第 I 部

線形代数学 (行列)

1　行列とベクトル

行列は個々のスカラー値 (数字) を 2 次元の配列にまとめたもので、ベクトルは 1 行 N 列または N 行 1 列となる行列の事になる。
ベクトルは状態 (方向と大きさ) を表す。
機械学習の分野においてはモデルを行列やベクトルを使って表現し計算する事で多変数モデルや DNN のパーセプトロン結合などを表現し、これによりモデルが数式として簡素になる。

2　連立方程式の解法 (行基本変形を使った方法)

講義では連立方程式の表現と解法にて説明している。例えば以下連立一次方程式について

$$
\begin{aligned}
x_1 + 4x_2 &= 7 \\
2x_1 + 6x_2 &= 10
\end{aligned}
$$

行列とベクトルで表現すると以下となる。

$$
\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}
$$

行基本変形による連立方程式の解法の説明にて最終的に変数項 (ベクトル項) の値を導いている。

詳細の図示は省略するが、それぞれの式の左辺と右辺に対して乗算を行い、方程式同士の和算をする事で項を打ち消しあい、最終的に定数項を単位行列化することで変数項の値を算出している。

なお、結局は左辺定数項の逆行列を求めて左辺と右辺にその逆行列を掛けて変換すれば左辺の定数項が単位行列となり方程式の解が求まりますよと、いう説明にいたる。

3　逆行列

逆行列の求め方として掃き出し法とその他方法 (余因子法など) があるという説明につながる。
講義では掃き出し法を解説（プログラミングでも掃き出し法をよく用いると説明)。

逆行列を持つ条件は行列式が非 0 であることが条件となる。ベクトルに囲まれる面積が 0 の場合、逆行列を持たない。

例えば以下の様な 2 行 2 列の行列を例とする。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

上記行列の行列式は $ac - bd$ となる。ベクトルの向きが同じ (逆方向も含む)、0 ベクトルを持つ、などの場合行列式も 0 となる。

例）

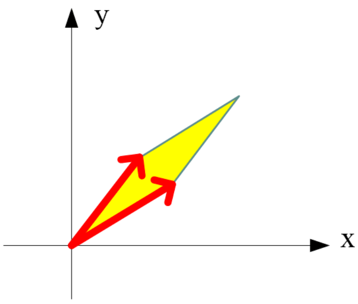
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \text{の行列式は} \, 1 * 8 - 2 * 4 = 8 - 8 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{の行列式は} \, 1 * (-2) - (-1) * 2 = -2 + 2 = 0$$

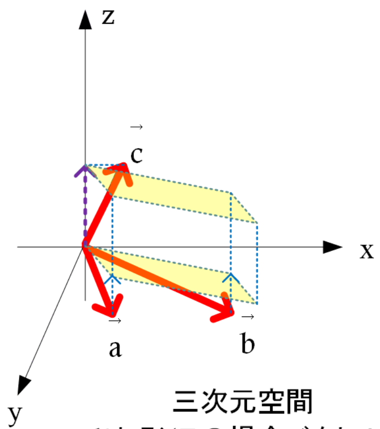
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{の行列式は} \, 1 * 0 - 0 * 2 = -2 + 2 = 0$$

4　行列式

行列式はベクトルに囲まれた平行四辺形の面積 (体積) を表すものと理解すれば良い

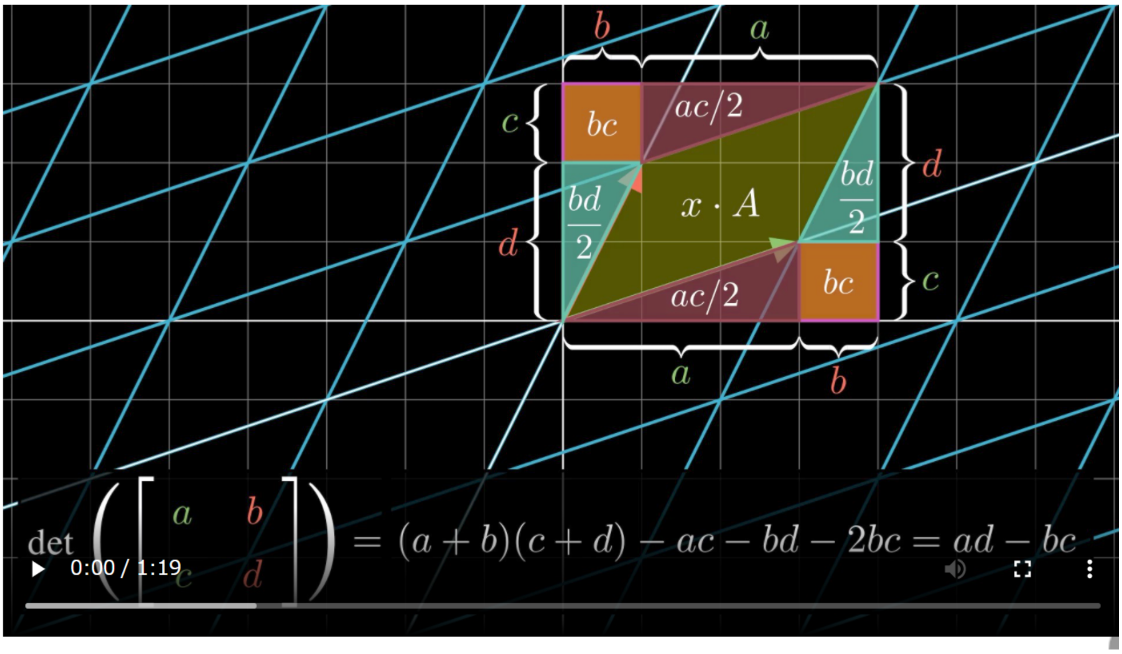


二次元空間
ひし形は面積となる



三次元空間
ひし形(この場合ベクトルaとベクトルbのxy面積)*高さ(ベクトルcのz値)で体積となる

https://www.headboost.jp/definition-of-determinant/ に 2 行 2 列の行列式が証明されている (縦ベクトルの面積で説明されている)



n 個の横ベクトルからできてる n 行の行列、の行列式を以下の様に表している

$$\begin{vmatrix} \vec{x_1} \\ \vec{x_2} \\ \vdots \\ \vec{x_{n-1}} \\ \vec{x_n} \end{vmatrix}$$

