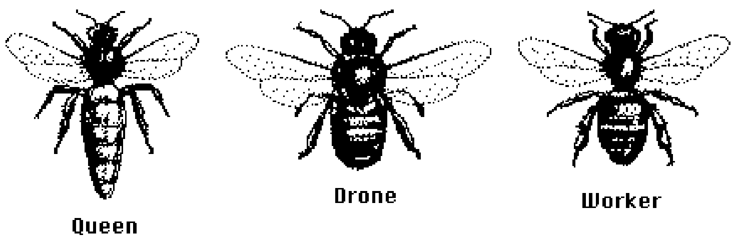
CreditCruncher User's Guide
Version 0.2



Gerard Torrent Gironella

17 de abril de 2005

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Este documento contiene la descripción del método de valoración del riesgo de crédito implementado por el programa CreditCruncher. Para su lectura no se presuponen conocimientos avanzados de matemáticas o finanzas. En caso de encontrar un error, sugerir mejoras o no entender algún punto, no dude en ponerse en contacto con el equipo de desarrollo de CreditCruncher[1] que tendrá en cuenta sus aportaciones para futuras versiones de este documento.

1.1. Acerca de CreditCruncher

La valoración del riesgo de crédito no es un tema cerrado, muestra de ello es la multitud de métodos que existen para su valoración. Se recomienda la lectura del excelente artículo *Different strokes* [3] donde se exponen los principales modelos de valoración del riesgo de crédito y sus características.

CreditCruncher valora el riesgo de impago de una cartera de créditos usando la técnica de simulación Monte Carlo. Pretende ofrecer un método de valoración del riesgo de crédito totalmente documentado y soportado por una implementación libre y gratuita. Pertenece a la família de métodos tipo CreditMetrics[2].

La mayoría de conceptos y explicaciones que pueden encontrarse en este documento han sido extraidas o inspiradas en el excelente documento *CreditMetrics - Technical Document* [2]. Puede usarse el artículo *Probability models of credit risk* [1] como una introducción corta y clara.

[1] http://www.generacio.com/ccruncher/
[2] http://www.riskmetrics.com/

1.2. Organización del contenido

Se ha organizado el contenido en cuatro secciones principales y un conjunto de anexos.

Formulación del problema. Contiene la descripción del problema que se pretende resolver y se introducen los elementos y propiedades considerados claves para la posterior resolución. La lectura de este apartado es necesaria para entender los elementos del fichero de entrada de datos del programa.

Resolución del problema. Se exponen los elementos usados para resolver el problema y se detalla la estructura del método de resolución. La lectura de este apartado es necesaria para la interpretación de los resultados proporcionados por el programa.

Implementación de la solución. Se explican los detalles de la implementación. La lectura de este apartado es necesaria para entender alguno de los apartados del fichero de entrada de datos del programa así como para la interpretación de los resultados proporcionados por este.

Ejemplos. Conjunto de ejemplos representativos resueltos con CreditCruncher. Los ficheros de entrada de los ejemplos se incluien en la la aplicación. La lectura de este apartado, junto con los ficheros de ejemplo pueden ayudarle en la creación de sus primeros ficheros de entrada.

Anexos. Contienen elementos necesarios para la comprensión del contenido de las secciones principales, pero que su inclusión en estas oscurecería la explicación.

No se demuestran los enunciados que puedan ser encontrados en los libros de matemáticas de grado medio o superior. Las referencias bibliográficas que se incluien no son para hacer bonito, pueden ayudarle en la comprensión de lo expuesto en este documento.

Capítulo 2

Formulación del problema

Dada una cartera de créditos a empresas de tamaño mediano, deseamos valorar las posibles pérdidas debido a los impagos al cabo de un tiempo T.

A continuación se introducen los elementos y propiedades básicas que constituyen el marco de trabajo.

2.1. Cartera de créditos

La estructura de la cartera de créditos consiste en un conjunto de clientes agrupados por sectores de actividad. Cada cliente tiene contratado un conjunto de productos de crédito. Cada contrato puede estar cubierto por un número variable de garantías o acuerdos. Puede verse un esquema de la estructura en la figura 2.1.

