B2 – Mathématiques :

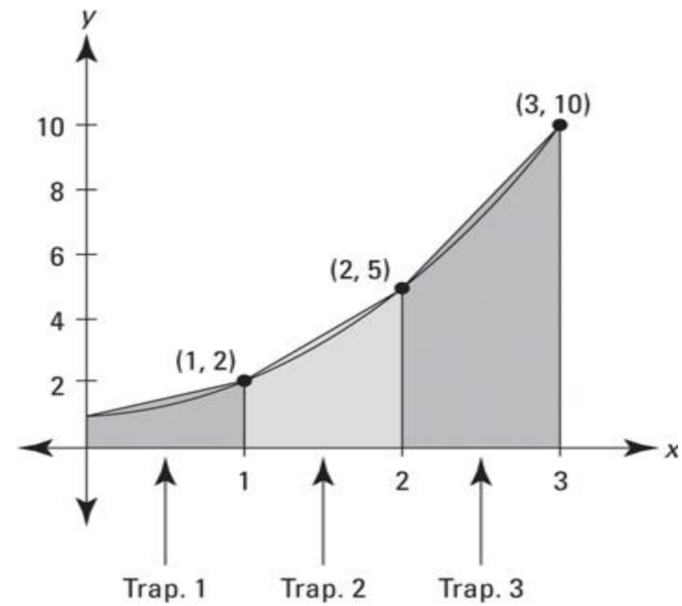
L’intégration

Amine ILMANE

110borwein

Saving years of calculations...

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{sin(\frac{x}{2k+1})}{\frac{x}{2k+1}} dx \; = \; \frac{\pi}{2}$$



Projet 110 : borwein

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{sin(\frac{x}{2k+1})}{\frac{x}{2k+1}} dx = \frac{\pi}{2}$$

Terminal

```
~/B-MAT-200> ./110borwein -h
USAGE
    ./110borwein n

DESCRIPTION
    n    constant defining the integral to be computed
```

Terminal

```
~/B-MAT-200> ./110borwein 0
Midpoint:
I0 = 1.5707651076
diff = 0.0000312192

Trapezoids:
I0 = 1.5707660806
diff = 0.0000302462

Simpson:
I0 = 1.5707654320
diff = 0.0000308948
```

$$= \left|\frac{\pi}{2} - I_0\right|$$

Projet 110 : borwein

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} \boxed{\prod_{k=0}^{n} \frac{sin(\frac{x}{2k+1})}{\frac{x}{2k+1}}} dx = \frac{\pi}{2}$$

f(x)

- **L'infini** sera représenté par la valeur **5000.**
- **10 000** sous intervalles (pas **10 000** points!!) de même longueur.
- Le **n** de la formule n'a rien avoir avec le nombre de subdivision.
- Le symbole $\prod_{i=1}^{N} u_i = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_N$
- Utiliser des **double float** et attention aux arrondis.
- Cas $x = 0$: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- Et on n'attend pas le follow-up pour commencer !!

Analyse : une discipline des mathématiques

L'**analyse** est une branche des **mathématiques** chargée ‘’ de la formulation rigoureuse du **calcul infinitésimal** ’’.

Nous disposons maintenant des **outils de calcul infinitésimal** suivants :

- domaine de définition ;
- l'infiniment grand est noté ∞ (asymptote, divergence) ;
- l'infiniment petit est noté **ξ** (la loupe) ;
- La convergence (diviser quelque chose en un infinité de petit morceaux) ;
- la limite ;
- la continuité ;
- La dérivation ;
- **Aujourd'hui, l'intégration**

Discrétisation d'un intervalle

Discrétiser (mesh) : grille de points à pas régulier, aléatoire pavage

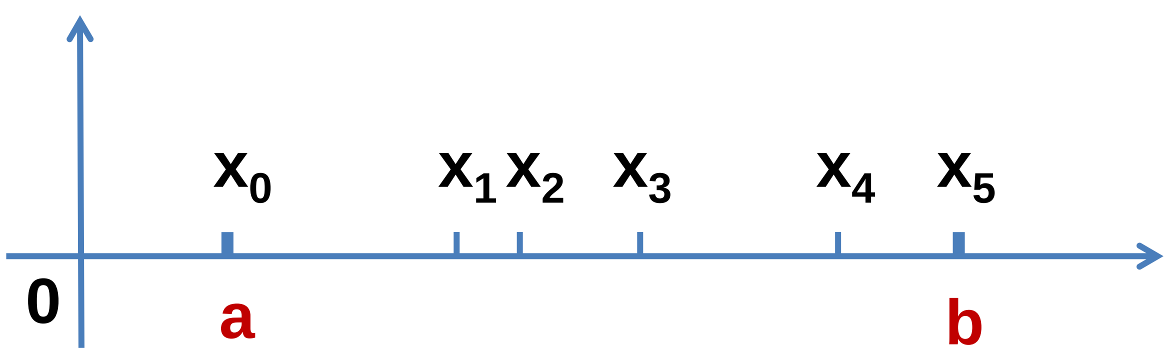
$U_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Lisser : interpolation, ajustement …

