Modellbasierter Entwurf

BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

Name, Vorname	
Matrikelnummer	
Studiengang	
Unterschrift	**Tag der Prüfung:** 02. April 2020 „online“

Bitte beachten!

1. Prüfen Sie, ob Ihre Klausur vollständig ist. Sie muss aus den durchnummerierten Seiten von 1 bis 8 bestehen. Nehmen Sie die Klausur bitte nicht auseinander. Falls Sie ein unvollständiges Exemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte eine einwandfreie Klausur aushändigen.
2. Zum Bestehen der Klausur sind 50% der Punktzahl - Summe der Punkte aus der Laborübung plus erreichte Punkte der Klausur - erforderlich.
3. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
4. Außer einfachen (nicht programmierbaren) Taschenrechnern sind keine Hilfsmittel zugelassen.
5. Das Betreiben von Mobiltelefonen und Computern ist im Prüfungsraum nicht erlaubt.
6. Schreiben Sie bitte gut leserlich und nicht mit Bleistift. Ihre Klausur wird ansonsten nicht gewertet. Lassen Sie einen Korrekturrand von mindestens 4 cm frei.
7. Mit der Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie prüfungsfähig sind und zu Beginn der Klausur die vollständigen Unterlagen erhalten haben.

Anmerkung: Maximale Punktzahl= 120 Punkte, 100% = 100 Punkte

(Punkte/Note: 95/1,0; 90/1,3; 85/1,7; 80/2,0; 75/2,3; 70/2,7; 65/3,0; 60/3,3; 55/3,7; 50/4.0)

Aufgabe	1	2	3	4	Projekt	Summe	
erreichbare Punkte	20	30	30	15	25	120	
erreichte Punkte							Note:

Ort und Datum: Unterschrift:

Aufgabe 1 Numerische Differentiation

Punkte **20**

Gegeben ist folgende Gleichung:

$$f(x) = \frac{2}{5} \cdot x^2 - \frac{2}{5} x^3$$

a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion $f(x)$ analytisch. [5 Pkt.]

b) Bestimmen Sie den Vorwärts-Differenzen-Quotienten erster Ordnung im Intervall $I = [-2 : 2]$ im äquidistanten Abstand $h = 0.5$ (die Rechnungen sind auf drei Nachkommastellen durchzuführen). [5 Pkt.]

c) Bestimmen Sie die Fehlergröße des Differenzen-Quotienten zur analytischen Lösung mit $\epsilon = \dot{f}(x) - D_{f+,x_i}$. [5 Pkt.]

d) Bestimmen Sie den symmetrischen Differenzen-Quotienten zweiter Ordnung D''_{f,x_i} im Intervall $I = [-2 : 2]$ im äquidistanten Abstand von $h = 0.5$. [5 Pkt.]

Tragen Sie Ihre Ergebnisse in die gegebene Tabelle ein.

x	$f(x)$	D_{f+,x_i}	$\dot{f}(x)$	ϵ	D''_{f,x_i}
-2					
-1.5					
-1					
-0.5					
0					
0.5					
1					
1.5					
2					

Lösung:

a) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion analytisch. [5 Pkt.]

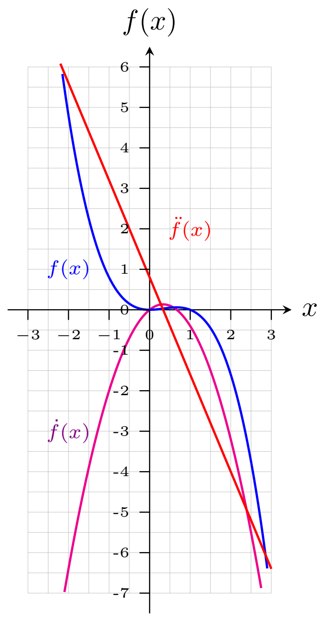
$$f(x) = \frac{2}{5} \cdot x^2 - \frac{2}{5} \cdot x^3$$

Die erste Ableitung berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} \dot{f}(x) &= \frac{4}{5} \cdot x - \frac{6}{5}x^2 \\ &= \frac{2}{5} \cdot \left(2 \cdot x - 3 \cdot x^2\right) \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} \ddot{f}(x) &= \frac{4}{5} - \frac{12}{5} \cdot x \\ &= \frac{4}{5} \cdot \left(1 - 3 \cdot x\right) \end{aligned}$$



b) Bestimmen Sie die Vorwärts-Differenzen-Quotienten erster Ordnung im Intervall $I = [-2 : 2]$ im äquidistanten Abstand $h = 0.5$ (Die Rechnungen sind auf drei Nachkommastellen durchzuführen). [5 Pkt.]

