自适应有限元方法对于求解具有不连续系数的椭圆问题的有效性

第五组：李东虔　路娜　孙宇乐　李霖峰

湘潭大学

数学与计算科学学院

2022 年 11 月 30 日

Contents

数学模型

椭圆形微分方程:

$$-div(a(x)\nabla u) = f \quad in\ \Omega \tag{1}$$

$$u = 0 \quad on\ \partial\Omega \tag{2}$$

其中，Ω 是 $R^d(d=2,3)$ 中的多面体区域，源项 $f \in L^2(\Omega)$，系数 $a(x)$ 为分片常值函数，且 $a(x) > 0$。

模型背景：复合材料中的稳态热传导，非均匀多孔介质中的多相流动等。

公式以及一些记号

表 1: 符号说明

符号	含义
$\mathcal{M}_H$	区域 Ω 的正则三角剖分
K	$K \in \mathcal{M}_H$，即某个三角单元
$\mathcal{B}_H$	所有 K 的内部边的集合
e	$e \in \mathcal{B}_H$，即某个内边
Ω_e	$\cup_{e\in K_i} K_i$，即共享边 e 的两个单元 K
H_K	单元 K 的直径
H_e	内边 e 的直径

公式以及一些记号

后验误差估计子 1(BM 法):

$$\eta_e^2 := \sum_{K\in\Omega_e} ||H_K f||_{L^2(K)}^2 + ||H_e^{\frac{1}{2}} J_e||_{L^2(\Omega)}^2 \tag{3}$$

其中，$J_e := [\![a\nabla u_H]\!]_e \cdot \nu$ 为跳量，ν 为 e 的单位法向量。跳量的出现是因为共享 e 的两个单元 K^+, K^- 中，$a\nabla u_H$ 是不连续的。对应的后验误差估计为:

$$||u - u_H||_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \sum_{e\in\mathcal{B}_H} \eta_e^2 \tag{4}$$

其中，常数 C 依赖于系数 $a(x)$，当 $a(x)$ 在不同区域量级 $\frac{max_{x\in\Omega}\, a(x)}{min_{x\in\Omega}\, a(x)}$ 相差很大时，这个后验误差估计将不准确。

公式以及一些记号

后验误差估计子 2(BV 法):
重新定义能量范数:

$$|||v|||_\Omega = ||a^{\frac{1}{2}}\nabla v||_{L^2(\Omega)}$$

可导出新的后验误差估计子为:

$$\eta_e^2 := \sum_{K\in\Omega_e} \left\| H_K a_K^{-\frac{1}{2}} f \right\|_{L^2(K)}^2 + \left\| H_e^{\frac{1}{2}} a_e^{-\frac{1}{2}} J_e \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{5}$$

a_K 是 $a(x)$ 在单元 $K \in \mathcal{M}_H$ 上的常数值，且 $a_e = max_{K\in\Omega_e}(a_K)$。对应的后验误差估计为:

$$|||u - u_H|||_\Omega^2 \leq C \sum_{e\in\mathcal{B}_H} \eta_e^2 \tag{6}$$

其中，常数 C 与系数 $a(x)$ 无关，当 $a(x)$ 在不同区域量级变化时，对 C 没有影响。要求：系数函数 $a(x)$ 满足拟单调条件。

Remark

本文在此基础上进行了创新，在后验误差估计子 2 中加入了一个修正系数。

公式以及一些记号

定义 1 (拟单调条件-quasi-monotone condition)

我们称 a_K 是关于点 x 的拟单调函数，如果满足条件:
对于 $\forall K \subset \omega_x$，都 $\exists K_{x,qm} \subset \omega_x$，且 $K \cup C_x \subset K_{x,qm}$ 使得:

$$a_K \leq a_{K'} \quad \forall K' \subset K_{x,qm}, \quad K' \in \mathcal{M}_H.$$

若 x 是一个边界节点，则额外要求 $meas_{d-1}(\partial K_{x,qm} \cap \partial\Omega > 0)$，即每个极大值都与边界相邻。其中 $K_{x,qm}$ 为 Lipschitz set，$meas_{d-1}(\cdot)$ 为 $d-1$ 维的测度。

不满足拟单调条件的节点称为奇异点。

定义 2 (极大值-local maximum)

