B2 – Mathématiques :

Les fonctions usuelles

Amine ILMANE

108trigo

Further Fiddling with Fancy Fundamental Functions

$$e^A = e^{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}} \stackrel{?!!}{=} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Projet 108 : trigo

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{(how beautiful...)}$$

Terminal

```
∼/B-MAT-200> ./108trigo -h
USAGE
    ./108trigo fun a0 a1 a2 ...

DESCRIPTION
    fun       function to be applied, among at least "EXP", "COS", "SIN", "COSH"
              and "SINH"
    ai        coeficients of the matrix
```

Matrices are given as arguments line by line.

Obviously, matrix-managing libraries are not allowed. Hopefully, you already wrote efficient functions to compute matrix powers!

Projet 108 : trigo

```
Terminal
~/B-MAT-200> ./108trigo COS 4 5 9 3 3 5 0 1 9
0.70	-0.43	-1.94
-0.16	0.67	-1.23
-0.06	-0.15	0.07
```

```
Terminal
~/B-MAT-200> ./108trigo EXP 1 2 3 4
51.97	74.74
112.10	164.07
```

```
Terminal
~/B-MAT-200> ./108trigo SINH 1 0 2 0
1.18	0.00
2.35	0.00
```

Coefficients are split by tabulations.

Projet 108 : trigo

$$e^{A} = e^{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}} \overset{?!!}{=} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

(how beautiful...)

Matrice identité

$$\boldsymbol{e^{A} = 1_{n \times n} + A + \frac{1}{2!} A^{2} + \ldots}$$

- Il faut **implémenter** une **fonction produit matriciel** et qui sera utilisé dans la **fonction puissance d'une matrice.**
- **Ça ne marche que pour les matrices carrées $n \times n$.**
- **Le degré maximum ou il faut s'arrêter dépend de la précision**

La fonction exponentielle

$$\begin{array}{rccc} \exp : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & e^x. \end{array}$$

1. Pour tous réels a et b,

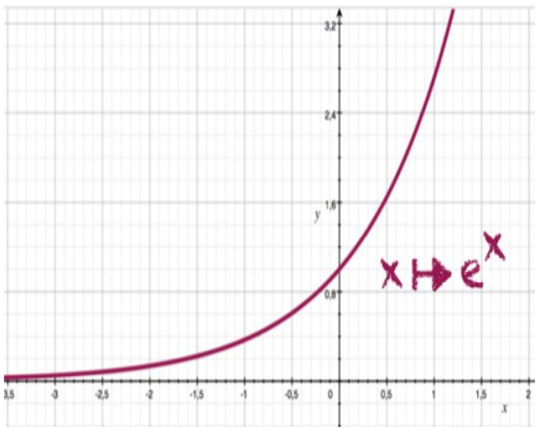
$$e^{a+b} = e^a e^b, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$

2. Pour tout réel a et pour tout entier naturel n

$$(e^a)^n = e^{na}, \quad (e^a)^{-n} = \frac{1}{e^{na}}.$$

3. Pour tout réel strictement positif a et pour tout réel b

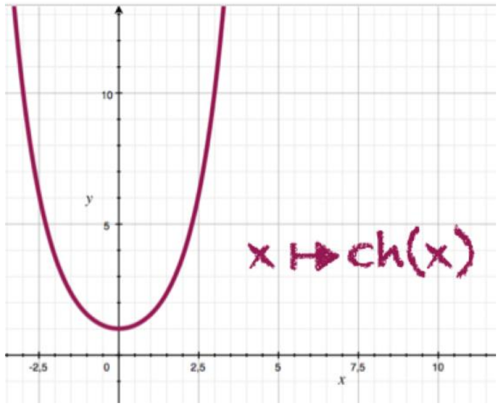
$$e^{\ln a} = a, \quad \ln(e^a) = a \quad \text{et} \quad e^{b \ln a} = a^b.$$