c) Bestimmen Sie die Fehlergröße der Differenzen-Quotinenten zur analytischen Lösung. [5 Pkt.]

d) Bestimmen Sie die symmetrischen Differenzen-Quotienten zweiter Ordnung im Intervall $I = [-2 : 2]$ im äquidistanten Abstand $h = 0.5$. [5 Pkt.]

x	$f(x)$	D_{f+,x_i}	$\dot{f}(x)$	ϵ	D''_{f,x_i}
-2	4,800	-5,100	-6,400	-1,300	
-1,5	2,250	-2,900	-3,900	-1,000	4,400
-1	0,800	-1,300	-2,000	-0,700	3,200
-0,5	0,150	-0,300	-0,700	-0,400	2,000
0	0,000	0,100	0,000	-0,100	0,800
0.5	0,050	-0,100	0,100	0,200	-0,400
1	0,000	-0,900	-0,400	0,500	-1,600
1,5	-0,450	-2,300	-1,500	0,800	-2,800
2	-1,600		-3,200		

Punkte **30**

Aufgabe 2 2D-Faltung und numerische Differentiation

Gegeben ist der eindimensionle, symetrische Differenzenquotient 2. Ordnung

$$\begin{aligned} D''_{f,x_i} &= \frac{f(x_{i+h}) - 2 \cdot f(x_i) + f(x_{i-h})}{(x_{i+h} - x_i)^2} \\ &= \frac{f(x_{i+h}) - 2 \cdot f(x_i) + f(x_{i-h})}{h^2} \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie für den Differenzenquotient 2. Ordnung die horizontale als auch die vertikale Maske in Form von Matrizen zur Berechnung von $\underline{F}''_x, \underline{F}''_y$ bzw. $\underline{F}''_{x,y}$ für eine diskrete, zweidimensionale Matrize $\underline{F}_{xy}$. Annahme: $h = 1$. [5 Pkt.]

$$\underline{D}''_x = \frac{1}{\sum |d[m,n]|} \cdot \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\underline{D}''_y = \frac{1}{\sum |d[m,n]|} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$D''_{xy} = \frac{1}{\sum |\dots|} \cdot \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Gradienten in x- und y-Richtung mittels Faltung. [10 Pkt.]
Gegeben ist folgende Matrize:

$$\underline{F}_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}''_x = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix} * \underbrace{\frac{1}{\dots} \cdot \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}_{\underline{D}''_x} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}''_y = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix} * \underbrace{\frac{1}{\dots} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}}_{\underline{D}''_y} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

c) Beweisen Sie, dass die Filtermaske D''_{xy} separierbar ist. Führen Sie jede Teilrechnung durch! [15. Pkt]

Hinweis: $\underline{F}''_{xy} = \underline{F}_{xy} * \underline{D}''_{xy} = \left(\underline{F}_{xy} * \underline{D}''_{x}\right) * \underline{D}''_{y} = \left(\underline{F}_{xy} * \underline{D}''_{y}\right) * \underline{D}''_{x}$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} D_x^{''} &= \frac{f(x_{i+h}, y_j) - 2 \cdot f(x_i, y_j) + f(x_{i-h}, y_j)}{(x_{i+h} - x_i)^2} \\ &= f(x_{i+1}, y_j) - 2 \cdot f(x_i, y_j) + f(x_{i-1}, y_j) \\ &\text{mit } h = 1, x_{i+h} - x_i = 1 \end{aligned}$$

In Matrizenschreibweise: $\underline{D}_x^{''} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} D_y^{''} &= \frac{f(x_i, y_{j+h}) - 2 \cdot f(x_i, y_j) + f(x_i, y_{j-h})}{(y_{j+h} - y_j)^2} \\ &= f(x_i, y_{j+1}) - 2 \cdot f(x_i, y_j) + f(x_i, y_{j-1}) \\ &\text{mit } h = 1, y_{j+h} - y_j = 1 \end{aligned}$$

