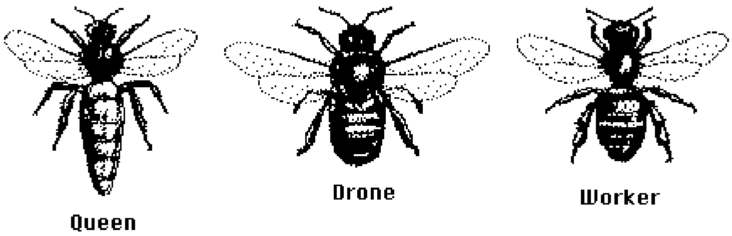
CreditCruncher - Technical Document
Version 0.6 [R262M]



Gerard Torrent Gironella

9 de septiembre de 2005

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Este documento contiene la descripción del método de valoración del riesgo de crédito implementado por el proyecto CreditCruncher. Para su lectura no se presuponen conocimientos avanzados de matemáticas o finanzas. En caso de encontrar un error, sugerir mejoras o no entender algún punto, no dude en ponerse en contacto con el equipo de desarrollo de CreditCruncher[1] que tendrá en cuenta sus aportaciones para futuras versiones de este documento.

1.1. Acerca de CreditCruncher

La valoración del riesgo de crédito no es un tema cerrado, muestra de ello es la multitud de métodos que existen para su valoración. Se recomienda la lectura del artículo *Different strokes* [9] donde se exponen los principales modelos de valoración del riesgo de crédito y sus características.

CreditCruncher valora el riesgo de impago de una cartera de créditos usando la técnica de simulación Monte Carlo. Pretende ofrecer un método de valoración del riesgo de crédito totalmente documentado y soportado por una implementación libre y gratuita. Pertenece a la família de métodos tipo CreditMetrics[2].

La mayoría de conceptos y explicaciones que pueden encontrarse en este documento han sido extraidas o inspiradas en el documento *CreditMetrics - Technical Document* [3]. Puede usarse el artículo *Probability models of credit risk* [2] como una introducción corta y clara.

[1]http://www.generacio.com/ccruncher/
[2]http://www.riskmetrics.com/

1.2. Organización del contenido

Se ha organizado el contenido en tres secciones principales y un conjunto de apéndices.

Formulación del problema. Contiene la descripción del problema que se pretende resolver y se introducen los elementos y propiedades considerados claves para la posterior resolución. La lectura de este apartado es necesaria para entender los elementos del fichero de entrada de datos del programa.

Resolución del problema. Se exponen los elementos usados para resolver el problema y se detalla la estructura del método de resolución. La lectura de este apartado es necesaria para la interpretación de los resultados proporcionados por el programa.

Implementación de la solución. Se explican los detalles de la implementación. La lectura de este apartado es necesaria para entender alguno de los apartados del fichero de entrada de datos del programa así como para la interpretación de los resultados proporcionados por este.

Apéndices. Contienen elementos necesarios para la comprensión del contenido de las secciones principales, pero que su inclusión en estas oscurecería la explicación.

1.3. Consideraciones

No se demuestran los enunciados que puedan ser encontrados en los libros de matemáticas de grado medio o superior.

Recomendamos la lectura de las referencias bibliográficas que se incluien, pueden ayudarle en la comprensión de lo expuesto en este documento.

Los textos contenidos en los gráficos están en inglés debido a que son compartidos por todas las posibles traducciones de este documento.

Para obtener una presentación óptima de este documento, imprímalo. Si utiliza un visualizador tipo *Adobe* o *gsview* puede que algunos gráficos se muestren en un trazo inadecuado.

Capítulo 2

Formulación del problema

Dada una cartera de créditos a empresas de tamaño mediano, deseamos valorar las posibles pérdidas debido a los impagos al cabo de un tiempo T.

A continuación se introduce los elementos y propiedades básicas que constituyen el marco de trabajo.

2.1. Cartera de créditos

La estructura de la cartera de créditos consiste en un conjunto de clientes agrupados por sectores de actividad. Cada cliente tiene contratado un conjunto de productos de crédito. Cada contrato puede estar cubierto por un número variable de garantías o acuerdos. Puede verse un esquema de la estructura en la figura 2.1.

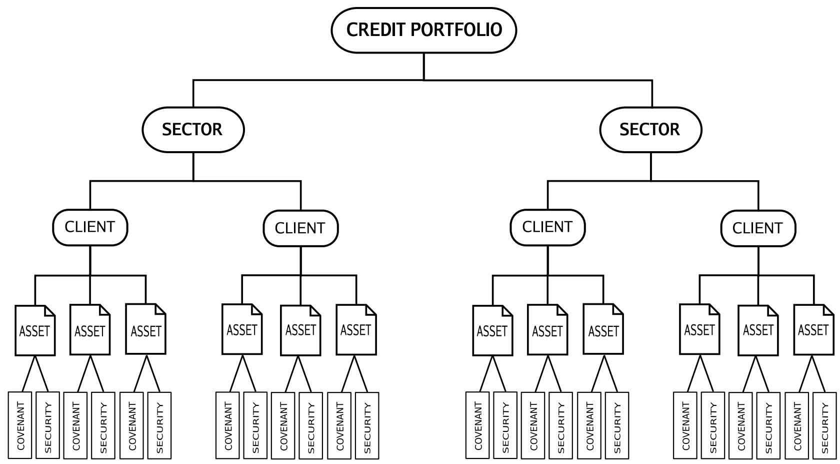


Figura 2.1: Estructura de la cartera de créditos

2.1.1. Ratings

Un *sistema de ratings* es una medida de calidad crediticia usada para valorar creditores. A cada creditor se le asigna una nota discreta (pe. AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, Default) en función de su calidad crediticia. Los únicos ratings contemplados en este documento son los que tienen una relación estadística directa y cuantificable con la probabilidad de impago del creditor. Ejemplos de este tipo de ratings son los publicados por Moody's Investor Service[1] o Standard & Poors[2].

La metodología para la generación de un sistema de ratings queda fuera del ámbito de este documento. CreditCruncher presupone que cada empresa de la cartera tiene un rating inicial asignado.

El rating de cada empresa puede variar a lo largo del tiempo (véase figura 2.2). La evolución temporal del rating de una empresa se contempla a través de la matriz de transición o la función de supervivencia (véase la sección 2.3).

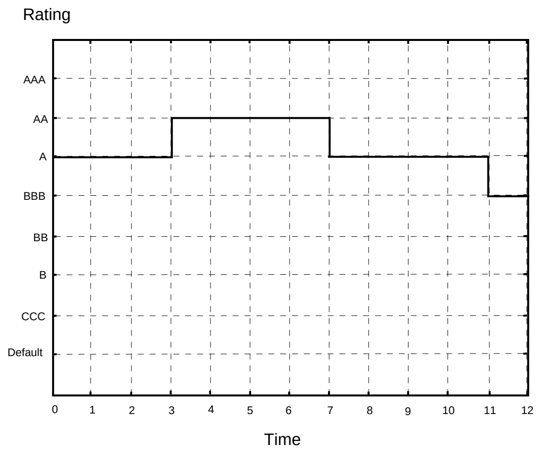


Figura 2.2: Evolución del rating a lo largo del tiempo

Notación. $P(r_i \rightarrow r_j; t_0; t_1)$ = probabilidad de pasar de un rating inicial r_i en tiempo t_0 a un rating r_j en tiempo t_1.

[1] http://www.moodys.com
[2] http://www.standardandpoors.com

2.1.2. Sectores

La correlación de fallidos entre clientes es uno de los conceptos que añaden complejidad de la valoración del riesgo de crédito. No es lo mismo tener una cartera de créditos donde los clientes hacen fallido de forma independiente que una cartera donde los fallidos se encuentran correlacionados. En el primer caso, al cabo de un año tendremos un conjunto limitado de fallidos. En el segundo caso, al cabo de un año la mayoria de clientes habrán hecho fallido o casi ningún cliente habrá hecho fallido.

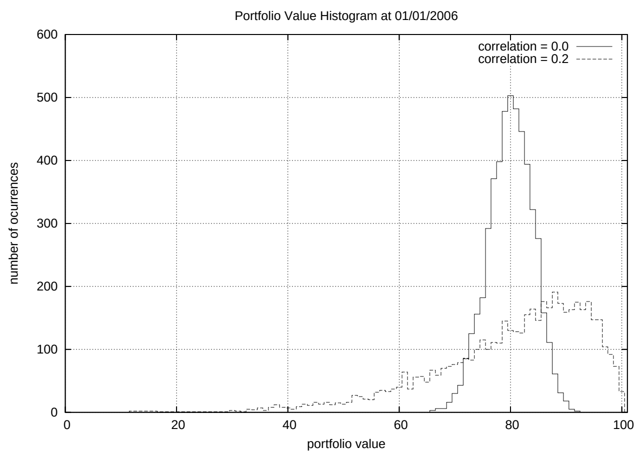


Figura 2.3: Impacto de la correlación intrasectorial

Al no poder asignar una correlación de fallido cliente a cliente, se recurre a la agrupación de estos en *sectores*. Se considera que la cartera de créditos dispone de un conjunto de sectores donde los componentes de cada sector muestran una evolución crediticia similar. O sea, que la mejora o empeoramiento de la calidad crediticia (rating) afecta de forma común a los componentes del sector. En general se identifican estos sectores con los sectores industriales.