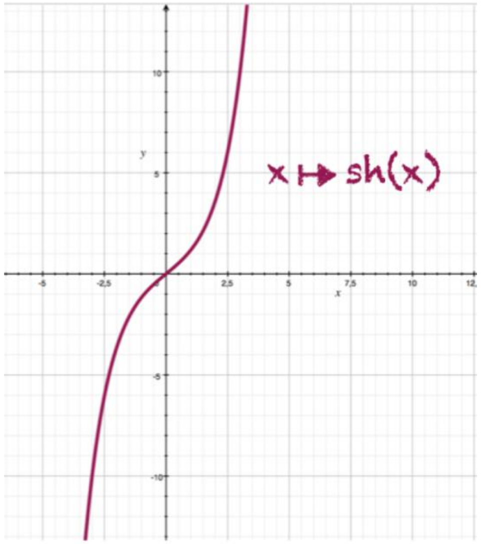


Les fonctions hyperboliques

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ch}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{array}$$

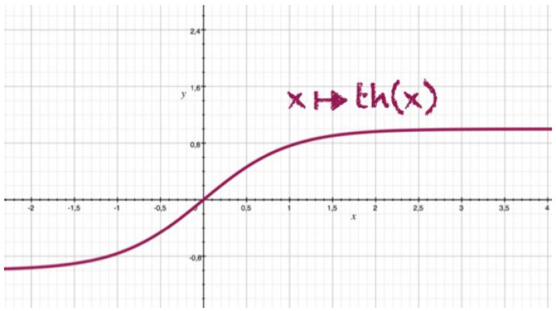
$$\begin{array}{rccl} \mathrm{sh}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{array}$$



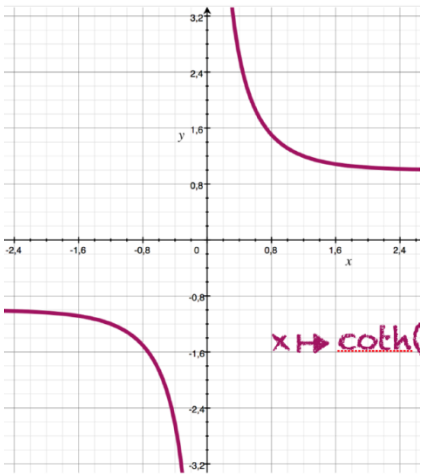


Les fonctions hyperboliques

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{th}: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}. \end{array}$$

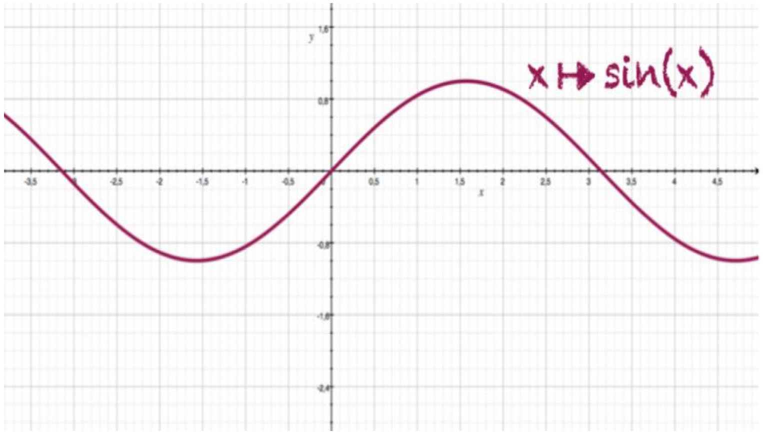


$$\begin{array}{rccl} \mathrm{coth}: & \mathbb{R}^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{coth}(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}. \end{array}$$

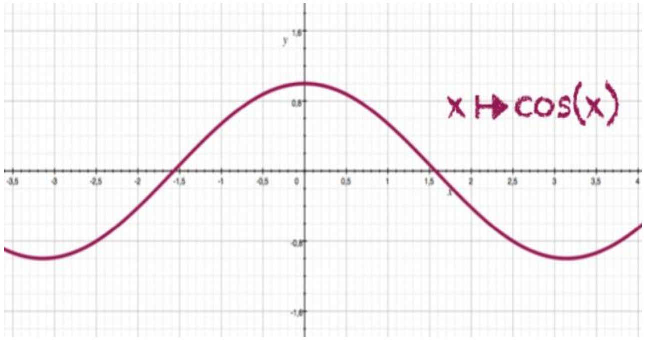


Les fonctions trigonométriques

$$\begin{array}{rccc} \sin : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin(x). \end{array}$$



$$\begin{array}{rccc} \cos : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos(x). \end{array}$$