In Matrizenschreibweise: $\underline{D}_y^{''} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \underline{D}_{x,y}^{''} &= \underline{D}_x^{''} * \underline{D}_y^{''} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} * \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die Gradienten in x- und y-Richtung mittels Faltung. [10 Pkt.]
Gegeben ist folgende Matrize:

$$\underline{F}(x_i, y_j) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}_x^{''} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix} * \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{D}_x^{''}} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & -23 & 16 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & -34 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}_y^{''} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix} * \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{D}_y^{''}} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 2 & 1 & -2 & -7 \\ -7 & -14 & -23 & -34 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix}$$

c) Beweisen Sie, dass die Filtermaske D''_{xy} separierbar ist.

$$\underline{F}''_{xy} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix} * \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{D}''_x} \right] * \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{D}''_y}$$

$$= \left[\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & -23 & 16 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & -34 & 25 \end{pmatrix} \right] * \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{D}''_y}$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & -23 & 16 \\ 2 & -3 & -2 & -2 & 12 & -7 \\ -7 & 0 & -2 & -2 & 45 & -34 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & -34 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}''_{xy} = \underline{F}_{xy} * \underline{D}''_{xy}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix} * \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & -23 & 16 \\ 2 & -3 & -2 & -2 & 12 & -7 \\ -7 & 0 & -2 & -2 & 45 & -34 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & -34 & 25 \end{pmatrix}$$

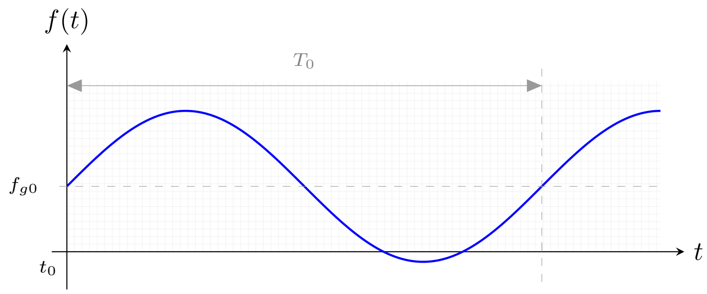
Aufgabe 3 Numerische Integration

Punkte
30

Gegeben ist das Signal

$$f(t) = f_{g0} + \hat{f} \cdot \sin(\omega t),$$

$$\text{mit } f_{g0} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ und } \hat{f} = 1.$$



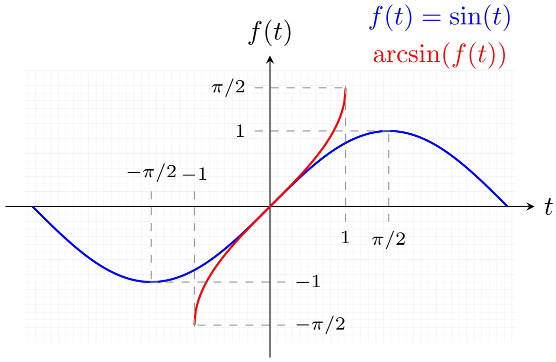
Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie analytisch den Gleichrichtwert der Funktion $f(t)$. [15 Pkt.]

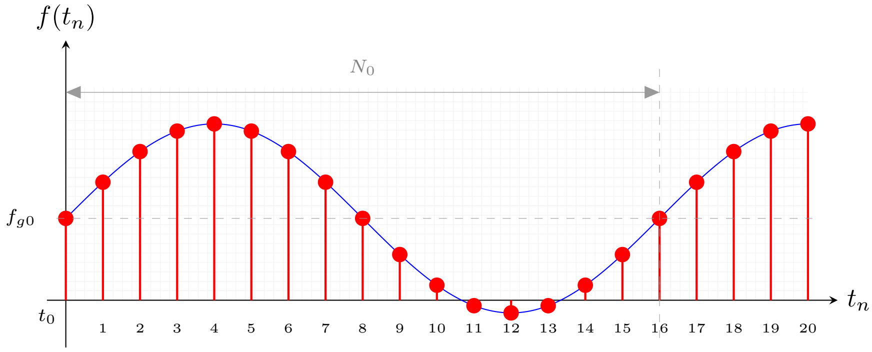
$$\text{Definition:} \quad \overline{|f|} = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_0} |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Integrationsgrenzen!

