BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

Gleitkommazahlen und Einführung in die Lineare Algebra

Bachelor Medieninformatik
Wintersemester 2019/20

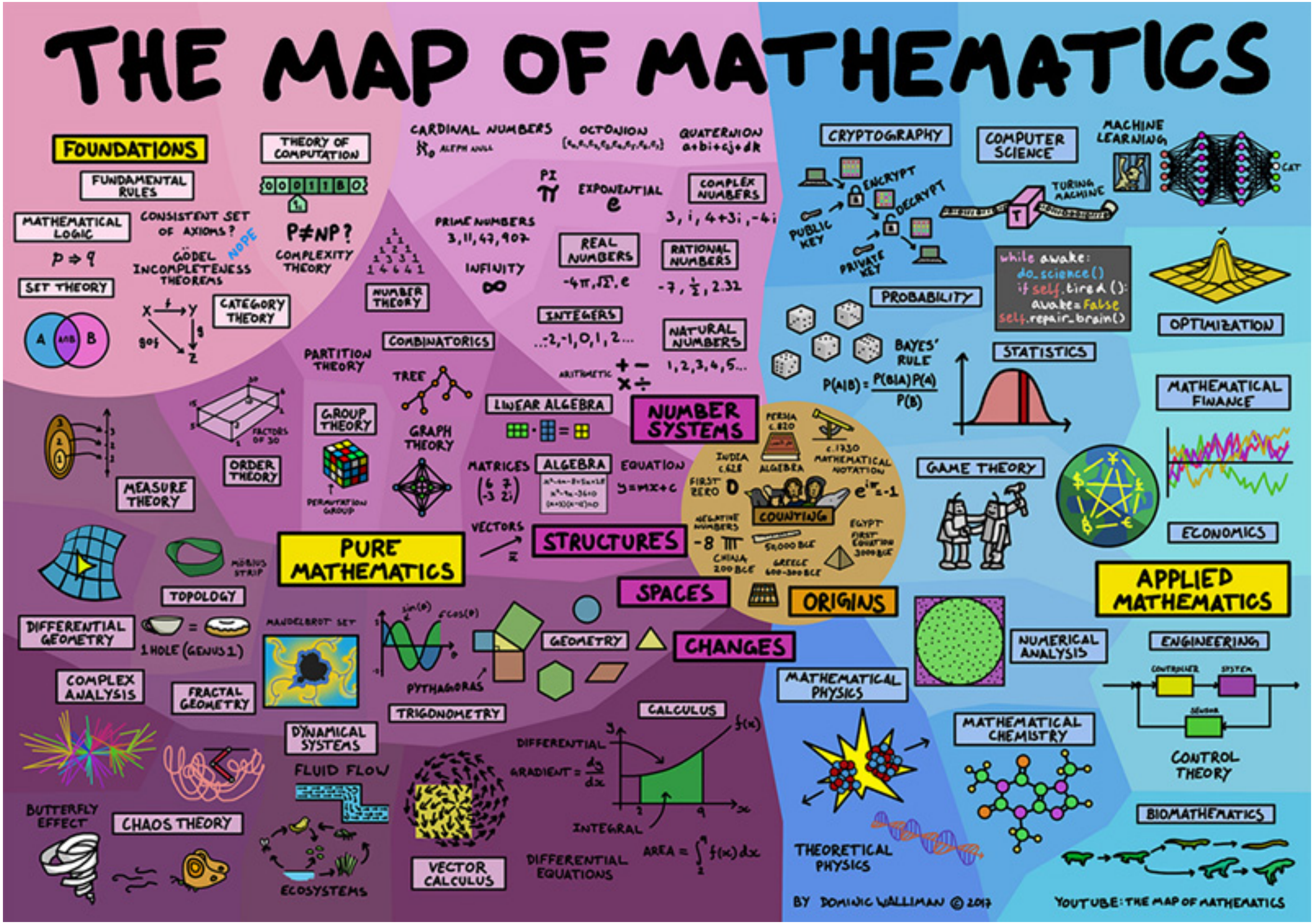
Prof. Dr.-Ing. Kristian Hildebrand
khildebrand@beuth-hochschule.de