Se considera que cada cliente pertenece a un único sector y permanece en el a lo largo del tiempo. La relación entre sectores se contempla a través de la matriz de correlación sectorial (véase la sección 2.4).

2.1.3. Activos

Cada cliente tiene contratado un conjunto de activos con riesgo de crédito. Caracterizamos un activos por los siguientes elementos (importes positivos significan que el cliente paga, importes negativos significan que el cliente cobra):

Cashflow. Entregas y devoluciones de dinero a lo largo del tiempo. Incluye las posibles amortizaciones, primas, cupones, comisiones, costes, etc. Usaremos el cashflow para calcular el valor, o precio, de un activo en el instante t.

Netting. Importe correpondiente a la liquidación de deudas mutuas en caso de fallido. Incluye la posible recuperación, pago de obligaciones contraidas (pe. en el caso de avales), etc.

Ejemplo. Caracterizamos un bono (bond) de 100 €de valor nominal, con fecha emisión 31/12/2006, tipo de interés anual del 4 %, pago anual de cupones y amortización al cabo de 5 años. En caso de fallido se estima que se recupera un 80 % del importe pendiente de abonar.

Date	**Cashflow**	**Netting**
31/12/2006	-100.00	0.00
31/12/2007	4.00	96.00
31/12/2008	4.00	92.00
31/12/2009	4.00	89.60
31/12/2010	4.00	86.40
31/12/2011	104.00	83.20

Ejemplo. Caracterizamos un préstamo hipotecario (mortgage) de 100 €, con fecha de contratación 15/01/2006, tipo de interés anual del 6,5 % y cuota (instalment) mensual y un plazo de 25 años. La vivienda hipotecada está valorada en 80 €. Determinamos la cuota mensual usando la siguiente fórmula (canon vencido o método francés):

$$I = \frac{A \cdot r \cdot (1+r)^t}{(1+r)^t - 1} = \frac{100 \cdot (6{,}5\,\%/12) \cdot (1 + 6{,}5\,\%/12)^{25 \cdot 12}}{(1 + 6{,}5\,\%/12)^{25 \cdot 12} - 1} = 0{,}67521$$

Date	**Cashflow**	**Netting**
15/01/2006	-100.00	0.00
15/02/2006	0.68	80.00
15/03/2006	0.68	80.00
15/04/2006	0.68	80.00
...	...	...
15/11/2030	0.68	80.00
15/12/2030	0.68	80.00
15/01/2031	0.68	80.00

Ejemplo. Caracterizamos un aval (endorsement) por un importe avalado de 100 €con fecha de contratación 15/01/2006, durante un periodo de 2 años y una cuota semestral anticipada de 4,5 €.

Date	Cashflow	Netting
15/01/2006	4.50	0.00
15/07/2006	4.50	-100.00
15/01/2007	4.50	-100.00
15/07/2007	4.50	-100.00
15/01/2008	0.00	-100.00

2.2. Tipos de interés

Definición. Sea C_{t_0} el importe inicial de una operación y C_{t_1} el importe final. Definimos el *tipo de interés efectivo*,r, como:

$$C_{t_1} = C_{t_0} \cdot (1 + r) \tag{2.1}$$

$$r = \frac{C_{t_1} - C_{t_0}}{C_{t_0}} \tag{2.2}$$

Definición. El *tipo de interés simple*, r_s, es un tipo de interés donde para cada periodo de tiempo se incrementa el importe inicial, C_{t_0} por un factor de r_s.

$$C_{t_1} = C_{t_0} \cdot (1 + r_s \cdot (t_1 - t_0)) \tag{2.3}$$

$$r_s = \frac{r}{t_1 - t_0} \tag{2.4}$$

Defición. El *tipo de interés compuesto*, r_c, es un tipo de interés donde en cada periodo de tiempo se incrementa por un factor de r_c el importe acumulado del periodo anterior.

$$C_{t_1} = C_{t_0} \cdot (1 + r_c)^{(t_1 - t_0)} \tag{2.5}$$

$$r_c = (1 + r)^{\frac{1}{t_1 - t_0}} - 1 \tag{2.6}$$

Defición. El *tipo de interés continuo*, r_e, es el caso límite del interés compuesto.

$$C_{t_1} = C_{t_0} \cdot e^{r_e \cdot (t_1 - t_0)} \tag{2.7}$$

$$r_e = \ln(1 + r_c) \tag{2.8}$$

La fórmula exponencial, no el coeficiente, se obteniene considerando el límite del tipo de interés compuesto.

$$\begin{gathered}\text{lím}_{t_1\to t_0} 1 + r_c = \text{lím}_{t_1\to t_0}(1+r)^{\frac{1}{t_1-t_0}} = \\ \text{lím}_{t_1\to t_0}(1 + r_s \cdot (t_1 - t_0))^{\frac{1}{t_1-t_0}} = \text{lím}_{n\to\infty}(1+\frac{r_s}{n})^n = e^{r_s}\end{gathered} \tag{2.9}$$

Ejemplo. Consideremos una operación que supone una inversión inicial de 100 MM. y que al cabo de 5 años proporciona unos ingresos de 120 MM.

Calculemos los diferentes tipos de interés:

$$\begin{aligned}&r = \tfrac{120-100}{100} = 20\,\%\\ &r_s = \tfrac{r}{5} = \tfrac{20\,\%}{5} = 4\,\%\\ &r_c = (1+r)^{1/5} - 1 = 1{,}2^{0{,}2} - 1 = 1{,}0371 - 1 = 3{,}71\,\%\\ &r_e = \ln(1+r_c) = \ln(1{,}0371) = 3{,}65\,\%\end{aligned}$$

Recuperemos el importe final de la operación a partir del importe inicial, el intervalo de tiempo y el tipo de interés:

$$\begin{array}{lll}\text{tipo efectivo} & \to & C_{t_1} = 100 \cdot (1 + 20\,\%) = 120\\ \text{interés simple} & \to & C_{t_1} = 100 \cdot (1 + 4\,\% \cdot 5) = 120\\ \text{interés compuesto} & \to & C_{t_1} = 100 \cdot (1 + 3{,}71\,\%)^5 = 120\\ \text{interés continuo} & \to & C_{t_1} = 100 \cdot e^{3{,}65\,\%\cdot 5} = 120\end{array}$$

2.2.1. Función de transporte

Definición. Fijado un tipo de interés, r, y un intervalo de tiempo, $\Delta t = t_k - t_0$, *la función de transporte*, Υ, proporciona el factor que debe aplicarse a un importe en t_0 para obtener el importe equivalente en t_k.

Caso $C_0 \longrightarrow C_k \quad t_0 < t_k$:

$$\begin{array}{lll}\text{interés simple} & \to & C_0 \cdot \Upsilon(t_0, t_k, r) = C_0 \cdot (1 + r \cdot (t_k - t_0)) = C_k\\ \text{interés compuesto} & \to & C_0 \cdot \Upsilon(t_0, t_k, r) = C_0 \cdot (1 + r)^{(t_k - t_0)} = C_k\\ \text{interés continuo} & \to & C_0 \cdot \Upsilon(t_0, t_k, r) = C_0 \cdot e^{r\cdot(t_k - t_0)} = C_k\end{array}$$

Caso $C_k \longleftarrow C_0 \quad t_k < t_0$:

$$\begin{array}{lll}\text{interés simple} & \to & C_0 \cdot \Upsilon(t_0, t_k, r) = C_0 \cdot (1 + r \cdot (t_0 - t_k))^{-1} = C_k\\ \text{interés compuesto} & \to & C_0 \cdot \Upsilon(t_0, t_k, r) = C_0 \cdot (1 + r)^{-(t_0 - t_k)} = C_k\\ \text{interés continuo} & \to & C_0 \cdot \Upsilon(t_0, t_k, r) = C_0 \cdot e^{-r\cdot(t_0 - t_k)} = C_k\end{array}$$

Notación. En este documento se considera que el tipo de interés aplicado es el tipo de interés compuesto. En este caso, la función de transporte tiene una expresión única, sea cual sea el sentido en el que se aplica:

$$\Upsilon(t_0, t_k, r) = (1 + r)^{(t_k - t_0)} \tag{2.10}$$

2.2.2. Curva spot o cupón cero

Definición. La *curva spot* o *curva cupón cero* es la función S que indica el tipo de interés a aplicar en la función de transporte desde el tiempo t_0. En el mercado existen productos simples a distintos plazos para los cuales se puede calcular el tipo de interés que proporcionan. Estos tipos de interés solamente se pueden usar en la función de transporte cuando uno de los tiempos sea t_0 y el otro sea superior a t_0.