给定内点 x，我们称在 K_i 处取得极大值，且极大值为系数分布函数 $a(x)$ 在 K_i 处的取值:
如果 $a_{K_i} > a_{K_j}$ 对于任意与 K_i 有公共边的 $K_j \in \omega_x$ 均成立。

公式以及一些记号

拟单调举例，如图:

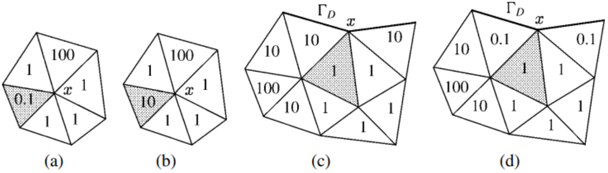

图 1: 拟单调例子

对于点 x:
(a) 中的极大值为 100，系数分布函数为拟单调的。
(b) 中的极大值为 100 和 10，系数分布函数不为拟单调的，因为有 2 个不相等的极大值。
(c) 中系数分布函数为拟单调的，因为极大值为 10 且在与边界相邻的单元片处取得。
(d) 中系数分布函数不为拟单调的，因为虽然只有 1 个极大值为 1，但不在与边界相邻的单元片处取得。

创新点之一——新的后验误差估计子

椭圆问题(1)和(2)的后验误差估计为:

$$|||u-u_H|||_{\Omega}^2 \leq C_1 \sum_{e\in\mathcal{B}_H} \eta_e^2 \tag{7}$$

其中，常数 C_1 仅仅依赖于三角剖分 $\mathcal{M}_H$ 的最小角。后验误差估计子为:

$$\eta_e^2 := \sum_{K\in\Omega_e} \wedge_K \left\| H_K a_K^{-\frac{1}{2}} f \right\|_{L^2(K)}^2 + \wedge_e \left\| H_e^{\frac{1}{2}} a_e^{-\frac{1}{2}} J_e \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{8}$$

其中，$\wedge_e = max_{K\in\Omega_e} \wedge_K$。在远离奇异点的单元中 $\wedge_K = 1$。

其他

1. 基于后验误差估计子，自适应算法的过程为

$$Solve \to Estimate \to Refine/Coarsen \tag{9}$$

2. 迭代终止准则。

算法(9)的终止准则是：如果对于给定的任意的 $\varepsilon > 0$，后验误差估计满足 $\sum_{e\in\mathcal{B}_H}\eta_e^2 \leq \varepsilon$ 时停止迭代。但是对于上述后验误差分析来说，有一个未知的常数 C_1，使得该终止准则不能使用。
采用方法：记 $\mathcal{M}_k$ 为算法(9)在第 k 次迭代中产生的有限元网格，u_k 是对应的数值解，$\eta_k^2 = \sum_{e\in\mathcal{B}_k}\eta_e^2$ 是第 k 次迭代的后验误差估计。计算后验误差估计减少率 $\frac{\eta_k}{\eta_0}$ 则提供了相对误差 $\frac{|||u-u_k|||_\Omega}{|||u-u_0|||_\Omega}$ 的一些信息，故终止准则为：如果对于给定的任意的 $\varepsilon > 0$，后验误差估计满足 $\frac{\eta_k}{\eta_0} \leq \varepsilon$，计算中止。

其他

3. 文章主要内容分布。
第二节证明了新的后验误差估计。

第三节根据文献【14】中的方法证明了利用新的后验误差估计子的自适应算法(9)的收敛性。特别地，证明了自适应算法的降低率取决于因子 $max_{K\in\mathcal{M}_H}\wedge_K$，举反例证明这个因子不能去掉。

第四节数值实验。以二维问题为例证明了新的后验误差估计的正确性，讨论算法受参数 θ 的影响性，记录算法误差下降率受因子 $max_{K\in\mathcal{M}_H}\wedge_K$ 的影响性。特别地，证明了对于所提出的自适应算法，网格和相关的数值复杂度都是近似最优的：$|||u-u_k|||_\Omega = CDOFs(k)^{-\frac{1}{2}}$ 和 $||u-u_k||_{L^\infty(\Omega)} = CDOFs(k)^{-1}$ 是有效渐进的，其中 $DOFs(k)$ 是网格 $\mathcal{M}_k$ 的自由度。