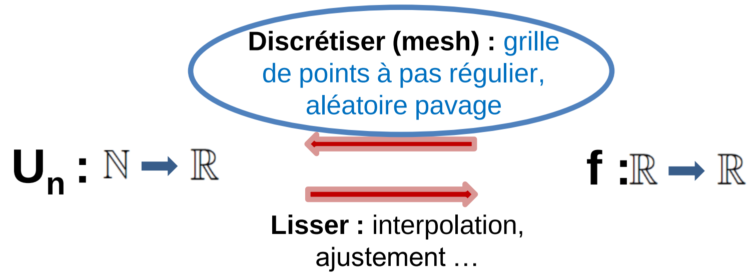
Définition *Une* **subdivision** *d'ordre n d'un intervalle $[a, b]$ est une partie finie $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ telle que*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

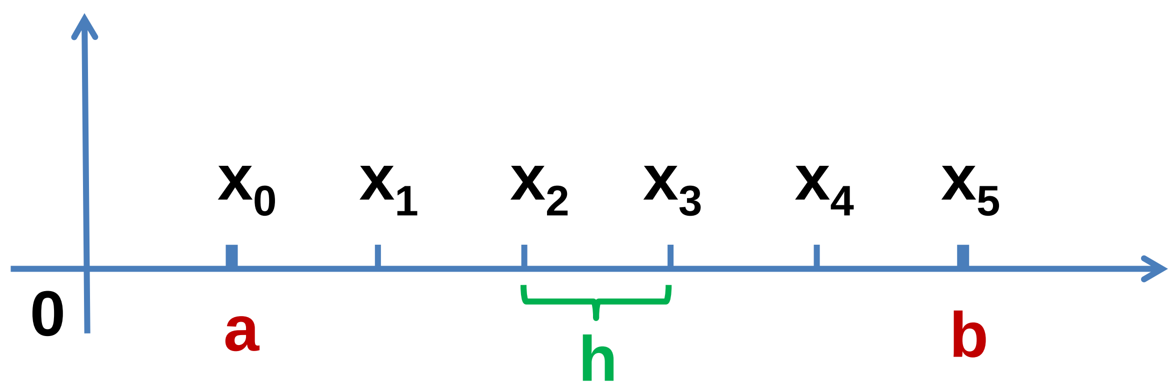
On notera $S_{a,b}$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.



Discrétisation régulière d'un intervalle



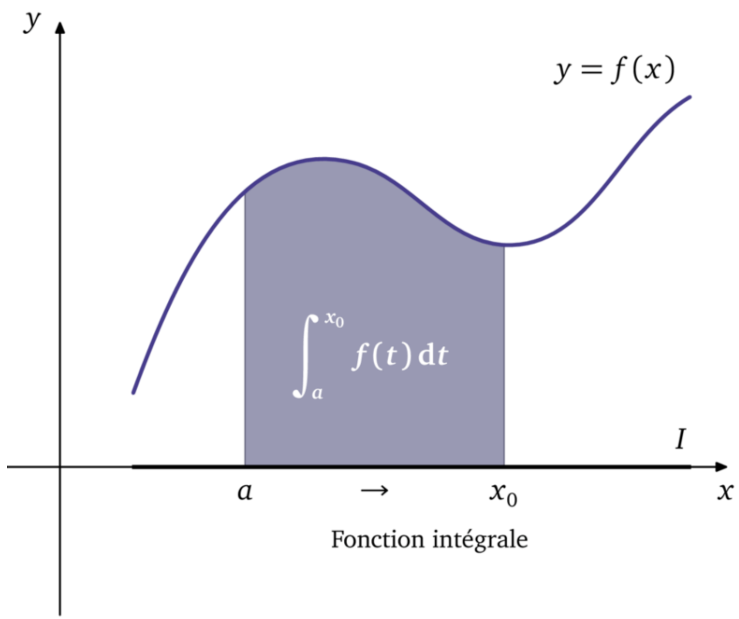
- Il est parfois plus intéressant (automatiser les calculs via des formules récursives) de choisir une subdivision avec **un pas régulier h.**
- Le pas est donnée par la formule $\mathbf{h} = \frac{b-a}{n}$
- On parle dans ce cas de **pas régulier ou uniforme**