Lernziele

- Einführung in Lineare Algebra
  - Vektoren / Matrizen
  - Operationen
  - etc.
- Wie funktionieren Gleitkommazahlen?
  - Definition
  - Probleme
  - Beispiele

Linear Algebra

http://immersivemath.com/ila/



THE MAP OF MATHEMATICS
FOUNDATIONS
THEORY OF COMPUTATION
FUNDAMENTAL RULES
MATHEMATICAL LOGIC
CONSISTENT SET OF AXIOMS?
NOPE
GÖDEL INCOMPLETENESS THEOREMS
P≠NP?
COMPLEXITY THEORY
SET THEORY
CATEGORY THEORY
A
B
CARDINAL NUMBERS
ALEPH NULL
OCTONION
QUATERNION
a+bi+cj+dk
PI
EXPONENTIAL
e
COMPLEX NUMBERS
3, i, 4+3i, -4i
PRIME NUMBERS
3, 11, 47, 907
INFINITY
REAL NUMBERS
-4π, √2, e
RATIONAL NUMBERS
-7, 1/2, 2.32
NUMBER THEORY
INTEGERS
...-2, -1, 0, 1, 2...
NATURAL NUMBERS
1, 2, 3, 4, 5...
ARITHMETIC
+ −
× ÷
PARTITION THEORY
COMBINATORICS
TREE
GROUP THEORY
GRAPH THEORY
PERMUTATION GROUP
ORDER THEORY
MEASURE THEORY
LINEAR ALGEBRA
NUMBER SYSTEMS
MATRICES
ALGEBRA
EQUATION
y=mx+c
VECTORS
STRUCTURES
PURE MATHEMATICS
SPACES
CHANGES
MÖBIUS STRIP
TOPOLOGY
DIFFERENTIAL GEOMETRY
1 HOLE (GENUS 1)
MANDELBROT SET
sin(θ)
cos(θ)
PYTHAGORAS
GEOMETRY
TRIGONOMETRY
COMPLEX ANALYSIS
FRACTAL GEOMETRY
DYNAMICAL SYSTEMS
FLUID FLOW
CALCULUS
DIFFERENTIAL
GRADIENT = dy/dx
f(x)
INTEGRAL
AREA = ∫ f(x) dx
DIFFERENTIAL EQUATIONS
BUTTERFLY EFFECT
CHAOS THEORY
ECOSYSTEMS
VECTOR CALCULUS
PERSIA c.820
c.1730 MATHEMATICAL NOTATION
INDIA c.628 FIRST ZERO
ALGEBRA
COUNTING
NEGATIVE NUMBERS
CHINA 200 BCE
50,000 BCE
GREECE 600-300 BCE
EGYPT FIRST EQUATION 3000 BCE
ORIGINS
CRYPTOGRAPHY
ENCRYPT
DECRYPT
PUBLIC KEY
PRIVATE KEY
COMPUTER SCIENCE
TURING MACHINE
MACHINE LEARNING
CAT
while awake:
do_science()
if self.tired():
awake=False
self.repair_brain()
OPTIMIZATION
PROBABILITY
BAYES' RULE
P(A|B) = P(B|A)P(A) / P(B)
STATISTICS
MATHEMATICAL FINANCE
GAME THEORY
ECONOMICS
APPLIED MATHEMATICS
NUMERICAL ANALYSIS
ENGINEERING
CONTROLLER
SYSTEM
SENSOR
CONTROL THEORY
MATHEMATICAL PHYSICS
MATHEMATICAL CHEMISTRY
THEORETICAL PHYSICS
BIOMATHEMATICS
BY DOMINIC WALLIMAN © 2017
YOUTUBE: THE MAP OF MATHEMATICS

Warum ist Lineare Algebra in der Medien-Informatik so wichtig?