Développement en série d'une fonction

- La **série de Taylor** ou développement limité est une approximation d'une fonction f(x) par un polynôme
- **Le degré du polynôme représente l'ordre du développement.**

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + o((x - x_0)^n)$$

Développement en série d’une fonction

- Pour avoir une forme plus simple on choisit une valeur nulle pour $\boldsymbol{x_0 = 0}$.
- Cette forme est donnée dans les tables des développement limité des fonctions usuelles.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + o((x - x_0)^n)$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}}{i!}\, x^i}$$

$$\boldsymbol{f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}\, x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}\, x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\, x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + o(x^n)}$$

Développement en série de $f(x) = e^x$

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}\,x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\,x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + o(x^n)$$

Exemple : développement limité de $f(x) = e^x$

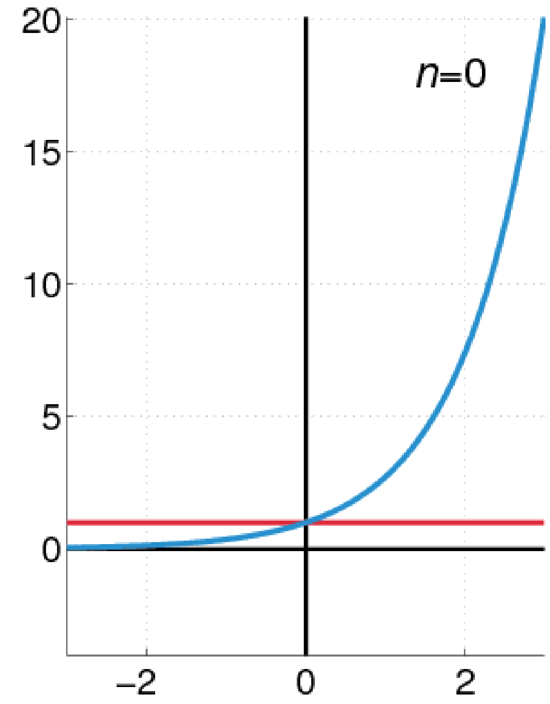
- $f^{(1)}(0) = e^0 = 1$, $f^{(2)}(0) = e^0 = 1$, $f^{(3)}(0) = e^0 = 1$