Surface sous la courbe

Problème :

On voudrait calculer la surface qui est délimitée par la courbes $\mathbf{C_f}$



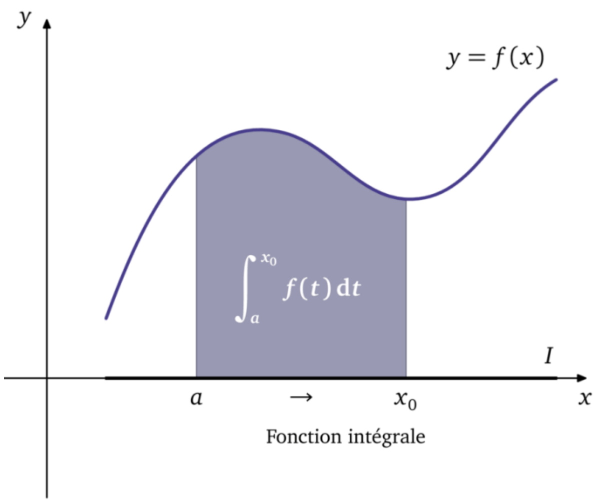
Surface sous la courbe

Solution :

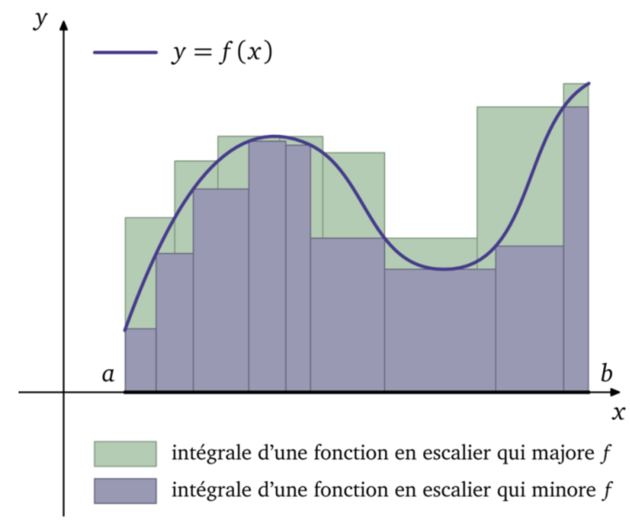
- Subdiviser l'intervalle **[a,b]**, puis calculer la surface des rectangles

Surface = Longueur x largeur = $\Delta f \,.\, \Delta x$

- La **somme de ces surfaces** donne une **approximation** de la surface sous la courbe.
- Plus la **subdivision est fine** (**h** petit) plus l'approximation est **meilleure**.



