

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI**  
**VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC**



**BÁO CÁO MÔN HỌC**  
**PHƯƠNG PHÁP SỐ**  
**ĐỀ TÀI**  
**CÁC PHƯƠNG PHÁP ADAM GIẢI BÀI TOÁN CAUCHY**  
**CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG CẤP 1**

**GV hướng dẫn : HÀ THỊ NGỌC YẾN**

**Sinh viên thực hiện:**

|                 |             |
|-----------------|-------------|
| <b>Họ tên</b>   | <b>MSSV</b> |
| Phạm Hồng Đức   | 20185336    |
| Phan Thanh Tùng | 20185422    |

## Chủ đề 16: CÁC PHƯƠNG PHÁP ADAM GIẢI BÀI TOÁN CAUCHY CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG CẤP 1

### I. Phương pháp ngoại suy Adam :

#### 1. Ý tưởng phương pháp :

- Nội dung của phương pháp Adam là tranh thủ các giá trị của nghiệm đã tìm được ở bước trước để tính cho giá trị của nghiệm ở bước tiếp theo
- Trở lại bài toán Cauchy :

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0, x_0 < x \leq X\end{aligned}\quad (1)$$

Các điểm chia của đoạn  $[x_0, X]$  là  $x_0, x_1, \dots, x_n$  có bước  $h = \frac{X - x_0}{n}$  ;  $x_i = x_0 + ih$ ;  
 $i=1, 2, \dots, n$

Tích phân của phương trình (1) trên đoạn  $[x_i, x_{i+1}]$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \quad (2)$$

#### 2. Xây dựng công thức ngoại suy Adam(Adam-Bashford)

- Để tính tích phân vế phải của (2) với  $y' = f(x, y)$  . Adam sử dụng đa thức nội suy Newton lùi tại mốc  $x_i$  :

$$y'(x) = y'(x_i) + \frac{\Delta y'(x_{i-1})}{1!} \cdot t + \frac{\Delta^2 y'(x_{i-2})}{2!} t(t+1) + \frac{\Delta^3 y'(x_{i-3})}{3!} t(t+1)(t+2) + \dots + \frac{\Delta^q y'(x_{i-q})}{q!} t(t+1)(t+2) \dots (t+q-1)$$

$$(3) \text{ với } t = \frac{x - x_i}{h}$$

Thay (3) vào (2) :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \int_0^1 \left[ y'(x_i) + t \frac{\Delta y'(x_{i-1})}{1!} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y'(x_{i-2}) + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 y'(x_{i-3}) + \dots + \frac{\Delta^q y'(x_{i-q})}{q!} t(t+1)(t+2) \dots (t+q-1) \right] dt$$

hay

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \left[ y'(x_i) + a_1 \Delta y'(x_{i-1}) + a_2 \Delta^2 y'(x_{i-2}) + a_3 \Delta^3 y'(x_{i-3}) + \dots \right] \quad (4)$$

$$a_i = \frac{1}{i!} \int_0^1 t(t+1)\dots(t+i-1)dt$$

với

- Theo công thức đánh giá sai số của đa thức nội suy, nếu trong công thức (3) ta dừng lại ở  $\Delta^{s-1}y'$  thì gặp sai số :

$$R(x) \approx \frac{\Delta^s y'(x_{i-s})}{s!} t(t+1)(t+2)\dots(t+s-1)$$

Nên :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} R(x)dx \approx \frac{\Delta^s y'(x_{i-s})}{s!} \int_0^1 t(t+1)(t+2)\dots(t+s-1)dt = \frac{M}{s!} \Delta^s y'(x_{i-s})$$

Theo tính chất của toán tử  $\Delta : \Delta^m f(x) = h^m f^{(m)}$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} R(x)dx \approx \frac{M}{s!} h^s y_{(\xi)}^{(s+1)}$$

Do đó :

- Vậy từ (4) ta có :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \left[ y'(x_i) + a_1 \Delta y'(x_{i-1}) + a_2 \Delta^2 y'(x_{i-2}) + a_3 \Delta^3 y'(x_{i-3}) + \dots + a_{s-1} \Delta^{s-1} y'(x_{i-(s-1)}) \right] + O(h^{s+1})$$

Bỏ qua  $O(h^{s+1})$  ta được công thức xấp xỉ, thay “ $\approx$ ” bởi “ $=$ ” và đặt

$y(x_i) = y_i$  ta được :

$$y_{i+1} = y_i + h \left[ y_i' + a_1 \Delta y_{i-1}' + a_2 \Delta^2 y_{i-2}' + a_3 \Delta^3 y_{i-3}' + \dots + a_{s-1} \Delta^{s-1} y_{i-s+1}' \right] \quad (5)$$