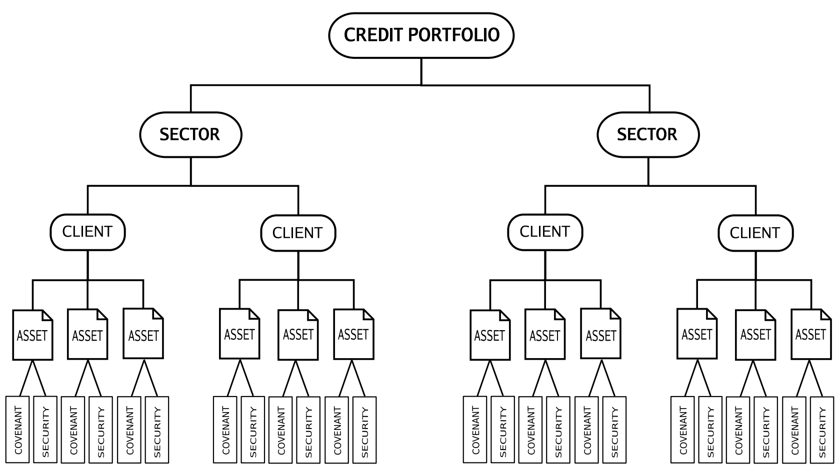


Figura 2.1: Estructura de la cartera de créditos

2.1.1. Ratings

Un sistema de ratings es una medida de calidad crediticia usada para valorar creditores. A cada creditor se le asigna una nota discreta (pe. AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, Default) en función de su calidad crediticia. Los únicos ratings contemplados en este documento son los que tienen una relación estadística directa y cuantificable con la probabilidad de impago del creditor. Ejemplos de este tipo de ratings son los publicados por Moody's Investor Service[1] o Standard & Poors[2].

La metodología para la generación de un sistema de ratings queda fuera del ámbito de este documento. CreditCruncher presupone que cada empresa de la cartera tiene un rating inicial asignado.

El rating de cada empresa varía a lo largo del tiempo en función de la calidad crediticia de cada instante (véase figura 2.2). La evolución a lo largo del tiempo del rating de una empresa se formula a través de la matriz de transición (véase la sección 2.2).

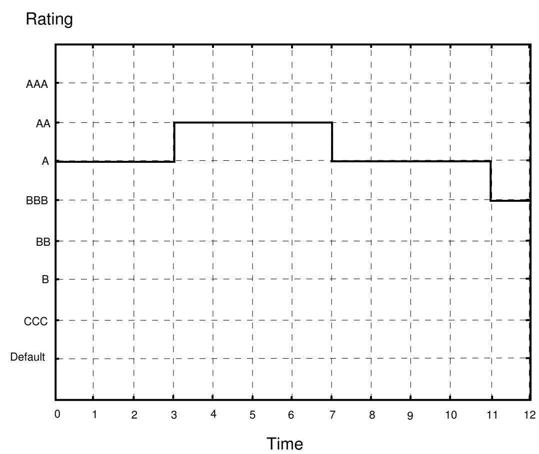


Figura 2.2: Evolución del rating a lo largo del tiempo

Notación. El sistema de ratings usado en este documento se compone de n notas, $r_1, r_2, \cdots, r_n$, donde r_1 es la mejor nota (probabilidad de fallido mas baja), r_2 es la segunda mejor nota, etc. r_n corresponde al rating $default$.

Notación. $P(r_i \to r_j; t)$ = probabilidad de pasar de un rating inicial r_i a un rating r_j en un tiempo t.

[1]http://www.moodys.com
[2]http://www.standardandpoors.com

2.1.2. Sectores

La correlación de fallidos entre clientes es uno de los conceptos que añaden complejidad de la valoración del riesgo de crédito. No es lo mismo tener una cartera de créditos donde los clientes puedan hacer fallido de forma independiente que una cartera donde los fallidos se encuentran correlacionados. En el primer caso, al cabo de un año tendremos un conjunto limitado de fallidos, en el segundo caso, al cabo de un año la mayoria de clientes habrán hecho fallido o casi ningn cliente habrá hecho fallido.