Discrétiser (mesh) : grille de points à pas régulier, aléatoire pavage

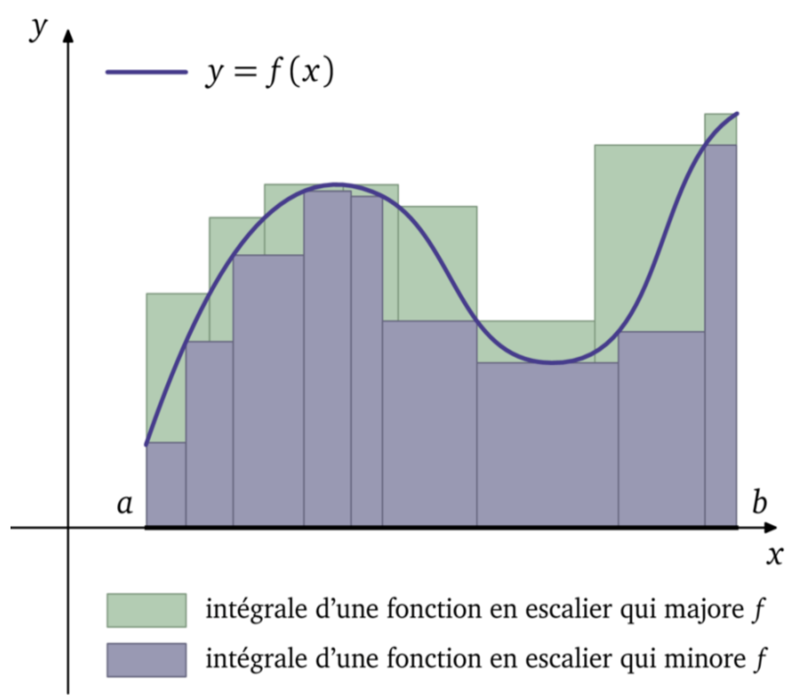


Somme de Darboux

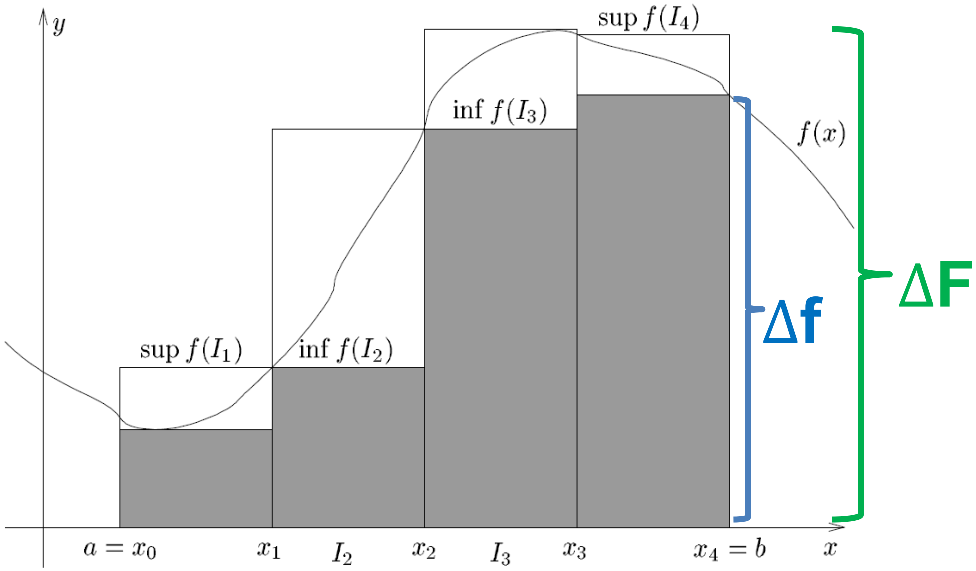
D n 1.1.3 *La* **somme de Darboux inférieure** *resp.* **supérieure** *de* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *relativement à une subdivision* $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *sont définies par*

$$s(f,X) := \sum_{i=1}^{n} h_i \inf f(I_i) \quad \textit{resp.} \quad S(f,X) := \sum_{i=1}^{n} h_i \sup f(I_i) \,,$$

où $h_i = x_i - x_{i-1}$ *est la longueur du* i^e *sous-intervalle* $I_i = [x_{i-1}, x_i]$.



Somme de Darboux



$\mathbf{s} = \Delta f_1.\Delta x_1 + \Delta f_2.\Delta x_2 + \Delta f_3.\Delta x_3 + \Delta f_4.\Delta x_4 = h\,.\,(\Delta f_1 + \Delta f_2 + \Delta f_3 + \Delta f_4)$

$\mathbf{S} = \Delta F_1.\Delta x_1 + \Delta F_2.\Delta x_2 + \Delta F_3.\Delta x_3 + \Delta F_4.\Delta x_4 = h\,.\,(\Delta F_1 + \Delta F_2 + \Delta F_3 + \Delta F_4)$

- Ce qui différencie **s** et **S** est l'approximation de la valeur de la fonction dans un sous intervalle donnée.
- Cette liberté de choix donne naissance à beaucoup de méthodes d'intégration numériques.

Intégrale de Riemann

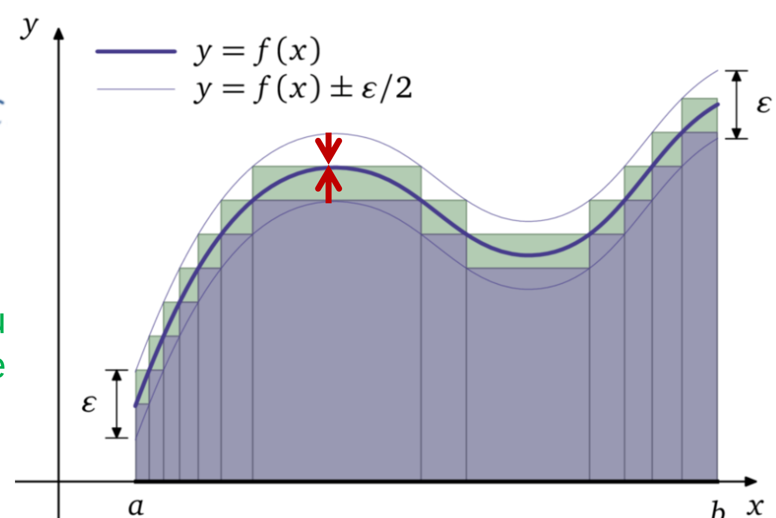
Définition 1.1.7 *La fonction f est* **Riemann–intégrable sur** $[a, b]$ *ssi les deux nombres*

$$s_a^b(f) := \sup_{X \in S_{a,b}} s(f, X)\ , \quad S_a^b(f) := \inf_{X \in S_{a,b}} S(f, X)\ .$$

coïncident ; ce nombre est alors appellé l'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$ (ou de a à b), et noté $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
L'ensemble des fonctions Riemann–intégrables sur $[a, b]$ est noté $R_{a,b}$.

