La $G = \{0, -0\}$

$a + b$ er OR
$-a$ er not
$a \cdot b$ er XNOR

Regler:

$a - b \equiv a + (-b)$
$a \cdot (a + b) \equiv a - b$
$(a \cdot b) + (a \cdot b) \equiv a \cdot b$

$+, \cdot$ er kommutativt og assosiativt

| a | b | a+b |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | -0 | 0 |
| -0 | 0 | 0 |
| -0 | -0 | -0 |

| a | b | a-b |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | -0 | 0 |
| -0 | 0 | -0 |
| -0 | -0 | 0 |

| a | b | a·b |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | -0 | -0 |
| -0 | 0 | -0 |
| -0 | -0 | 0 |

$a + (a \cdot b)$
$\equiv a + (-b)$
↳ Dette tilfredsstiller distributivitet

Obs at $\cdot$ er den additive bin. operasjonen og $+$ er den multiplikative operasjonen

$\Rightarrow (G, +_0, \cdot_0) \simeq \mathbb{Z}_2$

har at AND er $-(-a + -b)$

$-a - b \equiv -a + (-b) \equiv (-a) + ((-a) \cdot b) \equiv (-a) + (-a \cdot b)$

Komposite objekter:

OR $\equiv a + b$
AND $\equiv (-a - b) \equiv ab(a+b)$
NAND $\equiv -ab(a+b)$
XNOR $\equiv a \cdot b$
XOR $\equiv -ab$
$(a \rightarrow b) \equiv b - a$

NB: Ekvivalens er $a \cdot b$

AND

$-(-a - b) = -0\cdot(-0\cdot a + -0\cdot b)$

$\simeq 1 + ((1+a)(1+b)) = 1 + (1 + b + a + ab)$

$= a + b + ab \simeq \underline{ab(a+b)}$

FULL - ADDER

$S_1: (-((-(ab))c)) = -0\cdot -0\cdot a\cdot b\cdot c = \underline{abc}$

$C_1: \overset{R}{} (-0\cdot(-0\cdot -0\cdot(a\cdot b)) + -0\cdot c)) + (-0(-0\cdot a + -0\cdot b))$

$= (-0\cdot(ab + -0\cdot c)) + (-0(-0\cdot a + -0\cdot b))$

$\mathbb{Z}_2 \simeq (1+((a+b)(1+c))(1+((1+a)(1+b)))$

$= (1+(a+ac+b+bc))(1+(1+b+a+ab))$

$= (1+a+b+(a+b)c)(a+b+ab)$

$= a+b+ab+a^2+ab+a^2b+ab+b^2+ab^2$

$+ (a+b)ac + (a+b)bc + (a+b)abc)$

$= (a+b) + 3ab + a^2 + b^2 + (a+b)(ab+ac+bc+abc)$

$R \simeq (a)(b)(a+b)^3(a+a)(b+b)(ab+(a+b)(a+c)(b+c)(a+b+c)) = *$

$(a+b)(a+b) \simeq (ab)^2 \Rightarrow * = (a^3b^3)(a+b)((ab)+(a+b)(a+c)(b+c)(a+b+c))$

$\mathbb{Z}_2$

$a+b+(a+b)^2+ab+(a+b)(ab+ac+bc+abc)$

$= ( \quad ab + (a+b)(1+ab+ac+bc+abc) = *$

$(a+b)(a+b) \simeq (ab+ab) = ab \not\simeq (a+b)$

$\mathbb{Z}_2$

$* \simeq (a\cdot b)\cdot(a+b)\cdot(ab + (-0\cdot(a+b)(a+c)(b+c)(a+b+c)))$

$(-(a+b)(a+c)(b+c)(a+b+c)) + ab$

$(a+b) + ab(a+b) + ac(a+b) + bc(a+b) + abc(a+b)$

$= a + b + a^2b + ab^2 + a^2c + \cancel{abc} + \cancel{abc} + b^2c + a^2bc + ab^2c$

$= a + b + \cancel{ab} + \cancel{ab} + ac + bc + \cancel{abc} + \cancel{abc} = a + b + ac + bc$

$\simeq ab(a+c)(b+c)$

$* \simeq (a+b)(ab(a+c)(b+c)) = ab(a+b)(a+c)(b+c)$

$C_1: \quad \stackrel{\mathbb{Z}_2}{\simeq} ab + (a+b)(ab + ac + bc + abc)$

$= ab + a^2b + a^2c + abc + a^2bc$
$\quad + ab^2 + abc + b^2c + ab^2c$

$= ab + ab + ac + abc + abc + ab + abc + bc + abc$

$= ab + ac + bc \stackrel{R}{\simeq} \underline{(a+b)(a+c)(b+c)}$

$S_2: \quad \stackrel{R}{\simeq} de\,((a+b)(a+c)(b+c))$

$\stackrel{\mathbb{Z}_2}{\simeq} (d+e) + (ab) + (ac) + (bc)$
$= d + e + ab + ac + bc$

$C_2: \quad \stackrel{R}{\simeq} (d+e)(d+C_1)(e+C_1)$
$= (d+e)(d+((a+b)(a+c)(b+c)))(e + (a+b)(a+c)(b+c))$

$\stackrel{\mathbb{Z}_2}{\simeq} (de) + (d \cdot (ab + ac + bc)) + (e \cdot (ab + ac + bc))$
$= de + (d+e)(ab + ac + bc)$

$\stackrel{R}{\simeq} (d+e)((de) + (a+b)(a+c)(b+c))$
$= (d+e)((de) + C_1)$

$C_n: \quad \stackrel{R}{\simeq} \underline{(k+l)(kl + C_{n-1})}$

En fulladder kan beskrives som:

$S = abc$

$C = (a+b)(ab+c)$