- Áp dụng công thức tính sai phân :  $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ ,

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \quad \Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i)$$

Khi đó (5) trở thành :

$$y_{i+1} = y_i + (b_0 y_i' + b_1 y_{i-1}' + b_2 y_{i-2}' + \dots + b_{s-1} y_{i-s+1}') \quad (6)$$

trong đó  $y_j' = f(x_j, y_j)$  và với :

$$\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

- Từ công thức (6) ta muốn tìm  $y_s$  ta cần có  $s$  giá trị từ  $y_0, y_1, \dots, y_{s-1}$  mà  $y'_0 = f(x_0, y_0)$  và  $y_1, y_2, \dots, y_{s-1}$  chưa có
- Muốn tính  $y_1, y_2, \dots, y_{s-1}$  thì ta dùng công thức R-K bậc 4 :

### 3. Thuật toán Adam ngoại suy :

- Input :  $f, x_0, y_0, X, h, s$  (hàm  $f$ , khoảng của  $x : [x_0, X]$ ,  $y(x_0)$ , bước nhảy, số bước của phương pháp)

- Output : bảng giá trị  $x[i], y[i]$  tương ứng.

Bước 1 : Nhập input và tính  $n = (X - x_0)/h$

Bước 2 : Khởi tạo mảng lưu các giá trị  $x$

Bước 3 : Sử dụng công thức R-K bậc 4 để tính  $s$  giá trị khởi đầu

$$K1 = hf(x, y)$$

$$K2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{K1}{2}\right)$$

$$K3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{K2}{2}\right)$$

$$K4 = hf(x + h, y + K3)$$

$$y(x + h) = y(x) + \frac{1}{6} (K1 + 2K2 + 2K3 + K4)$$

Bước 4 : Tính hệ số tương ứng với các  $y'_i$  (xây dựng Adam ngoại suy  $s$  bước)

- Tính các tích phân  $\int_0^1 \prod_{i=0}^k (t + k)$  với  $k$  từ 0 đến  $s-1$  rồi lưu vào ma trận  $a$
- Khởi tạo mảng 2 chiều  $p$  là tam giác pascal cấp  $s$  mà các cột chẵn đều mang giá trị âm
- Nhân 2 ma trận  $a$  và  $p$  rồi lưu vào ma trận  $b$  chính là hệ số tương ứng với các  $y'_i$

Bước 5 :Sử dụng bộ hệ số  $y'_i$  đã xây dựng ở trên để tính các giá trị  $y$  tiếp theo

#### 4. Ví dụ và kết quả chạy chương trình :

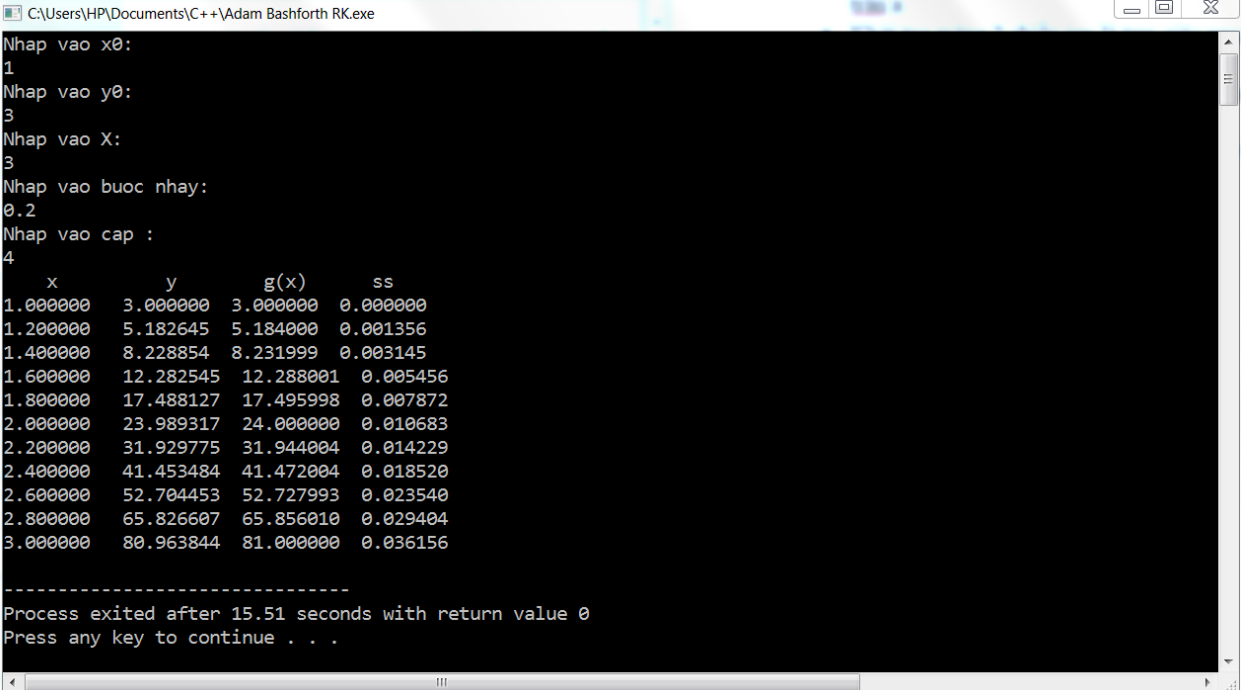
– VD1:

