Conceitos Básicos

INF2604 – Geometria Computacional

Waldemar Celes
celes@inf.puc-rio.br

Departamento de Informática, PUC-Rio

Agenda

Apresentação da disciplina

INF2604 – Geometria Computacional

Programa

INF2604 - Geometria Computacional		
Período: **2019.2**		
Programa (sujeito a alterações)		
Ago	15	Conceitos básicos
	22	Localização de pontos
	29	Interseção de segmentos
Set	5	Polígonos
	12	Fecho convexo
	19	Estruturas topológicas
	28	Triangulação e Delaunay
Out	3	Diagrama de Voronoi
	10	Curvas
	17	Poliedros
	24	Malha de quadriláteros
	31	Aritmética robusta
Nov	7	Estruturas hierárquicas
	14	Demonstração dos trabalhos pontuais
	21	**PROVA**
	28	
Dez	4	**Apresentação de trabalhos finais**

INF2604 – Geometria Computacional

Critério de avaliação

- Avaliações conceituais: 50%
  - Prova: 60%
  - Exercícios: 40%
    - Aluno envia 4,0 pontos de exercícios, conforme sua escolha
- Avaliações práticas: 50%
  - Trabalho final: 40%
  - Trabalhos pontuais: 40%
  - Exercícios práticos: 20%
    - Aluno envia 2,0 pontos de exercícios, conforme sua escolha

INF2604 – Geometria Computacional

Bibliografia

- Discrete and Computational Geometry;
  S. L. Devadoss, J. O'Rourke, 2011
- Computational Geometry, 3rd edition;
  M. de Berg, O. Cheong, M. Kreveld, M. Overmars, 2008
- Computational Geometry in C, 2nd edition;
  J. O'Rourke, 1998
- Delaunay Mesh Generation;
  S Cheng, T. K. Dey, J. R. Shewchuk, 2013
- Polygon Mesh Processing;
  M. Botsch, L. Kobbelt, M. Pauly, P. Alliez, B. Lévy, 2010
- Isosurfaces – Geometry, Topology & Algorithms;
  R. Wenger, 2013

Geometria Afim

Grandezas

- Escalares (α), pontos ($\mathbf{p}$) e vetores ($\vec{v}$)
  - Vetores com direção e magnitude

Operações válidas

$$
\begin{aligned}
\alpha\,\vec{v} &\longrightarrow \vec{w}\\
\vec{v}\,\vec{w} &\longrightarrow \alpha\\
\mathbf{p}-\mathbf{q} &\longrightarrow \vec{v}\\
\mathbf{p}+\vec{v} &\longrightarrow \mathbf{q}
\end{aligned}
$$

Grandezas

- Escalares (α), pontos ($\mathbf{p}$) e vetores ($\vec{v}$)
  - Vetores com direção e magnitude

Operações válidas

$$
\begin{aligned}
\alpha\,\vec{v} &\longrightarrow \vec{w}\\
\vec{v}\,\vec{w} &\longrightarrow \alpha\\
\mathbf{p}-\mathbf{q} &\longrightarrow \vec{v}\\
\mathbf{p}+\vec{v} &\longrightarrow \mathbf{q}
\end{aligned}
$$

- Note que não são válidas:

$$
\begin{aligned}
\alpha\,\mathbf{p}\\
\mathbf{p}+\mathbf{p}
\end{aligned}
$$

Combinação

- Combinação afim
  - Ilegal:

$$\mathbf{p} = \alpha_0 \mathbf{p}_0 + \alpha_1 \mathbf{p}_1, \quad \alpha_0 + \alpha_1 = 1$$

Combinação

- Combinação afim
  - Ilegal:

$$\mathbf{p} = \alpha_0 \mathbf{p}_0 + \alpha_1 \mathbf{p}_1, \quad \alpha_0 + \alpha_1 = 1$$

  - Legal:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \alpha_1 (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$$