Contents

变分问题

开集 $G\subset R^d$，$H^1(G)$ 表示 $L^2(G)$ 中函数的标准 $Sobolev$ 空间，它的一阶导数也在 $L^2(G)$ 中。范数 $|||\cdot|||_G$ 定义为 $|||v|||_G^2=(a\nabla v,\nabla v)_G$，当 $G=\Omega$ 时等价于 $H_0^1(\Omega)$ 范数。$(\cdot,\cdot)_\Omega$ 表示 $L^2(G)$ 内积，简记 $(\cdot,\cdot)=(\cdot,\cdot)_\Omega$。对于任意的 $f\in L^2(\Omega)$，问题(1)和(2)的弱形式为：

$$u\in H_0^1(\Omega):\quad (a\nabla u,\nabla v)=(f,v)\ \ \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{10}$$

V_H 是 $\mathcal{M}_H$ 的线性有限元空间，且 $V_0^H=V^H\cap H_0^1(\Omega)$。$u_H\in V_0^H$ 是离散问题的解：

$$u_H\in V_0^H:\quad (a\nabla u_H,\nabla v_H)=(f,v_H)\ \ \forall v_H\in V_0^H. \tag{11}$$

对于任意的单元 $K\in\mathcal{M}_H$ 和边 $e\in\mathcal{B}_H$，有

$$\omega_K=\cup\{K'\in\mathcal{M}_H:\bar{K}'\cap\bar{K}\neq\emptyset\},\quad \omega_e=\cup\{K'\in\mathcal{M}_H:\bar{K}'\cap\bar{e}\neq\emptyset\}.$$

⋆

$$\wedge_K := \begin{cases} max_{K' \in \omega_K}(\frac{a_k}{a_{K'}}) & if\ K\ has\ one\ singular\ node. \\ 1 & otherwise. \end{cases} \tag{12}$$

$$\eta_e^2 := \sum_{K \in \Omega_e} \wedge_K \left\| H_K a_K^{-\frac{1}{2}} f \right\|_{L^2(K)}^2 + \wedge_e \left\| H_e^{\frac{1}{2}} a_e^{-\frac{1}{2}} J_e \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{13}$$

其中，$\wedge_e = max_{K \in \Omega_e} \wedge_K$。

分析过程

Theorem 1

存在一个常数 $C_1 > 0$ 仅仅依赖于三角剖分 $\mathcal{M}_H$ 的最小角，使得成立

$$|||u - u_H|||_\Omega^2 \leq C_1 \sum_{e \in \mathcal{B}_H} \eta_e^2. \tag{14}$$

分析过程

$Proof:$
证明遵循标准后验误差分析中的论证。利用 robust 插值，
$r_H : H_0^1(\Omega) \to V_0^H$，满足如下两个估计式：

$$a_K^{\frac{1}{2}}||\phi - r_H\phi||_{L^2(K)} \le C \wedge_K^{\frac{1}{2}} H_K^{\frac{1}{2}} |||\phi|||_{w_K} \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),\ \forall K \in \mathcal{M}_H, \quad (15)$$

$$a_e^{\frac{1}{2}}||\phi - r_H\phi||_{L^2(e)} \le C \wedge_e^{\frac{1}{2}} H_e^{\frac{1}{2}} |||\phi|||_{w_e} \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),\ \forall e \in \mathcal{B}_H. \quad (16)$$

远离奇异点处有 $\wedge_K = 1$，(10)减去(11)式再分部积分得：对于任意的 $\phi \in H_0^1(\Omega)$，有

$$(a\nabla(u - u_H), \nabla\phi) = \sum_{K \in \mathcal{M}_H} (f, \phi - r_H\phi)_K + \sum_{e \in \mathcal{B}_H} \int_e J_e(\phi - r_H\phi)ds \quad (17)$$

利用(15)可得

$$\begin{aligned}(f, \phi - r_H\phi)_K &\le ||f||_{L^2(K)}||\phi - r_H\phi||_{L^2(K)} \\ &\le C \wedge_K^{\frac{1}{2}} ||H_K a_K^{-\frac{1}{2}} f||_{L^2(K)} |||\phi|||_{\omega_K}.\end{aligned}$$

对任意的单元 $K \in \mathcal{M}_H$ 将上式相加，再利用网格的正则性估计，可得

$$\sum_{K \in \mathcal{M}_H} (f, \phi - r_H\phi)_K \leq C\Big(\sum_{K \in \mathcal{M}_H} \wedge_K \| H_K a_K^{-\frac{1}{2}} f \|_{L^2(K)}^2\Big)^{\frac{1}{2}} |||\phi|||_\Omega.$$