$$f(x) = e^x$$

$$= f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3$$

$$= 1 + 1\,.\,x + \frac{1}{2!}\;1\,.\,x^2 + \frac{1}{3!}\;1\,.\,x^3$$

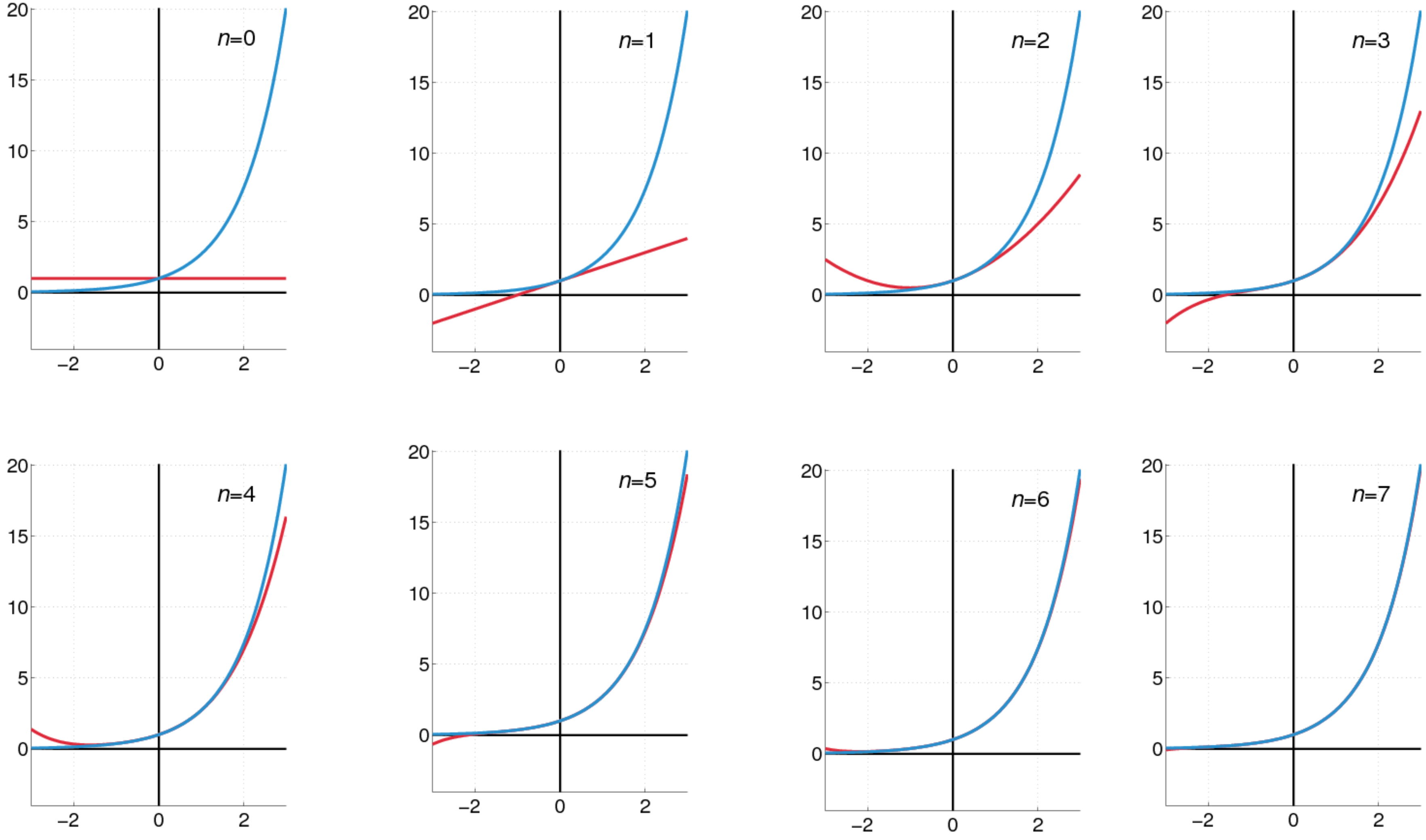
$$= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$$



que l'on peut généraliser $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,x^k$

Développement en série de $f(x) = e^x$

$$e^x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 + \frac{1}{6!} x^6 + \frac{1}{7!} x^7$$



Développement des fonctions usuelles

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} \\
\mathrm{ch}x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
\mathrm{sh}x &= x + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

Les séries numériques (rappels)

Qu'est-ce que c'est ?

Une série **S** est suite particulière où chacun de ses termes est la somme d'un certain nombre de termes d'une autre suite $\mathbf{u_n}$.

Ça a commencé ainsi :

Après avoir compris les suites, les mathématiciens se sont posé un problème :

Soit $\mathbf{S_n}$ la somme des n premiers termes d'une suite $\mathbf{u_n}$ (on parle de somme partielle), et voyons **ce qui se passe** quand **n devient grand** (tend vers l'infini).

Est-ce qu'il y aura convergence ou pas ?

$$\mathbf{S}(u)_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

$$\lim_{N \to +\infty} S_N = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n$$

Les séries numériques (rappels)

Les réponse est : dans certains oui dans d’autres non !

Quelques critères de convergence :

- Critère de Cauchy
- Critère de d’Alembert

Leur utilité :

Série et intégrale : les séries permettent de définir l’intégrale au sens de Riemann.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \longrightarrow \int_1^{\infty} f(t)$$

Série de fonctions : permet d’approximer les fonctions. $\forall z \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$

Séries vectorielles : permet d’écrire le développement d’une vecteur dans une base.

Séries trigonométrique : utilisée beaucoup dans le traitement de signal (série de Fourier)

Définitions (rappels)

Domaine de définition

Le domaine de définition D_f est l'ensemble pour lequel la fonction peut s'appliquer (ensemble de départ). **Il est un des points essentiels** dans la définition d'une fonction. En informatique il correspond aux entrées.