- **Repräsentation**
  - 3D Punkte im Raum mit denen wir rechnen können
  - 2D Punkte im Bild, deren Zusammenhänge interessant sein können
  - nD Datenpunkte für Datenauswertung oder Ähnliches

- **Transformationen**
  - Geometrische Transformationen
  - Kombination von 3D und 2D Punkte

- **Berechnung von Unbekannten**
- **Auswertung von Messwerten**
- Vieles kann in Matrizen dargestellt werden

Skalare, Vektoren, Matrizen und Tensoren

- **Skalar:**
  - Skalar ist einfach eine Zahl $n \in R$

- **Vektor:**
  - Ein Vektor ist ein Array von Zahlen
  - Die Zahlen sind in einer bestimmten Reihenfolge geordnet

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

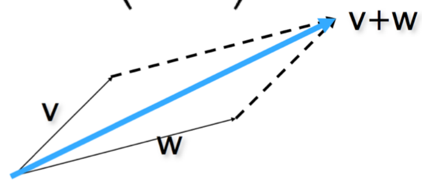
- **Matrix:**
  - Eine Matrix ist ein 2D Array von Zahlen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \\ A_{1,0} & A_{1,1} \\ A_{2,0} & A_{2,1} \end{bmatrix}$

- **Tensoren:**
  - Array mit mal als 2-Achsen $A_{i,j,k}$

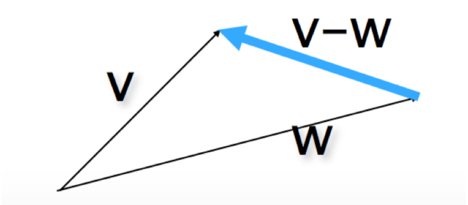
Demo

2D Vektoren

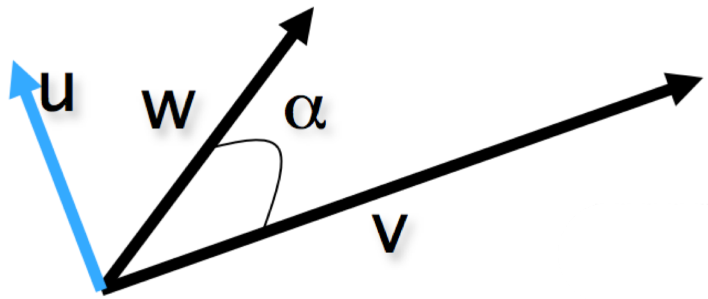
- Definition $\mathbf{v} = (x_1, x_2)$
- Länge $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}}$
- Winkel $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$
- Vektoraddition



- Vektorsubtraktion



Kreuzprodukt

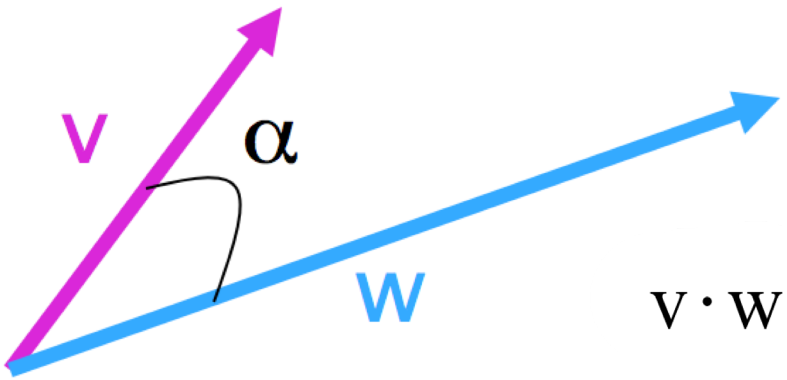


$$u = v \times w$$

$$u \perp v \Rightarrow u \cdot v = (v \times w) \cdot v = 0$$

$$u \perp w \Rightarrow u \cdot w = (v \times w) \cdot w = 0$$

Skalarprodukt



$$v \cdot w = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$v \cdot w = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = \| v \| \cdot \| w \| \cos\alpha$$

