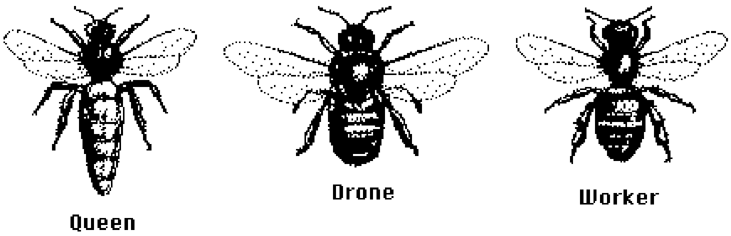
CreditCruncher User's Guide
Version 0.1



Gerard Torrent Gironella

22 de enero de 2005

The image found in cover have been taken from Mark L. Winston. 1987. *The Biology of the Honey Bee* (ISBN: 0-671-07109-2). Harvard University Press. Cambridge, MA. These redrawn figures appear here without permission of Harvard University Press [Ref: 973029].

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. About CreditCruncher

CreditCruncher valora el riesgo de impago de una cartera de créditos usando la técnica de simulación Monte Carlo. Es una implementación libre de la metodologia CreditMetrics[1].

Se dispone de una cartera de N clientes donde cada cliente tiene contratado uno o varios productos con riesgo de crédito. Cada cliente tiene asignado un rating de calidad crediticia y existe una matriz de transición que permite determinar la probabilidad de fallido a un horizonte de tiempo fijado. Los clientes pertenecen a diversos sectores de los que disponemos de una matriz de correlación que indica el grado de dependencia intersectorial en caso de fallido. A partir de la matriz de correlación intersectorial se construye la matriz de correlación entre clientes. Finalmente se genera un conjunto de N variables aleatorias uniformes correlacionadas según esta matriz (cópula). Se usa la matriz de transición para determinar la evolución del rating inicial de cada cliente y se evalua el valor de sus productos. Si se repite este proceso un número elevado de veces disponemos de un conjunto de valores posibles de la cartera que permiten determinar la distribución del valor de la cartera y calcular el VAR (Value At Risk). Para mas información consúltese el manual de CreditCruncher donde se describe con detalle todos los pasos realizados.[1, 2]

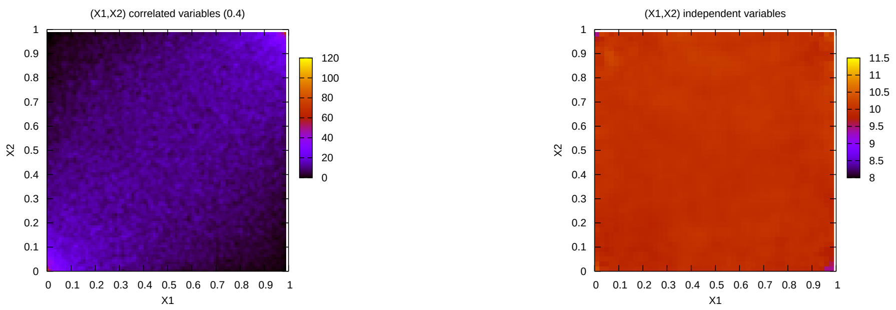


Figura 1.1: Bivariate distribution plot with correlation and independent

[1] http://www.riskmetrics.com/

Capítulo 2

Formulación del problema

Deseamos valorar las pérdidas que puede ocasionar una cartera de créditos considerando que la única fuente de pérdidas es el impago.

En este capítulo se introducen los elementos considerados claves para la definición del problema.