Pour une fonction numérique les domaines de définition sont :

- l'ensemble $\mathbb{R}$;
- un intervalle **[a , b] , [a , b [** ou **] a , b [** de $\mathbb{R}$;
- Union d'intervalles **[a , b] U [c , d] U …** de $\mathbb{R}$;
- l'ensemble $\mathbb{R}$ privé d'un point **[-∞, a [U] a , +∞]** ;

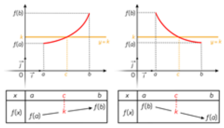
Exemples :

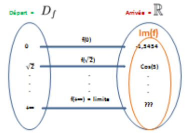
- **1 / x : x ∈** D_f **=]-∞ , 0 [U] 0, +∞[**
- **1 / (x² – 1) : x ∈** D_f **=]-∞ , -1 [U] -1 , +1 [U] +1 , +∞[**
- **√x : x ∈** D_f **= [0 , +∞[**

Image d'une fonction

L'**Image d'une fonction**, **Im(f),** est l'ensemble des valeurs que prendra la fonction **f.** Elle peut être l'ensemble des réels ou une partie.

- On peut le voir comme **Im(f) = f(** D_f **)** ;
- On ne calcule la valeur de **f** pour tous les **x** (impossible) on utilise pour cela la **notion de continuité** ;
- **La continuité d'une fonction** permet de calculer l'image d'un intervalle entier d'un coup ;
- Les points pour lesquels la fonction n'est pas définie sont appelés **singularités** ;
- Calculer l'ensemble image revient souvent à **calculer des limites** (singularités) ;





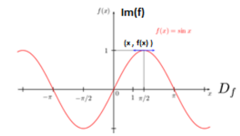
Produit cartésien et graphe d'une fonction

Le **produit cartésien** de deux ensemble **A** et **B**, noté par **A x B**, désigne l'ensemble des couple (**a**, **b**).

Et le produit cartésien de **p** ensembles, noté E_1 x … x E_p, désigne **l'ensemble des p-uplet** (e_1, …, e_p).

Le graphe d'une fonction est l'ensemble des couples **(x , f(x))** formés à partir du produit cartésien de D_f **x Im(f)**

$$G(f) = \{(x, f(x)) \quad | \quad x \text{ appartient à } D_f\}$$



La limite : infiniment grand

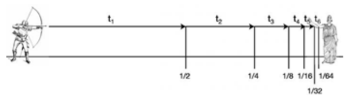
La notion de l'infiniment grand peut se comprendre aisément en déroulant cette algorithme :

```
a = positive number
do while( a > PreviousVal )
   PreviousVal = a
   a = 10 * a
   print a
end do
```

- Tant qu'il y a de mémoire l'algorithme nous donnera un nombre de plus en grand.
- Plus la mémoire est grande, très grande, très très grande, … les nombres affichées sont grand, très grand, très très grand, …

et ça ne s'arrête jamais … Bienvenue chez l'infiniment grand

La limite : infiniment petit



L'idée de Zénon était **de diviser** l'espace en **une infinité** de tout **petit morceaux.**

La notion de l'infiniment petit peut se comprendre aisément en réutilisant l'algorithme précédent :

À Chaque fois que l'on calcule un très grand nombre on calculera son inverse !

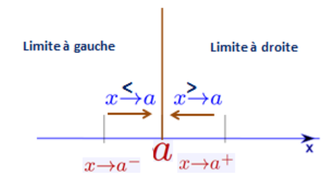
Conclusion :

- plus le nombre est grand plus son inverse est petit ;
- l'inverse d'un nombre infiniment grand est l'infiniment petit.

La limite à gauche et à droite

tendre vers = aller vers

$x \overset{\text{tend}}{\longrightarrow} a$



Propriétés des limites : la somme

- Soit **f** et **g** deux fonctions définie sur un domaine D_f de $\mathbb{R}$.
- Soit l_1 et l_2 les limites resp. de **f** et **g** .

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$
l_1	l_2	$l_1 + l_2$
l_1	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée**

Propriétés des limites : le rapport

- Soit **f** et **g** deux fonctions définie sur un domaine D_f de $\mathbb{R}$.
- Soit l_1 et l_2 les limites resp. de **f** et **g** .

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
l_1	$l_2 (\neq 0)$	$\frac{l_1}{l_2}$
l_1	∞	0
l_1	0	∞
0	∞	0
∞	0	∞
∞	∞	**Forme indéterminée**
0	0	**Forme indéterminée**

Propriétés des limites : le produit

- Soit **f** et **g** deux fonctions définie sur un domaine D_f de $\mathbb{R}$.
- Soit l_1 et l_2 les limites resp. de **f** et **g** .

