

CreditCruncher User's Guide

Version 0.1



Queen



Drone



Worker

Gerard Torrent Gironella

25 de enero de 2005

Copyright © 2004-2005 Gerard Torrent Gironella. All rights reserved.

The image found in cover have been taken from Mark L. Winston. 1987. *The Biology of the Honey Bee* (ISBN: 0-671-07109-2). Harvard University Press. Cambridge, MA. These redrawn figures appear here without permission of Harvard University Press [Ref: 973029].

This file is part of the CreditCruncher software package. For license information, see the COPYING file in the top level directory of the CreditCruncher source distribution.

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Acerca de CreditCruncher	5
1.2. Organización del contenido	5
2. Formulación del problema	7
2.1. Cartera de créditos	7
2.1.1. Ratings	8
2.1.2. Productos	8
2.1.3. Sectores	8
2.1.4. Exposición	8
2.1.5. Severidad	8
2.2. Value At Risk (VAR)	8
2.3. Matriz de transición	8
2.3.1. Definición.	8
2.3.2. Ejemplo.	9
2.3.3. Propiedades	9
2.3.4. Cambio de periodo	9
2.3.5. Tasa de morosidad anticipada	10
2.4. Matriz de correlación sectorial	10
3. Resolución del problema	11
3.1. Hipotesis	11
3.2. Reparto del tiempo	11
3.3. El método de Monte Carlo	11
3.4. Copulas. Variables aleatorias correlacionadas	11
3.4.1. Errores comunes sobre la correlación	11
3.5. Algoritmo de resolución	12
4. Implementación de la solución	13
4.1. Generación de cópulas	13
4.2. Simulación de productos	13
4.3. Proceso de agregación	13
4.4. Dimensiones del problema	13
4.5. Convergencia de la solución	13
5. Apéndices	15
5.1. Conceptos básicos de estadística	15
5.2. Cálculo de la raíz de una matriz	15
5.3. La variable aleatoria de Bernoulli	15

5.3.1.	Definición y propiedades	15
5.3.2.	Simulación	15
5.4.	La variable aleatoria normal	16
5.4.1.	Definición y propiedades	16
5.4.2.	Simulación	16

Capítulo 1

Introducción

Este documento contiene la descripción del método de valoración del riesgo de crédito implementado por el programa CreditCruncher. Para su lectura no se presuponen conocimientos avanzados de matemáticas o finanzas. En caso de encontrar un error, sugerir mejoras o no entender algún punto, no dude en ponerse en contacto con el equipo de desarrollo de CreditCruncher ¹ que tendrá en cuenta sus aportaciones para futuras versiones de este documento.

1.1. Acerca de CreditCruncher

CreditCruncher valora el riesgo de impago de una cartera de créditos usando la técnica de simulación Monte Carlo. Pretende ofrecer un método de valoración del riesgo de crédito totalmente documentado y soportado por una implementación libre y gratuita. Pertenecer a la familia de métodos tipo CreditMetrics². La valoración del riesgo de crédito no es un tema cerrado, muestra de ello es la multitud de métodos que existen para su valoración. Se recomienda la lectura del excelente artículo *Different strokes* [1] donde se exponen los principales modelos de valoración del riesgo de crédito y sus características.

1.2. Organización del contenido

Se ha organizado el contenido en tres secciones principales y un conjunto de anexos.

Formulación del problema. Contiene la descripción del problema que se pretende resolver y se introducen los elementos y propiedades considerados claves para la posterior resolución. La lectura de este apartado es necesaria para entender los elementos del fichero de entrada de datos del programa.

Resolución del problema. Se exponen los elementos usados para resolver el problema y se detalla la estructura del método de resolución. La lectura de este apartado es necesaria para la interpretación de los resultados proporcionados por el programa.

Implementación de la solución. Se explican los detalles de la implementación. La lectura de este apartado es necesaria para entender alguno de los apartados del fichero de entrada de datos del programa así como para la interpretación de los resultados proporcionados por este.

¹<http://sourceforge.net/ccruncher/>

²<http://www.riskmetrics.com/>

Anexos. Contienen elementos necesarios para la comprensión del contenido de las secciones principales, pero que su inclusión en estas oscurecería la explicación.