同理，利用(16)可得

$$\sum_{e \in \mathcal{B}_H} \int_e J_e(\phi - r_H\phi)\, ds \leq C\Big(\sum_{e \in \mathcal{B}_H} \wedge_e \| H_e a_e^{-\frac{1}{2}} J_e \|_{L^2(e)}^2\Big)^{\frac{1}{2}} |||\phi|||_\Omega.$$

在(17)中取 $\phi = u - u_H$。
即证。

分析过程

Theorem 2

存在常数 $C_2, C_3 > 0$，仅仅依赖于三角剖分 $\mathcal{M}_H$ 的最小角，使得对于任意的 $e \in \mathcal{B}_H$ 成立

$$\eta_e^2 \le C_2 \wedge_e \sum_{K \in \Omega_e} |||u - u_H|||_K^2 + C_3 \wedge_e \sum_{K \in \Omega_e} ||H_K a_K^{-\frac{1}{2}} (f - f_K)||_{L^2(K)}^2,$$

其中 $f_K = \frac{1}{|K|} \int_K f dx, \wedge_e = max_{K \in \Omega_e} (\wedge_K)$.

该定理证明见文献【19】。

分析过程

1. 因子 $\wedge_e$ 不能去掉，具体见附录例子。
2. 在实际应用中，可能会有大量不同的奇异点。在这种情况下，在每次自适应迭代中，可能很难区分程序中的所有奇异点。那么就需要一个放大的后验误差估计：

$$\bar{\eta}_e^2 := \sum_{K\in\Omega_e} \bar{\wedge}_K \left\| H_K a_K^{-\frac{1}{2}} f \right\|_{L^2(K)}^2 + \bar{\wedge}_e \left\| H_e^{\frac{1}{2}} a_e^{-\frac{1}{2}} J_e \right\|_{L^2(e)}^2$$

其中，$\bar{\wedge}_K = max_{K'\in\omega_K}(\frac{a_K}{a_{K'}})$，$\bar{\wedge}_e = max_{K\in\omega_e}\bar{\wedge}_K$，在远离奇异单元上 $\bar{\wedge}_K = 1$。

Contents

数据振荡项

数据振荡项表达式:

$$osc(f, \mathcal{M}_H) := \Big(\sum_{K \in \mathcal{M}_H} ||H_K a_K^{-\frac{1}{2}} (f - f_K)||_{L^2(K)}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \tag{18}$$

其中 f_K 表示 f 在单元 K 上的平均值，即 $f_K = \int_K \frac{f}{|K|} dx$.

精化策略

Morin-Nochetto-Siebert(MNS)-refinement strategy
给定两个参数 $0 < \theta, \hat{\theta} < 1$，

1. 选择内边 $\mathcal{B}_H$ 的子集 $\hat{\mathcal{B}}_H$ 使得
$$\Big(\sum_{e\in\hat{\mathcal{B}}_H} \eta_e^2\Big)^{\frac{1}{2}} \geq \theta\Big(\sum_{e\in\mathcal{B}_H} \eta_e^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$
2. 记 $\hat{\mathcal{M}}_H$ 是至少有一条边在 $\hat{\mathcal{B}}_H$ 中的所有单元的集合，扩大 $\hat{\mathcal{M}}_H$，使得
$$osc(f, \hat{\mathcal{M}}_H) \geq \hat{\theta}\, osc(f, \mathcal{M}_H).$$
3. 用这样的方法优化 $\hat{\mathcal{M}}_H$ 中的每个单元，这样在单元内部就创建了节点。

通过 Galerkin 正交可以证明其收敛性。

一些引理

Lemma 1

如果 $\mathcal{M}_h$ 是 $\mathcal{M}_H$ 的局部细化，使得 $V^H \subset V^h$，那么下式成立：

$$|||u - u_h|||_\Omega^2 = |||u - u_H|||_\Omega^2 - |||u_h - u_H|||_\Omega^2.$$

Lemma 2

令 $\mathcal{M}_h$ 是 $\mathcal{M}_H$ 的局部细化，那么存在常数 $C_4, C_5 \geq 1$，仅依赖于网格 $\mathcal{M}_H$ 的最小角度，使得对于任意的 $e \in \hat{\mathcal{B}}_H$ 有

$$\eta_e^2 \leq C_4 \wedge_e \sum_{K\in\Omega_e} |||u_h - u_H|||_K^2 + C_5 \wedge_e \sum_{K\in\Omega_e} ||H_K a_K^{-\frac{1}{2}} (f - f_K)||_{L^2(K)}^2 \quad (19)$$

其中，$\wedge_e = max_{K\in\Omega_e}(\wedge_K)$.