$$S(f, X) - s(f, X) < \varepsilon$$

Théorème :
Toute fonction monotone ou continue sur **[a,b]** est intégrable au sens de Riemann



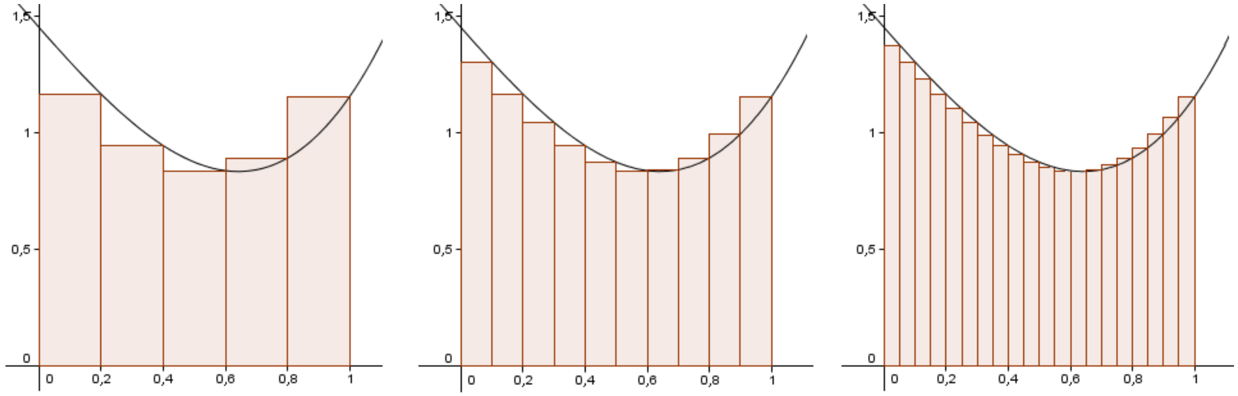
Approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier.

Intégrale de Riemann

À présent nous allons voir ce qui se passe lorsqu'on augmente le nombre de subdivisions :

- **h** devient petit ;
- L' approximation devient meilleure ;
- Si **n** $\rightarrow \infty$ alors **h = Δx = dx** $\rightarrow$ **0,** pour respecter la notation **Δf = df**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta f_i \,\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} s(f,[a,b]_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,[a,b]_n)$$



Un peu de numérique (méthode des rectangles)

Les sommes de Darboux ne sont pas très utiles pour le calcul effectif d'une intégrale, par exemple à l'aide d'un ordinateur, car il est en général assez difficile de trouver les inf et sup sur les sous-intervalles. On considère plutôt

$$s_n(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(x_{i-1}) \quad \text{ou} \quad S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(x_i) \,.$$

$$s(f, X) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq S(f, X)$$

Intégrale entre 0 et 4 de x^2 = 21,33

i	X	$f(x_i) = x_i^2$	Δx_i	$s = \Delta x_i\, f(x_{i-1})$	$S = \Delta x_i\, f(x_i)$
1	**a = 0**	0	1	0	1
2	1	1	1	1	4
3	2	4	1	4	9
4	3	9	1	9	16
5	**b = 4**	16	-	**15**	**30**

Propriétés des intégrales

Propriétés des intégrales

Soit $a \leq c \leq b$. Alors

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ — intégration en un point
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ — inversion des bornes
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ — partage de l'intervalle
  relation de Chasles

La linéarité

$$\int_a^b (\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))\ \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Propriétés des intégrales

Pour $f, g \in R_{a,b}$, $(a < b)$, on a

- $\int_a^b \lambda.f(x)\,dx = \lambda.\int_a^b f(x)\,dx$ — produit par un nombre
- $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ — addition
- $|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ — valeur absolue
- Si $f \leq g$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ — ordre
- Si $m \leq f(x) \leq M$ dans $[a,b]$,
  alors $m.(b\text{-}a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M.(b\text{-}a)$ — propriété du min-max

Théorème de la moyenne : $\exists c \in [a,b]$: $\underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{moyenne\ de\ f\ sur\ [a,b]} = f(c)$

Méthode numériques

Suite arithmétique de raison **h**

Subdivision de [a,b] : $h = \dfrac{b-a}{n}$

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_n = b \\ x_{i+1} = x_i + h, \quad i = 0, ..., n-1 \end{cases}$$