No se incluyen las demostraciones de los enunciados que puedan ser encontrados en los libros de matemáticas de grado medio o superior. Las referencias bibliográficas que se incluyen no son para hacer bonito, pueden ayudarle en la comprensión de lo expuesto en este documento.

Capítulo 2

Formulación del problema

Deseamos valorar las pérdidas que puede ocasionar una cartera de créditos considerando que la única fuente de pérdidas es el impago.

En este capítulo se introducen los elementos considerados claves para la definición del problema.

TODO: No se considera clave la obtención de las matrices de correlación y transición (véase bibliografía).

2.1. Cartera de créditos

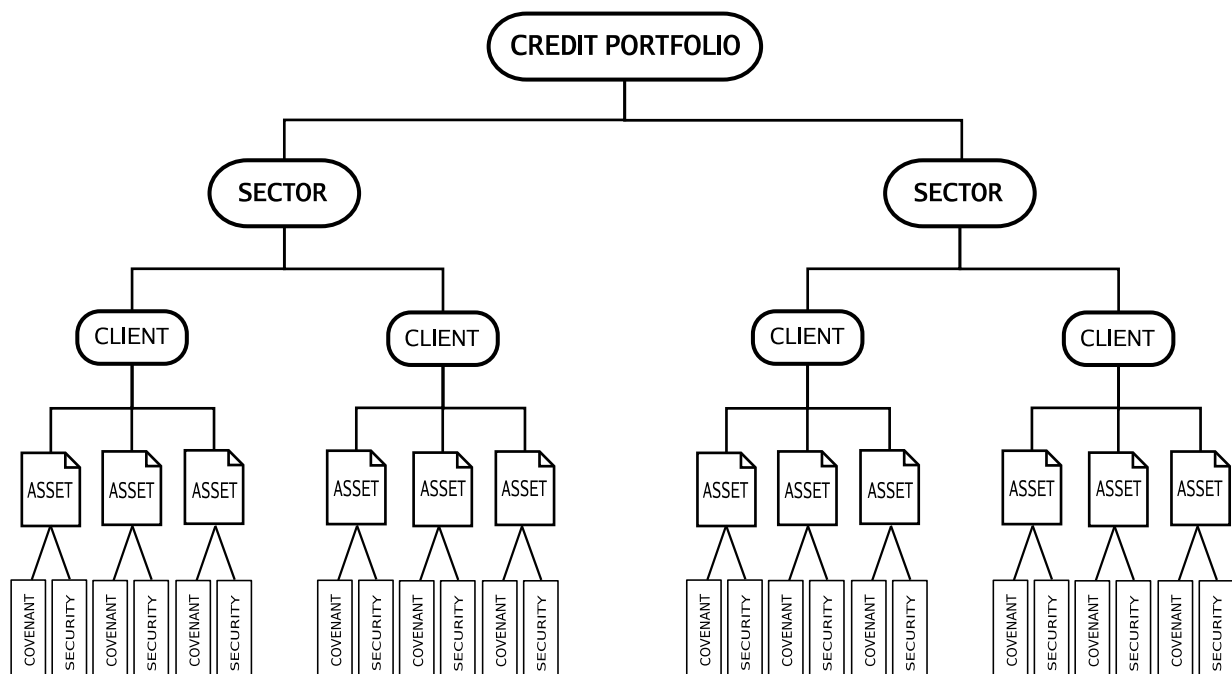


Figura 2.1: Estructura de la cartera de créditos

2.1.1. Ratings

2.1.2. Productos

2.1.3. Sectores

2.1.4. Exposición

2.1.5. Severidad

2.2. Value At Risk (VAR)

2.3. Matriz de transición

2.3.1. Definición.

La matriz de transición nos proporciona la probabilidad que un cliente con rating inicial r_i pase a tener, al cabo de un tiempo T , rating r_j . La denotamos de la forma siguiente:

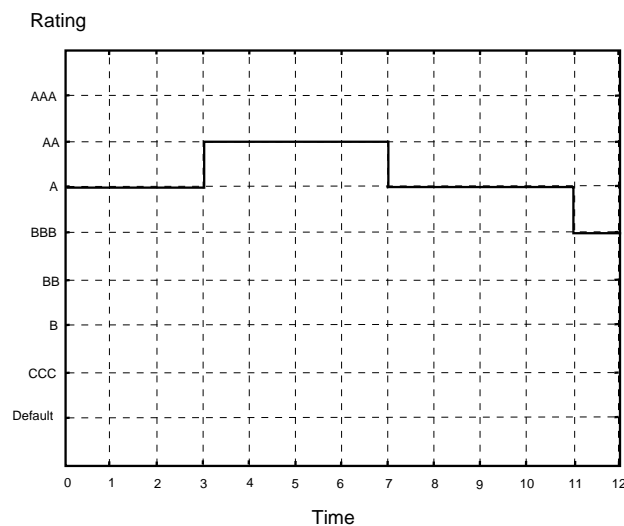


Figura 2.2: Evolución del rating a lo largo del tiempo

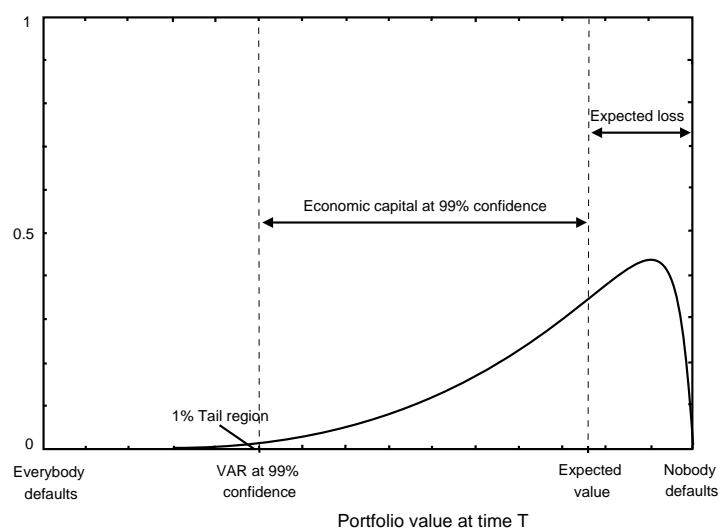


Figura 2.3: Distribución del valor de la cartera y cálculo del VAR

$$M_T = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

donde cada elemento de la matrix, $m_{i,j}$ corresponde a la probabilidad de que un cliente con rating r_i pase a tener, al cabo de T tiempo, rating r_j .

2.3.2. Ejemplo.

Matriz de transición anual ($T = 1$ año) extraída del documento *CreditMetrics. Technical Document*. Las probabilidades están expresadas en tanto por ciento.

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	90,81	8,33	0,68	0,06	0,12	0,00	0,00	0,00
AA	0,70	90,65	7,79	0,64	0,06	0,14	0,02	0,00
A	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06
BBB	0,02	0,33	5,95	86,93	5,30	1,17	0,12	0,18
BB	0,03	0,14	0,67	7,73	80,53	8,84	1,00	1,06
B	0,00	0,11	0,24	0,43	6,48	83,46	4,07	5,20
CCC	0,22	0,00	0,22	1,30	2,38	11,24	64,86	19,79
Default	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	100,00

en particular, la probabilidad que un cliente con rating *AA* pase a tener rating *B* al cabo de un año es del 0,14 %.

2.3.3. Propiedades

Propiedad 1. El valor de los elementos de la matriz de transición se encuentran entre 0 y 1 debido a que son probabilidades.

$$0 \leq m_{i,j} \leq 1 \quad \forall i, j$$

Propiedad 2. La suma de los elementos de cualquier fila de la matriz de transición suman 1. De esta forma se está imponiendo que el conjunto de ratings finales solo puede ser el de los ratings contemplados en la matriz.

$$\sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1 \quad \forall i$$

Propiedad 3. Los elementos de la fila correspondiente al rating *default*, son todos 0, excepto el elemento de la columna que corresponde al rating *default* que vale 1. Esta condición indica que cuando se llega al estado de fallido no es posible salir de este estado.

$$\begin{aligned} m_{default,j} &= 0 & \forall j \neq default \\ m_{default,default} &= 1 \end{aligned}$$

2.3.4. Cambio de periodo

Deseamos obtener la matriz de transición para periodos distintos (múltiplos o fraccionarios) del periodo proporcionado, T . Esto nos permitirá determinar la probabilidad que un cliente con rating inicial r_i tenga rating r_j al cabo de $x \cdot T$ tiempo.