Al no poder asignar una correlación de fallido cliente a cliente, se recurre a la agrupación de estos en sectores. Se considera que la cartera de créditos dispone de un conjunto de sectores donde los componentes de cada sector muestran una evolución crediticia similar (véase figura 2.3). O sea, que la mejora o empeoramiento de la calidad crediticia (rating) afecta de forma común a los componentes del sector. En general se identifican estos sectores con los sectores industriales.

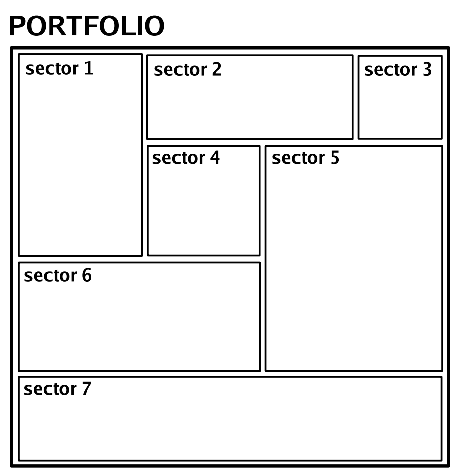


Figura 2.3: Sectores de actividad

Se considera que cada cliente pertenece a un único sector y permanece en el a lo largo del tiempo. La relación entre sectores se formula a través de la matriz de correlación sectorial (véase la sección 2.3).

Notación. En este documento se considera que existen m sectores, y nos referiremos a ellos como s_1, s_2, $\cdots$, s_m.

2.1.3. Productos

Exposición, Severidad

2.2. Matriz de transición

2.2.1. Definición

La matriz de transición nos proporciona la probabilidad que un cliente con rating inicial r_i pase a tener, al cabo de un tiempo T, rating r_j. La denotamos de la forma siguiente:

$$M_T = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

donde cada elemento de la matrix, $m_{i,j}$ corresponde a la probabilidad de que un cliente con rating r_i pase a tener, al cabo de T tiempo, rating r_j.

2.2.2. Ejemplo

Matriz de transición anual ($T = 1$ año) extraida del documento *CreditMetrics. Technical Document*. Las probabilidades están expresadas en tanto por ciento.

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	90,81	8,33	0,68	0,06	0,12	0,00	0,00	0,00
AA	0,70	90,65	7,79	0,64	0,06	0,14	0,02	0,00
A	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06
BBB	0,02	0,33	5,95	86,93	5,30	1,17	0,12	0,18
BB	0,03	0,14	0,67	7,73	80,53	8,84	1,00	1,06
B	0,00	0,11	0,24	0,43	6,48	83,46	4,07	5,20
CCC	0,22	0,00	0,22	1,30	2,38	11,24	64,86	19,79
Default	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	100,00

en particular, la probabilidad que un cliente con rating AA pase a tener rating B al cabo de un año es del 0,14 %.

2.2.3. Propiedades

Propiedad 1. El valor de los elementos de la matriz de transición se encuentran entre 0 y 1 debido a que son probabilidades.

$$0 \leq m_{i,j} \leq 1 \quad \forall i, j$$

Propiedad 2. La suma de los elementos de cualquier fila de la matriz de transición suman 1. De esta forma se está imponiendo que el conjunto de ratings finales solo puede ser el de los ratings contemplados en la matriz.

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1 \quad \forall i$$

Propiedad 3. Los elementos de la fila correspondiente al rating $default$, son todos 0, excepto el elemento de la columna que corresponde al rating $default$ que vale 1. Esta condición indica que cuando se llega al estado de fallido no es posible salir de este estado.

$$\begin{array}{ll} m_{default,j} = 0 & \forall j \neq default \\ m_{default,default} = 1 & \end{array}$$

2.2.4. Cambio de periodo

Deseamos obtener la matriz de transición para periodos distintos (múltiplos o fraccionarios) del periodo proporcionado, T. Esto nos permitirá determinar la probabilidad que un cliente con rating inicial r_i tenga rating r_j al cabo de $x \cdot T$ tiempo.