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$
l_1	l_2	$l_1 l_2$
l_1	∞	∞
∞	∞	∞
0	0	0
0	∞	**Forme indéterminée**

Fonction définie par morceaux

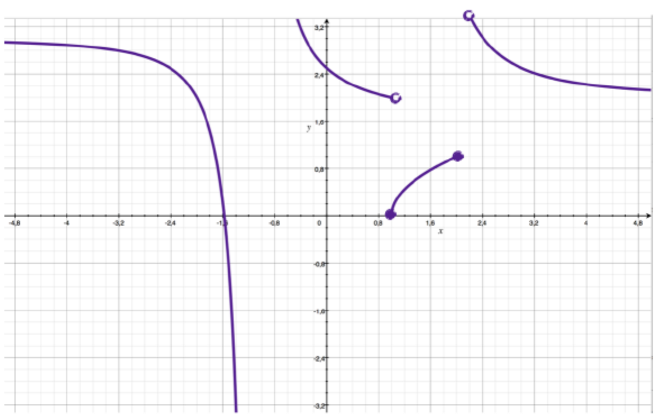
Un intervalle **[a,b]**, borné ou non, peut toujours être écrit sous la forme d’une réunion finie ou infinie de sous-intervalles (les morceaux) :

$$[a , b] = [a , x_0] \;\cup\; [x_0 , x_1] \;\cup \dots \cup\; [x_n , b]$$

On peut alors, sur chacun des sous-intervalles, définir une fonction : $f_0 , f_1 , \dots$ (pas forcément la même).

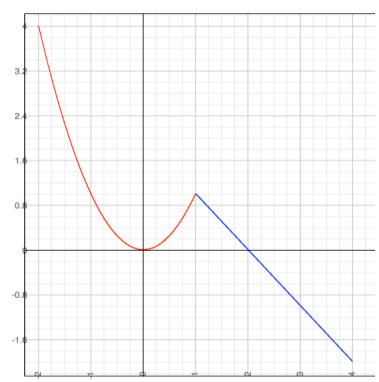
La fonction définie par morceaux est un groupement de fonction ou chacune d’elle est définie sur un intervalle (différent à chaque fois) :

discontinue



$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) \ \text{sur } [a , x_0] \\ f_1(x) \ \text{sur } [x_0 , x_1] \\ \vdots \\ f_n(x) \ \text{sur } [x_n , b] \end{cases}$$

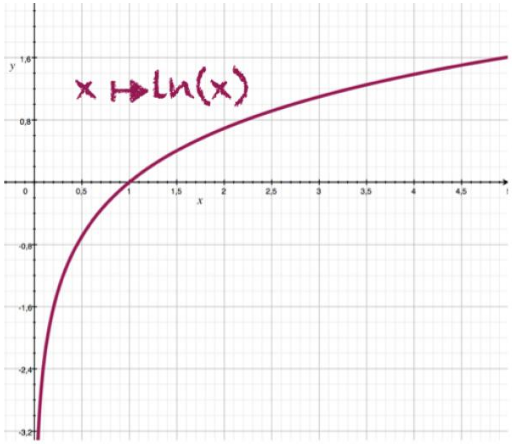
continue



Le logarithme

$$\begin{array}{rccc} \ln : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln(x). \end{array}$$

1. Il existe un nombre $e \simeq 2,71828$ tel que $\ln(e) = 1$.
2. Soient a et b deux réels strictement positifs, alors
$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \text{et} \quad \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b).$$
Cette dernière égalité nous permet d'ailleurs de déduire (en posant $a = b$) que $\ln(1) = 0$.
3. Soient n un entier naturel non nul, et a un réel strictement positif, on a alors :
$$\ln(a^n) = n\ln(a), \quad \text{et} \quad \ln(a^{-n}) = -n\ln(a).$$



Soient a un réel strictement positif. Pour tout réel x strictement positif, on définit son logarithme de base a noté $\log_a(x)$ par

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

La fonction exponentielle généralisée

$$\begin{array}{rccl} \exp: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a^x = e^{x.Log(a)} \end{array}$$