因为局部下界中因子 $\wedge_e$ 的存在，使得(19)式测量误差减小，这对误差减少率有很大影响。$\wedge_e$ 在远离奇异点的两侧等于 1。
记 $\wedge = max_{K\in\mathcal{M}_H}(\wedge_K)$，把(19)式中的 $e\in\hat{\mathcal{B}}_H$ 相加可得

$$\sum_{e\in\hat{\mathcal{B}}_H}\eta_e^2 \leq 2C_4\wedge|||u_h-u_H|||_\Omega^2+2C_5\wedge osc(f,\mathcal{M}_H)^2.$$

根据精化策略第一步和定理 2 可以得到

$$\begin{aligned}|||u-u_H|||_\Omega^2 &\leq C_1\sum_{e\in\mathcal{B}_H}\eta_e^2\\ &\leq C_1\theta^{-2}(2C_4\wedge|||u_h-u_H|||_\Omega^2+2C_5\wedge osc(f,\mathcal{M}_H)^2)\end{aligned}$$

即

$$|||u_h-u_H|||_\Omega^2 \geq \frac{\theta^2}{2C_1C_4\wedge}|||u-u_H|||_\Omega^2-\frac{C_5}{C_4}osc(f,\mathcal{M}_H)^2.$$

一些引理

根据引理 1，可得

$$|||u-u_h|||_\Omega^2 \le \alpha^2|||u-u_H|||_\Omega^2+\frac{C_5}{C_4}osc(f,\mathcal{M}_H)^2,\ \alpha=(1-\frac{\theta^2}{2C_1C_4\wedge})^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

Lemma 3

记 $\gamma \in (0,1)$ 是与一个细化步骤相关联的单元大小的缩减系数，给定 $\hat{\theta}\in(0,1)$，$\hat{\alpha}=(1-(1-\gamma^2)\hat{\theta}^2)^{\frac{1}{2}}$，$\mathcal{M}_h$ 是根据 *MNS* 精化策略得到的网格 $\mathcal{M}_H$ 的细化，那么有

$$osc(f,\mathcal{M}_h)\le\hat{\alpha}\,osc(f,\mathcal{M}_H). \quad (21)$$

基于这些引理以及性质(20)，可以得到如下减小误差的性质：

Theorem 3

记 $\beta \in \mathbf{R}$ 满足 $max(\alpha, \hat{\alpha}) < \beta < 1$，令

$$C_0 = (|||u - u_0|||_\Omega^2 + \frac{C_5}{C_4(\beta^2 - min(\alpha, \hat{\alpha})^2)} osc(f, \mathcal{M}_0)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

那么利用局部后验误差估计子(13)，基于 *MNS* 精化策略的自适应算法产生了一个离散解的收敛序列 $\{u_k\}_{k\geq 1}$，使得 $|||u - u_k|||_\Omega \leq C_0\beta^k$。

$Proof:$

记 $a_k = |||u - u_k|||_{\Omega}^2$，$b_k = \frac{C_5}{C_4} osc(f, \mathcal{M}_k)^2$，

由(20)和(21)可得

$$a_{k+1} \leq \alpha^2 a_k + b_k, \;\; b_k \leq \hat{\alpha}^2 b_{k-1}. \tag{22}$$

重复利用(22)式的左边，可得

$$\begin{aligned} a_{k+1} &\leq \alpha^2(\alpha^2 a_{k-1} + b_{k-1}) + b_k \\ &= \alpha^{2\cdot 2} a_{k-1} + \alpha^2 b_{k-1} + b_k \\ &\leq \cdots\cdots \\ &\leq \alpha^{2(k+1)} a_0 + \sum_{j=0}^{k} \alpha^{2j} b_{k-j}. \end{aligned}$$