$$\text{if} \quad v \perp w, \quad v \cdot w = 0$$

Vektorlänge / Normen

- Messung der Länge eines Vektors oder auch zwischen Vektoren

$$||x||_p = \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad p \geq 1$$

- p = 2: Euklische Distanz/Länge
  - Werte steigen zu Beginn sehr wenig

- p = 1: Manhattan Distanz

Operationen auf Matrizen

- Addition $$C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$$
- Multiplikation
  http://matrixmultiplication.xyz/
  $$\mathbf{C_{i,j}} = \sum \mathbf{A_{i,k} B_{k,j}}$$
- Transponierte $$(AB)^T = B^T A^T$$
- Division / Multiplikation mit der Inversen:

$$A^{-1}A = I$$

Demo

Gleichungssysteme

- lineare Gleichungssysteme lassen sich folgendermaßen formal aufschreiben:

$$
\begin{aligned}
Ax &= b \\
A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\
Ix &= A^{-1}b \\
x &= A^{-1}b
\end{aligned}
$$

- **A** ist eine bekannte Matrix
- **b** ist ein bekannter Vektor
- **x** ein Vektor mit unbekannten Variablen

Demo

Lineare Abhängigkeit

- LGS kann eine, keine oder unendlich viele Lösungen haben
- Es existiert eine Lösung nur dann, wenn **A** eine Inverse hat
- Linearkombination

geometrische Interpretation

$$Ax = \sum_i x_i A_{i,:}$$

- Lösung des LGS nur wenn **b** in linearer Hülle liegt
  - Bsp. 3x2 Matrix mit 2D x
  - Bsp. 2x2 Matrix mit identischen Spalten (lineare Abhängigkeit)

- **A** muss eigentlich quadratisch sein m=n linear unabhängige Spalten haben
  - wenn nicht, dann singulär und Determinante 0
  - Lösung immer noch möglich aber nicht mehr über Inverse

Gleitkommazahlen

Gleitkommazahlen

- Was sind Gleitkommazahlen?
- Warum sind Gleitkommazahlen gefährlich?
- Warum ist nicht jeder numerische Algorithmus gut?
    - Genauigkeit
    - Performance

Darstellung einer Gleitkommazahl

- Gleitkommazahl besteht aus 3 Teilen:
  - **Basis b**: Die Basis bestimmt bezüglich welcher Basis die Zahlen dargestellt werden
  - **Mantisse m**: Die Mantisse enthält die Ziffern der Gleitkommazahl. Je mehr Ziffern man abspeichert, umso genau ist die Darstellung.
  - **Exponent e**: Der Exponent speichtert die Position des Kommas und damit der Größenordnung der Zahl.

$$m \cdot b^e$$

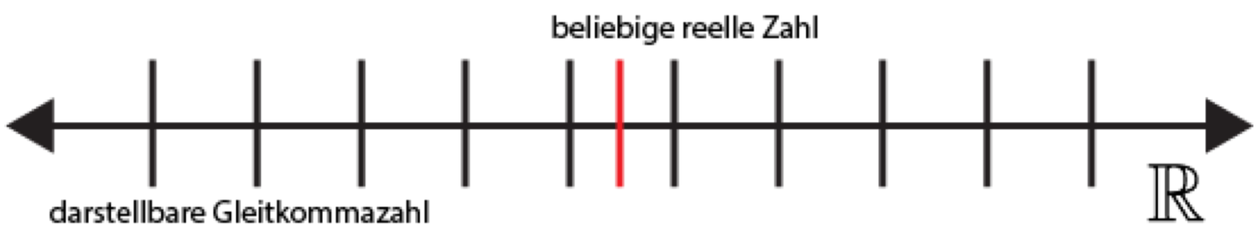
Demo

$$123,45678 = 1,2345678 \times 10^2$$

Gleitkommazahlen

- Basis b = 2 wird im Computer verwendet
- IEEE 64-Bit Gleitkommazahl
  - 1 Bit für das Vorzeichen
  - 11-Bit für den Exponenten
  - 52-Bit für die Mantisse

- Probleme:
  - manche reelle Zahlen sind nicht darstellbar
  - Auslöschung



Demo