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$



b) Bestimmen Sie mittels numerischer Integration den Gleichrichtwert und berechnen Sie den Fehler. Verwenden Sie die Quadraturformel. [15 Pkt.]



t_n	$f(t_n)$	F_i	$\sum_{i=0}^{n-1} F_i$	t_n	$f(t_n)$	F_i	$\sum_{i=0}^{n-1} F_i$
0	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,00000$	0,866025	0,866025	9	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,38268$		
1	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,38268$			10	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,70711$		
2	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,70711$			11	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,92388$		
3	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,92388$			12	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 1,0000$		
4	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 1,0000$			13	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,92388$		
5	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,92388$			14	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,70711$		
6	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,70711$			15	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,38268$		
7	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,38268$			16	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,00000$		
8	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,00000$						

Lösung:

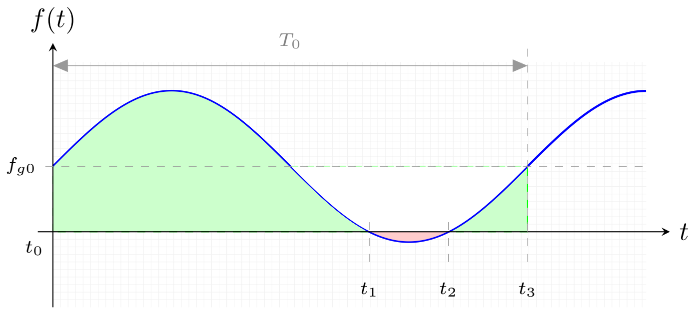
a) Da $f_{g0} < \hat{f}$ gilt, sind die Nulldurchgänge des Signal $f(t) = f_{g0} + \hat{f} \cdot \sin(\omega\ t)$ gemäß der Abbildung verschoben. Es gilt also, die Integrationsgrenzen zu bestimmen. Für die Nulldurchgänge gilt:

$$f_{g0} + \hat{f} \cdot \sin(\omega\ t_0) = 0$$

Umstellen nach t_0 führt zu:

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \cdot \arcsin\left(-\frac{f_{g0}}{\hat{f}}\right)$$

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{\omega} \cdot \arcsin(-\sqrt{3}/2) \\ &= -\frac{T_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\pi}{3} \\ &= -\frac{T_0}{6} \end{aligned}$$



Da die arcsin-Funktion im Intervall von $\varphi = \left[-\pi/2, \pi/2\right]$ eingeschränkt ist, muss das analytische Ergebnis verschoben werden. Als Integrationsgrenzen ergeben sich:

$$t_1 = \frac{T_0}{2} + \frac{T_0}{6} = \frac{2}{3}T_0$$

$$t_2 = T_0 - \frac{T_0}{6} = \frac{5}{6}T_0$$

Probe:

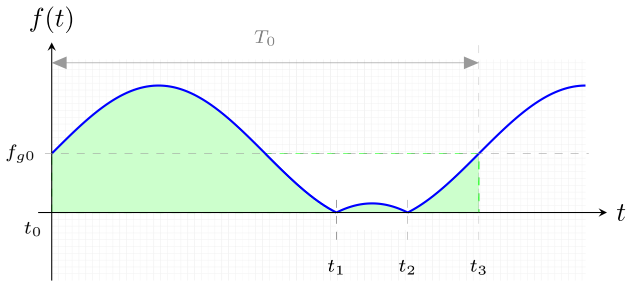
$$\begin{aligned} f(t_1) &= \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\frac{2T_0}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t_2) &= \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\frac{5T_0}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot \sin\left(\frac{10\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{aligned}$$

Für den Gleichrichtwert gilt nun:

$$\overline{|f|} = \frac{1}{T_0} \cdot \int\limits_{t_0}^{t_0+T_0} |f(t)| \; \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T_0} \cdot \left[\int\limits_{t_0=0}^{t_1} f(t) \; \mathrm{d}t - \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t) \; \mathrm{d}t + \int\limits_{t_2}^{t_3=T_0} f(t) \; \mathrm{d}t \right]$$