Combinação

- Combinação afim
  - Ilegal:

$$\mathbf{p} = \alpha_0 \mathbf{p}_0 + \alpha_1 \mathbf{p}_1, \quad \alpha_0 + \alpha_1 = 1$$

  - Legal:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \alpha_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$$

  - Estendendo para 3 pontos:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \alpha_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) + \alpha_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0)$$

Coordenadas homogêneas

- Ponto/Vetor na dimensão d é representado por uma $(d+1)$-tupla

$$
\begin{array}{llcrcl}
d=1: & x & \longrightarrow & (x,w) & \text{ou} & (w,x) \\
d=2: & (x,y) & \longrightarrow & (x,y,w) & \text{ou} & (w,x,y) \\
d=3: & (x,y,z) & \longrightarrow & (x,y,z,w) & \text{ou} & (w,x,y,z)
\end{array}
$$

Coordenadas homogêneas

- Ponto/Vetor na dimensão d é representado por uma $(d+1)$-tupla

$$
\begin{array}{llclcl}
d=1: & x & \longrightarrow & (x,w) & \text{ou} & (w,x) \\
d=2: & (x,y) & \longrightarrow & (x,y,w) & \text{ou} & (w,x,y) \\
d=3: & (x,y,z) & \longrightarrow & (x,y,z,w) & \text{ou} & (w,x,y,z)
\end{array}
$$

  - Para pontos: $w = 1$
  - Para vetores: $w = 0$

Coordenadas homogêneas

- Ponto/Vetor na dimensão d é representado por uma $(d+1)$-tupla

$$
\begin{array}{llcrcl}
d=1: & x & \longrightarrow & (x,w) & \text{ou} & (w,x) \\
d=2: & (x,y) & \longrightarrow & (x,y,w) & \text{ou} & (w,x,y) \\
d=3: & (x,y,z) & \longrightarrow & (x,y,z,w) & \text{ou} & (w,x,y,z)
\end{array}
$$

- Para pontos: $w = 1$
- Para vetores: $w = 0$
  - Logo: $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ naturalmente resulta em um vetor

Orientação

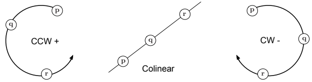
- Operadores relacionais para pontos $(<, =, >)$
  - Orientação de $(d + 1)$ pontos na dimensão d
    - Positiva
    - Zero
    - Negativa

Orientação

- Operadores relacionais para pontos $(<, =, >)$
  - Orientação de $(d+1)$ pontos na dimensão d
    - Positiva
    - Zero
    - Negativa

- Espaço bidimensional $(d = 2)$
  - Positiva: anti-horária
  - Zero: colineares
  - Negativa: horária

$$orient < \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} >= \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y \\ 1 & q_x & q_y \\ 1 & r_x & r_y \end{vmatrix}$$



Orientação

- Espaço tridimensional ($d = 3$)
  - Positiva: parafuso com regra da mão direita
  - Zero: coplanares
  - Negativa: parafuso com regra da mão esquerda

$$orient < \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s} >= \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_z \\ 1 & q_x & q_y & q_z \\ 1 & r_x & r_y & r_z \\ 1 & s_x & s_y & s_z \end{vmatrix}$$

Orientação

- Espaço tridimensional ($d = 3$)
  - Positiva: parafuso com regra da mão direita
  - Zero: coplanares
  - Negativa: parafuso com regra da mão esquerda

$$orient < \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s} >= \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_z \\ 1 & q_x & q_y & q_z \\ 1 & r_x & r_y & r_z \\ 1 & s_x & s_y & s_z \end{vmatrix}$$

- Espaço unidimensional ($d = 1$)
  - Positiva: **p** precede **q**
  - Zero: **p** coincide com **q**
  - Negativa: **q** precede **p**

$$orient < \mathbf{p}, \mathbf{q} >= \begin{vmatrix} 1 & p_x \\ 1 & q_x \end{vmatrix} = q_x - p_x$$