Ejemplo. Calculemos la probabilidad de pasar de rating AA a rating B en un plazo de dos años disponiendo de la matriz de transición anual.

$$\begin{array}{llll} P(AA \to B;2) = & P(AA \to AAA;1) & \cdot P(AAA \to B;1) & + \\ & P(AA \to AA;1) & \cdot P(AA \to B;1) & + \\ & P(AA \to A;1) & \cdot P(A \to B;1) & + \\ & P(AA \to BBB;1) & \cdot P(BBB \to B;1) & + \\ & P(AA \to BB;1) & \cdot P(BB \to B;1) & + \\ & P(AA \to B;1) & \cdot P(B \to B;1) & + \\ & P(AA \to CCC;1) & \cdot P(CCC \to B;1) & + \\ & P(AA \to default;1) & \cdot P(default \to B;1) & \end{array}$$

Proposición. Sean M_{T_1} y M_{T_2} las matrices de transición para los periodos T_1 y T_2. Entonces, la matriz de transición para el periodo $T_1 + T_2$ es:

$$M_{T_1+T_2} = M_{T_1} \cdot M_{T_2}$$

Corolario. Sean M_T la matriz de transición para el periodo T y $k \in \mathrm{N}$. Entonces:

$$M_{k \cdot T} = M_T^k$$

$$M_{\frac{T}{k}} = \sqrt[k]{M_T}$$

2.2.5. Tasa de morosidad anticipada

2.3. Matriz de correlación sectorial

2.3.1. Definición

blablabla

2.3.2. Ejemplo

blablabla

2.3.3. Propiedades

blablabla

2.4. Value At Risk (VAR)

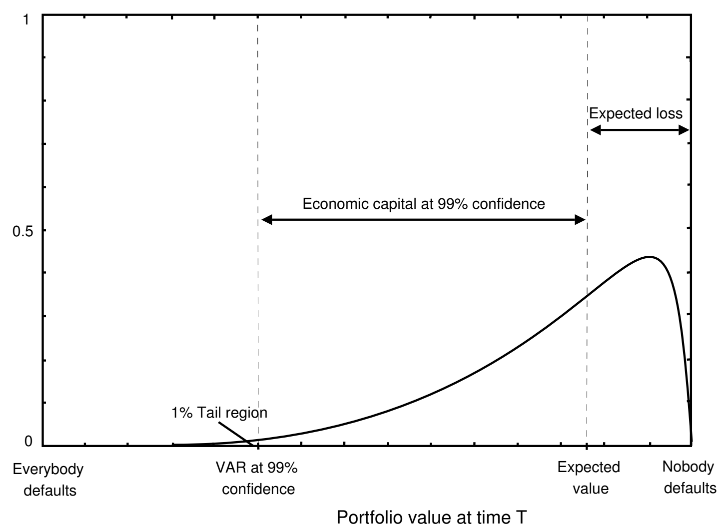


Figura 2.4: Distribución del valor de la cartera y cálculo del VAR

Capítulo 3

Resolución del problema

TODO: que es lo que esperamos: flexibilidad, resultados finos, paralelismo con la valoracion del riesgo de mercado (pe. valoracion de opciones)

3.1. Hipótesis

La única fuente de riesgo es el riesgo de impago. No se contemplan los riesgos de variación de tipos de interés, etc.

El tiempo está repartido uniformemente. blablabla.

Un fallido no se recupera. blablabla.

El valor solamente depende del fallido (no cambia en función del rating). blablabla.

Las probabilidades de fallido no dependen del tiempo. blablabla.

El rating y la recuperación de un cliente no depende de otro cliente. blablabla.