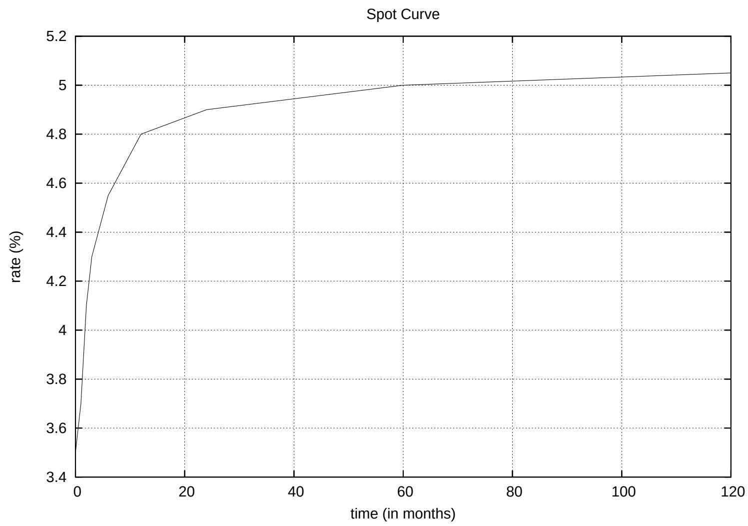


Figura 2.4: Curva Spot

Proposición. Dada una curva spot S_{t_0} en t_0, podemos calcular el coeficiente de transporte para todo $t_i, t_j \geq t_0$:

$$\Upsilon(t_i, t_j, r) = \Upsilon(t_i, t_0, S_{t_o}(t_i)) \cdot \Upsilon(t_0, t_j, S_{t_0}(t_j)) \qquad (2.11)$$

2.3. Matriz de transición

Definición. La *matriz de transición* en el periodo T es una matriz cuadrada que proporciona la probabilidad que un cliente con rating inicial r_i pase a tener, al cabo de un tiempo T, rating r_j. La denotamos de la forma siguiente:

$$M_T = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix} \qquad m_{i,j} = P(r_i \to r_j; 0; T)$$

donde n es el número de ratings y $m_{i,j}$ corresponde a la probabilidad de que un cliente con rating r_i pase a tener, al cabo de T tiempo, rating r_j.

Ejemplo. Matriz de transición anual ($T = 1$ año). Las probabilidades están expresadas en tanto por ciento.

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	90,81	8,33	0,68	0,06	0,12	0,00	0,00	0,00
AA	0,70	90,65	7,79	0,64	0,06	0,14	0,02	0,00
A	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06
BBB	0,02	0,33	5,95	86,93	5,30	1,17	0,12	0,18
BB	0,03	0,14	0,67	7,73	80,53	8,84	1,00	1,06
B	0,00	0,11	0,24	0,43	6,48	83,46	4,07	5,21
CCC	0,22	0,00	0,22	1,30	2,38	11,24	64,86	19,78
Default	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	100,00

En particular, la probabilidad que un cliente con rating AA pase a tener rating B al cabo de 1 año es del 0,14 %.

2.3.1. Propiedades

Propiedad 1. El valor de los elementos de la matriz de transición se encuentran entre 0 y 1 debido a que los elementos de la matriz son probabilidades.

$$0 \leq m_{i,j} \leq 1 \quad \forall i, j \tag{2.12}$$

Propiedad 2. La suma de los elementos de cualquier fila de la matriz de transición suman 1. De esta forma se está imponiendo que el conjunto de ratings finales solo puede ser el de los ratings contemplados en la matriz.

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1 \quad \forall i \tag{2.13}$$

Propiedad 3. Los elementos de la fila correspondiente al rating $Default$ (r_n), son todos 0, excepto el elemento de la columna que corresponde al rating $Default$, $m_{n,n}$, que vale 1. Esta condición indica que cuando se llega al estado de fallido no es posible salir de este estado.

$$\begin{aligned} m_{n,j} &= 0 \qquad \forall j \neq n \\ m_{n,n} &= 1 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Propiedad 4. Sea cual sea el rating inicial, existe la posibilidad que realize fallido.

$$\forall i \quad \exists j \quad \text{tq.} \quad m_{i,j} > 0 \quad \text{and} \quad m_{j,n} > 0 \tag{2.15}$$

2.3.2. Cambio de periodo

Deseamos obtener la matriz de transición para periodos distintos (múltiplos o fraccionarios) del periodo proporcionado, T. Esto nos permitirá determinar la probabilidad que un cliente con rating inicial r_i tenga rating r_j al cabo de $k \cdot T$ tiempo o al cabo de T/k tiempo.

Ejemplo. Calculemos la probabilidad de pasar de rating AA a rating B en un plazo de dos años disponiendo de la matriz de transición anual.

$$\begin{array}{llll}
P(AA \to B;0;2) = & P(AA \to AAA;0;1) & \cdot P(AAA \to B;1;2) & + \\
& P(AA \to AA;0;1) & \cdot P(AA \to B;1;2) & + \\
& P(AA \to A;0;1) & \cdot P(A \to B;1;2) & + \\
& P(AA \to BBB;0;1) & \cdot P(BBB \to B;1;2) & + \\
& P(AA \to BB;0;1) & \cdot P(BB \to B;1;2) & + \\
& P(AA \to B;0;1) & \cdot P(B \to B;1;2) & + \\
& P(AA \to CCC;0;1) & \cdot P(CCC \to B;1;2) & + \\
& P(AA \to Default;0;1) & \cdot P(Default \to B;1;2) &
\end{array}$$

Notamos que se trata del producto de la fila correspondiente al rating AA (rating de salida) por la columna correspondiente al rating B (rating de llegada).

Proposición. Sean M_{T_1} y M_{T_2} las matrices de transición para los periodos T_1 y T_2. Entonces, la matriz de transición para el periodo $T_1 + T_2$ es:

$$M_{T_1+T_2} = M_{T_1} \cdot M_{T_2} \tag{2.16}$$

Corolario. Sean M_T la matriz de transición para el periodo T y $k \in \mathrm{N}$. Entonces[3]:

$$M_{k \cdot T} = M_T^k \tag{2.17}$$

$$M_{\frac{T}{k}} = \sqrt[k]{M_T} \tag{2.18}$$

2.3.3. Función de supervivencia

Definición. La *Tasa de Morosidad Anticipada* (TMA) del rating r_i en el año k es la probabilidad que una empresa con rating inicial r_i haga fallido a lo largo del año k.

Definición. La *Tasa de Morosidad Anticipada Acumulada* (TMAA) del rating r_i en el tiempo t es la probabilidad que una empresa con rating inicial r_i haga fallido en el intervalo de tiempo $(0, t)$.

$$TMAA(r_i, t) = P(r_i \to Default; 0; t) \tag{2.19}$$

[3] véase el apéndice A.8 para ver como se calcula la raíz de una matriz

Definición. La *Supervivencia* en el tiempo t del rating r_i es la probabilidad que una empresa con rating inicial r_i no haya hecho fallido en el intervalo de tiempo $(0, t)$.

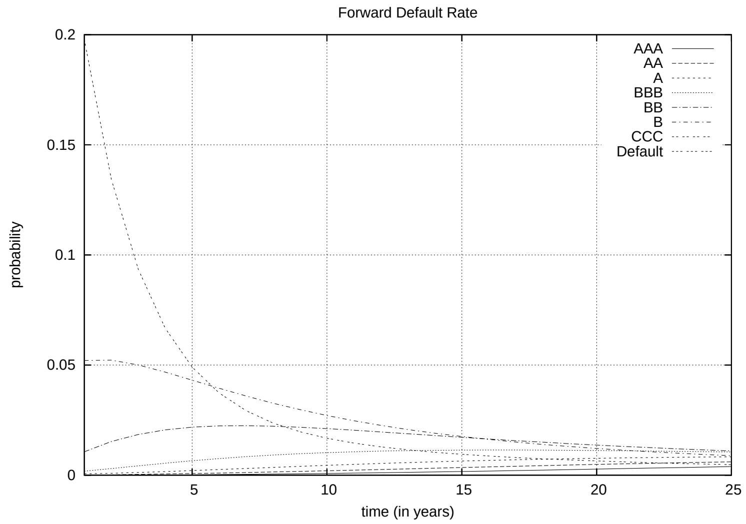


Figura 2.5: Tasa de Morosidad Anticipada

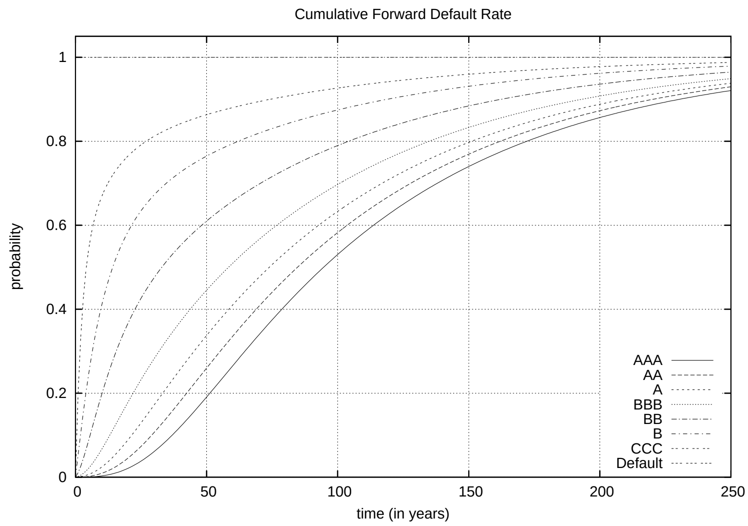


Figura 2.6: Tasa de Morosidad Anticipada Acumulada

Proposición. La Tasa de Morosidad Anticipada Acumulada se puede expresar en función de la matriz de transición a través de la relación siguiente:

$$TMAA(r_i, k \cdot T) = (M_{k \cdot T})_{i,n} = (M_T^k)_{i,n} \tag{2.20}$$

donde n es el índice del rating Default y T es el periodo de la matriz de transición.