以下、行列式の特徴

◎同じベクトルを含む場合行列式は 0 となる

$$\begin{vmatrix} \vec{x_1} \\ \vdots \\ \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{x_n} \end{vmatrix} = 0$$

◎ 1 つのベクトルが λ 倍されると行列式は λ 倍される

$$\begin{vmatrix} \vec{x_1} \\ \vdots \\ \lambda\,\vec{x_a} \\ \vdots \\ \vec{x_n} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vec{x_1} \\ \vdots \\ \vec{x_a} \\ \vdots \\ \vec{x_n} \end{vmatrix}$$

◎ 1 つのベクトルが異なる (加算された) 場合、行列式の足し合わせになる

$$\begin{vmatrix} \vec{x_1} \\ \vdots \\ \vec{x_a} + \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{x_1} \\ \vdots \\ \vec{x_a} \\ \vdots \\ \vec{x_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{x_1} \\ \vdots \\ \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{x_n} \end{vmatrix}$$

第 II 部

線形代数学（固有値)

5　固有値および固有ベクトル

行列より特殊ベクトルを分離することができる (条件はある) これは例えば画像データの画素数を減らすなどの応用ができる

この特殊なベクトルを固有ベクトルという

条件式は以下 (ただし固有ベクトル $\vec{x}$ は n 行 n 列の行列に限定される) A を行列、λ を定数（スカラー値）とすると

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

が成り立つような場合、$\vec{x}$ はAに対する固有ベクトルで、λ はAに対する固有値という

例)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の場合、$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が成り立つ

よって $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が固有ベクトル $\vec{x}$ となり、5 が固有値 λ になる

6　固有値および固有ベクトルの求め方

まず

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の場合に、$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ となる様な $\vec{x}$ と λ を求めてみる

$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ より $(A - \lambda\ I)\vec{x} = \vec{0}$　(ただし、I は単位行列、また $\vec{x} \neq \vec{0}$ を前提とする)

$\vec{x} \neq 0$ より以下が 0 となる様な λ を計算する

(なお、λ の数は行列の行列数に一致する、つまり 2 行 2 列ならば 2 となる)

つまり $|A - \lambda\ I| = 0$ より行列は

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ となり、行列式は $(1-\lambda)(3-\lambda) - 4*2 = 0$ より $\lambda = 5$ or $\lambda = -1$ となる

$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ に上記で求めた固有値 λ を代入すると固有ベクトルが求まる

λ $=5$ の場合

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{より } x_1 = x_2 \text{ となる}$$

(この場合ベクトルとしては何の数字でも良いが普通は 1 を選択する)

λ $=-1$ の場合

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{より } x_1 = -2x_2 \text{ となる}$$

(上記関係になりうる数は多数あるが単純に $x_1 = 2$ と $x_2 = -1$ にしておく)

7　行列の固有値分解

正方行列 (n 行 n 列) を固有値分解する事で行列の成分評価や行列自体の累乗計算が楽になる行列 A が固有値 λ$_1$, λ$_2 \cdots$ と固有ベクトル $\vec{x_1}, \vec{x_2} \cdots$ を持つとするとこの固有値を対角線上に並べた行列Λが (他の成分はすべて 0)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

と、それに対応する固有ベクトルを並べた行列 V

$$V = \begin{pmatrix} \vec{v_1} & \vec{v_1} & \ldots \end{pmatrix}$$

を用意した時それらは以下式の様な関係となる

$$AV = V\ \Lambda$$
$$A = V\ \Lambda\ V^{-1}$$

例えば A の累乗を計算する場合、固有値同士の計算とすると V と V^{-1} が打ち消しあう事より計算が容易となる

$$A^2 = V\ \Lambda\ V^{-1}V\ \Lambda\ V^{-1} = V\ \Lambda^2 V^{-1}$$
$$A^3 = V\ \Lambda\ V^{-1}V\ \Lambda\ V^{-1}V\ \Lambda\ V^{-1} = V\ \Lambda^3 V^{-1}$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

セクション 2 における例題の行列を例とする (なお、固有ベクトルは 1 基準とするように比率を見直している)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

8　特異値分解

nxm 行列、つまり非正方行列で固有値分解は可能か？→似たようなことはできる

$$M\vec{v} = \sigma\vec{u}$$
$$M^T\vec{u} = \sigma\vec{v}$$

上記の様な特殊な単位ベクトルがあるならば特異値分解できる

$$M = USV^T$$

ただし U や V は直行行列 (転置行列と逆行列が等しくなる正方行列) とする

特異値の求め方

$$MV = US \text{ より } M = USV^T$$
$$M^TU = VS^T \text{ より } M^T = VS^TU^T$$

M と M^T の積は

$$MM^T = USV^TVS^TU^T = USS^TU^T$$

M と M^T の積は正方行列となる、それを用いる事で
無理やり正方行列化して固有値分解する事で固有値を抽出できる