Geometria Euclidiana

Ângulos, áreas e distâncias

- Produto interno

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i}^{d} u_i v_i$$

- Magnitude de vetor

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

- Normalização

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

- Distância entre dois pontos

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$$

Ortogonalidade

- Vetores ortogonais (perpendiculares)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

- Projeção ortogonal
  - Dados $\vec{u}$ e $\hat{v}$, tem-se:

$$\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$$
$$\text{onde: } \vec{u_1} \parallel \hat{v} \text{ e } \vec{u_2} \perp \hat{v}$$

Ortogonalidade

- Vetores ortogonais (perpendiculares)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

- Projeção ortogonal
  - Dados $\vec{u}$ e $\hat{v}$, tem-se:

$$\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$$

$$\text{onde: } \vec{u_1} \parallel \hat{v} \text{ e } \vec{u_2} \perp \hat{v}$$

  - Cálculo das componentes:

$$\vec{u_1} = \vec{u} \cdot \hat{v}$$

$$\vec{u_2} = \vec{u} - \vec{u_1}$$

Ângulo entre vetores

- Ângulo real

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \cos^{-1}(\hat{u}.\hat{v}), \quad \theta \in [0, \pi]$$

Ângulo entre vetores

- Ângulo real

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \cos^{-1}(\hat{u}.\hat{v}), \quad \theta \in [0,\pi]$$

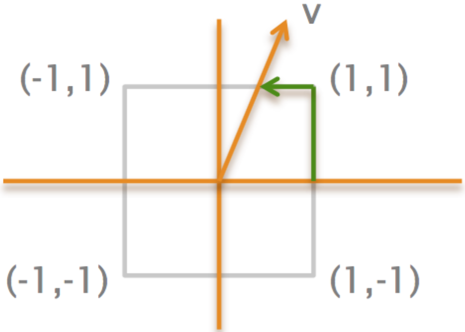
- Pseudo ângulo

$$f(\vec{u},\vec{v}) = 1 - \cos\theta = 1 - \hat{u}.\hat{v}, \quad f(\vec{u},\vec{v}) \in [0,2]$$

Ângulo entre vetores

Pseudo ângulo como perímetro de quadrado

- Imagem no intervalo $[0, 8)$
- Em especial, para ordenação polar
- Baixo custo computacional



Exercício

1. Escreva um pseudo-codigo de uma função para calcular o pseudo-ângulo de um vetor usando apenas 3 comparações, 1 soma e 1 divisão.

Áreas e ângulos

- Área de um triângulo ($\mathbf{pqr}$)

$$A_{\mathbf{pqr}} = \frac{orient < \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} >}{2}$$

  - Em d-dimensão:

$$A = \frac{orient < ... >}{d!}$$

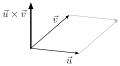
- Ângulo $\angle_{\mathbf{pqr}}$

$$\sin\theta = \frac{orient < \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} >}{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| \, \|\mathbf{r} - \mathbf{q}\|}$$

Áreas e ângulos

Produto vetorial

$$\vec{u} \times \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin\theta \; \hat{n}$$



- Cálculo via determinante

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & i \\ u_2 & v_2 & j \\ u_3 & v_3 & k \end{vmatrix}$$

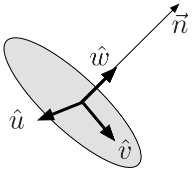
$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\, i + (u_3 v_1 - u_1 v_2)\, j + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\, k$$

- Ângulo entre vetores

$$\theta = \sin^{-1} \|\hat{u} \times \hat{v}\|$$

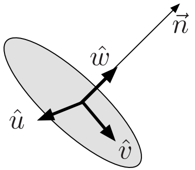
Base ortonormal

- Dado vetor $\vec{n}$, achar base ortonormal $\hat{u}\ \hat{v}\ \hat{w}$, com $\vec{n} \parallel \hat{w}$