Proposición. La Tasa de Morosidad Anticipada se puede expresar en función de la Tasa de Morosidad Anticipada Acumulada a través de la relación siguiente:

$$TMA(r_i, t) = TMAA(r_i, t) - TMAA(r_i, t - T) \tag{2.21}$$

Proposición. La Supervivencia puede expresarse en función de la Tasa de Morosidad Anticipada Acumulada a través de la relación siguiente:

$$Survival(r_i, t) = 1 - TMAA(r_i, t) \tag{2.22}$$

Proposición. Si la matriz de transición es válida, cualquier rating inicial acaba haciendo fallido casi seguramente.

$$lim_{t \to \infty} TMAA(r_i, t) = 1 \quad \forall i \tag{2.23}$$

Proposición. Fijado un rating, r_i, la función de supervivencia es monótona decreciente.

$$Survival(r_i, t_i) \geq Survival(r_i, t_j) \quad \forall t_i < t_j \tag{2.24}$$

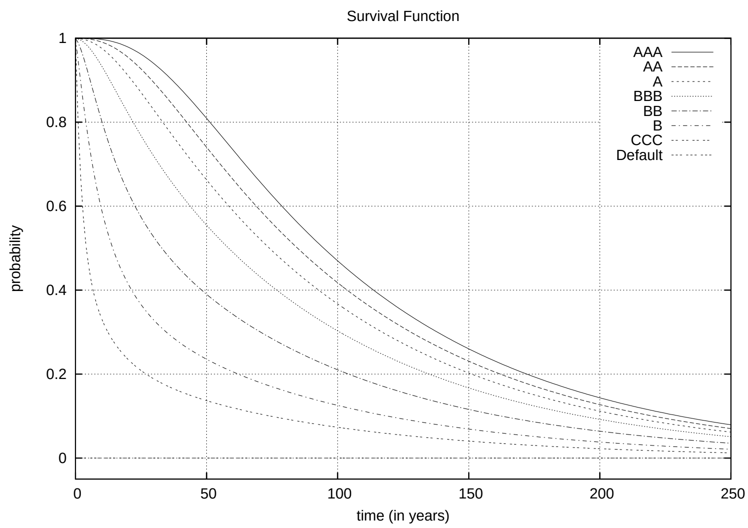


Figura 2.7: Función de Supervivencia

Ejemplo. En las figuras 2.6, 2.5 y 2.7 se puede observar la Tasa de Morosidad anticipada, Tasa de Morosidad Anticipada Acumulada y la Función de Supervivencia de la matriz de transición usada en este documento.

2.4. Matriz de correlación

Definición. La *matriz de correlación sectorial* proporciona la correlación de los fallidos entre los sectores. La denotamos de la forma siguiente:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \cdots & \gamma_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{1,m} & \cdots & \gamma_{m,m} \end{pmatrix}$$

donde m es el número de sectores, $\gamma_{i,j}$ es la correlación entre los fallidos de los sectores s_i y s_j y $\gamma_{i,i}$ es la correlación del fallido entre las empresas del sector s_i. Por construcción, la matriz de correlación sectorial es simétrica debido a que la correlación entre s_i y s_j es la misma que entre s_j y s_i.

Definición. La *matriz de correlación entre clientes* proporciona la correlación de los fallidos entre clientes. La construimos a partir de la matriz de correlación sectorial de la forma siguiente:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & \theta_{1,2} & \dots & \theta_{1,p-1} & \theta_{1,p} \\ \theta_{1,2} & 1 & \dots & \theta_{2,p-1} & \theta_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_{1,p-1} & \theta_{2,p-1} & \dots & 1 & \theta_{p-1,p} \\ \theta_{1,p} & \theta_{2,p} & \dots & \theta_{p-1,p} & 1 \end{pmatrix}$$

donde p es el número de clientes y $\theta_{i,j}$ es la correlación sectorial entre el sector del cliente i y el sector del cliente j.

Observación. Los clientes se acostumbran a ordenar por sectores. En este caso la matriz de correlación entre clientes queda de la forma siguiente:

$$\Theta =$$

$$\begin{pmatrix}
1 & \cdots & \gamma_{p_1,p_1} & \gamma_{1,p_i} & \cdots & \gamma_{1,p_i} & \gamma_{1,p_m} & \cdots & \gamma_{1,p_m} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\gamma_{p_1,p_1} & \cdots & 1 & \gamma_{1,p_i} & \cdots & \gamma_{1,p_i} & \gamma_{1,p_m} & \cdots & \gamma_{1,p_m} \\
 & & & \ddots & & & & & \\
\gamma_{1,p_i} & \cdots & \gamma_{1,p_i} & 1 & \cdots & \gamma_{p_i,p_i} & \gamma_{p_i,p_m} & \cdots & \gamma_{p_i,p_m} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\gamma_{1,p_i} & \cdots & \gamma_{1,p_i} & \gamma_{p_i,p_i} & \cdots & 1 & \gamma_{p_i,p_m} & \cdots & \gamma_{p_i,p_m} \\
 & & & & & & \ddots & & \\
\gamma_{1,p_m} & \cdots & \gamma_{1,p_m} & \gamma_{p_i,p_m} & \cdots & \gamma_{p_i,p_m} & 1 & \cdots & \gamma_{p_m,p_m} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\gamma_{1,p_m} & \cdots & \gamma_{1,p_m} & \gamma_{p_i,p_m} & \cdots & \gamma_{p_i,p_m} & \gamma_{p_m,p_m} & \cdots & 1
\end{pmatrix}$$

donde $p_1, \ldots, p_m$ corresponde al número de clientes que pertenecen a los sectores $s_1, \ldots, s_m$. Con esta ordenación de los clientes la matriz de correlación entre clientes es una matriz con bloques con 1's en la diagonal.

Ejemplo. Supongamos que tenemos dos sectores, siendo Γ la matriz sectorial:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & -0{,}2 \end{pmatrix}$$

Supongamos que el sector A tiene 3 clientes y el sector B tiene 2 clientes. Entonces, la matriz de correlación entre clientes es:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$$

Observación. En general se impone que la matriz de correlación entre clientes sea definida positiva debido a que es una propiedad necesaria para la generación de cópulas gaussianas. El hecho que la matriz de correlación entre clientes deba ser definida positiva no significa que la matriz de correlación sectorial deba ser definida positiva.

2.5. Valoración del riesgo

Llamamos Z a la variable aleatoria que modela las pérdidas de la cartera (portfolio loss) en el tiempo T. Sea F_Z la correspondiente función de distribución (cdf).

Definición. La *Pérdida Esperada* de la cartera en tiempo T es:

$$\text{Expected Loss} = E(Z) \tag{2.25}$$

Definición. El *Valor en Riesgo* o *VAR* en tiempo T es la pérdida máxima esperada dentro de un intervalo de confianza dado. Responde a la pregunta *Cual es la pérdida mínima incurrida en el α % de los peores casos?*. Se recomienda la lectura del libro *Value at Risk* [6].

$$VAR_\alpha(Z) = \inf\{z|F_Z(z) \geq \alpha\} \tag{2.26}$$

Definición. El *Tail Conditional Expectation* o *TCE* o *Expected Shortfall* es la pérdida esperada en el caso en que la pérdida sea inferior a un quantil fijado. Responde a la pregunta *Cual es la pérdida media incurrida en el α % de los peores casos?*. Se recomienda la lectura de los artículos [5] y [1].

$$TCE_\alpha(Z) = E(Z|Z > VAR_\alpha(Z)) \tag{2.27}$$

donde la notación $E(Z|q)$ debe interpretarse como la esperanza de la variable aleatoria Z condicionada a q.

Definición. Definimos el *Capital Económico* al nivel de confianza α en tiempo T como:

$$\text{Economic Capital} = VAR_\alpha(Z) - E(Z) \tag{2.28}$$

Ejemplo. Calculemos el VAR de una cartera de créditos sencilla, de la que se puede obtener la distribución de las pérdidas de forma explícita. Sea una cartera de 1 solo sector con 100 clientes sin correlación alguna entre ellos. Cada cliente tiene un activo que consiste en devolver 1 €al cabo de T tiempo. Supongamos que el sistema de ratings solamente contempla 2 categorías crediticias, no-Default y Default. La probabilidad de hacer fallido al cabo de 1 año es 0,1.

En este caso, se puede modelar la pérdida provocada por el impago del cliente i al cabo de 1 año como una variable aleatoria Bernouilli, $X_i \sim Ber(0{,}1)$. La pérdida de la cartera al cabo de 1 año es la suma de las pérdidas de cada cliente, $Z = \sum_{i=1}^{100} X_i$, que por definición es una variable aleatoria Binomial, $Z \sim B(100, 0{,}1)$.