Choix de f :

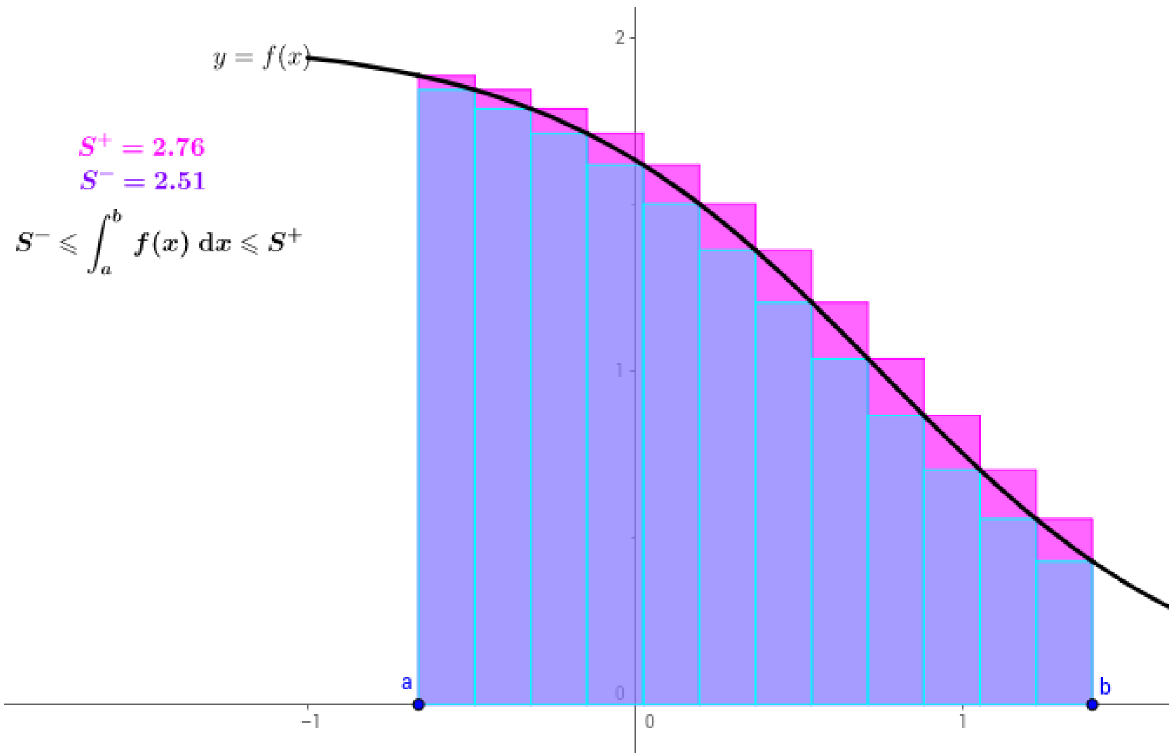
$$\begin{cases} \text{soit } f(x) = f(x_i) & \text{valeur à gauche} \\ \text{soit } f(x) = \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} & \text{valeur milieu} \\ \text{soit } f(x) = f(x_{i+1}) & \text{valeur à droite} \\ ... \end{cases}$$

Méthode des rectangles

Méthode des trapèzes

Méthode des rectangles (erreur en 1/**n**)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$



Méthode des rectangles (erreur en 1/**n**)

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \\
&\simeq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)\,dx \\
&\simeq \sum_{i=0}^{n-1} h.f(x_i) \\
&\simeq h.\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i.h) \\
&\simeq \frac{b-a}{n}.\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i.h)
\end{aligned}
$$

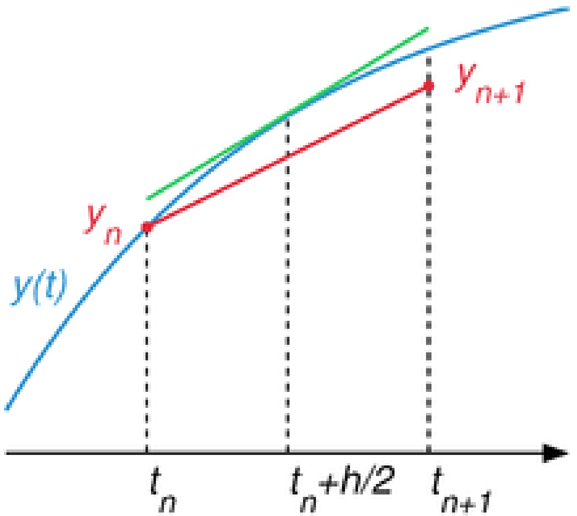
Valeur à gauche

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{n}.\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i.h)}$$