2.1. Cartera de créditos

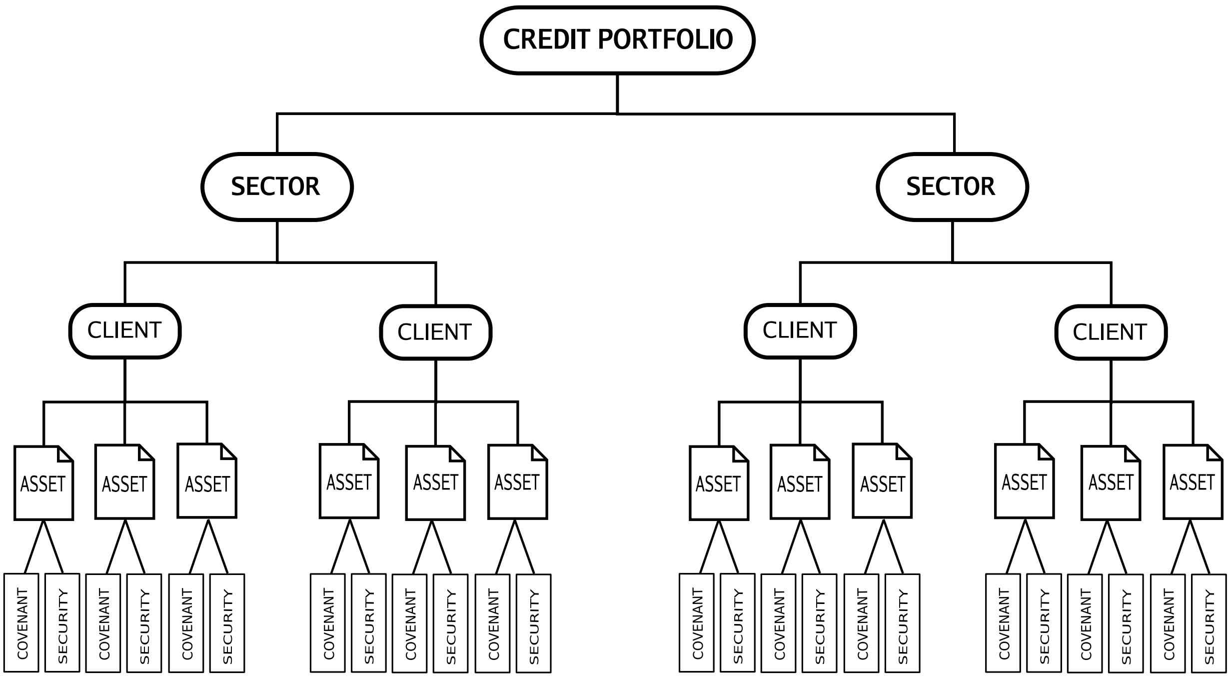


Figura 2.1: Estructura de la cartera de créditos

2.1.1. Ratings

2.1.2. Sectores

2.1.3. Exposición

2.1.4. Severidad

2.2. Value At Risk (VAR)

2.3. Matriz de transición

2.3.1. Definición.

La matriz de transición nos proporciona la probabilidad que un cliente con rating inicial r_i pase a tener, al cabo de un tiempo T, rating r_j. La denotamos de la forma siguiente:

$$M_T = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

donde cada elemento de la matrix, $m_{i,j}$ corresponde a la probabilidad de que un cliente con rating r_i pase a tener, al cabo de T tiempo, rating r_j.

2.3.2. Ejemplo.

Matriz de transición anual ($T = 1$ año) extraida del documento *CreditMetrics. Technical Document*. Las probabilidades están expresadas en tanto por ciento.