Ejemplo. Calculemos la probabilidad de pasar de rating AA a rating B en un plazo de dos años disponiendo de la matriz de transición anual.

$$\begin{aligned}
 P(AA \rightarrow B; 2) = & P(AA \rightarrow AAA; 1) \cdot P(AAA \rightarrow B; 1) + \\
 & P(AA \rightarrow AA; 1) \cdot P(AA \rightarrow B; 1) + \\
 & P(AA \rightarrow A; 1) \cdot P(A \rightarrow B; 1) + \\
 & P(AA \rightarrow BBB; 1) \cdot P(BBB \rightarrow B; 1) + \\
 & P(AA \rightarrow BB; 1) \cdot P(BB \rightarrow B; 1) + \\
 & P(AA \rightarrow B; 1) \cdot P(B \rightarrow B; 1) + \\
 & P(AA \rightarrow CCC; 1) \cdot P(CCC \rightarrow B; 1) + \\
 & P(AA \rightarrow default; 1) \cdot P(default \rightarrow B; 1)
 \end{aligned}$$

Proposición Sean M_{T_1} y M_{T_2} las matrices de transición para los periodos T_1 y T_2 . Entonces, la matriz de transición para el periodo $T_1 + T_2$ es:

$$M_{T_1+T_2} = M_{T_1} \cdot M_{T_2}$$

Corolario Sean M_T la matriz de transición para el periodo T y $k \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$M_{k \cdot T} = M_T^k$$

$$M_{\frac{T}{k}} = \sqrt[k]{M_T}$$

2.3.5. Tasa de morosidad anticipada

2.4. Matriz de correlación sectorial

Capítulo 3

Resolución del problema

TODO: que es lo que esperamos: flexibilidad, resultados finos, paralelismo con la valoración del riesgo de mercado (pe. valoración de opciones)

3.1. Hipotesis

La única fuente de riesgo es el riesgo de impago. No se contemplan los riesgos de variación de tipos de interés, etc.

El tiempo está repartido uniformemente. blablabla.

Un fallido no se recupera. blablabla.

Las probabilidades de fallido no dependen del tiempo. blablabla.

El rating y la recuperación de un cliente no depende de otro cliente. blablabla.

3.2. Reparto del tiempo

3.3. El método de Monte Carlo

3.4. Copulas. Variables aleatorias correlacionadas

3.4.1. Errores comunes sobre la correlación

Definición. Una copula es la función de distribución de un vector aleatorio sobre \mathbb{R}^n donde las funciones de distribución marginales son $U[0, 1]$.

$$C(u_1, \dots, u_n) = P\{U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n\}$$

Proposición. C es una cópula $\iff C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ y cumple las siguientes propiedades:

- $C(x_1, \dots, x_n)$ es creciente en cada componente x_i
- $C(1, \dots, 1, x_i, 1, \dots, 1) = x_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \in [0, 1]$

- $\forall (a_1, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$ y $\forall (b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$ con $a_i \leq b_i$ se cumple:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C(x_{1i_1}, \dots, x_{ni_n}) \geq 0$$

siendo $x_{j1} = a_j$ y $x_{j2} = b_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$

Generación de cópulas normales o arquimedianas. Sea (Z_1, \dots, Z_n) un vector aleatorio con marginales $Z_i \sim N(0, 1)$ con

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

siendo $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ el coeficiente de correlación entre Z_i y Z_j .

Calculamos la raíz de Σ usando el algoritmo de Cholesky. De esta forma obtenemos la matriz triangular inferior

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

que cumple $B \cdot B' = \Sigma$

Generamos una simulación del vector aleatorio $Y = (Y_1, \dots, Y_n)'$ donde $Y_k \sim N(0, 1)$ son variables aleatorias independientes.