3.2. Reparto del tiempo

3.3. El método de Monte Carlo

3.4. Cópulas. Variables aleatorias correlacionadas

3.4.1. Errores comunes sobre la correlación

Definición. Una copula es la función de distribución de un vector aleatorio sobre $\Re^n$ donde las funciones de distribución marginales son $U[0,1]$.

$$C(u_1, \cdots, u_n) = P\{U_1 \leq u_1, \cdots, U_n \leq u_n\}$$

Proposición. C es una cópula $\iff$ $C : [0,1]^n \to [0,1]$ y cumple las siguientes propiedades:

- $C(x_1, \cdots, x_n)$ es creciente en cada componente x_i
- $C(1, \cdots, 1, x_i, 1, \cdots, 1) = x_i \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}, x_i \in [0,1]$
- $\forall (a_1, \cdots, a_n) \in [0,1]^n$ y $\forall (b_1, \cdots, b_n) \in [0,1]^n$ con $a_i \leq b_i$ se cumple:

$$\sum_{i_1=1}^{2} \cdots \sum_{i_n=1}^{2} (-1)^{i_1+\cdots+x_n} C(x_{1i_1}, \cdots, x_{ni_n}) \geq 0$$

siendo $x_{j1} = a_j$ y $x_{j2} = b_j \quad \forall j \in \{1, \cdots, n\}$

Generación de cópulas normales o arquimedianas. Sea $(Z_1, \cdots, Z_n)$ un vector aleatorio con marginales $Z_i \sim N(0,1)$ con

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

siendo $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ el coeficiente de correlación entre Z_i y Z_j.
Calculamos la raiz de Σ usando el algoritmo de Cholesky. De esta forma obtenemos la matriz triengular inferior

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

que cumple $B \cdot B' = \Sigma$

Generamos una simulación del vector aleatorio $Y = (Y_1, \cdots, Y_n)'$ donde $Y_k \sim N(0,1)$ son variables aleatorias independientes.
Calculamos $Z = B \cdot Y$. El vector aleatorio resultante, Z tiene marginales $Z_k \sim N(0,1)$ y se encuentran correlacionadas según la matriz Σ.
Calculamos $X = (X_1, \cdots, X_n)'$ de la forma:

$$x_i = \Phi^{-1}(y_i)$$

donde $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} dt$

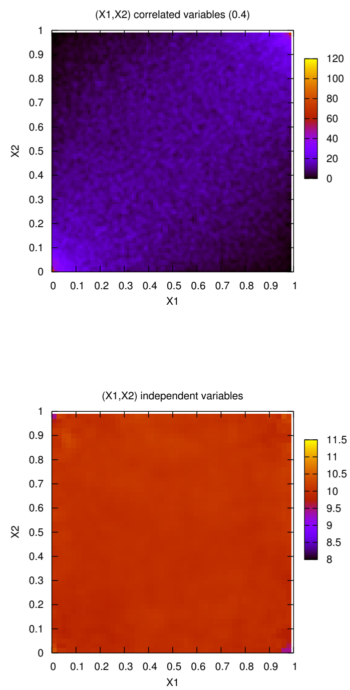


Figura 3.1: Bivariate distribution plot with correlation and independent

3.5. Algoritmo de resolución

Capítulo 4

Implementación de la solución

4.1. Generación de cópulas

TODO: descripción del proceso de generacion de copulas normales

4.2. Simulación de productos

TODO: listado de los productos soportados y descripción del proceso de simulación seguido.

4.3. Proceso de agregación

TODO: descripcion de los agregadores y metodo usado para evitar recalculo de los activos en cada simulacion + Agregación de productos

4.4. Dimensiones del problema

TODO: Estimaciones de uso de memoria, estimación del numero de operaciones, estimacion del tiempo de computo

4.5. Convergencia de la solución

TODO: N´mero de iteraciones necesarias, aceleración de la convergencia usando metodologa antitetic

Capítulo 5

Ejemplos

Los ejemplos de este capítulo se encuentran incluidos en el directorio `samples` de la distribución de CreditCruncher y son reproducibles.

5.1. Impacto de la correlación intrasectorial

Deseamos comprobar el impacto de la correlación entre los clientes de la cartera. Para ello diseñamos el siguiente escenario:

- Número de clientes: 100
- Número de sectores: 1
- Fecha inicial: 01/01/2005
- Número de pasos temporales: 1
- Longitud del paso: 12 meses
- Número de simulaciones: 5000
- Número de activos: 100 (uno por cliente)
- Características de los activos: valen 1 si el cliente está vivo, 0 si ha hecho fallido

Realizamos una simulación considerando que los fallidos son independientes y realizamos otra simulación considerando que existe una correlación de 0,2. En la figura 5.1 se muestra las distribuciones del valor de las carteras obtenidos.
Los ficheros de entrada correspondientes son `samples/sample01.xml` y `samples/sample02.xml`.