Subdivision de [a,b] : $h = \dfrac{b-a}{n}$

Méthode du point milieu (erreur en 1/**n**)

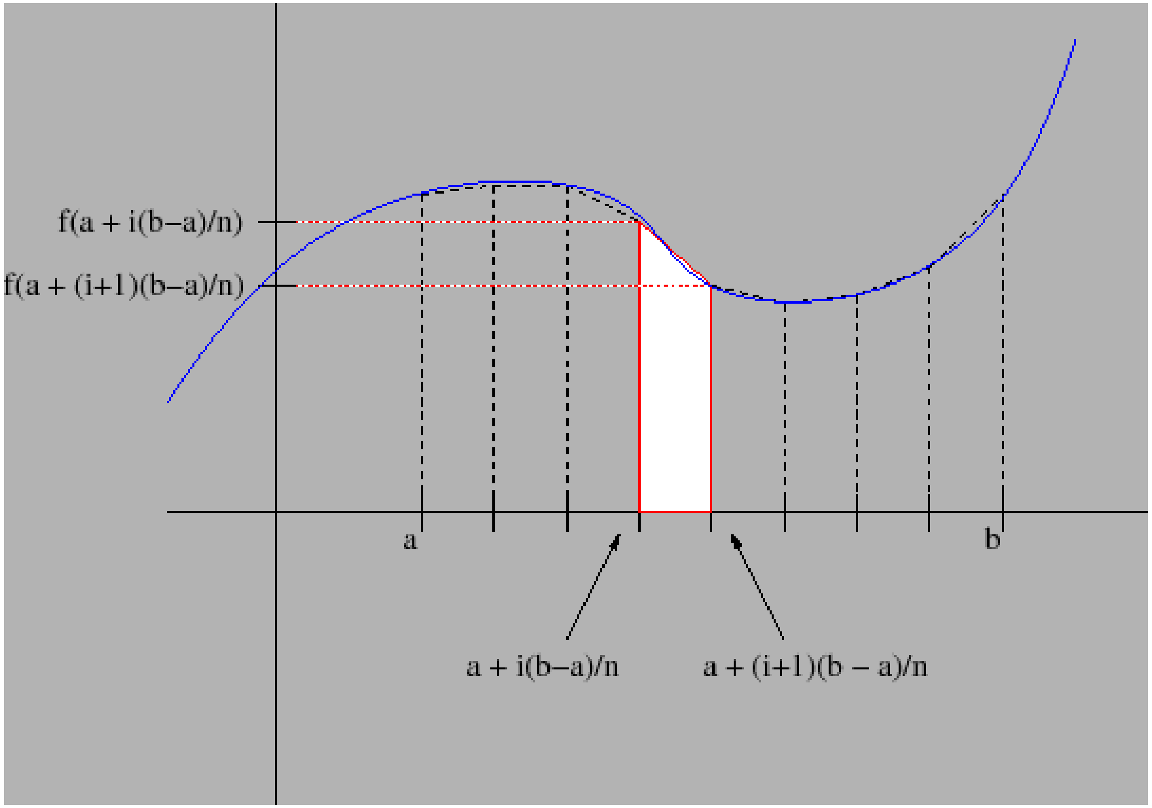
$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{n}.\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i.h)$$



$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{n}.\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i.h+\boxed{\frac{h}{2}})$$

Subdivision de [a,b] : $h = \dfrac{b-a}{n}$

Méthode des trapèzes (erreur en 1/**n²**)



Méthode des trapèzes (erreur en 1/**n**^{2})

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \\
&\simeq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\,dx \\
&\simeq \sum_{i=0}^{n-1} h.\frac{f(a+i.h)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} h.\frac{f(a+(i+1).h}{2} \\
&\simeq \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i.h) + \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n} f(a+i.h) \\
&\simeq \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+i.h)\right)
\end{aligned}
$$