$$y' = 3\frac{y}{x}; y(1) = 3$$

$$1 \leq x \leq 3; h = 0.2$$

Nghiệm đúng :  $y = g(x) = 3x^3$

- Kết quả chạy chương trình với số bước là 4 :



```
C:\Users\HP\Documents\C++\Adam Bashforth RK.exe
Nhap vao x0:
1
Nhap vao y0:
3
Nhap vao X:
3
Nhap vao buoc nhay:
0.2
Nhap vao cap :
4
      x      y      g(x)      ss
1.000000  3.000000  3.000000  0.000000
1.200000  5.182645  5.184000  0.001356
1.400000  8.228854  8.231999  0.003145
1.600000  12.282545  12.288001  0.005456
1.800000  17.488127  17.495998  0.007872
2.000000  23.989317  24.000000  0.010683
2.200000  31.929775  31.944004  0.014229
2.400000  41.453484  41.472004  0.018520
2.600000  52.704453  52.727993  0.023540
2.800000  65.826607  65.856010  0.029404
3.000000  80.963844  81.000000  0.036156

-----
Process exited after 15.51 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .
```

- Kết quả chạy chương trình với số bước là 7 :

```

C:\Users\HP\Documents\C++\Adam Bashforth RK.exe
Nhap vao x0:
1
Nhap vao y0:
3
Nhap vao X:
3
Nhap vao buoc nhay:
0.2
Nhap vao cap :
7
  x          y          g(x)          ss
1.000000    3.000000    3.000000    0.000000
1.200000    5.182645    5.184000    0.001356
1.400000    8.228854    8.231999    0.003145
1.600000    12.282545    12.288001    0.005456
1.800000    17.487633    17.495998    0.008366
2.000000    23.988037    24.000000    0.011963
2.200000    31.927677    31.944004    0.016327
2.400000    41.450768    41.472004    0.021236
2.600000    52.701138    52.727993    0.026855
2.800000    65.822281    65.856010    0.033730
3.000000    80.958519    81.000000    0.041481

-----
Process exited after 14.83 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .

```

- Kết quả chạy với số bước là 7 nhưng h là 0.1

```

C:\Users\HP\Documents\C++\Adam Bashforth RK.exe
7
  x          y          g(x)          ss
1.000000    3.000000    3.000000    0.000000
1.100000    3.992950    3.993001    0.000051
1.200000    5.183893    5.184000    0.000107
1.300000    6.590828    6.590999    0.000171
1.400000    8.231755    8.231999    0.000244
1.500000    10.124672    10.125000    0.000328
1.600000    12.287579    12.288001    0.000422
1.700000    14.738493    14.739002    0.000509
1.800000    17.495407    17.495998    0.000591
1.900000    20.576296    20.577003    0.000708
2.000000    23.999178    24.000000    0.000822
2.100000    27.782063    27.782995    0.000933
2.200000    31.942915    31.944004    0.001089
2.300000    36.499756    36.501011    0.001255
2.400000    41.470604    41.472004    0.001400
2.500000    46.873409    46.875000    0.001591
2.600000    52.726212    52.727993    0.001781
2.700000    59.047016    59.049004    0.001987
2.800000    65.853775    65.856010    0.002235
2.900000    73.164528    73.167015    0.002487
3.000000    80.997284    81.000000    0.002716

-----
Process exited after 14.53 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .

```

– VD2 :

$$y' = y - x^2 + 1; y(0) = 0.5$$

$$0 \leq x \leq 2; h = 0.2$$

Nghiệm đúng :  $y = g(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x$

- Kết quả chạy chương trình với 4 bước :

```
C:\Users\HP\Documents\C++\Adam Bashforth RK.exe
Nhap vao x0:
0
Nhap vao y0:
0.5
Nhap vao X:
2
Nhap vao buoc nhay:
0.2
Nhap vao cap :
4
  x          y          g(x)      ss
0.000000  0.500000  0.500000  0.000000
0.200000  0.829293  0.829299  0.000005
0.400000  1.214076  1.214088  0.000011
0.600000  1.648922  1.648941  0.000019
0.800000  2.127289  2.127229  0.000060
1.000000  2.641053  2.640859  0.000194
1.200000  3.180314  3.179942  0.000373
1.400000  3.733019  3.732400  0.000619
1.600000  4.284443  4.283483  0.000960
1.800000  4.816596  4.815177  0.001419
2.000000  5.307508  5.305472  0.002037

-----
Process exited after 25.25 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .
```

- Kết quả chạy với số bước bằng 7 :

```
C:\Users\HP\Documents\C++\Adam Bashforth RK.exe
Nhap vao x0:
0
Nhap vao y0:
0.5
Nhap vao X:
2
Nhap vao buoc nhay:
0.2
Nhap vao cap :
7
  x          y          g(x)      ss
0.000000  0.500000  0.500000  0.000000
0.200000  0.829293  0.829299  0.000005
0.400000  1.214076  1.214088  0.000011
0.600000  1.648922  1.648941  0.000019
0.800000  2.127203  2.127229  0.000026
1.000000  2.640823  2.640859  0.000036
1.200000  3.179894  3.179942  0.000047
1.400000  3.732343  3.732400  0.000057
1.600000  4.283416  4.283483  0.000067
1.800000  4.815093  4.815177  0.000084
2.000000  5.305372  5.305472  0.000100

-----
Process exited after 80.51 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .
```

- Kết quả chạy với số bước bằng 7 nhưng bước nhảy là 0.1 :

```

C:\Users\HP\Documents\C++\Adam Bashforth RK.exe
7
x      y      g(x)      ss
0.000000 0.500000 0.500000 0.000000
0.100000 0.657414 0.657415 0.000000
0.200000 0.829298 0.829299 0.000000
0.300000 1.015070 1.015070 0.000000
0.400000 1.214087 1.214088 0.000001
0.500000 1.425638 1.425639 0.000001
0.600000 1.648939 1.648941 0.000001
0.700000 1.883122 1.883124 0.000001
0.800000 2.127228 2.127229 0.000001
0.900000 2.380197 2.380199 0.000002
1.000000 2.640857 2.640859 0.000002
1.100000 2.907915 2.907916 0.000001
1.200000 3.179940 3.179942 0.000002
1.300000 3.455349 3.455353 0.000003
1.400000 3.732398 3.732400 0.000002
1.500000 4.009153 4.009155 0.000002
1.600000 4.283481 4.283483 0.000002
1.700000 4.553024 4.553027 0.000003
1.800000 4.815174 4.815177 0.000003
1.900000 5.067050 5.067054 0.000004
2.000000 5.305470 5.305472 0.000002

-----
Process exited after 23.62 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .

```

– **Nhận xét :**

- Sai số ở trong mỗi ví dụ là khá lớn do đây là công thức ngoại suy, tính tại mốc  $x_{i+1}$  ở ngoài đoạn  $[x_{i-s+1}, x_i]$
- Với bước nhảy  $h$  càng nhỏ, số bước  $s$  càng lớn thì sai số nhận được càng nhỏ ( $O(h^s)$ )

## II. Phương pháp nội suy Adam :

### 1. Xây dựng công thức :

Để tính tích phân về phải của (2); tương tự sử dụng đa thức nội suy Newton lùi tại mốc  $x_{i+1}$  ta được

$$y'(x) \approx y'(x_{i+1}) + \frac{\Delta y'(x)}{1!}(t-1) + \frac{\Delta^2 y'(x_{i-1})}{2!}(t-1)t + \frac{\Delta^3 y'(x_{i-2})}{3!}(t-1)t(t+1) + \dots + \frac{\Delta^q y'(x_{i-q+1})}{q!}(t-1)t(t+1)\dots(t+q-2)$$

Do đó:



$$y_{i+1} = y_i + h \left[ y'_{i+1} + a_1 \Delta y'_i + a_2 \Delta^2 y'_{i-1} + a_3 \Delta^3 y'_{i-2} + \dots + a_{s-1} \Delta^{s-1} y'_{i-s+2} \right]$$

với 
$$a_i = \int_0^1 (t-1)t(t+1)\dots(t+i-2)dt$$

Tương tự phần ngoại suy ta được công thức:

$$y_{i+1} = y_i + h \left[ b_0 y'_{i+1} + b_1 y'_i + b_2 y'_{i-1} + \dots + b_{s-1} y'_{i-s+2} \right] \quad (7)$$

Công thức (7) gọi là công thức nội suy Adam do tính  $y_{i+1}$  tại điểm  $x_{i+1}$  thuộc đoạn  $[x_{i-s+2}, x_{i+1}]$ .