另一方面，根据(22)式的右边，对于任意的 $0 \leq j \leq k$，有 $b_{k-j} \leq \hat{\alpha}^{2(k-j)} b_0$，则

$$\begin{aligned} a_{k+1} &\leq \beta^{2(k+1)} a_0 + \sum_{j=0}^{k} \alpha^{2j} \hat{\alpha}^{2(k-j)} b_0 \\ &\leq \beta^{2(k+1)} a_0 + \beta^{2k} b_0 \cdot \sum_{j=0}^{k} (\frac{\rho}{\beta})^{2j} \\ &\leq \beta^{2(k+1)} a_0 + \beta^{2k} b_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{\rho^2}{\beta^2}} \\ &\leq \beta^{2(k+1)} (a_0 + \frac{b_0}{\beta^2 - \rho^2}). \end{aligned}$$

其中，$\rho = min(\alpha, \hat{\alpha})$

即证。

其他

一些 $Remark$:

1. 误差下降率 β 依赖于两个常数 $\alpha, \hat{\alpha}$，一般的 $\gamma \leq \frac{1}{2}$；根据引理 3 可推出如果 $\hat{\theta} = 2\sqrt{3}/5 \approx 0.6928$，那么 $\hat{\alpha} \leq 0.8$，这在涉及强奇异点的问题当中也是成立的。如何选择参数 θ 详见文献【14】，本文讨论参数 θ 对误差大小的影响。

2. 误差下降率 β 对上界和下界常数 C_1，C_4 的乘积的依赖性是显然的，这表明，在基于新的后验误差估计的自适应过程中，上界常数 C_1 的精确信息并不重要，它是后验误差估计子所固有的，决定着自适应算法的性能。

其他

3. 误差估计(5)，有以下类似于(19)的局部下界成立：

$$\hat{\eta}_e^2 \leq \hat{C}_4 \sum_{K\in\Omega_e} |||u_h - u_H|||_K^2 + \hat{C}_5 \sum_{K\in\Omega_e} ||H_K a_K^{-\frac{1}{2}}(f - f_K)||_{L^2(K)}^2$$

其中，$\hat{\eta}_e^2 = \sum_{K\in\Omega_e} ||H_K a_K^{-\frac{1}{2}}||_{L^2(K)}^2 + ||H_e^{\frac{1}{2}} a_e^{-\frac{1}{2}} J_e||_{L^2(e)}^2$，$\hat{C}_4, \hat{C}_5$ 是仅仅依赖于网格 $\mathcal{M}_H$ 最小角的正常数，如果网格 $\mathcal{M}_H$ 有奇异点，那么上边界(6)变为

$$|||u - u_H|||_\Omega^2 \leq \hat{C}_1 \wedge \sum_{e\in\mathcal{B}_H} \hat{\eta}_e^2$$

其中，$\hat{C}_1$ 仅仅依赖于网格 $\mathcal{M}_H$ 的最小角。

4. 算法的局限性：修正项 $\wedge$ 的出现，使得当系数变化较大时，误差下降率 β 趋近于 1。方法虽然能够在控制误差的前提下，提供了一种找到离散解的有效方法，但是原问题的奇异性仍然没有改变。

Contents

问题:

$$\begin{cases} -div(a(x)\nabla u) & = f \quad in\ \Omega \\ u & = 0 \quad on\ \partial\Omega. \end{cases}$$

其中 $\Omega = (-1,1)^2$，在第一、三象限 $a(x) = R$，第二、四象限 $a(x) = 1$，$f = 0$ 时，方程的精确弱解 u 用极坐标表示为 $u(r,\vartheta) = r^\gamma \mu(\vartheta)$，其中

$$\mu(\vartheta) = \begin{cases} cos((\pi/2-\sigma)\gamma)\cdot cos((\vartheta-\pi/2+\rho)\gamma & if\ 0 \le \vartheta \le \pi/2 \\ cos(\rho\gamma)\cdot cos((\vartheta-\pi+\sigma)\gamma) & if\ \pi/2 \le \vartheta \le \pi \\ cos(\sigma\gamma)\cdot cos((\vartheta-\pi-\rho)\gamma) & if\ \pi \le \vartheta \le 3\pi/2 \\ cos((\pi/2-\rho)\gamma)\cdot cos((\vartheta-3\pi/2-\sigma)\gamma & if\ 3\pi/2 \le \vartheta \le 2\pi \end{cases}$$