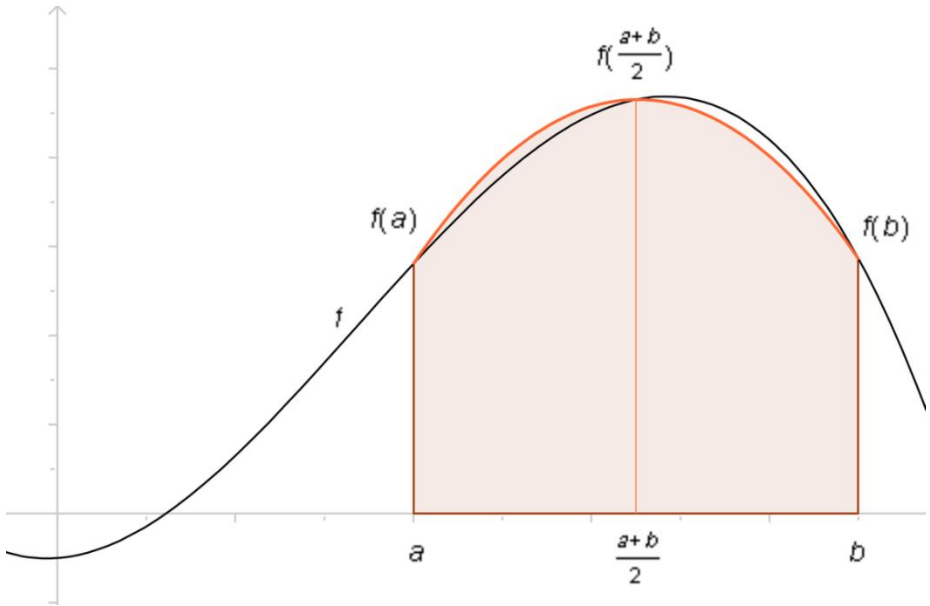
moyenne

$$
\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+i.h)\right)}
$$

Méthode de Simpson (erreur en 1/**n**^{4})

Comme dans le développement en série les méthodes ont un ordre aussi

- **Ordre 0 (constante) :** une **ligne horizontale** (méthodes des rectangles) ;
- **Ordre 1 (droite) :** une ligne **incliné (** méthodes des trapèzes) ;
- **Ordre 2 :** on introduit la courbure avec $\mathbf{x^2}$ **:** une parabole **(méthode de Simpson).**
- On essaye d'interpoler la fonction entre les point $\mathbf{x_i}$ en utilisant un polynôme de degrés **2**.
- Nous n'allons pas traiter les méthodes d'interpolation (3ème année)



Méthode de Simpson (erreur en 1/**n**^{4})

Suite arithmétique de raison **h**

Subdivision de [a,b] : $h = \dfrac{b-a}{n}$

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_n = b \\ x_{i+1} = x_i + h, \quad i = 0, ..., n-1 \end{cases}$$

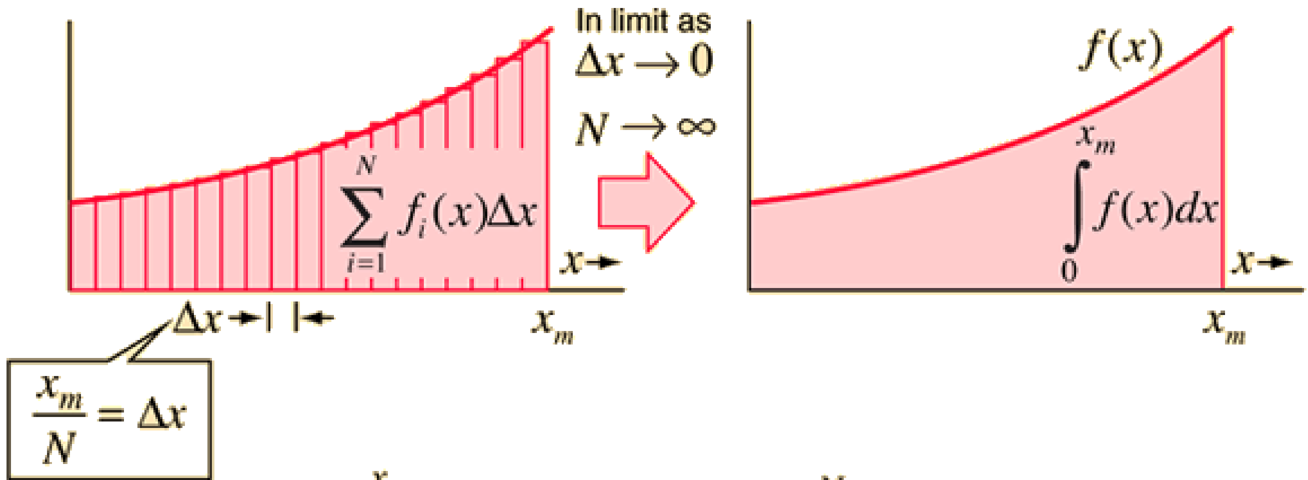
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{6}\left(f(x_i) + f(x_{i+1}) + 4.f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right)$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + f(b) + 2.\sum_{i=1}^{n-1} f(a+i.h) + 4.\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i.h+\frac{h}{2})\right)}$$

L’intégration

Sum becomes Integral



$$Area = \int_0^{x_m} f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\Delta x$$