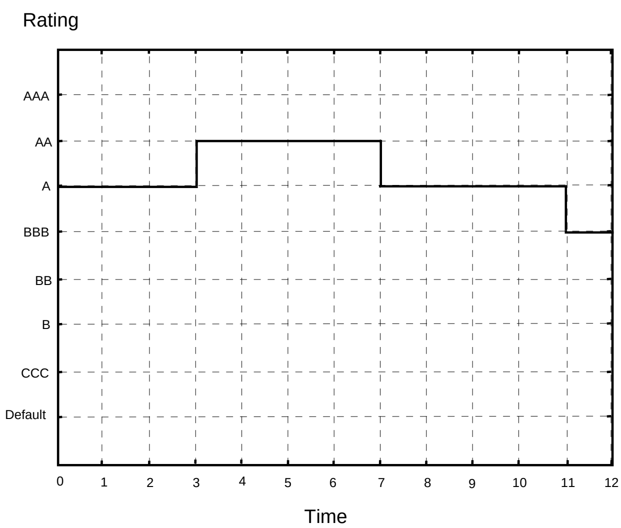


Figura 2.2: Evolución del rating a lo largo del tiempo

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	90,81	8,33	0,68	0,06	0,12	0,00	0,00	0,00
AA	0,70	90,65	7,79	0,64	0,06	0,14	0,02	0,00
A	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06
BBB	0,02	0,33	5,95	86,93	5,30	1,17	0,12	0,18
BB	0,03	0,14	0,67	7,73	80,53	8,84	1,00	1,06
B	0,00	0,11	0,24	0,43	6,48	83,46	4,07	5,20
CCC	0,22	0,00	0,22	1,30	2,38	11,24	64,86	19,79
Default	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	100,00

en particular, la probabilidad que un cliente con rating AA pase a tener rating B al cabo de un año es del $0{,}14\,\%$.

2.3.3. Propiedades

Propiedad 1. El valor de los elementos de la matriz de transición se encuentran entre 0 y 1 debido a que son probabilidades.

$$0 \leq m_{i,j} \leq 1 \quad \forall i, j$$

Propiedad 2. La suma de los elementos de cualquier fila de la matriz de transición suman 1. De esta forma se está imponiendo que el conjunto de ratings finales solo puede ser el de los ratings contemplados en la matriz.

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1 \quad \forall i$$

Propiedad 3. Los elementos de la fila correspondiente al rating $default$, son todos 0, excepto el elemento de la columna que corresponde al rating $default$ que vale 1. Esta condición indica que cuando se llega al estado de fallido no es posible salir de este estado.

$$\begin{aligned} &m_{default,j} = 0 && \forall j \neq default \\ &m_{default,default} = 1 \end{aligned}$$

2.3.4. Cambio de periodo

Deseamos obtener la matriz de transición para periodos distintos (múltiplos o fraccionarios) del periodo proporcionado, T. Esto nos permitirá determinar la probabilidad que un cliente con rating inicial r_i tenga rating r_j al cabo de $x \cdot T$ tiempo.

Ejemplo. Calculemos la probabilidad de pasar de rating AA a rating B en un plazo de dos años disponiendo de la matriz de transición anual.

$$\begin{aligned} P(AA \to B; 2) = \quad & P(AA \to AAA; 1) && \cdot P(AAA \to B; 1) && + \\ & P(AA \to AA; 1) && \cdot P(AA \to B; 1) && + \\ & P(AA \to A; 1) && \cdot P(A \to B; 1) && + \\ & P(AA \to BBB; 1) && \cdot P(BBB \to B; 1) && + \\ & P(AA \to BB; 1) && \cdot P(BB \to B; 1) && + \\ & P(AA \to B; 1) && \cdot P(B \to B; 1) && + \\ & P(AA \to CCC; 1) && \cdot P(CCC \to B; 1) && + \\ & P(AA \to default; 1) && \cdot P(default \to B; 1) \end{aligned}$$

Proposición Sean M_{T_1} y M_{T_2} las matrices de transición para los periodos T_1 y T_2. Entonces, la matriz de transición para el periodo $T_1 + T_2$ es:

$$M_{T_1+T_2} = M_{T_1} \cdot M_{T_2}$$

Corolario Sean M_T la matriz de transición para el periodo T y $k \in \mathrm{N}$. Entonces:

$$M_{k \cdot T} = M_T^k$$

$$M_{\frac{T}{k}} = \sqrt[k]{M_T}$$

2.3.5. Tasa de morosidad anticipada

2.4. Matriz de correlación sectorial

Capítulo 3

Resolución del problema

3.1. Hipotesis

La única fuente de riesgo es el riesgo de impago. No se contemplan los riesgos de variación de tipos de interés, etc.

El tiempo está repartido uniformemente. blablabla.

Un fallido no se recupera. blablabla.

Las probabilidades de fallido no dependen del tiempo. blablabla.

El rating y la recuperación de un cliente no depende de otro cliente. blablabla.

