasles : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP'} = H.\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}\right) \Longrightarrow \overrightarrow{OP'} = H.\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) + \overrightarrow{OA}$

La rotation

$$\overrightarrow{OP'} = R.\overrightarrow{OP}$$

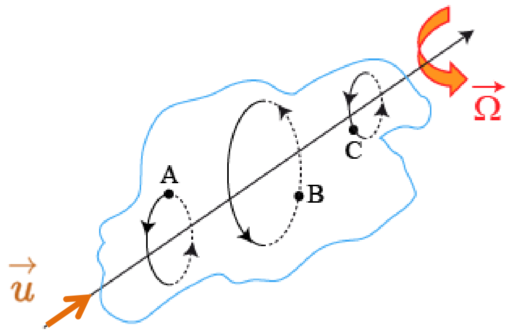


La rotation dans l'espace est une transformation géométrique définie par son **axe** (défini par un vecteur unitaire qui lui est parallèle) et son **angle**.

En utilisant un vecteur unitaire **u** (**a**, **b**, **c**) d'un axe passant par l'origine : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$R = (1-\cos\varphi)\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix} + \cos\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\varphi \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

La rotation



La rotation dans l'espace est une transformation géométrique définie par son **axe** (défini par un vecteur unitaire qui lui est parallèle) et son **angle**.

$$\overrightarrow{OP'} = R.\overrightarrow{OP}$$

En utilisant un vecteur unitaire d'un axe arbitraire: $\vec{u}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ $\quad u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$

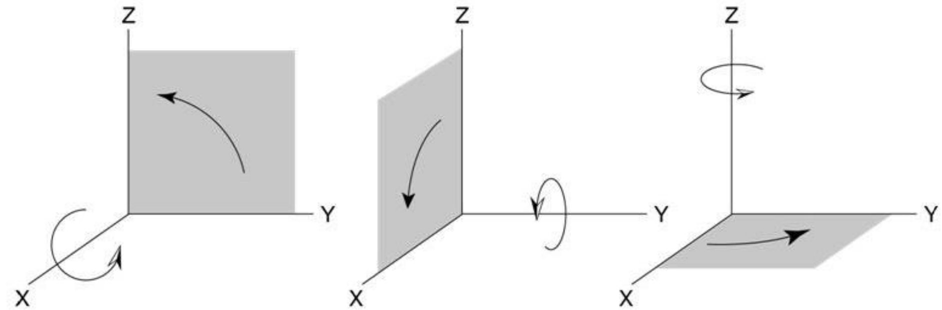
$$R = \begin{pmatrix} u_x^2(1-c)+c & u_x u_y(1-c) - u_z s & u_x u_z(1-c) + u_y s \\ u_x u_y(1-c) + u_z s & u_y^2(1-c)+c & u_y u_z(1-c) - u_x s \\ u_x u_z(1-c) - u_y s & u_y u_z(1-c) + u_x s & u_z^2(1-c)+c \end{pmatrix}$$

$c = \cos\theta, \qquad s = \sin\theta$

La rotation

- La rotation dans l’espace peut se décomposer en trois rotation élémentaire.

En coordonnées cartésiennes :



X-axis

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y-axis

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

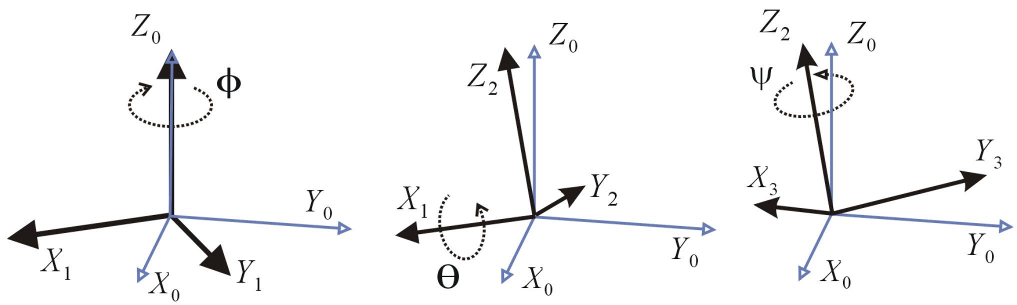
Z-axis

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La rotation : les angles d’Euler

- La rotation dans l’espace peut se décomposer en trois rotation élémentaire.