Tuy vậy trong công thức nội suy (7) do  $y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$  nên có chứa ẩn hàm  $y_{i+1}$  và (7) là phương trình phi tuyến đối với  $y_{i+1}$ . Giải (7), để tìm  $y_{i+1}$  ta sử dụng phương pháp lặp:

Đặt  $\sigma_{i+1} = h \left[ b_1 y'_i + b_2 y'_{i-1} + \dots + b_{s-1} y'_{i-s+2} \right]$  thì (7) trở thành:

$$y_{i+1} = y_i + h.b_0 y'_{i+1} + \sigma_{i+1}$$

Hay:  $y_{i+1} = y_i + h.b_0 f(x_{i+1}, y_{i+1}) + \sigma_{i+1}$ . Khi đó ta có quá trình lặp:

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)} = y_i + b_0 h f(x_{i+1}, y_i) + \sigma_{i+1} \\ y_{i+1}^{(1)} = y_i + b_0 h f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}) + \sigma_{i+1} \\ \dots\dots\dots \\ y_{i+1}^{(q)} = y_i + b_0 h f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(q-1)}) + \sigma_{i+1} \end{cases}$$

Quá trình lặp sẽ dừng khi  $\left| y_{i+1}^{(q)} - y_{i+1}^{(q-1)} \right| < \varepsilon$  với  $\varepsilon$  là sai số cho trước.

Với:

$$s = 1: y_1 = y_0 + hy'_1$$

$$s = 2: y_2 = y_1 + h\left(\frac{1}{2}y'_2 + \frac{1}{2}y'_1\right)$$

$$s = 3: y_3 = y_2 + h\left(\frac{5}{12}y'_3 + \frac{2}{3}y'_2 - \frac{1}{12}y'_1\right)$$

$$s = 4: y_4 = y_3 + h\left(\frac{3}{8}y'_4 + \frac{19}{24}y'_3 - \frac{5}{24}y'_2 + \frac{1}{24}y'_1\right)$$

Có  $y_1, y_2, \dots, y_{s-1}$  ta tính được  $y_s$

## 2. Thuật toán :

**Input:** Thay đổi hàm  $f$ , nhập vào  $x_0, X, y_0$ , sai số  $\varepsilon$ , bước  $h$ , bậc  $S$ .

- B1 : Tính các giá trị  $y_1, y_2, \dots, y_{s-1}$
- B2 : Tính tích phân rồi suy ra hệ số của phép toán
- B3 : Sử dụng vòng lặp để tính các giá trị  $y$  còn lại rồi hiệu chỉnh bằng sai số
- **Output:** Bảng giá trị  $y_i$

## 3. Ví dụ và kết quả chạy chương trình :

– VD1 :

$$y' = 3\frac{y}{x}; y(1) = 3$$

$$1 \leq x \leq 3; h = 0.2$$

Nghiệm đúng :  $y = g(x) = 3x^3$

- Kết quả chạy chương trình với số bước bằng 4, sai số  $\varepsilon = 0.00001$  :

```

C:\Users\HP\Documents\C++\Adam Moulton RK.exe
0.2
Nhap vao cap :
4
Nhap vao sai so :
0.00001
1.00000 -0.50000 -0.08333 -0.04167
1 0 0 0
1 -1 0 0
1 -2 1 0
1 -3 3 -1
0.37500 0.79167 -0.20833 0.04167
x y g(x) ss
1.000000 3.000000 0 3.000000 0.000000
1.200000 5.182644 0 5.184000 0.001356
1.400000 8.228853 0 8.231999 0.003146
1.600000 12.282543 0 12.288001 0.005458
1.800000 17.488201 7 17.495998 0.007797
2.000000 23.989311 7 24.000000 0.010689
2.200000 31.929773 6 31.944004 0.014231
2.400000 41.453529 6 41.472004 0.018475
2.600000 52.704514 6 52.727993 0.023479
2.800000 65.826668 6 65.856010 0.029343
3.000000 80.963921 6 81.000000 0.036079

-----
Process exited after 60.62 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .

```

- Kết quả chạy chương trình với số bước bằng 7, sai số  $\varepsilon = 0.00001$  :

```

C:\Users\HP\Documents\C++\Adam Moulton RK.exe
Nhap vao sai so :
0.00001
1.00000 -0.50000 -0.08333 -0.04167 -0.02639 -0.01875 -0.01427
1 0 0 0 0 0 0
1 -1 0 0 0 0 0
1 -2 1 0 0 0 0
1 -3 3 -1 0 0 0
1 -4 6 -4 1 0 0
1 -5 10 -10 5 -1 0
1 -6 15 -20 15 -6 1
0.31559 1.07659 -0.76820 0.62011 -0.33418 0.10437 -0.01427
x y g(x) ss
1.000000 3.000000 0 3.000000 0.000000
1.200000 5.182644 0 5.184000 0.001356
1.400000 8.228853 0 8.231999 0.003146
1.600000 12.282543 0 12.288001 0.005458
1.800000 17.487631 40 17.495998 0.008368
2.000000 23.988035 0 24.000000 0.011965
2.200000 31.927675 48 31.944004 0.016329
2.400000 41.450790 6 41.472004 0.021214
2.600000 52.701050 6 52.727993 0.026943
2.800000 65.822327 6 65.856010 0.033684
3.000000 80.958588 6 81.000000 0.041412

-----
Process exited after 27.57 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .

```

- Kết quả chạy chương trình với số bước bằng 7 nhưng  $h = 0.1$ , sai số  $\varepsilon = 0.00001$  :

```

C:\Users\HP\Documents\C++\Adam Moulton RK.exe
0.31559 1.07659 -0.76820 0.62011 -0.33418 0.10437 -0.01427
x y g(x) ss
1.000000 3.000000 0 3.000000 0.000000
1.100000 3.992950 0 3.993001 0.000051
1.200000 5.183893 0 5.184000 0.000107
1.300000 6.590828 0 6.590999 0.000171
1.400000 8.231755 40 8.231999 0.000244
1.500000 10.124672 0 10.125000 0.000328
1.600000 12.287579 48 12.288001 0.000422
1.700000 14.738494 5 14.739002 0.000508
1.800000 17.495399 5 17.495998 0.000599
1.900000 20.576292 5 20.577003 0.000711
2.000000 23.999174 5 24.000000 0.000826
2.100000 27.782043 5 27.782995 0.000952
2.200000 31.942902 5 31.944004 0.001102
2.300000 36.499741 4 36.501011 0.001270
2.400000 41.470566 5 41.472004 0.001438
2.500000 46.873379 5 46.875000 0.001621
2.600000 52.726173 4 52.727993 0.001820
2.700000 59.046955 4 59.049004 0.002048
2.800000 65.853714 4 65.856010 0.002296
2.900000 73.164459 4 73.167015 0.002556
3.000000 80.997185 4 81.000000 0.002815

-----
Process exited after 150.6 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .

```

– VD2 :

$$y' = y - x^2 + 1; y(0) = 0.5$$

$$0 \leq x \leq 2; h = 0.2$$

Nghiệm đúng :  $y = g(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x$

- Kết quả chạy chương trình với số bước là 4, sai số  $\varepsilon = 0.00001$

```

C:\Users\HP\Documents\C++\Adam Moulton RK.exe
0.2
Nhap vao cap :
4
Nhap vao sai so :
0.00001
1.00000 -0.50000 -0.08333 -0.04167
1 0 0 0
1 -1 0 0
1 -2 1 0
1 -3 3 -1
0.37500 0.79167 -0.20833 0.04167
x y g(x) ss
0.000000 0.500000 0 0.500000 0.000000
0.200000 0.829293 0 0.829299 0.000005
0.400000 1.214076 0 1.214088 0.000011
0.600000 1.648922 0 1.648941 0.000019
0.800000 2.127199 5 2.127229 0.000030
1.000000 2.640812 5 2.640859 0.000047
1.200000 3.179872 5 3.179942 0.000070
1.400000 3.732300 5 3.732400 0.000100
1.600000 4.283343 5 4.283483 0.000140
1.800000 4.814983 5 4.815177 0.000194
2.000000 5.305209 5 5.305472 0.000263

-----
Process exited after 18.79 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .

```

- Kết quả chạy chương trình với số bước là 7, sai số  $\varepsilon = 0.00001$

```

C:\Users\HP\Documents\C++\Adam Moulton RK.exe
Nhap vào sai số :
0.00001
1.00000 -0.50000 -0.08333 -0.04167 -0.02639 -0.01875 -0.01427
1 0 0 0 0 0
1 -1 0 0 0 0
1 -2 1 0 0 0
1 -3 3 -1 0 0
1 -4 6 -4 1 0
1 -5 10 -10 5 -1
1 -6 15 -20 15 -6 1
0.31559 1.07659 -0.76820 0.62011 -0.33418 0.10437 -0.01427
x y g(x) ss
0.000000 0.500000 0 0.500000 0.000000
0.200000 0.829293 0 0.829299 0.000005
0.400000 1.214076 0 1.214088 0.000011
0.600000 1.648922 0 1.648941 0.000019
0.800000 2.127203 40 2.127229 0.000026
1.000000 2.640823 0 2.640859 0.000036
1.200000 3.179894 48 3.179942 0.000047
1.400000 3.732341 4 3.732400 0.000059
1.600000 4.283412 4 4.283483 0.000072
1.800000 4.815087 4 4.815177 0.000090
2.000000 5.305362 4 5.305472 0.000110
-----
Process exited after 30.2 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .

```

- Kết quả chạy chương trình với số bước là 7,  $h = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.00001$

```

C:\Users\HP\Documents\C++\Adam Moulton RK.exe
x y g(x) ss
0.000000 0.500000 0 0.500000 0.000000
0.100000 0.657414 0 0.657415 0.000000
0.200000 0.829298 0 0.829299 0.000000
0.300000 1.015070 0 1.015070 0.000000
0.400000 1.214087 40 1.214088 0.000001
0.500000 1.425638 0 1.425639 0.000001
0.600000 1.648939 48 1.648941 0.000001
0.700000 1.883122 3 1.883124 0.000002
0.800000 2.127228 3 2.127229 0.000001
0.900000 2.380196 3 2.380199 0.000002
1.000000 2.640857 3 2.640859 0.000003
1.100000 2.907914 3 2.907916 0.000002
1.200000 3.179938 3 3.179942 0.000004
1.300000 3.455347 3 3.455353 0.000005
1.400000 3.732395 3 3.732400 0.000005
1.500000 4.009150 3 4.009155 0.000006
1.600000 4.283477 3 4.283483 0.000006
1.700000 4.553019 3 4.553027 0.000008
1.800000 4.815167 3 4.815177 0.000010
1.900000 5.067042 3 5.067054 0.000011
2.000000 5.305460 3 5.305472 0.000012
-----
Process exited after 27.19 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .

```

– **Nhận xét :**

Thực hiện thêm nhiều ví dụ khác ta có các nhận xét sau:

+ Với bước  $h$  càng nhỏ,  $s$  càng lớn thì sai số nhận đc càng nhỏ do như đã nói ở trên sai số nhận đc là  $O(h^s)$

+ Sai số của nội suy Adam bé hơn sai số của ngoại suy Adam

### III. Phương pháp dự đoán – hiệu chỉnh(Predictor – Corrector)

#### 1. Ý tưởng phương pháp :

- Ta có thể kết hợp công thức của Adam ngoại suy dùng để dự đoán giá trị  $y_s$  rồi sử dụng Adam nội suy để hiệu chỉnh giá trị  $y_s$ . Cụ thể là như sau

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \left[ y'(x_i) + \frac{a_1}{1!} \Delta y'(x_{i-1}) + \frac{a_2}{2!} \Delta^2 y'(x_{i-2}) + \frac{a_3}{3!} \Delta^3 y'(x_{i-3}) + \dots \right]$$

$$y_{i+1} = y_i + h \left[ y'_{i+1} + a_1 \Delta y'_i + a_2 \Delta^2 y'_{i-1} + a_3 \Delta^3 y'_{i-2} + \dots + a_{s-1} \Delta^{s-1} y'_{i-s+2} \right]$$

#### 2. Ví dụ và kết quả chạy chương trình :

- VD1 :

$$y' = 3 \frac{y}{x}; y(1) = 3$$

$$1 \leq x \leq 3; h = 0.2$$

Nghiệm đúng :  $y = g(x) = 3x^3$

- Kết quả chạy chương trình với số bước là 4 :

```

C:\Users\HP\Desktop\Adam Pre-Cor.exe
3
Nhap vao X:
3
Nhap vao buoc nhay:
0.2
Nhap vao cap :
4
  1.00000  0.50000  0.41667  0.37500
  2.29167 -2.45833  1.54167 -0.37500
  1.00000 -0.50000 -0.08333 -0.04167
  0.37500  0.79167 -0.20833  0.04167
    x        y        g(x)      ss
1.000000  3.000000  3.000000  0.000000
1.200000  5.182644  5.184000  0.001356
1.400000  8.228853  8.231999  0.003146
1.600000  12.282543  12.288001  0.005458
1.800000  17.488192  17.495998  0.007807
2.000000  23.989315  24.000000  0.010685
2.200000  31.929773  31.944004  0.014231
2.400000  41.453529  41.472004  0.018475
2.600000  52.704517  52.727993  0.023476
2.800000  65.826675  65.856010  0.029335
3.000000  80.963928  81.000000  0.036072

-----
Process exited after 15.6 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .
  