3.2. El método de Monte Carlo

3.3. Copulas. Variables aleatorias correlacionadas

Definición. Una copula es la función de distribución de un vector aleatorio sobre $\Re^n$ donde las funciones de distribución marginales son $U[0,1]$.

$$C(u_1, \cdots, u_n) = P\{U_1 \leq u_1, \cdots, U_n \leq u_n\}$$

Proposición. C es una cópula $\iff C : [0,1]^n \to [0,1]$ y cumple las siguientes propiedades:

- $C(x_1, \cdots, x_n)$ es creciente en cada componente x_i
- $C(1, \cdots, 1, x_i, 1, \cdots, 1) = x_i \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}, x_i \in [0,1]$
- $\forall (a_1, \cdots, a_n) \in [0,1]^n$ y $\forall (b_1, \cdots, b_n) \in [0,1]^n$ con $a_i \leq b_i$ se cumple:

  $$\sum_{i_1=1}^{2} \cdots \sum_{i_n=1}^{2} (-1)^{i_1+\cdots+x_n} C(x_{1i_1}, \cdots, x_{ni_n}) \geq 0$$

  siendo $x_{j1} = a_j$ y $x_{j2} = b_j \quad \forall j \in \{1, \cdots, n\}$

Generación de cópulas normales o arquimedianas. Sea $(Z_1, \cdots, Z_n)$ un vector aleatorio con marginales $Z_i \sim N(0,1)$ con

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

siendo $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ el coeficiente de correlación entre Z_i y Z_j.
Calculamos la raiz de Σ usando el algoritmo de Cholesky. De esta forma obtenemos la matriz triengular inferior

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

que cumple $B \cdot B' = \Sigma$
Generamos una simulación del vector aleatorio $Y = (Y_1, \cdots, Y_n)'$ donde $Y_k \sim N(0,1)$ son variables aleatorias independientes.
Calculamos $Z = B \cdot Y$. El vector aleatorio resultante, Z tiene marginales $Z_k \sim N(0,1)$ y se encuentran correlacionadas según la matriz Σ.
Calculamos $X = (X_1, \cdots, X_n)'$ de la forma:

$$x_i = \Phi^{-1}(y_i)$$

donde $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} dt$

Capítulo 4

Implementación de la solución

Capítulo 5

Apéndices

5.1. Cálculo de la raiz de una matriz

Definición. Diremos que 2 matrices A y B de orden n son semejantes si existe una matriz, P, de orden n con $det(P) \neq 0$ tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Proposición. Si dos matrices A y B son semejantes ($B = P^{-1} \cdot A \cdot P$) entonces:

$$det(A) = det(B)$$

$$B^n = P^{-1} \cdot A^n \cdot P$$

Definición. Diremos que Una matriz A de orden n es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal D, o sea, $A = P^{-1} \cdot D \cdot P$ siendo $det(D) \neq 0$.

Proposición. Para que una matriz A sea diagonalizable es necesario y suficiente que:

- Los valores propios de A sean todos reales
- Los n vectores propios de A sean independientes

Proposición. Si una matriz A es diagonalizable ($A = P^{-1} \cdot D \cdot P$) entonces:

- D es una matriz diagonal compuesta por los valores propios de la matriz A
- P es la matriz formada por los vectores propios de la matriz A

Resultado. Sea A la raíz n-esima de una matriz diagonalizable B. Entonces:

$$A^n = B = P^{-1} \cdot D \cdot P \Longrightarrow A = \sqrt[n]{B} = P^{-1} \cdot \sqrt[n]{D} \cdot P$$

5.2. La variable aleatoria normal

5.2.1. Definición y propiedades

$$P(X \leq x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

5.2.2. Simulación

Para la generación de una realización, z, de una variable aleatoria normal $Z \sim N(\mu, \sigma)$ utilizamos el siguiente algoritmo:

$$z = \mu + \sigma \cdot \sqrt{-2 \cdot ln(u[0,1])} \cdot cos(2 \cdot \pi \cdot u[0,1])$$

donde $u[0,1]$ son realizaciones de una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0,1]$.

Bibliografía

[1] J.M. Aitchison. Percolation in gently sloping beaches. *IMA J. Appl. Math.*, 33:17–31, 1984.

[2] L. Cummings. The three cylinder problem in Hele–Shaw flow. private communication, 1997.