γ,ρ,σ,R 满足非线性关系

$$\begin{cases} R=-tan((\pi/2-\sigma)\gamma)\cdot cot(\rho\gamma), \\ 1/R=-tan(\rho\gamma)\cdot cot(\sigma\gamma), \\ R=-tan(\sigma\gamma)\cdot cot((\pi/2-\rho)\gamma), \\ 0<\gamma<2, \\ max(0,\pi\gamma-\pi)<2\gamma\rho<min(\pi\gamma,\pi), \\ max(0,\pi-\pi\gamma)<-2\gamma\sigma<min(\pi,2\pi-\pi\gamma). \end{cases} \tag{23}$$

解 $u\in H^{1+\delta}(\Omega)$，且 $\delta<\gamma$，对于非常小的参数 γ 是非常奇异的。

$$\gamma=0.1,R\approx 161.4476387975881,\rho=\pi/4,\sigma\approx -14.92256510455152. \tag{24}$$

$$\gamma=0.02,R\approx 4052.1806954768103,\rho=\pi/4,\sigma\approx -77.75441817634738 6. \tag{25}$$

$$\gamma=0.5,R\approx 5.828427124746190 7,\rho=\pi/4,\sigma\approx -2.356194490192344 8. \tag{26}$$

算例

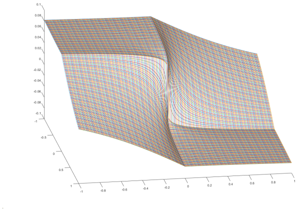

图 2: $\gamma = 0.1$ 时，真解 u

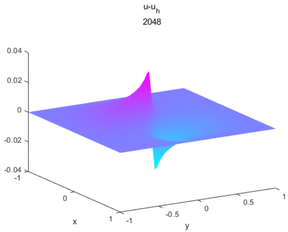

图 3: 将区域均匀剖分成 2048 个小三角单元，误差 $u - u_{2048}$

由图，在奇异点周围相对误差是 23.68%，能量误差范数 $|||u - u_{1024}|||_\Omega = 0.6954$，$|||u - u_{128}|||_\Omega = 0.8547$，能量误差范数随着网格加密变化较小。根据标准有限元后验误差估计要想使能量误差范数小于 0.1，每个空间方向的网格节点就至少为 10^{11}，所以此时标准有限元方法就不适合此类问题（带有强奇异点的椭圆问题）。但是，自适应算法只需要 2793 个节点就能够使得能量误差范数达到 0.07303，最大相对误差是 0.011719，在奇异点附近低于 2%。

误差估计子的有效性

$\theta = 0.2$ 时，网格剖分情况。

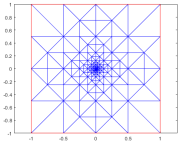

图 4: 内点数 252

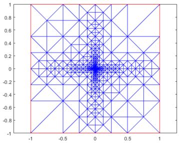

图 5: 内点数 1002

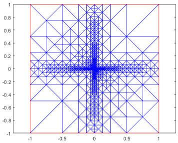

图 6: 内点数 2477

表 2: $||u - u_h||_{L^\infty} \leq 2 \times 10^{-2}$ 时 BM 和 NEW 方法的迭代次数、节点数、CPU 运行时间和最终误差

	k	n	CPUtime	$\|\|u - u_h\|\|_{L^\infty}$
BM	96	2175	189.27s	0.001998
NEW	38	155	6.788s	0.01941