La Pérdida Esperada al cabo de 1 año es

$$\text{Expected Loss} = E(Z) = 10$$

El VAR al nivel de confianza 99 % al cabo de 1 año es:

$$VAR_{99\,\%} = \inf\{z|F_Z(z) \geq 99\,\%\}$$

Expresado en términos de la función de densidad

$$P(Z \leq VAR_{99\,\%}) = 99\,\%$$

Consultamos las tablas cdf de la Binomial(100,0.1)

$$P(Z \leq 17) = 98{,}99927\,\%$$

Por tanto, podemos considerar que $VAR_{99\,\%}$ es

$$\mathrm{VAR}_{99\,\%} = 17$$

El TCE al nivel de confianza 99 % al cabo de 1 año es:

$$TCE_{99\,\%} = E(Z|Z > VAR_{99\,\%}(Z))$$

Equivalentemente

$$TCE_{99\,\%} = \frac{\sum_{i=18}^{100} i \cdot P(Z = i)}{\sum_{i=18}^{100} P(Z = i)} = 18{,}78458$$

El Capital Económico al nivel de confianza 99 % al cabo de 1 año es:

$$\text{Economic Capital}_{99\,\%}(Z) = \mathrm{VAR}_{99\,\%}(Z) - E(Z) = 17 - 10 = 7$$

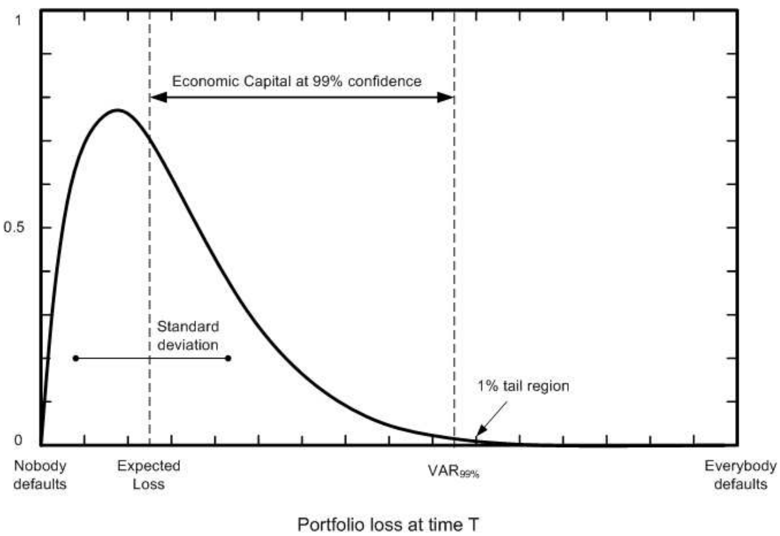


Figura 2.8: Portfolio value at time T

Este ejemplo no es significativo debido a que se han realizado dos supuestos que en el mundo real no se cumplen: todos los creditores se modelan de la misma forma y los fallidos son independientes. Se obtiene que la distribución de las pérdidas de la cartera al cabo de 1 año es una variable aleatoria Binomial(100,0.1), que puede ser aproximada de forma precisa por una Normal(10,9). Esto no concuerda con las observaciones reales, que muestran que la distribución de las pérdidas es fuertemente asimétrica respecto a la pérdida esperada.

Capítulo 3

Resolución del problema

En este capítulo se introducen los elementos usados para la resolución y se describen dos métodos de resolución basados en simulación: Time-To-Default y Rating-Path.

3.1. Notación

Concepto	Descripción
x_i	Componente i-esimo de x
x^i	Realización i-esima de la variable aleatoria X
ns	Número de sectores de la cartera
nr	Número de ratings del sistema de calificación
nc	Número de clientes de la cartera
na_i	Número de activos del cliente i. $i \in \{1, \cdots, nc\}$
s_i	Sector i-esimo. $i \in \{1, \cdots, ns\}$
r_i	Rating i-esimo. $i \in \{1, \cdots, nr\}$. $r_{nr} = Default$.
c_i	Cliente i-esimo. $i \in \{1, \cdots, nc\}$
S_{t_0}	Curva spot de tipos de interés en t_0. $S_{t_0}(t_k)$ es el tipo de interés de la curva en tiempo t_k siendo $t_0 \leq t_k$
$\Upsilon(t_0, t_k, S_{t_0})$	Función de transporte de t_0 a t_k usando la curva spot S_{t_0}
$Survival(r_i, t)$	Función de supervivencia. Probabilidad que un cliente con rating inicial r_i no haya hecho fallido en tiempo t
M_T	Matriz de transición a T tiempo. Tiene dimensión $nr \times nr$
Γ	Matriz de correlación entre sectores. Dimensión $ns \times ns$
Θ	Matriz de correlación entre clientes. Dimensión $nc \times nc$
$X_{i,j}$	Valor del j-esimo activo del cliente i. $i \in \{1, \cdots, nc\}$, $j \in \{0, \cdots, na_i\}$
X_i	Valor de los activos del cliente i. $i \in \{1, \cdots, nc\}$
X	Valor de la cartera
Z	Pérdidas de la cartera

3.2. Variables aleatorias correlacionadas. Cópulas.

Se recomienda la lectura de las referencias [12] y [8]. Se trata de artículos donde se explica que es una cópula, sus propiedades, como simularlas, creencias erroneas, etc.

Definición. Llamamos *cópula* a la función de distribución de una variable aleatoria n-dimensional tal que sus distribuciones marginales son variables aleatorias $U[0,1]$.

$$C(u_1, \cdots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, \cdots, U_n \leq u_n) \qquad U_k \sim U[0,1]$$

Teorema. Toda variable aleatoria n-dimensional puede separarse en las distribuciones seguidas por sus componentes (las distribuciones marginales) y una cópula. Sea F una función de distribución n-dimensional y $f_1, \cdots, f_n$ sus marginales. El teorema de Sklar asegura que existe una cópula C tq.

$$F(x_1, \cdots, x_n) = C(f_1(x_1), \cdots, f_n(x_n))$$

Observación. Una variable aleatoria n-dimensional no está determinada por sus marginales y correlaciones entre estas. Dicho de otra forma, existen infinitas formas de combinar las distribuciones marginales a través de cópulas de forma que cumplan las correlaciones. Las distribuciones elípticas (que incluyen la distribución multinomial) son una excepción.

3.3. El método de Monte Carlo

Se recomienda la lectura de la referencia [7]. Se trata de los apuntes para una clase del profesor Mervyn Marasinghe. Se expone el método de Monte Carlo y las técnicas de reducción de la varianza.

Definición. Dado un conjunto de observaciones, $x^1, \cdots, x^n$, de la variable aleatoria X, definimos la *función de distribución empírica* como:

$$\widetilde{F_X(k)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,k]}(x^i) \qquad I_{[-\infty,k]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in (-\infty, k] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Proposición. La función de distribución empírica tiende a la función de distribución al incrementar el número de observaciones.

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{F_X} = F_X$$

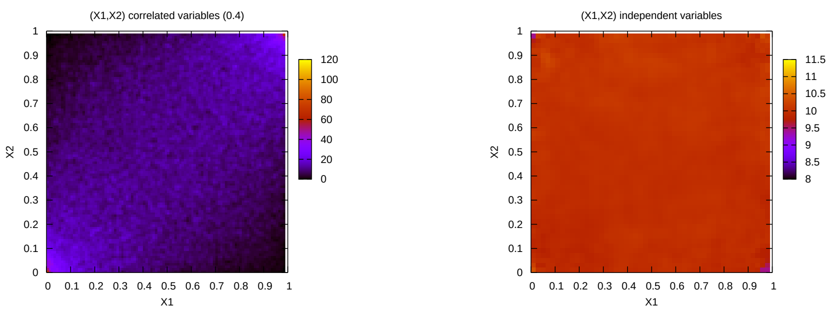


Figura 3.1: Bivariate distribution plot with correlated and uncorrelated variables

Definición. Sea X una variable aleatoria con función de distribución conocida, F. El *método de Monte Carlo* consiste en obtener la función de distribución empirica de la variable aleatoria $H(X)$ usando el siguiente método:

$$\begin{array}{ccc} F_X & & \widetilde{F_{H(X)}} \\ \downarrow & & \uparrow \\ \text{simulation} & & \text{empirical } cdf \\ \downarrow & & \uparrow \\ x^1, \cdots, x^n & \longrightarrow & H(x^1), \cdots, H(x^n) \end{array}$$

Observación. Problemas aparentemente no relacionados con las variables aleatorias pueden reformularse como un problema donde intervenga una variable aleatoria y ser resueltos por el método de Monte Carlo. Normalmente se formula el problema original como el cálculo de un estadístico (pe. la media) sobre la función de distribución. Al método de Monte Carlo se le atribuye una velocidad de convergencia del del orden de $1/\sqrt{N}$.

Ejemplo: El ejemplo clásico es obtener el valor de la integral de la función W entre 0 y 1. Lo reformulamos de la siguiente forma:

$$\int_0^1 W(u)du = \int_0^1 W(u)\phi(u)du = E[W(U)]$$

donde $U \sim U[0,1]$ y $\phi(u) = \text{pdf}(U) = 1$. La última igualdad se establece usando la preposición enunciada en el apéndice A.1. Finalmente la integral se aproxima calculando la media de un conjunto de puntos con distribución $W(U)$.