5.2. Impacto de la correlación intersectorial

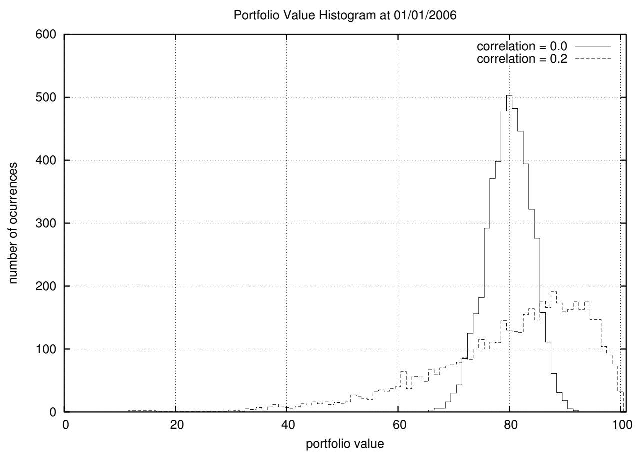

Portfolio Value Histogram at 01/01/2006
correlation = 0.0
correlation = 0.2
number of ocurrences
portfolio value
0
100
200
300
400
500
600
0
20
40
60
80
100

Figura 5.1:

Capítulo 6

Apéndices

6.1. Conceptos básicos de estadística

6.2. Cálculo de la raiz de una matriz

Definición. Diremos que 2 matrices A y B de orden n son semejantes si existe una matriz, P, de orden n con $det(P) \neq 0$ tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Proposición. Si dos matrices A y B son semejantes ($B = P^{-1} \cdot A \cdot P$) entonces:

$$det(A) = det(B)$$

$$B^n = P^{-1} \cdot A^n \cdot P$$

Definición. Diremos que una matriz A de orden n es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal D, o sea, $A = P^{-1} \cdot D \cdot P$ siendo $det(D) \neq 0$.

Proposición. Para que una matriz A sea diagonalizable es necesario y suficiente que:

- Los valores propios de A sean todos reales
- Los n vectores propios de A sean independientes

Proposición. Si una matriz A es diagonalizable ($A = P^{-1} \cdot D \cdot P$) entonces:

- D es una matriz diagonal compuesta por los valores propios de la matriz A
- P es la matriz formada por los vectores propios de la matriz A

Resultado. Sea A la raíz n-esima de una matriz diagonalizable B. Entonces:

$$A^n = B = P^{-1} \cdot D \cdot P \Longrightarrow A = \sqrt[n]{B} = P^{-1} \cdot \sqrt[n]{D} \cdot P$$

6.3. La variable aleatoria de Bernoulli

6.3.1. Definición y propiedades

6.3.2. Simulación

TODO: ampliarla al caso x1, ..., xn. simulacion usando uniforme [0,1] + etc.

6.4. La variable aleatoria normal

6.4.1. Definición y propiedades

$$P(X \leq x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

6.4.2. Simulación

Para la generación de una realización, z, de una variable aleatoria normal $Z \sim N(\mu, \sigma)$ utilizamos el siguiente algoritmo:

$$z = \mu + \sigma \cdot \sqrt{-2 \cdot ln(u_1[0,1])} \cdot cos(2 \cdot \pi \cdot u_2[0,1])$$

donde $u_1[0,1]$ y $u_2[0,1]$ son realizaciones de una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0,1]$.

Bibliografía

[1] Paul Glasserman. Probability models of credit risk. *Columbia Business School*, 2000.

[2] Greg M. Gupton, Christopher C. Finger, and Mickey Bhatia. *CreditMetrics - Technical Document*. J.P. Morgan & Co. Incorporated, 1997.

[3] Ken Phelan and Colin Alexander. Different strokes. *Risk*, 1999.