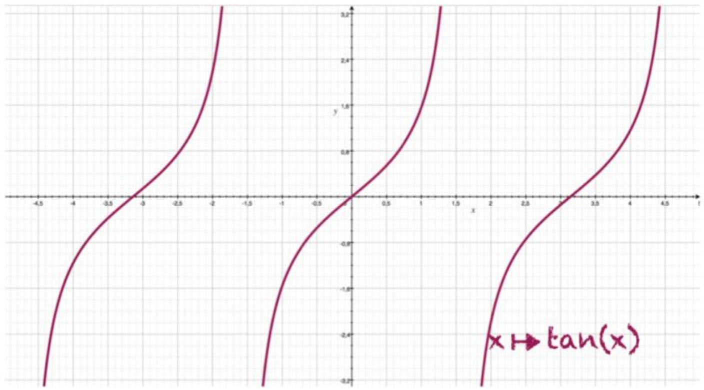
$a^x > 0$ pour tout a>0, et pour tout x

$1^x = e^{x.Log(1)} = e^0 = 1$ pour tout x

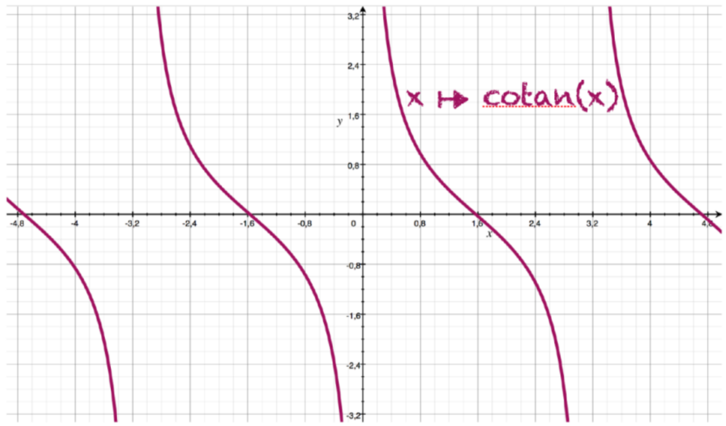
$$\begin{cases} Log(a^x) = x.Log(a) & (a > 0) \\ a^x.a^y = a^{x+y} & (a > 0) \\ (a^x)^y = a^{xy} & (a > 0) \\ (ab)^x = a^x.b^x & (a > 0, b > 0) \\ a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x & (a > 0) \end{cases}$$

Les fonctions trigonométriques

$$\begin{array}{rccl} \tan : & \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}. \end{array}$$

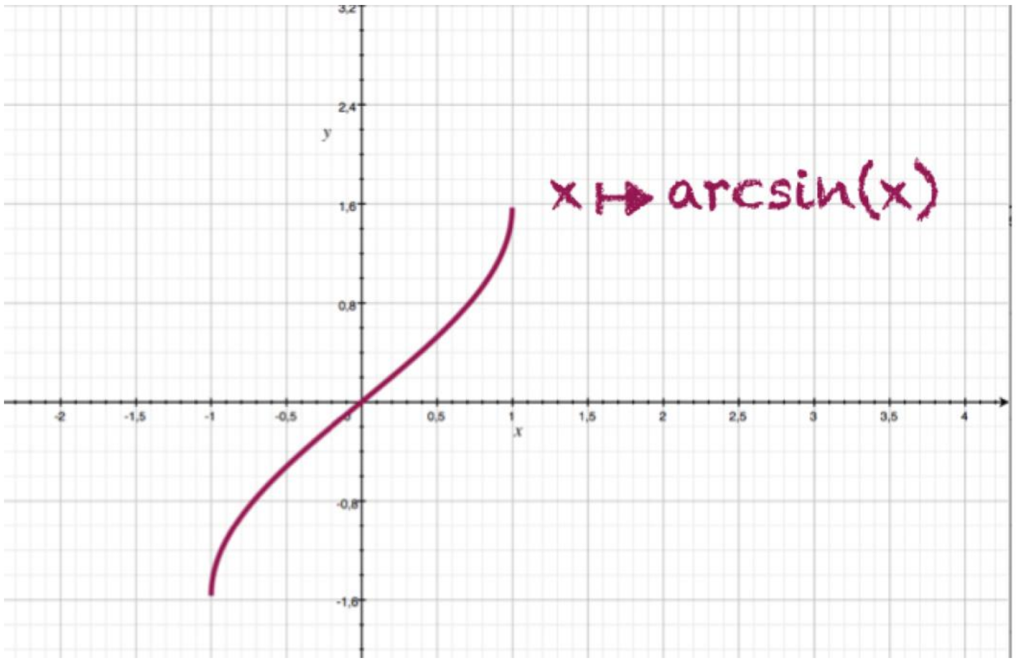


$$\begin{array}{rccl} \text{cotan} : & \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \}, k \in \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \text{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}. \end{array}$$