3.4. Evaluación de la cartera

Definición. Definimos el valor de un activo entre el tiempo t_0 y T, habiendo hecho fallido en tiempo w como:

$$\begin{aligned} X_{i,j}(t_0, T, w) = \ & 1_{[w \leq T]} \cdot \text{netting}(w) \cdot \Upsilon(w, T, S_{t_0}) + \\ & \textstyle\sum_{t_k=t_0}^{T} 1_{[t_k < w]} \cdot \text{cashflow}(t_k) \cdot \Upsilon(t_k, T, S_{t_0}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Definición. Definimos el valor de los activos del cliente i entre el tiempo t_0 y T, habiendo hecho fallido en tiempo w como:

$$X_i(t_0, T, w) = \sum_{j=0}^{na_i} X_{i,j}(t_0, T, w) \tag{3.2}$$

Definición. Definimos el valor de la cartera entre el tiempo t_0 y T, siendo $\vec{w}$ los tiempos en los que han hecho fallido los clientes $\vec{c}$ como:

$$X(t_0, T, \vec{w}) = \sum_{i=0}^{nc} X_i(t) = \sum_{i=0}^{nc} \sum_{j=0}^{na_i} X_{i,j}(t_0, T, w_i) \tag{3.3}$$

Definición. Definimos las pérdidas de la cartera entre el tiempo t_0 y T, siendo $\vec{w}$ los tiempos en los que han hecho fallido los clientes $\vec{c}$ como:

$$Z(t_0, T, \vec{w}) = X(t_0, T, T+1) - X(t_0, T, \vec{w}) \tag{3.4}$$

3.5. Simulación del tiempo de fallido

El objetivo de este apartado es proporcionar métodos para simular los tiempos de fallido, $\vec{w} = \{w_1, w_2, w_3, \cdots, w_{NC}\}$ de los clientes $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3, \cdots, c_{NC}\}$ cumpliendo:

- los fallidos de cada cliente deben satisfacer la matriz de transición M_T (o la función de supervivencia, $Survival(r, t)$).
- la correlación entre los fallidos de los clientes debe cumplir la matriz de correlación entre clientes, Θ

3.5.1. Método Rating-Path

Para este método es necesario disponer de la matriz de transición, M_T.

Paso 1. Segmentamos el tiempo en intervalos constantes de forma que el intervalo de tiempo entre t_i y t_{i+1} es el cubierto por la matriz de transición, T.

$$t_0, t_1, t_2, \cdots, t_k, \cdots$$

Paso 2. Para cada intervalo de tiempo k creamos una cópula, Qk de dimensión NC que satisfaga la matriz de correlación entre clientes, Θ.

$$Q1, Q2, Q3, \cdots, Qk, \cdots$$

Paso 3. Simulamos la cópula $Q1$. Simulemos el rating del cliente i en t_1. Disponemos del rating inicial $rating(t_0, i)$ y un valor $Q1_i \in [0, 1]$ proporcionado por el componente i-ésimo de $Q1$. Entonces

$$rating(t_1, i) = M_T^{-1}(rating(t_1, i), Q1_i)$$

Este paso se encuentra ilustrado en la figura 3.2.

Paso 4. Simulamos la cópula Qk. Simulemos el rating del cliente i en t_k. Disponemos del rating anterior $rating(t_{k-1}, i)$ y un valor $Qk_i \in [0,1]$ proporcionado por el componente i-ésimo de Qk. Entonces

$$rating(t_k, i) = M_T^{-1}(rating(t_{k-1}, i), Qk_i)$$

Este paso se encuentra ilustrado en la figura 3.2. Finalmente, aproximamos el tiempo de fallido del cliente i de la siguiente forma:

$$w_i = inf\{t_k | rating(t_k, i) = default\}$$

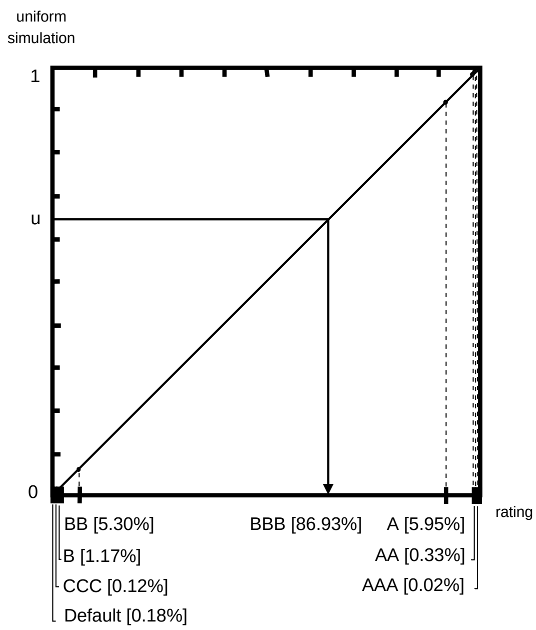


Figura 3.2: Simulación de la evolución del rating BBB a T tiempo

3.5.2. Método Time-To-Default

Para este método es necesario disponer de la función de supervivencia. En caso de disponer solamente de la matriz de transición puede calcularse la función de supervivencia asociada a la matriz de transición.

Paso 1. Creamos una cópula de dimensión NC que satisfaga la matriz de correlación entre clientes, Θ.

$$Q$$

Paso 2. Simulamos la cópula Q. Simulemos el tiempo de fallido del cliente i, w_i. Disponemos del rating inicial, $rating(t_0, i)$ y un valor $Q_i \in [0, 1]$ proporcionado por el componente i-ésimo de Q. Entonces:

$$w_i = Survival^{-1}(rating(t_0, i), Q_i)$$

Este paso se encuentra ilustrado en la figura 3.3.

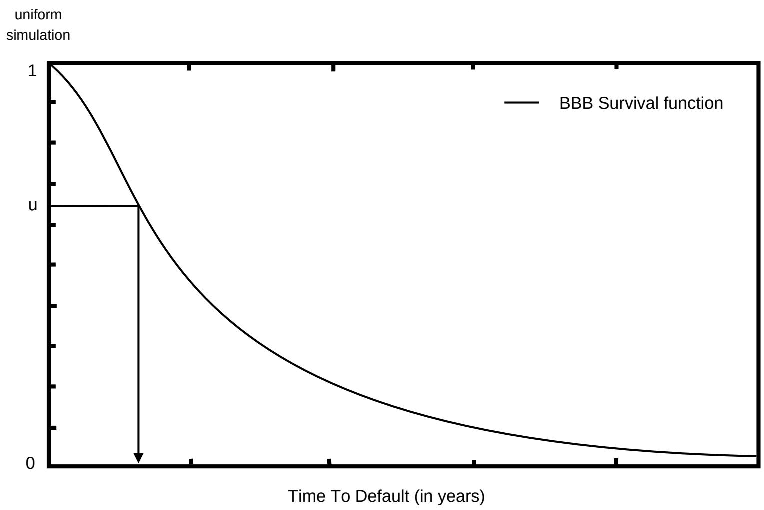


Figura 3.3: Simulación del tiempo hasta el fallido del rating BBB

3.6. Valoración del riesgo

El método de Monte Carlo genera N realizaciones, $\{z_1, z_2, z_3, \cdots, z_N\}$, de la variable aleatoria Z (pérdidas de la cartera) que permiten obtener la función de distribución empírica. A continuación se exponen los estimadores usados y el intervalo de confianza al nivel de confianza α. CreditCruncher utiliza el entorno R [1] para realizar los cálculos estadísticos. Para mas información acerca de R véase [10]. Sea $\phi^{-1}(x)$ la inversa de la función de distribución de la Normal(0,1).

Expected value. Fórmula extraida de [11] basada en el teorema del límite central.

$$\mu_Z = \widehat{\mu_Z} \pm \phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\widehat{\sigma_Z}}{\sqrt{N}}$$

Consulte A.5 para el cálculo de $\widehat{\mu_Z}$ y $\widehat{\sigma_Z}$.

[1] http://www.r-project.org

Desviación estándar. Fórmula extraida de [11] basada en el teorema del límite central.

$$\sigma_Z = \widehat{\sigma_Z} \pm \phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\widehat{\sigma_Z}}{\sqrt{2N}}$$

Consulte A.5 para el cálculo de $\widehat{\sigma_Z}$.

Value at Risk. Fijado un nivel de $VAR = x$

$$VAR_x(Z) = \widehat{q_x(Z)} \pm \phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \cdot \mathrm{stderr}(q_x(Z))$$

Consulte A.5 y A.6 para el cálculo de $\widehat{q_x(Z)}$ y $\mathrm{stderr}(q_x(Z))$.

TCE o Expected Shortfall. Fijado un nivel de $VAR = x$

$$TCE_x(Z) = \widehat{TCE_x}(Z) \pm \phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \cdot \mathrm{stderr}(TCE_x(Z))$$

Consulte A.5 y A.7 para el cálculo de $\widehat{TCE_x}(Z)$ y $\mathrm{stderr}(TCE_x(Z))$.