Das Minuszeichen für den Ausdruck $\int\limits_{t_1}^{t_2} f(t) \; dt$ ergibt sich daraus, dass das Integral in diesem Abschnitt negativ wird, durch die Gleichrichtung (Betragsfunktion) aber die Teilwelle nach oben (positiv) geklappt wird. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\overline{|f|} =& \frac{1}{T_0} \cdot \int\limits_{t_0=0}^{t_2} \left[f_{g0} + \hat{f} \cdot \sin(\omega \; t) \right] \; \mathrm{d}t \\
&- \frac{1}{T_0} \cdot \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[f_{g0} + \hat{f} \cdot \sin(\omega \; t) \right] \; \mathrm{d}t \\
&+ \frac{1}{T_0} \cdot \int\limits_{t_2}^{t_3} \left[f_{g0} + \hat{f} \cdot \sin(\omega \; t) \right] \; \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Lösen der Integralgleichung führt zu:

$$\begin{aligned}
\overline{|f|} =& \frac{1}{T_0} \cdot \left[f_{g0} \cdot t - \frac{\hat{f}}{\omega} \cdot \cos(\omega \; t) \right] \Bigg|_{t_0}^{t_1} \\
&- \frac{1}{T_0} \cdot \left[f_{g0} \cdot t - \frac{\hat{f}}{\omega} \cdot \cos(\omega \; t) \right] \Bigg|_{t_1}^{t_2} \\
&+ \frac{1}{T_0} \cdot \left[f_{g0} \cdot t - \frac{\hat{f}}{\omega} \cdot \cos(\omega \; t) \right] \Bigg|_{t_2}^{t_3}
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\overline{|f|} =& \frac{f_{g0}}{T_0} \left(t_1 - 0 - t_2 + t_1 + T_0 - t_2 \right) \\
&- \frac{\hat{f}}{2 \; \pi} \cdot \left[\cos\left(\frac{2 \; \pi \cdot t_1}{T_0} \right) - \cos\left(\frac{2 \; \pi \cdot 0}{T_0} \right) \right] \\
&+ \frac{\hat{f}}{2 \; \pi} \cdot \left[\cos\left(\frac{2 \; \pi \cdot t_2}{T_0} \right) - \cos\left(\frac{2 \; \pi \cdot t_1}{T_0} \right) \right] \\
&- \frac{\hat{f}}{2 \; \pi} \cdot \left[\cos\left(\frac{2 \; \pi \cdot T_0}{T_0} \right) - \cos\left(\frac{2 \; \pi \cdot t_2}{T_0} \right) \right]
\end{aligned}$$

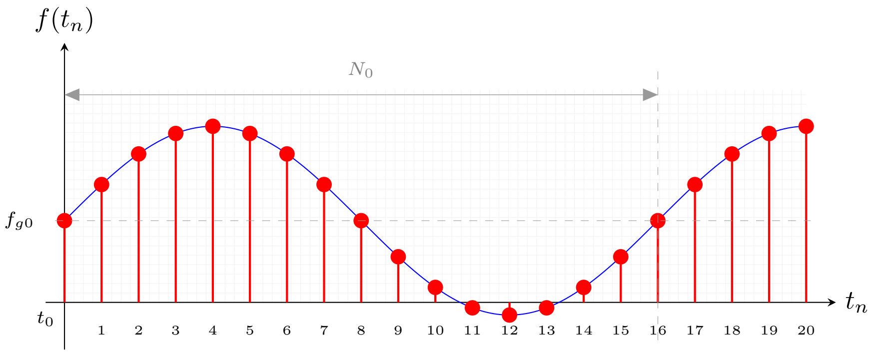
$$\overline{|f|} = 2\ f_{g0} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{t_1 - t_2}{T_0}\right] + \frac{\hat{f}}{\pi} \cdot \left[\cos\frac{2\ \pi \cdot t_2}{T_0} - \cos\frac{2\ \pi \cdot t_1}{T_0}\right]$$

Einsetzen der Nullstellen führt zu:

$$t_1 = \frac{2}{3}\ T_0 \quad \text{und} \quad t_2 = \frac{5}{6}\ T_0$$

$$\begin{aligned}\overline{|u|} &= 2\ u_{0g} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{\frac{2}{3}\ T_0 - \frac{5}{6}\ T_0}{T_0}\right] + \frac{\hat{u}_0}{\pi} \cdot \left[\cos\frac{2\ \pi \cdot \frac{5}{6}\ T_0}{T_0} - \cos\frac{2\ \pi \cdot \frac{2}{3}\ T_0}{T_0}\right] \\ &= \sqrt{3}\ V \cdot \frac{2}{6} + \frac{1\ V}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\pi}\right)\ V \\ &= 0,89566\ V\end{aligned}$$