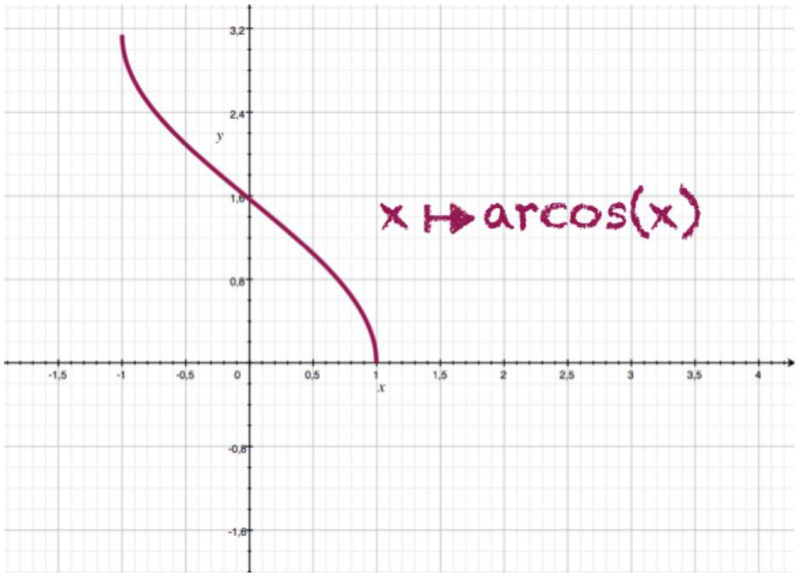
Les fonctions trigonométriques inverses

$$\begin{array}{rccc} \sin: & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & \sin(x). \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \arcsin: & [-1,1] & \to & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \mapsto & \arcsin(x). \end{array}$$



Les fonctions trigonométriques inverses

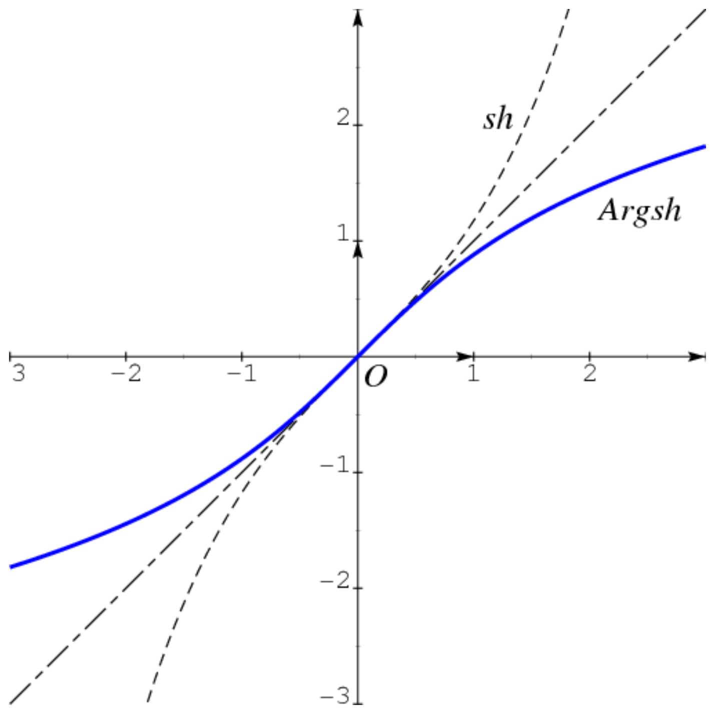
$$\begin{array}{rccc} \cos: & [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & \cos(x). \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \arccos: & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & x & \mapsto & \arccos(x). \end{array}$$



Les fonctions hyperboliques inverses

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{sh}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{argsh}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2+1}). \end{array}$$



Les fonctions hyperboliques inverses

$$\begin{array}{rccl} \text{ch}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \text{argch}: & \mathbb{R}_+ & \to & [1, \infty[\\ & x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \end{array}$$