Base ortonormal

- Dado vetor $\vec{n}$, achar base ortonormal $\hat{u}\ \hat{v}\ \hat{w}$, com $\vec{n} \parallel \hat{w}$



$$\hat{w} = \hat{n}$$

$$\hat{u} = \hat{w} \times \hat{i}, \quad \text{onde} \quad \hat{i} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\text{se: } \hat{u} \cdot \hat{u} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \hat{i} \parallel \hat{w}$$

$$\text{então: } \hat{u} = \hat{w} \times \hat{j}$$

$$\hat{v} = \hat{w} \times \hat{u}$$

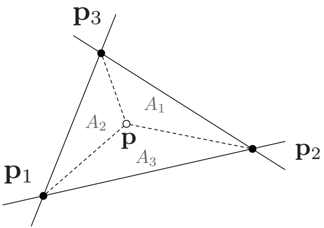
Coordenadas baricêntrica

- Sendo $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$ pontos não colineares, um ponto $\mathbf{p}$ pode ser expresso na forma:

$$\mathbf{p} = \lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2 + \lambda_3\mathbf{p}_3$$

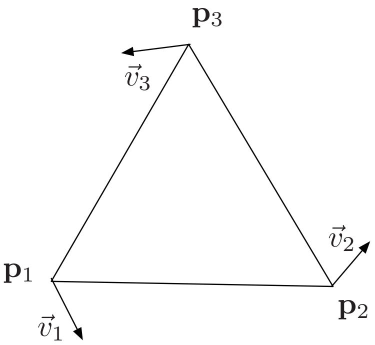
  - λ_1, λ_2 e λ_3 são as **coordenadas baricêntricas** do ponto $\mathbf{p}$ em relação a $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$.

$$\lambda_i = \frac{A_i}{A_T}$$



Exercício

2. Considere a interpolação linear de um campo vetorial $2D$ representado de forma discreta nos vértices de triângulos.



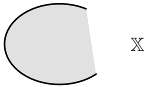
- Determine o ponto de singularidade, isto é, o ponto onde $\vec{v} = \vec{0}$

Topologia

Interior e Fronteira

Considere um conjunto de pontos $\mathbb{X}$

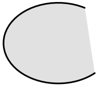
$$\mathbb{X} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d\}$$



Interior e Fronteira

Considere um conjunto de pontos $\mathbb{X}$

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d\}$$



- Interior de $\mathbb{X}$: $int(\mathbb{X})$

$$int(\mathbb{X}) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{X} : \mathbb{N}_{\mathbf{p}} \subseteq \mathbb{X}\}$$

onde $\mathbb{N}_{\mathbf{p}}$ é uma vizinhança local de $\mathbf{p}$

Interior e Fronteira

Considere um conjunto de pontos $\mathbb{X}$

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d\}$$

- Interior de $\mathbb{X}$: $int(\mathbb{X})$

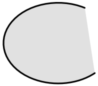
$$int(\mathbb{X}) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{X} : \mathbb{N}_\mathbf{p} \subseteq \mathbb{X}\}$$

onde $\mathbb{N}_\mathbf{p}$ é uma vizinhança local de $\mathbf{p}$

- Fronteira de $\mathbb{X}$: $\partial\mathbb{X}$

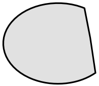
$$\begin{aligned}\partial\mathbb{X} &= cl(\mathbb{X}) - int(\mathbb{X}) \\ &= \{\mathbf{p} \in cl(\mathbb{X}) : \mathbb{N}_\mathbf{p} \not\subseteq \mathbb{X}\}\end{aligned}$$

onde $cl(\mathbb{X})$ é o fecho de $\mathbb{X}$

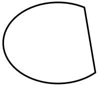


$\mathbb{X}$

$int(\mathbb{X})$



$cl(\mathbb{X})$



$\partial\mathbb{X}$

Interior e Fronteira

Exemplos de $\mathbb{X}$, $int(\mathbb{X})$ e $\partial\mathbb{X}$

Interior e Fronteira

Exemplos de $\mathbb{X}$, $int(\mathbb{X})$ e $\partial\mathbb{X}$

- Disco em 2D

Interior e Fronteira

Exemplos de $\mathbb{X}$, $int(\mathbb{X})$ e $\partial\mathbb{X}$

- Disco em 2D
  - $int(\mathbb{X})$ é o disco aberto
  - $\partial\mathbb{X}$ é a circunferência