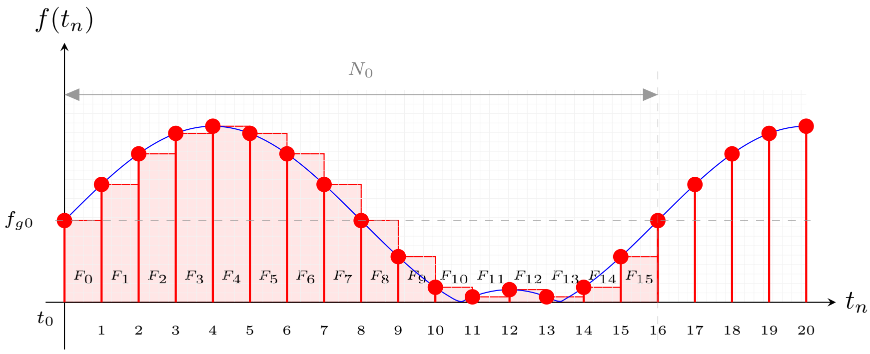
b) Bestimmen Sie mittels numerischer Integration den Gleichrichtwert und berechnen Sie den Fehler. Verwenden Sie die Quadraturformel. [7,5 Pkt.]



t_n	$f(t_n)$	F_i	$\sum_{i=0}^{n-1} F_i$	t_n	$f(t_n)$	F_i	$\sum_{i=0}^{n-1} F_i$
0	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,00000$	0,866025	0,866025	9	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,38268$	0,483342	13,30491
1	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,38268$	1,248709	2,11473	10	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,70711$	0,158919	13,46383
2	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,70711$	1,573132	3,68787	11	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,92388$	0,057854	13,52168
3	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,92388$	1,789905	5,47777	12	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 1,0000$	0,133975	13,65566
4	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 1,0000$	1,866025	7,34380	13	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,92388$	0,057854	13,71351
5	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,92388$	1,789905	9,13370	14	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,70711$	0,158919	13,87243
6	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,70711$	1,573132	10,70683	15	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,38268$	0,483342	14,35577
7	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,38268$	1,248709	11,95554	16	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,00000$	0,866025	
8	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,00000$	0,866025	12,82157				

$$F_n = I_n(f) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx (b-a) \cdot \sum_{i=0}^{n} \sigma_i\ f(x_i)$$

- $I(f)$: lineares Funktional der Quadraturformel
- $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$: paarweise Stützstellen
- $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathbb{R}$: reelle Gewichte



$$F_n = \sum_{i=0}^{15} F_i = 14,35577$$

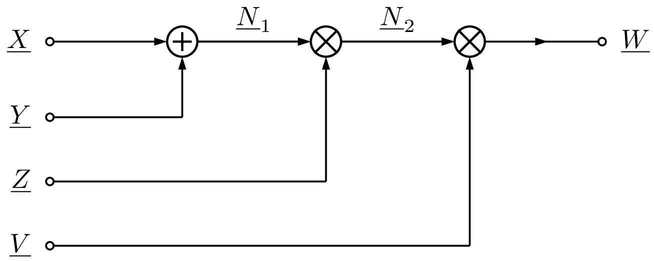
$$\overline{|u|}_n = \frac{1}{N_0} \cdot \sum_{i=0}^{15} F_i = \frac{14,35577}{16} = 0,89724\ V$$

$$\Delta\overline{|u|} = 0,89566\ V - 0,89724\ V = -1,5756\ mV$$

Punkte **15**

Aufgabe 4 System und Zahlendarstellungen

Gegeben ist folgendes Systemschaltbild:



Gesucht ist eine Realisierung für einen FPGA-Baustein. Die Busbreite vor und nach jeder arithmetischen Operation kann den Erfordernissen derart angepasst werden, damit kein Überlauf erfolgt.