```

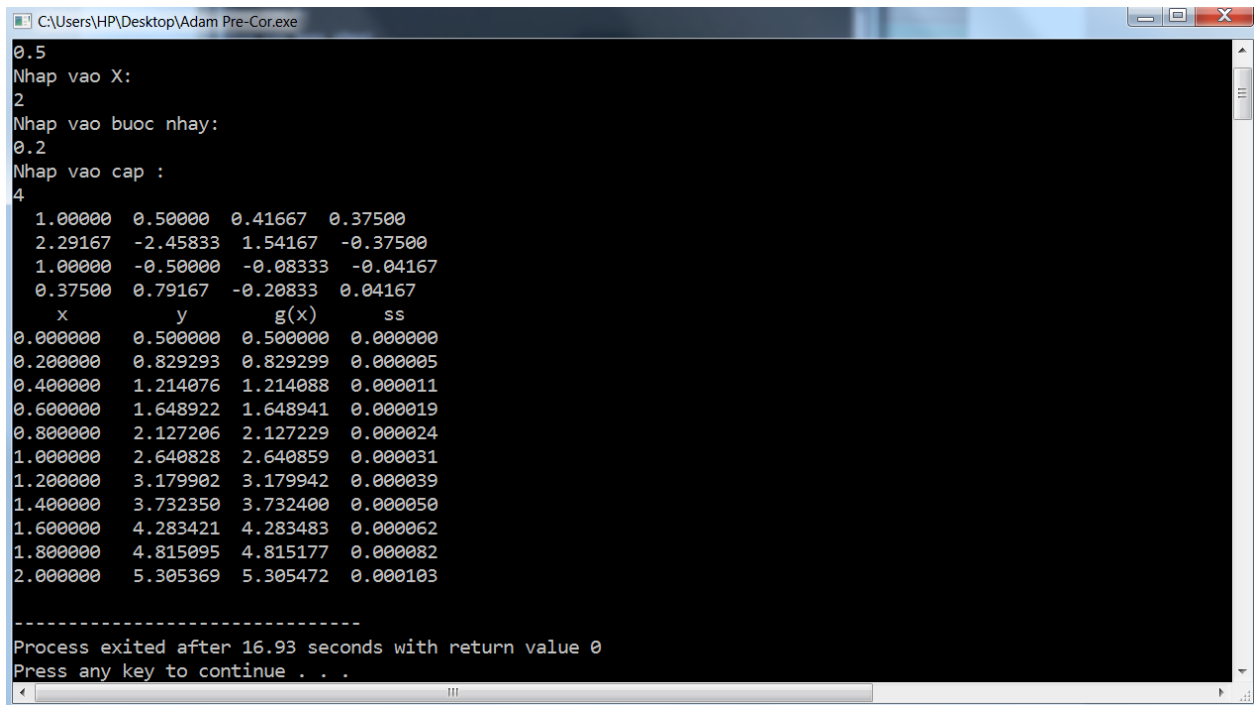
– VD2 :

$$y' = y - x^2 + 1; y(0) = 0.5$$

$$0 \leq x \leq 2; h = 0.2$$

Nghiệm đúng :  $y = g(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x$

- Kết quả chạy chương trình với số bước là 4 :



```
C:\Users\HP\Desktop\Adam Pre-Cor.exe
0.5
Nhap vao X:
2
Nhap vao buoc nhay:
0.2
Nhap vao cap :
4
1.00000 0.50000 0.41667 0.37500
2.29167 -2.45833 1.54167 -0.37500
1.00000 -0.50000 -0.08333 -0.04167
0.37500 0.79167 -0.20833 0.04167
x      y      g(x)    ss
0.00000 0.50000 0.50000 0.00000
0.20000 0.82929 0.82929 0.00005
0.40000 1.21407 1.21408 0.00011
0.60000 1.64892 1.64894 0.00019
0.80000 2.12720 2.12722 0.00024
1.00000 2.64082 2.64085 0.00031
1.20000 3.17990 3.17994 0.00039
1.40000 3.73235 3.73240 0.00050
1.60000 4.28342 4.28348 0.00062
1.80000 4.81509 4.81517 0.00082
2.00000 5.30536 5.30547 0.00103
-----
Process exited after 16.93 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .
```

– **Nhận xét** : Sử dụng phương pháp kết hợp làm giảm thời gian chạy chương trình và sai số cũng nhỏ đi đáng kể.