Capítulo 4

Implementación de la solución

4.1. Validaciones

TODO: describir las validaciones realizadas

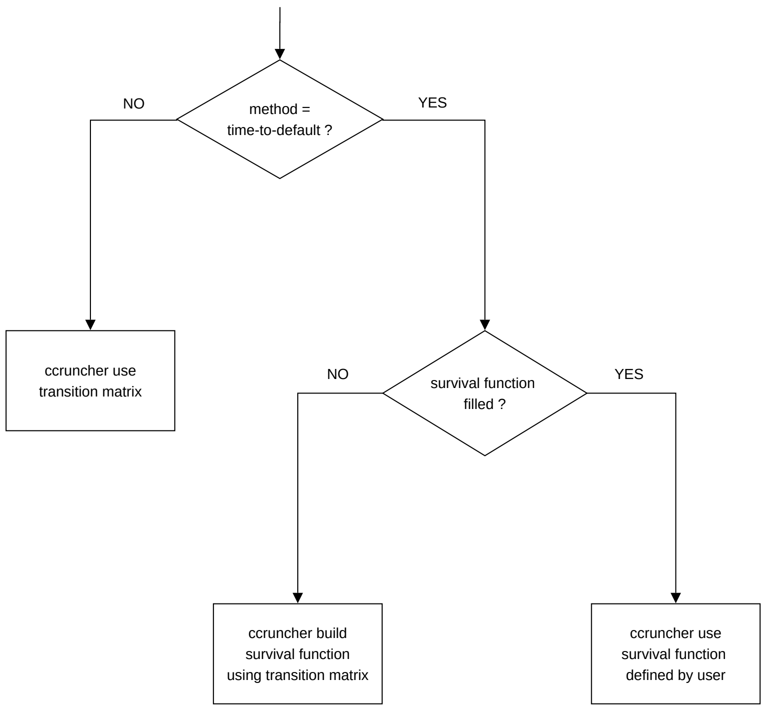


Figura 4.1: Decisión en función del método

precalculo de los valores en los nodos

4.2. Proceso de agregación

TODO: descripcion de los agregadores y metodo usado para evitar recalculo de los activos en cada simulacion + Agregación de productos

4.3. Dimensiones del problema

TODO: Estimaciones de uso de memoria, estimación del numero de operaciones, estimacion del tiempo de computo

4.4. Convergencia de la solución

TODO: Número de iteraciones necesarias, aceleración de la convergencia usando metodología antithetic
convergencia media, varianza, var (estimadores, graficos, etc.)

Apéndice A

Apéndices

A.1. Conceptos básicos de estadística

Definición. Llamamos *función de distribución* o cdf de la variable aleatoria X a la función F que cumple:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Definición. Llamamos *función de probabilidad* o *densidad* o pdf de la variable aleatoria X a la función f que cumple:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Proposición. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X(x)$. La función de densidad de $Y = H(X)$ siendo $H(.)$ monótona (estrictamente creciente o estrictamente decreciente) es:

$$f_Y(y) = f_X(H^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d(H^{-1}(y))}{dy} \right|$$

Esperanza. Definimos la *esperanza* de una variable aleatoria discreta de la forma siguiente:

$$E(X) = \sum_i i \cdot P(X = i)$$

En el caso de una variable aleatoria continua con función de distribución $f(x)$ la esperanza se expresa como:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

Varianza. Definimos la *varianza* de una variable aleatoria discreta de la forma siguiente:

$$Var(X) = \sum_i (i - E(X))^2 \cdot P(X = i)$$

En el caso de una variable aleatoria continua con función de distribución $f(x)$ la varianza se expresa como:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)dx$$

Covarianza. Definimos la *covarianza* entre dos variables aleatorias X e Y de la forma siguiente:

$$Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

Correlación. Definimos la *correlación*, ρ, entre dos variables aleatorias X e Y de la forma siguiente:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(x) \cdot Var(Y)}}$$

Proposición. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$ y $H(x)$ una función diferenciable. Entonces:

$$E(H(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \cdot f(x)dx$$

A.2. La variable aleatoria de Bernoulli

Definición. La variable aleatoria discreta *Bernouilli* , X, se utiliza para modelar fenómenos que solamente pueden tomar dos estados, 0 y 1, con probabilidades p y $(1-p)$ respectivamente. La notaremos como $X \sim Ber(p)$:

$$P(X = 0) = (1 - p) \qquad P(X = 1) = p \qquad p \in [0, 1]$$

Esperanza. La esperanza de una variable aleatoria Bernouilli $X \sim Ber(p)$ es p. Este resultado es la aplicación directa de la definición de esperanza para una variable aleatoria discreta:

$$E(X) = \sum_i i \cdot P(X = i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

Varianza. La varianza de una variable aleatoria Bernouilli $X \sim Ber(p)$ es $p \cdot (1-p)$. Este resultado es la aplicación directa de la definición de varianza para una variable aleatoria discreta:

$$Var(X) = \sum_i (i - E(X))^2 \cdot P(X = i) = (1-p)^2 \cdot p + (-p)^2 \cdot (1-p) = p \cdot (1-p)$$

Simulación. La simulación de una variable Bernouilli $X \sim Ber(p)$ la realizamos de la siguiente forma:

$$x = \begin{cases} 0 & u \in [0, 1-p) \\ 1 & u \in [1-p, 1] \end{cases} \qquad u \sim U[0,1]$$

A.3. La variable aleatoria Binomial

Definición. La suma de n variables aleatorias Bernoulli, $Ber(p)$, independientes e idénticamente distribuidas es una variable aleatoria discreta, X que llamamos *Binomial*, $X \sim B(n,p)$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad k \in \{0, \cdots, n\}$$

Esperanza. La esperanza de una variable aleatoria Binomial $X \sim B(n,p)$ es:

$$E(X) = n \cdot p$$

Varianza. La varianza de una variable aleatoria Binomial $X \sim B(n,p)$ es:

$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Proposición. El Teorema Central del Límite nos permite, en el caso de n grandes, aproximar la distribución discreta Binomial por una distribución continua Normal:

$$B(n,p) \approx N\left(np, np(1-p)\right)$$

A.4. La variable aleatoria Normal

Definición. Decimos que una variable aleatoria continua Z es una *Normal* con media μ y desviación estándar σ, $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ si tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Esperanza. La esperanza de una variable aleatoria Normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ es:

$$E(X) = \mu$$

Varianza. La varianza de una variable aleatoria Normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ es:

$$Var(X) = \sigma^2$$

Simulación. Para la generación de una realización, z, de una variable aleatoria normal $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ utilizamos el siguiente algoritmo:

$$z = \mu + \sigma \cdot \sqrt{-2ln(u_1)} \cdot cos(2\pi \cdot u_2) \qquad u_1, u_2 \sim U[0,1]$$

Definición. Decimos que una variable aleatoria continua n-dimensional, Z, es una *Normal* con media $\vec{\mu}$ y matriz de covarianza Σ, $Z \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$, si tiene la siguiente función de densidad:

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left((\vec{x}-\vec{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\right)\right\}$$

donde $|\Sigma|$ es el determinante de la matriz de covarianzas Σ, y Σ^{-1} es la inversa de la matriz Σ.

Simulación. Para la generación de una realización, $\vec{z}$, de una variable aleatoria normal $Z \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$ utilizamos el siguiente algoritmo:

$$\vec{z} = \vec{\mu} + \Sigma^{1/2}\vec{x} \qquad x_i \sim N[0,1]$$

La matriz $\Sigma^{1/2}$ la calculamos usando el algoritmo de Cholesky. Sabemos que existe solución debido a que Σ es definida positiva por tratarse de una matriz de covarianzas.

A.5. Estimadores estadísticos

Sea $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ n realizaciones de la variable aleatoria X.

Definición. Estimamos la media de X usando el siguiente estimador no sesgado:

$$E(X) = \mu_X \approx \widehat{\mu_X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Definición. Estimamos la varianza de X usando el siguiente estimador no sesgado:

$$Var(X) = \sigma_X^2 \approx \widehat{\sigma_X^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right)$$

Definición. Estimamos el VAR de X al nivel de confianza α usando el siguiente estimador:

$$VAR_\alpha(X) = \inf\{x|F_X(x) \geq \alpha\} \approx \widehat{VAR_\alpha}(X) = x_{k:n}$$

donde,

- F_X es la función de distribución de X
- k cumple $\frac{k}{n} \leq \alpha < \frac{k+1}{n}$
- $x_{k:n}$ es el k-ésimo elemento de la serie ordenada de forma creciente

Definición. Estimamos el TEC (Tail Conditional Expectation o Expected Shortfall) de X al nivel de confianza α usando el siguiente estimador:

$$TCE_\alpha(X) = E(X|X > VAR_\alpha(X)) \approx \widehat{TCE_\alpha}(X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot 1_{\{x_i > \widehat{VAR_\alpha}(X)\}}}{\sum_{i=1}^n 1_{\{x_i > \widehat{VAR_\alpha}(X)\}}}$$

A.6. Error estándar de un quantil (o VaR)

A continuación se describe el método de Maritz-Jarrett basado en el estadístico de orden. Fórmula extraida de [4]. Sea $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_N$ la muestra sobre la que se desea calcular el error estándar del quantil x.

$$\begin{aligned}
M &= [Nx + 0{,}5] \\
a &= M - 1 \\
b &= N - M \\
W_i &= B(a, b, y_{i+1}) - B(a, b, y_i) \\
C_k &= \sum_{i=1}^{N} W_i E_i^k
\end{aligned}$$

donde $[y]$ es la parte entera de y, $y_i = i/N$ y $B(a, b, y)$ es la función beta incompleta:

$$B(a, b, y) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^y t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$$

entonces,

$$\mathrm{stderr}(q_x) = \sqrt{C_2 - C_1^2}$$

A.7. Error estándar del TCE

El TCE (Tail Conditional Expectation o Expected Shortfall) es la esperanza de una variable aleatoria condicionada a que sea superior a un cierto quantil. Dado un conjunto de observaciones $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N$ de una variable aleatoria X, calculamos el error estándar del TCE siguiendo los siguientes pasos:

Paso 1. Calculamos el estimador de $VAR_\alpha(X)$.