Calculamos $Z = B \cdot Y$. El vector aleatorio resultante, Z tiene marginales $Z_k \sim N(0, 1)$ y se encuentran correlacionadas según la matriz Σ .

Calculamos $X = (X_1, \dots, X_n)'$ de la forma:

$$x_i = \Phi^{-1}(y_i)$$

donde $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} dt$

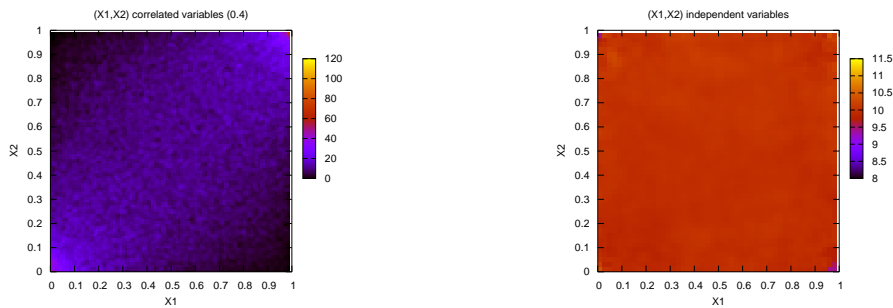


Figura 3.1: Bivariate distribution plot with correlation and independent

3.5. Algoritmo de resolución

Capítulo 4

Implementación de la solución

4.1. Generación de cópulas

TODO: descripción del proceso de generacion de copulas normales

4.2. Simulación de productos

TODO: listado de los productos soportados y descripción del proceso de simulación seguido.

4.3. Proceso de agregación

TODO: descripcion de los agregadores y metodo usado para evitar recalcu de los activos en cada simulacion + Agregación de productos

4.4. Dimensiones del problema

TODO: Estimaciones de uso de memoria, estimación del numero de operaciones, estimacion del tiempo de computo

4.5. Convergencia de la solución

TODO: Número de iteraciones necesarias, aceleración de la convergencia usando metodologa antitetic

Capítulo 5

Apéndices

5.1. Conceptos básicos de estadística

5.2. Cálculo de la raíz de una matriz

Definición. Diremos que 2 matrices A y B de orden n son semejantes si existe una matriz, P , de orden n con $\det(P) \neq 0$ tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Proposición. Si dos matrices A y B son semejantes ($B = P^{-1} \cdot A \cdot P$) entonces:

$$\det(A) = \det(B)$$

$$B^n = P^{-1} \cdot A^n \cdot P$$

Definición. Diremos que Una matriz A de orden n es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal D , o sea, $A = P^{-1} \cdot D \cdot P$ siendo $\det(D) \neq 0$.

Proposición. Para que una matriz A sea diagonalizable es necesario y suficiente que:

- Los valores propios de A sean todos reales
- Los n vectores propios de A sean independientes

Proposición. Si una matriz A es diagonalizable ($A = P^{-1} \cdot D \cdot P$) entonces:

- D es una matriz diagonal compuesta por los valores propios de la matriz A
- P es la matriz formada por los vectores propios de la matriz A

Resultado. Sea A la raíz n -ésima de una matriz diagonalizable B . Entonces:

$$A^n = B = P^{-1} \cdot D \cdot P \implies A = \sqrt[n]{B} = P^{-1} \cdot \sqrt[n]{D} \cdot P$$

5.3. La variable aleatoria de Bernoulli

5.3.1. Definición y propiedades

5.3.2. Simulación

TODO: ampliarla al caso x_1, \dots, x_n . simulacion usando uniforme $[0,1]$ + etc.

5.4. La variable aleatoria normal

5.4.1. Definición y propiedades

$$P(X \leq x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

5.4.2. Simulación

Para la generación de una realización, z , de una variable aleatoria normal $Z \sim N(\mu, \sigma)$ utilizamos el siguiente algoritmo:

$$z = \mu + \sigma \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln(u[0, 1])} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot u[0, 1])$$

donde $u[0, 1]$ son realizaciones de una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, 1]$.

Bibliografía

- [1] Ken Phelan and Colin Alexander. Different strokes. *Risk*, 1999.