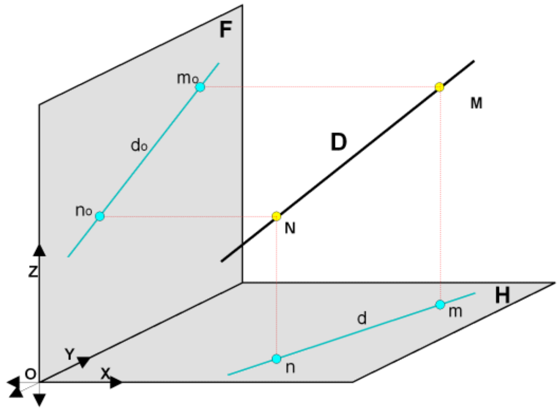
En paramétrisation d’Euler :

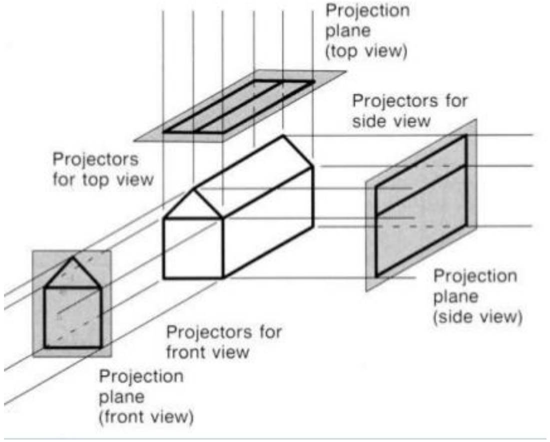


$$\hat{R}(\phi,\theta,\psi) = \hat{R}_3(\psi)\cdot\hat{R}_1(\theta)\cdot\hat{R}_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{R}(\phi,\theta,\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\psi\sin\phi & -\sin\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi & \sin\theta\sin\phi \\ \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi & -\sin\phi\sin\psi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & -\sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

La Projection orthogonale sur une droite ou un plan

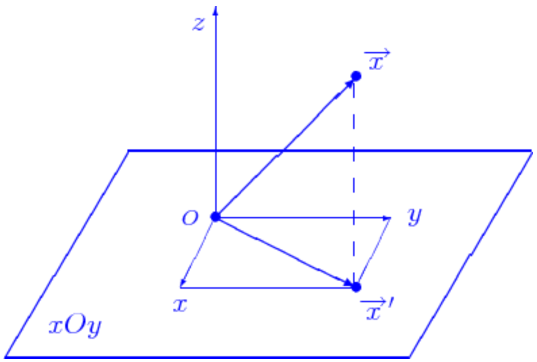


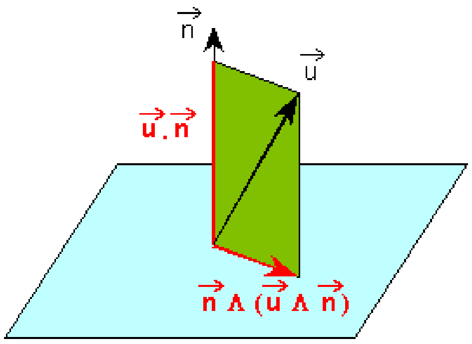


Le projeté **P’** du point **P** sur le plan (**P**) est un point de la droite (**P**) tel que :

- le segment [**PP’**] est **orthogonale au plan ;**
- ou le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{PP'}}$ est parallèle au vecteur normal.

Projection orthogonale sur une droite ou un plan





Le projeté **P'** du point **P** sur le plan (**P**) est un point de la droite (**P**) tel que :

- le segment [**PP'**] est **orthogonale au plan ;**
- ou le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{PP'}}$ est parallèle au vecteur normal.

N. B.

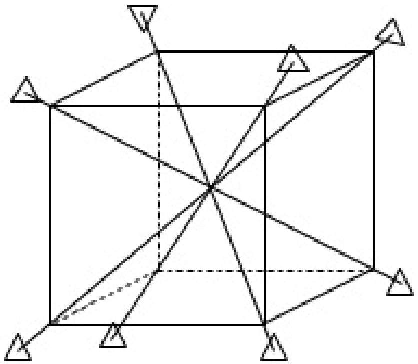
- Equation du plan : $\mathrm{a}.\mathbf{x} + \mathrm{b}.\mathbf{y} + \mathrm{c}.\mathbf{z} + \mathrm{d} = 0$; vecteur normal $\vec{\boldsymbol{n}} = (a, b, c)$
- $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = -\overrightarrow{\mathbf{PO}}$