Interior e Fronteira

Exemplos de $\mathbb{X}$, $int(\mathbb{X})$ e $\partial\mathbb{X}$

- Disco em 2D
  - $int(\mathbb{X})$ é o disco aberto
  - $\partial\mathbb{X}$ é a circunferência
- Disco em 3D

Interior e Fronteira

Exemplos de $\mathbb{X}$, $int(\mathbb{X})$ e $\partial\mathbb{X}$

- Disco em 2D
  - $int(\mathbb{X})$ é o disco aberto
  - $\partial\mathbb{X}$ é a circunferência
- Disco em 3D
  - $int(\mathbb{X}) = \emptyset$
  - $\partial\mathbb{X} = \mathbb{X}$

Homeomorfismo

- Correspondência um a um contínua nos dois sentidos entre dois espaços topológicos ou entre duas figuras geométricas
  - Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ subconjuntos de $\mathbb{R}^d$,
    existe a função $\mu : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ homeomorfa, um a um contínua,
    e existe μ^{-1}, também um a um contínua

Homeomorfismo

- Uma curva simples é *homeomorfa* ao intervalo unitário $[0, 1]$

Homeomorfismo

- Uma curva simples é *homeomorfa* ao intervalo unitário $[0, 1]$

- Uma curva simples fechada é *homeomorfa* a um disco unitário: $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

Homeomorfismo

- Uma curva simples é *homeomorfa* ao intervalo unitário $[0, 1]$

- Uma curva simples fechada é *homeomorfa* a um disco unitário: $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

- Um cubo é *homeomorfo* a uma esfera

Homeomorfismo

- Uma curva simples é *homeomorfa* ao intervalo unitário $[0, 1]$

- Uma curva simples fechada é *homeomorfa* a um disco unitário: $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

- Um cubo é *homeomorfo* a uma esfera

- Um cubo vazado é *homeomorfo* a um toro

Manifold

- Manifold de dimensão k (*k-manifold*) é um conjunto de pontos cuja **topologia local** é a mesma que $\mathbb{R}^k$
  - Exemplos:
    - Uma curva simples fechada é *1-manifold*
    - A superfície de uma esfera é *2-manifold*

Manifold

- Manifold de dimensão k (*k-manifold*) é um conjunto de pontos cuja **topologia local** é a mesma que $\mathbb{R}^k$
  - Exemplos:
    - Uma curva simples fechada é *1-manifold*
    - A superfície de uma esfera é *2-manifold*

- Manifold de dimensão k com fronteira é um conjunto de pontos cuja **topologica local** é a mesma que $\mathbb{R}^k$ ou que um semi-espaço de $\mathbb{R}^k$.
  - Exemplos
    - Uma superfície 3D limitada é um *2-manifold* com fronteira
    - Uma esfera é um *3-manifold* com fronteira

Exercício

3. Classifique o manifold dos conjuntos abaixo, indicando dimensão e se tem ou não fronteira:
   3.1 $\mathbb{X}$, sendo $\mathbb{X}$ um círculo em $\mathbb{R}^2$
   3.2 $\partial\mathbb{X}$, sendo $\mathbb{X}$ um círculo em $\mathbb{R}^2$
   3.3 $\mathbb{X}$, sendo $\mathbb{X}$ uma esfera em $\mathbb{R}^3$
   3.4 $\partial\mathbb{X}$, sendo $\mathbb{X}$ uma esfera em $\mathbb{R}^3$