Paso 2. Definimos la variable aleatoria $Y = \{X | X > VAR_\alpha(X)\}$. Generamos un conjunto de observaciones de Y seleccionando las observaciones de X que son superiores a $VAR_\alpha(X)$:

$$y_1, y_2, y_3, \cdots, y_M$$

Paso 3. Usamos el teorema central del límite para estimar la media de Y y calcular su error estándar:

$$\begin{aligned} \widehat{TCE_\alpha}(X) &= \widehat{\mu_Y} \\ \text{stderr}(TCE_\alpha(X)) &= \frac{\widehat{\sigma_Y}}{\sqrt{M}} \end{aligned}$$

A.8. Cálculo de la raiz de una matriz

Definición. Diremos que 2 matrices A y B de orden n son *semejantes* si existe una matriz, P, de orden n con $det(P) \neq 0$ tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Proposición. Si dos matrices A y B son semejantes ($B = P^{-1} \cdot A \cdot P$) entonces:

$$det(A) = det(B)$$
$$B^n = P^{-1} \cdot A^n \cdot P$$

Definición. Diremos que una matriz A de orden n es *diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal D, o sea, $A = P^{-1} \cdot D \cdot P$ siendo $det(D) \neq 0$.

Proposición. Para que una matriz A sea diagonalizable es necesario y suficiente que:

- Los valores propios de A sean todos reales
- Los n vectores propios de A sean independientes

Proposición. Si una matriz A es diagonalizable ($A = P^{-1} \cdot D \cdot P$) entonces:

- D es una matriz diagonal compuesta por los valores propios de la matriz A
- P es la matriz formada por los vectores propios de la matriz A

Resultado. Sea A la raíz n-esima de una matriz diagonalizable B. Entonces:

$$A^n = B = P^{-1} \cdot D \cdot P \Longrightarrow A = \sqrt[n]{B} = P^{-1} \cdot \sqrt[n]{D} \cdot P$$

Observación. Si D es una matriz diagonal con $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ en la diagonal, entonces la matriz D^x es una matriz diagonal y sus valores son $d_1^x, d_2^x, d_3^x, \cdots, d_n^x$.

A.9. Algoritmo de la cópula gaussiana

Sea Σ_1 la matriz de correlación a cumplir por la cópula. Observemos que se trata también de la matriz de covarianzas al valer 1 los elementos de la diagonal.

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 1. Creamos la matrix de covarianzas Σ_2 transformando la matriz Σ_1 componente a componente:

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 2sin(\frac{\pi}{6}) & 2sin(\rho_{12}\frac{\pi}{6}) & \dots & 2sin(\rho_{1n}\frac{\pi}{6}) \\ 2sin(\rho_{21}\frac{\pi}{6}) & 2sin(\frac{\pi}{6}) & \dots & 2sin(\rho_{2n}\frac{\pi}{6}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2sin(\rho_{n1}\frac{\pi}{6}) & 2sin(\rho_{n2}\frac{\pi}{6}) & \dots & 2sin(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix}$$

Observamos que la matriz Σ_2 vuelve a tener los elementos de la diagonal iguales a 1 debido a que $2sin(\frac{\pi}{6}) = 1$.

Paso 2. A la matriz Σ_2 le aplicamos el algoritmo de Cholesky para obtener la matrix triangular inferior B cumpliendo $\Sigma_2 = B \cdot B^{\top}$:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Paso 3. Simulamos n variables aleatorias $N(0,1)$ independientes:

$$\vec{Y}^{\top} = (Y_1, \cdots, Y_n)^{\top} \qquad Y_k \sim N(0,1) \text{ independientes}$$

Paso 4. Simulamos una variable n-dimensional $Z \sim N(\vec{0}, \Sigma_2)$ haciendo:

$$\vec{Z}^{\top} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = B \cdot \vec{Y}^{\top}$$

Paso 5. Finalmente obtenemos la simulación de la cópula, $\vec{X}$.

$$\vec{X}^{\top} = (X_1, \cdots, X_n)^{\top} = (\Phi(Z_1), \cdots, \Phi(Z_n))^{\top}$$

donde $\Phi(x)$ es la función de distribución de la Normal estándar

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

A.10. Descomposición de Cholesky de una matriz en bloques

Dada una matriz cuadrada, simétrica y definida positiva, A, el algoritmo de Cholesky realiza la siguiente descomposición:

$$U^{\top} \cdot U = A$$

donde U es una matriz triangular superior (por tanto, $U^{\top}$ es una matriz triangular inferior). Una descripción e implementación del algoritmo puede encontrarse en *Numerical Recipes in C*[1].

Si intentamos realizar la descomposición de Cholesky de una matriz de correlación entre clientes de una cartera de 50,000 clientes nos encontraremos con problemas de tamaño (la matriz ocupará 19 Gb. de memoria) y número de operaciones al multiplicar la matriz por un vector (2,500,000,000 multiplicaciones).

Modificaremos el algoritmo de Cholesky para aprovechar el hecho que la matriz de correlación entre clientes es una matriz en bloques con unos

[1] http://www.nr.com

en la diagonal. Veamos un ejemplo de una cartera de 7 clientes con dos sectores:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ \hline 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 & 1 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}3 & 1 \end{array}\right)$$

Realizamos la descomposición de Cholesky:

$$U = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1{,}00000 & 0{,}50000 & 0{,}50000 & 0{,}50000 & 0{,}10000 & 0{,}10000 & 0{,}10000 \\ 0 & 0{,}86603 & 0{,}28868 & 0{,}28868 & 0{,}05774 & 0{,}05774 & 0{,}05774 \\ 0 & 0 & 0{,}81650 & 0{,}20412 & 0{,}04082 & 0{,}04082 & 0{,}04082 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}79057 & 0{,}03162 & 0{,}03162 & 0{,}03162 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}99197 & 0{,}28630 & 0{,}28630 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}94975 & 0{,}21272 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}92563 \end{array}\right)$$

Observamos que U contiene elementos repetidos. Guardaremos la matriz U en memoria de la forma siguiente:

$$U = \left|\begin{array}{c|cc} 1{,}00000 & 0{,}50000 & 0{,}10000 \\ 0{,}86603 & 0{,}28868 & 0{,}05774 \\ 0{,}81650 & 0{,}20412 & 0{,}04082 \\ 0{,}79057 & 0 & 0{,}03162 \\ 0{,}99197 & 0 & 0{,}28630 \\ 0{,}94975 & 0 & 0{,}21272 \\ 0{,}92563 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

o sea, para cada fila guardamos el valor de la diagonal y el valor de cada sector. El tamaño en memoria ahora pasa a ser $N \times (M+1)$ donde N es el número de clientes y M el número de sectores.

Para reducir el número de operaciones realizadas al multiplicar la matriz por un vector aprovechamos que la matriz U tiene elementos repetidos. Veamos un ejemplo:

$$(U \cdot x)_2 = 0{,}86603 \cdot x_2 + 0{,}28868 \cdot x_3 + 0{,}28868 \cdot x_4 +$$
$$0{,}05774 \cdot x_5 + 0{,}05774 \cdot x_6 + 0{,}05774 \cdot x_7$$
$$= 0{,}86603 \cdot x_2 + 2 \cdot 0{,}28868 \cdot (x_3 + x_4) + 3 \cdot 0{,}05774 \cdot (x_5 + x_6 + x_7)$$

Con estas dos consideraciones se obtiene una algoritmo de Cholesky para matrices en bloques con uso de memoria y número de operaciones (al multiplicar por un vector) del orden $N \times (M+1)$ en vez de orden N^2. Con el nuevo algoritmo la memoria necesaria para almacenar la matriz de 50,000 clientes es de 4,2 Mb. y el número de multiplicaciones se reduce a 500,000.

Bibliografía

[1] Dirk Tasche Carlo Acerbi. Expected shortfall: a natural coherent alternative to value at risk. *BIS*, 2001.

[2] Paul Glasserman. Probability models of credit risk. *Columbia Business School*, 2000.

[3] Greg M. Gupton, Christopher C. Finger, and Mickey Bhatia. *CreditMetrics - Technical Document*. J.P. Morgan & Co. Incorporated, 1997.

[4] Jonathan E. Grindlay Jaesub Hong, Eric M. Schlegel. New spectral classification technique for x-ray sources: quantile analysis. 2004.

[5] Stefan R. Jaschke. Quantile-var is the wrong measure to quantify market risk for regulatory purposes. *BIS*, 2001.

[6] Philippe Jorion. *Value at Risk*. McGraw-Hill, 1997.

[7] Mervyn Marasinghe. Monte carlo methods. Class notes for Iowa State University, Dept. of Statistics.

[8] Alexander McNeil Paul Embrechts and Daniel Straumann. Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. *RiskLab*, 1999.

[9] Ken Phelan and Colin Alexander. Different strokes. *Risk*, 1999.

[10] R Development Core Team. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2005. ISBN 3-900051-07-0.

[11] Murray R. Spiegel. *Estadística*. Schaum, 1997.

[12] Shaun S. Wang. Aggregation of correlated risk portfolios: Models & algorithms. *CAS Committee on Theory of Risk*.

Índice alfabético