On choisit un point $\mathbf{A}(\mathrm{x_A}, \mathrm{y_A}, \mathrm{z_A})$ du plan par exemple
$\mathrm{x_A} = 0, \mathrm{y_A} = 0, \mathrm{z_A} = ?$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AP'}} = \vec{\boldsymbol{n}} \times (\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} \times \vec{\boldsymbol{n}}) = \overrightarrow{\mathbf{AO}} + \overrightarrow{\mathbf{OP'}}$$
$$\overrightarrow{\mathbf{OP'}} = \vec{\boldsymbol{n}} \times (\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} \times \vec{\boldsymbol{n}}) + \overrightarrow{\mathbf{OA}}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2\,(x - xA) + a\,b\,(-y + yA) + c\,(c\,(x - xA) + a\,(-z + zA)) + xA \\ a\,b\,(-x + xA) + a^2\,(y - yA) + c\,(c\,(y - yA) + b\,(-z + zA)) + yA \\ a\,c\,(-x + xA) + b\,(c\,(-y + yA) + b\,(z - zA)) + a^2\,(z - zA) + zA \end{pmatrix}$$

Symétrie par rapport à un point



Le symétrique du point **P** par rapport à un point **A** est le point **P'** tel que **A** soit le milieu du segment [**PP'**]. On dit que **P** et **P'** sont symétriques par rapport à **A.**

- Elle peut également être vu comme une rotation d'angle 180°.

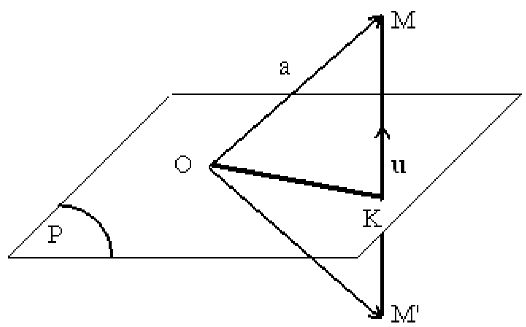
Par rapport à l'origine **O** :

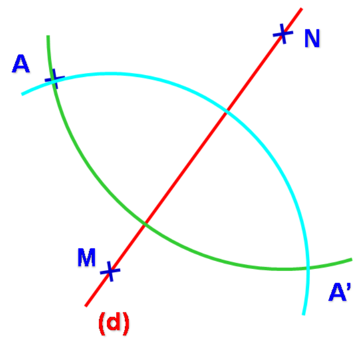
$$\overrightarrow{OP'} = -\overrightarrow{OP} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Par rapport à un point **A** :

$$\overrightarrow{AP'} = C.\overrightarrow{AP} \qquad \overrightarrow{OP'} = C.\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) + \overrightarrow{OA}$$

Symétrie par rapport à un axe ou un plan





Deux points **P** et **P''** sont symétriques l'un de l'autre par rapport à une droite (**D**) quand la droite (**D**) est la **médiatrice** du segment [**PP''**].

- La droite (**D**) est l'**axe de la symétrie**.
- Chaque point de (**D**) est son propre symétrique par rapport à (**D**).
- Elle peut également être vu comme une rotation d'angle 2φ.

On choisit un point $\mathbf{A}(\mathrm{xA}, \mathrm{y_A}, \mathrm{z_A})$ de la droite ou du plan (voir cours précédent)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AP'}} = \vec{\boldsymbol{n}} \times \left(\overrightarrow{\mathbf{AP}} \times \vec{\boldsymbol{n}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{AO}} + \overrightarrow{\mathbf{OP'}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OP'}} = \vec{\boldsymbol{n}} \times \left(\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} \times \vec{\boldsymbol{n}}\right) + \overrightarrow{\mathbf{OA}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{PP''}} = 2\,.\,\overrightarrow{\mathbf{PP'}} = \overrightarrow{\mathbf{PO}} + \overrightarrow{\mathbf{OP''}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OP''}} = 2\,.\,\overrightarrow{\mathbf{PP'}} + \overrightarrow{\mathbf{OP}}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2\,(x - xA) + a\,b\,(-y + yA) + c\,(c\,(x - xA) + a\,(-z + zA)) + xA \\ a\,b\,(-x + xA) + a^2\,(y - yA) + c\,(c\,(y - yA) + b\,(-z + zA)) + yA \\ a\,c\,(-x + xA) + b\,(c\,(-y + yA) + b\,(z - zA)) + a^2\,(z - zA) + zA \end{pmatrix}$$