Für die Variablen gelten folgende Zahlenformate:

$\underline{X}$: uINT 9-Bit

$\underline{Y}$: INT 10-Bit, 2er-Komplement

$\underline{Z}$: UQ1.4

V : Konstante UQ0.2

Aufgabenstellung:

a) Bestimmen Sie die mindest-erforderliche Busbreite für das gegebene Systemschaltbild vor und nach jeder arithmetischen Operation in Abhängigkeit der gültigen Zahlenformate. Geben Sie das dazugehörige, aus den arithmetischen Operationen resultierende Zahlenformat an. [10 Pkt.]

b) Beweisen sie die Richtigkeit, indem Sie dem Systemschaltbild entsprechende Berechnungen auf Bit-Ebene und/oder gemäß dem Stellenwertsystem durchführen. Hinweis: Betrachten Sie die Zahlenextreme pro Variable. [5 Pkt]

Lösung:

a) Eine Bewertung erfolgt über den abbildbaren Zahlenraum je Variable:

$$\underline{X}: \text{uINT 9-Bit;} \quad X \in \{0, \ldots, 511\}_{10}$$
$$\underline{Y}: \text{INT 10-Bit, 2er Komplement;} \quad Y \in \{-512, \ldots, 511\}_{10}$$
$$\underline{Z}: \text{UQ1.4}$$
$$V: \text{Konstante UQ0.2}$$

Für die Summe $\underline{N}_1$ gilt:

$$N_{1,a} = \max\{X\} + \max\{Y\} = 511 + 511 = 1022 \ (\rightarrow \text{10-Bit uINT, 11-Bit INT})$$
$$N_{1,b} = \max\{X\} + \min\{Y\} = 511 - 512 = -1 \ (\rightarrow \text{10-Bit INT})$$
$$N_{1,c} = \max\{X\} + \min\{Y\} = 511 - 1 = 500 \ (\rightarrow \text{10-Bit INT})$$
$$N_{1,d} = \max\{X\} + \{Y\} = 511 + 1 = 512 \ (\rightarrow \text{10-Bit uINT, 11-Bit INT})$$
$$N_{1,e} = \{X\} + \max\{Y\} = 1 + 511 = 512 \ (\rightarrow \text{10-Bit uINT, 11-Bit INT})$$

		-1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	
	$d(c)_{11}$	d_{10}	d_9	d_8	d_7	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0	
$\underline{X}$		0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$= 511_{10}$
$\oplus\ \underline{Y}$		0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$= 511_{10}$
$\underline{N}_1$		0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	$= 1022_{10}$
$\underline{X}$		0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$= 511_{10}$
$\oplus\ \underline{Y}$		1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$= -512_{10}$
$\underline{N}_1$		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$= -1_{10}$
$\underline{X}$		0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$= 511_{10}$
$\oplus\ \underline{Y}$		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$= -1_{10}$
$\underline{N}_1$		0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	$= 500_{10}$

$$N_1: \text{11-Bit INT;} \quad N_1 \in \{-1024, \ldots, 1023\}_{10}$$

Alternativer Beweis:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^8 \\ &= 2 \cdot 2^8 \\ &= 1 \cdot 2^9 \qquad \rightarrow \text{10-Bit für uINT, 11-Bit für INT} \end{aligned}$$

	$d(c)_{13}$	-2048 d_{11}	1024 d_{10}	512 d_9	256 d_8	128 d_7	64 d_6	32 d_5	16 d_4	8 d_3	4 d_2	2 d_1	1 d_0	1/2 $.d_{-1}$	1/4 d_{-2}	1/8 d_{-3}	1/16 d_{-4}	
$\underline{N}_1$		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
$\underline{PP}_0$		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	0	0	0	• MSB
$\oplus$ $\underline{PP}_1$		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	0	0	.•
$\oplus$ $\underline{PP}_2$		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	0	•
$\oplus$ $\underline{PP}_3$		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	•
$\oplus$ $\underline{PP}_4$		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• - LSB
$\underline{N}_2$		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	

$$N_2 = 1023 + 1023/2 + 1023/4 + 1023/8 + 1023/16 = 1982,1 \quad \text{(11-Bit uINT, 12-Bit INT)}$$

$$N_2 = -1024 - 512 - 256 - 128 - 64 = -1984 \quad \text{(11-Bit uINT, 12-Bit INT)}$$

	$d(c)_{13}$	-2048 d_{11}	1024 d_{10}	512 d_9	256 d_8	128 d_7	64 d_6	32 d_5	16 d_4	8 d_3	4 d_2	2 d_1	1 d_0	1/2 $.d_{-1}$	1/4 d_{-2}	1/8 d_{-3}	1/16 d_{-4}	
$\underline{N}_1$	1023	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	
$\underline{PP}_0$	1023	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1 - MSB
$\oplus$ $\underline{PP}_1$	511,5	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	.1
$\underline{PS}_{01}$	1534,5	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	
$\oplus$ $\underline{PP}_2$	255,75	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
$\underline{PS}_{02}$	1790,2	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	
$\oplus$ $\underline{PP}_3$	127,875	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
$\underline{PS}_{03}$	1918,1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	
$\oplus$ $\underline{PP}_4$	63,9375	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\underline{N}_2$	1981,1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	