误差估计子的有效性

$\theta = 0.2, \gamma = 0.1$

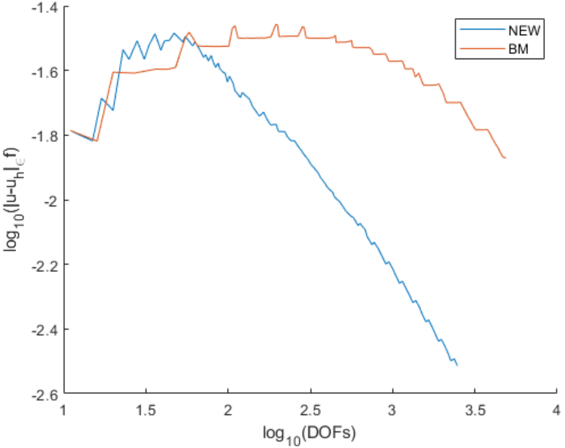

图 7: 比较 BM 和 NEW 方法的误差

参数 θ 的影响

取参数 $\gamma = 0.1$，分别取 $\theta = 0.1, 0.3, 0.5$。

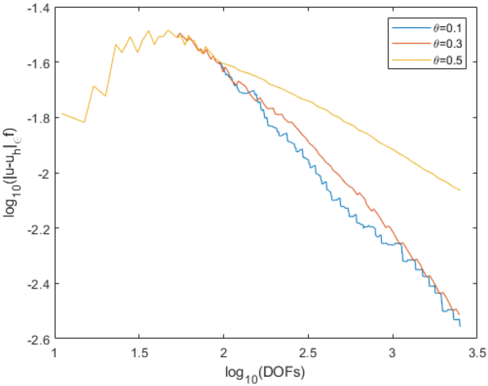

图 8: $\theta = 0.1, 0.3, 0.5$ 时的误差

取参数 $\theta = 0.2$，分别取 $\gamma = 0.1, 0.5$。

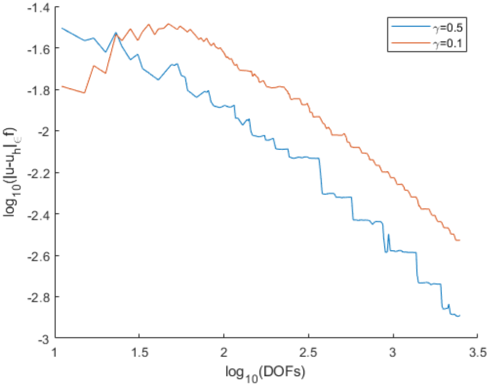

图 9: $\gamma = 0.1, 0.5$ 时的误差

结论：当问题的奇异性变得较强时，误差下降率 β 接近于 1。

反例

在区间 $\Omega = (0,2)\times(0,2)$ 中，取：

$$a(x) = \begin{cases} 1 & x\in\Omega_1 \\ R>1 & x\in\Omega_2 \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x\in\Omega_1 \\ 1 & x\in\Omega_2 \end{cases}$$

其中 Ω_1, Ω_2 如图所示。

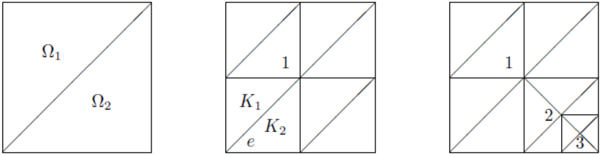

图 10: 从左到右依次是：区域 Ω，粗网格 $\mathcal{M}_H$，细网格 $\mathcal{M}_h$

反例

在粗网格 $\mathcal{M}_H$ 中，即 FIG10 中间的网格，有限元数值解满足：

$$(2+2R)\, u_1^H = \frac{1}{2}$$

解得：

$$u_1^H = \frac{1}{(4+4R)}$$

同时对于 FIG10 中边 e，可以计算出 η_e^2

$$\eta_e^2 = \sum_{K \in \Omega_e} \Lambda_K \left\| H_K a_K^{-1/2} f \right\|_{L^2(K)}^2 + \Lambda_e \left\| H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e \right\|_{L^2(e)}^2 = \frac{17}{16}$$

反例

在细网格 $\mathcal{M}_h$ 中，有限元数值解满足：

$$\begin{bmatrix} 2+2R & -R & 0 \\ -R & 4R & -R \\ 0 & -R & 4R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^h \\ u_2^h \\ u_3^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{24} \\ \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

解得：

$$u_1^h = \frac{35}{8\left(15+13R\right)}, \quad u_2^h = \frac{9R+5}{4R\left(15+13R\right)}, \quad u_3^h = \frac{20R+15}{24R\left(15+13R\right)}$$

反例

对于边 e，可以计算出 $\Lambda_e = R$，且

$$\sum_{K\in\Omega_e} |||u_h - u_H|||_K^2 = \frac{(9R+5)^2}{128\,(1+R)\,(15+13R)^2}$$

容易算出极限

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\eta_e^2}{\Lambda_e \sum_{K\in\Omega_e} |||u_h - u_H|||_K^2} = \frac{22984}{81}$$

这意味着 Λ_e 是不可忽略的，并且在这个算例中是一个精确估计。

参考文献

[1]Chen Z, Dai S. On the efficiency of adaptive finite element methods for elliptic problems with discontinuous coefficients[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2002, 24(2): 443-462.

Thank you!