	$d(c)_{13}$	-2048 d_{11}	1024 d_{10}	512 d_9	256 d_8	128 d_7	64 d_6	32 d_5	16 d_4	8 d_3	4 d_2	2 d_1	1 d_0	1/2 $.d_{-1}$	1/4 d_{-2}	1/8 d_{-3}	1/16 d_{-4}	
$\underline{N}_1$	-1024	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$\underline{PP}_0$	-1024	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1 - MSB
$\oplus\ \underline{PP}_1$	-512	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.1
$\underline{PS}_{01}$	-1536	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$\oplus\ \underline{PP}_2$	-256	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$\underline{PS}_{02}$	-1792	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$\oplus\ \underline{PP}_3$	-128	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$\underline{PS}_{03}$	-1920	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$\oplus\ \underline{PP}_4$	-64	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$\underline{N}_2$	-1984	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

$$N_2 : \text{Q12.4}; \quad X \in \{-2048, \ldots, 2043, 9375\}_{10}$$

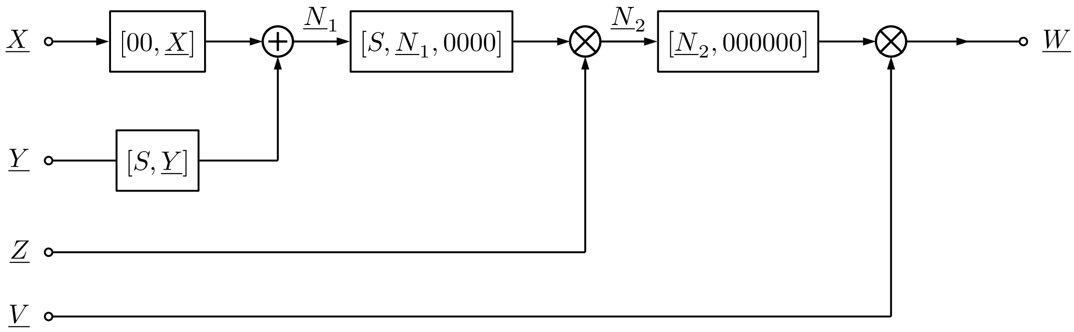
	$d(c)_{13}$	-2048 d_{11}	1024 d_{10}	512 d_9	256 d_8	128 d_7	64 d_6	32 d_5	16 d_4	8 d_3	4 d_2	2 d_1	1 d_0	1/2 $.d_{-1}$	1/4 d_{-2}	1/8 d_{-3}	1/16 d_{-4}	1/32 d_{-5}	1/64 d_{-6}	
$\underline{N}_2$		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			
$\underline{PP}_0$		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		.1
$\underline{PP}_1$		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	.1

$$W = 2047,9375/2 + 2047,9375/4 = 1536 \quad (\text{Q12.6})$$

$$W = -2048/2 - 2048/4 = -1536 \quad (\text{Q12.6})$$

	$d(c)_{13}$	-2048 d_{11}	1024 d_{10}	512 d_9	256 d_8	128 d_7	64 d_6	32 d_5	16 d_4	8 d_3	4 d_2	2 d_1	1 d_0	1/2 $.d_{-1}$	1/4 d_{-2}	1/8 d_{-3}	1/16 d_{-4}	1/32 d_{-5}	1/64 d_{-6}
$\underline{N}_2$	2047,9375	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
$\underline{PP}_0$	2047,9375/2	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
$\underline{PP}_1$	2047,9375/4	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\underline{W}$	1536	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1

$$W : \text{Q12.6}; \quad W \in \{-2048, \ldots, 2047, 98438\}_{10}$$



$$N_1 : \text{11-Bit INT}; \quad N_1 \in \{-1024, \ldots, 1023\}_{10}$$

$$N_2 : \text{Q12.4}; \quad N_2 \in \{-2048, \ldots, 2043{,}9375\}_{10}$$

$$W : \text{Q12.6}; \quad W \in \{-2048, \ldots, 2047{,}98438\}_{10}$$

Notizen: