Systemy Operacyjne 2022

Komentarz do zadania 3 z listy 10

15 stycznia 2023

W zadaniu rozważamy program, w którym współbieżnie wykonuje się P kopii procesu `total`, z których każda N-krotnie inkrementuje współdzieloną zmienną `tally`:

```
1  const int N = 50
2  const int P = 2
3
4  shared int tally = 0;
5
6  process total(int pid) {
7     int acc = 0;
8     for (int i = 0; i < N; i++) {
9        acc = tally;
10       tally = acc + 1;
11    }
12 }
13
14 concurrent (int pid = 1; pid <= P; pid++) {
15    total(pid);
16 }
```

Inkrementacja nie jest wykonywana atomowo, lecz składa się z osobnych operacji odczytu i zapisu (wiersze *9–10*), które mogą zostać rozdzielone na skutek przełączenia wykonywanego procesu. W trakcie wykonania programu odbywa się $P \cdot N$ operacji odczytu i $P \cdot N$ operacji zapisu współdzielonej zmiennej `tally`. Przeplot jest więc ciągiem $2 \cdot P \cdot N$ operacji na zmiennej `tally`.

Dla ustalenia uwagi w poniższych rozważaniach przyjmujemy, że $P = 2$ i $N = 50$. Ze względu na symetrię zakładamy też, że jako pierwsza w przeplocie (składającym się z 200 operacji na zmiennej `tally`) jest wykonywana operacja odczytu (wiersz *9*) w procesie o numerze $\texttt{pid} = 1$.

Spośród pozostałych 199 operacji na zmiennej `tally`, 99 operacji jest wykonywanych przez proces 1, a pozostałe 100 — przez proces 2, zatem możliwych przeplotów jest $\binom{199}{99}$, czyli ponad 45 nonyliardów, a dokładniej:

$$\binom{199}{99} = 45274257328051640582702088538742081937252294837706668420660 \approx 4.53 \cdot 10^{58} \approx 2^{195}.$$

Ciąg operacji na zmiennej `tally` składa się ze 100 operacji odczytu i 100 operacji zapisu. Niech t_i oznacza zawartość zmiennej `tally` po wykonaniu i-tej operacji zapisu ($i = 1, \ldots, 100$), oraz niech $t_0 = 0$. Zapisywana w wierszu *10* wartość jest o 1 większa od odczytanej wcześniej wartości w wierszu *9*. Wartość ta jest albo oryginalną wartością $t_0 = 0$, albo jest wynikiem wcześniej wykonanej operacji zapisu, tj. wynosi t_j dla pewnego $j < i$. Zatem dla każdego i istnieje takie $j < i$, że $t_i = t_j + 1$. Przez indukcję względem i mamy więc $t_i \leq i$. W szczególności $t_{100} \leq 100$. Zawartość zmiennej `tally` po zakończeniu obliczeń jest więc nie większa niż 100.

Wartości zmiennej `tally` są nieujemne, a zatem wartości zapisywane w wierszu *10* są dodatnie. Rozważmy ostatnią ze 100 operacji zapisu. Jest to 50. operacja zapisu jednego z dwóch procesów. Zapisywana wartość jest o jeden większa od odczytanej podczas 50. operacji odczytu tego procesu. Ten odczyt był poprzedzony 49 operacjami zapisu w tym samym procesie i być może jakimiś operacjami zapisu drugiego procesu. Skoro na zmiennej `tally` przed tym odczytem wykonano operacje zapisu, to odczytana wartość jest dodatnia. Ponieważ zapisujemy wartość o 1 większą od odczytanej, to zapisana wartość wynosi co najmniej 2. Zawartość zmiennej `tally` po zakończeniu obliczeń jest więc nie mniejsza niż 2.

Dla wszystkich liczb z przedziału $[2, 100]$ łatwo wskazać przeplot, po zakończeniu którego zmienna `tally` zawiera wybraną liczbę. Niech P_1 i P_2 oznaczają procesy o numerach 1 i 2. Niech $k \in [2, 50]$. Rozważmy następujący przeplot:

- P_1 wykonuje pojedynczy odczyt i zostaje wywłaszczony. Jego zmienna `acc` zawiera liczbę 0.

- P_2 wykonuje $51 - k$ iteracji pętli i zostaje wywłaszczony.
- P_1 zostaje wznowiony. Ponieważ ma teraz wykonać operację zapisu z 1. iteracji, to zmienna `tally` przyjmuje wartość 1. Po wykonaniu tej instrukcji zapisu proces P_1 zostaje wywłaszczony.
- P_2 wykonuje pojedynczą operację odczytu. Jego zmienna `acc` ma wartość 1.
- P_1 wykonuje pozostałe 49 iteracji pętli.
- P_2 zapisuje do zmiennej `tally` wartość 2, po czym wykonuje pozostałe $k - 2$ iteracji.

Po zakończeniu programu zmienna `tally` ma wartość k. Niech teraz $k \in [51, 100]$ i rozważmy następujący przeplot:

- P_1 wykonuje pojedynczy odczyt i zostaje wywłaszczony. Jego zmienna `acc` zawiera liczbę 0.
- P_2 wykonuje $100 - k$ iteracji pętli i zostaje wywłaszczony.
- P_1 zostaje wznowiony. Ponieważ ma teraz wykonać operację zapisu z 1. iteracji, to zmienna `tally` przyjmuje wartość 1. Proces P_1 wykonuje dalej pozostałe 49 iteracji. Zmienna `tally` ma wartość 50.
- P_2 wykonuje pozostałe $k - 50$ iteracji.

Po zakończeniu programu zmienna `tally` ma wartość k.

Pokazaliśmy zatem, że istnieje przeplot po wykonaniu którego końcowa wartość zmiennej `tally` wynosi k wtedy i tylko wtedy, gdy $k \in [2, 100]$, co kończy rozwiązanie zadania. Powyższe rozumowanie daje się z łatwością uogólnić na dowolne wartości $P, N > 1$: istnieje przeplot po wykonaniu którego końcowa wartość zmiennej `tally` wynosi k wtedy i tylko wtedy, gdy $k \in [2, P \cdot N]$. Ponadto dla $P = 1$ mamy $k = N$, zaś dla $N = 1$ mamy $k \in [1, P]$.

Ciekawsze zagadnienie, którym się teraz zajmiemy, to wyliczenie rozkładu prawdopodobieństwa otrzymanych wartości zmiennej `tally`. Oczywiście nie sposób przejrzeć wszystkich $\binom{199}{99}$ przeplotów. Możemy jednak symulować 200 kroków programu jednocześnie na wszystkich ścieżkach obliczeń (pomysł pochodzi od PPO i MMA). Stan procesu jest określony przez wartość jego licznika rozkazów (z przedziału $[0, 100]$) i zawartość jego lokalnej zmiennej `acc` (z przedziału $[0, 99]$). Stan programu zawiera stany obu jego procesów i zawartość zmiennej `tally` (z przedziału $[0, 100]$). Dla każdego z 200 kroków programu możemy wyliczyć możliwe stany wraz z liczbą przeplotów, które do nich prowadzą. Niewielki skrypt w Pythonie pozwala w kilka minut wyznaczyć dla każdej z możliwych wartości końcowych zmiennej `tally` liczbę przeplotów. Wyniki przedstawia Tablica 1.

Jeśli przyjmiemy, że wszystkie przeploty są równie prawdopodobne, to najbardziej prawdopodobną wartością zmiennej `tally` jest 63 — będzie pojawiać się średnio raz na dziesięć uruchomień programu. Wartości skrajne — 2 i 100 — są również skrajnie nieprawdopodobne. Wartość 100 będzie się pojawiać średnio raz na 10^{30} obliczeń, a wartość 2 — raz na 113185643320129101456755221346855204843130737094266671051 65 $\approx 10^{58}$ wykonań! Spośród 45274257328051640582702088538742081937252294837706668420660 możliwych przeplotów istnieją tylko 4, których wartością końcową jest 2. Jeden opisaliśmy wyżej. Potrafisz przedstawić pozostałe trzy? Zauważmy, że nie trzeba nawet rysować histogramu rozkładu prawdopodobieństwa — druga kolumna Tablicy 1 jest takim histogramem (w skali logarytmicznej)!

Nasze obliczenia, mimo iż ciekawe, są niezbyt realistyczne. Jeśli przepiszemy nasz program w języku C i uruchomimy dwa wątki obliczeń, to praktycznie zawsze otrzymamy w wyniku liczbę 100. W rzeczywistości bowiem przełączenie kontekstu jest na tyle kosztowne, a procesów jest na tyle mało, że po wznowieniu pozwala się procesowi wykonać bardzo wiele instrukcji. Jeśli procesor wykonuje 10^8 instrukcji na sekundę, to proces wznowiony na 10 ms zdąży wykonać milion instrukcji! W praktyce zaobserwujemy więc tylko jeden przeplot: najpierw w całości wykona się pierwszy proces, potem drugi. Zmodyfikujmy więc nasz skrypt w Pythonie tak, by wznowiony proces nie mógł być przerwany, zanim nie wykona M instrukcji (chyba, że się wcześniej skończy).

Dla $M = 100$ mamy tylko jeden przeplot (pamiętajmy, że jako pierwszy jest uruchamiany proces P_1). Dla $M = 99$ mamy trzy przeploty, prowadzące do wartości: 50, 99 i 100 (umiesz przedstawić je wszystkie?). Wyniki dla różnych M przedstawiają kolejne tabele.

Morał. Rozkład wartości zwracanych przez program, ogólniej — zachowanie programu współbieżnego, bardzo silnie zależy od *schedulera*. Na przykład jeśli *scheduler* uruchamia procesy na co najmniej 100 instrukcji, to nasz program zachowuje się deterministycznie i zawsze zwraca wartość 100. Jeśli *scheduler* uruchamia procesy na co najmniej 50 instrukcji, to nasz program zwraca wartość 100 mniej więcej raz na cztery uruchomienia, a poza tym z podobnym prawdopodobieństwem pojawiają się liczby 50–99. Jeśli *scheduler* uruchamia procesy na co najmniej 20 instrukcji, to program zwraca liczby z przedziału 50–100 mniej więcej z równym prawdopodobieństwem (100 nie jest już wyróżnione), a może też zwrócić wartość z przedziału 30–49, ale jest to mało prawdopodobne. Jeśli *scheduler* przełącza procesy w dowolnym momencie, to program zwraca liczby z przedziału 2–100, przy czym najbardziej prawdopodobną (średnio raz na 10 wywołań programu) wartością jest 63, a prawdopodobieństwo otrzymania liczby spoza przedziału 40–84 jest mniejsze niż prawdopodobieństwo wygrania w Totolotka (6 z 49).

Testowanie programu pod kątem niedeterminizmu nie działa, jeśli używamy tylko jednego *schedulera*. Dlatego jeśli uruchomimy program w chmurze obliczeniowej w środowisku zwirtualizowanym, to może on nie przejść żadnego z testów, które przeszedł, gdy testowaliśmy go na maszynie rzeczywistej na swoim komputerze.

Tablica 1: Liczba przeplotów, które prowadzą do wartości końcowej $k \in [2, 100]$ zmiennej `tally`.

k	Liczba przeplotów	$\Pr(\texttt{tally} = k)$
2	4	$8.84 \cdot 10^{-59}$
3	1568	$3.46 \cdot 10^{-56}$
4	319376	$7.05 \cdot 10^{-54}$
5	44071744	$9.73 \cdot 10^{-52}$
6	4575823936	$1.01 \cdot 10^{-49}$
7	378376161440	$8.36 \cdot 10^{-48}$
8	25831814856048	$5.71 \cdot 10^{-46}$
9	1492774812622528	$3.30 \cdot 10^{-44}$
10	74370659062152976	$1.64 \cdot 10^{-42}$
11	3239455785870320928	$7.16 \cdot 10^{-41}$
12	124743320540577792272	$2.76 \cdot 10^{-39}$
13	4284754830050351246528	$9.46 \cdot 10^{-38}$
14	132251154579942336919872	$2.92 \cdot 10^{-36}$
15	3690736845459323589085856	$8.15 \cdot 10^{-35}$
16	93611660396585319512963952	$2.07 \cdot 10^{-33}$
17	2167624093083054426915295040	$4.79 \cdot 10^{-32}$
18	45998275825309820494604067976	$1.02 \cdot 10^{-30}$
19	897529225906691218662881169376	$1.98 \cdot 10^{-29}$
20	16149789189120602380678617622640	$3.57 \cdot 10^{-28}$
21	268659686383296506278436886246336	$5.93 \cdot 10^{-27}$
22	4141225678980794529828788574419136	$9.15 \cdot 10^{-26}$
23	59265906947926048877147527707924320	$1.31 \cdot 10^{-24}$
24	788841906817160820814980945559342992	$1.74 \cdot 10^{-23}$
25	9780388848813483902845246295018019392	$2.16 \cdot 10^{-22}$
26	113109320640313329997367277261328630992	$2.50 \cdot 10^{-21}$
27	1221639865760291214514546269853973809120	$2.70 \cdot 10^{-20}$
28	12335462493464780562192285449425411021936	$2.72 \cdot 10^{-19}$
29	116558652097632170187211222991070769846336	$2.57 \cdot 10^{-18}$
30	1031500391476654225300291045405346427405760	$2.28 \cdot 10^{-17}$
31	8555450786680666732065923539539736068321376	$1.89 \cdot 10^{-16}$
32	66548050230471301762231632767361384066324496	$1.47 \cdot 10^{-15}$
33	485710641305023191353518104921372204928850880	$1.07 \cdot 10^{-14}$
34	3327850833185280973240754317544785541760524732	$7.35 \cdot 10^{-14}$
35	21411817693593953296270115307918456436542806336	$4.73 \cdot 10^{-13}$
36	129411660516107165475637669819445024974257909152	$2.86 \cdot 10^{-12}$
37	734884272212544199769216870638991372801374510208	$1.62 \cdot 10^{-11}$
38	3921530844837661910155376403680848556253128441472	$8.66 \cdot 10^{-11}$
39	19666175257980680900760110803729495419703902042688	$4.34 \cdot 10^{-10}$
40	92687244733092561783630001745134981863273458421856	$2.05 \cdot 10^{-9}$
41	410521985691521827209325500791174284805338177365888	$9.07 \cdot 10^{-9}$
42	1708530333003045366916751593805797200202539590422048	$3.77 \cdot 10^{-8}$
43	6680446690261889523184498292876858678802127416179520	$1.48 \cdot 10^{-7}$
44	24534953354870968084790656968992067655969354964077216	$5.42 \cdot 10^{-7}$
45	84612874563885247789851707408623709372722601819026304	$1.87 \cdot 10^{-6}$
46	273910414414937175354451085624552072612462990275965056	$6.05 \cdot 10^{-6}$
47	832006632762749375973714089246651962636237148800510528	$1.84 \cdot 10^{-5}$
48	2370248113472892890327184027257416615249355642155642464	$5.24 \cdot 10^{-5}$
49	6329825787472522085170772541754774734074958948370711680	$1.40 \cdot 10^{-4}$
50	15837450149734343993940580061717256085018559839868914816	$3.50 \cdot 10^{-4}$
51	37104388001205249448086805459265618376445105140882062080	$8.20 \cdot 10^{-4}$
52	81349284852189971907522657955735000018208517931736272800	$1.80 \cdot 10^{-3}$
53	166804892713794624735623003019061765448989639419048386240	$3.68 \cdot 10^{-3}$
54	319690536782347424173108243793555063944275406475344689040	$7.06 \cdot 10^{-3}$
55	572349758207852497879912002870682565404115878364495414080	$1.26 \cdot 10^{-2}$
56	956658004741262579975130344199742969817358519960085552640	$2.11 \cdot 10^{-2}$
57	1492027299978280946929092515797518545515154563447684001280	$3.30 \cdot 10^{-2}$
58	2170153309903486992666037466530474253130312594779685361680	$4.79 \cdot 10^{-2}$
59	2942191640799778088256952683766842437615137493714433664640	$6.50 \cdot 10^{-2}$
60	3716143505107772867929501336501974639215801094033511482080	$8.21 \cdot 10^{-2}$
61	4370443649145131609659264402194206526449620114939019423040	$9.65 \cdot 10^{-2}$
62	4783356582401927327021856667981787902861679092732602062800	$1.06 \cdot 10^{-1}$
63	4869280693148760380296793614493293546685202500708952201920	$1.08 \cdot 10^{-1}$
64	4607407253697267039793479519756662948449260808850660678720	$1.02 \cdot 10^{-1}$
65	4049711723068469978539438945554685286232593697888405404800	$8.94 \cdot 10^{-2}$
66	3304164211522515231064236970327924648905014395798652490420	$7.30 \cdot 10^{-2}$
67	2500572168917964943955585875800117894024674670609639870240	$5.52 \cdot 10^{-2}$
68	1753886889125268510758020769749025470255024179699609486640	$3.87 \cdot 10^{-2}$
69	1139106679209602071476071588081359685796698488090433777920	$2.52 \cdot 10^{-2}$
70	684406793865380657533939625460552497369758063288047262800	$1.51 \cdot 10^{-2}$
71	380019790130476423453793567702051068889952142344645309920	$8.39 \cdot 10^{-3}$
72	194787652889757592778221488339226353396064487094616839280	$4.30 \cdot 10^{-3}$
73	92058825576673058149759647549298857299722796402079862720	$2.03 \cdot 10^{-3}$
74	40065007739766749869040439772235163276477697646977702880	$8.85 \cdot 10^{-4}$
75	16034897304991262742521199493192152104920137593747791776	$3.54 \cdot 10^{-4}$
76	5892888093188239691534494535456867379008124926616407280	$1.30 \cdot 10^{-4}$
77	1985459900903402018739155480702512758210091235098384640	$4.39 \cdot 10^{-5}$
78	612236440239741131481918427170599935319481997232107920	$1.35 \cdot 10^{-5}$
79	172462278520475677474540176442450842142149361762076000	$3.81 \cdot 10^{-6}$
80	44290129421821107095380028622156080191838563694574000	$9.78 \cdot 10^{-7}$
81	10346601181038916984140590071112014684129162991646400	$2.29 \cdot 10^{-7}$
82	2193375335931960786505660516576725510471479154246760	$4.84 \cdot 10^{-8}$
83	420814058242773081112769231353354465032074586740320	$9.29 \cdot 10^{-9}$
84	72851544857364799574976463225324073464673963442640	$1.61 \cdot 10^{-9}$
85	11342664129135177568116239059779827786163529294720	$2.51 \cdot 10^{-10}$
86	1582312119552978104555894577803211215018739292240	$3.49 \cdot 10^{-11}$
87	196933576588650078968741932536553644971690349600	$4.35 \cdot 10^{-12}$
88	21760690787700916540122792125692992352809287120	$4.81 \cdot 10^{-13}$
89	2122667833961711440458553204977387168568435520	$4.69 \cdot 10^{-14}$
90	181569377546346848745296292386133649381083680	$4.01 \cdot 10^{-15}$
91	13510898935764617370090671003794041468938720	$2.98 \cdot 10^{-16}$
92	866141748934376526422533948340900690680080	$1.91 \cdot 10^{-17}$
93	47263002733392229416592696672671192891520	$1.04 \cdot 10^{-18}$
94	2161792084768711596607134441362445281680	$4.77 \cdot 10^{-20}$
95	81226224859475831515463940598547548320	$1.79 \cdot 10^{-21}$
96	2438540523174598171222896575776206480	$5.39 \cdot 10^{-23}$
97	56181536438329394753427715948421440	$1.24 \cdot 10^{-24}$
98	931700675561629594630632979373420	$2.06 \cdot 10^{-26}$
99	9891308288780803268118872280000	$2.18 \cdot 10^{-28}$
100	50445672272782096667406248628	$1.11 \cdot 10^{-30}$
Razem	45274257328051640582702088538742081937252294837706668420660	1

Tablica 2: Liczba przeplotów dla $M = 10$ oraz $M = 20$.

k	Liczba przeplotów	Pr(`tally` $= k$)
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0
11	0	0
12	0	0
13	0	0
14	0	0
15	0	0
16	1	$3.76 \cdot 10^{-15}$
17	6	$2.26 \cdot 10^{-14}$
18	20	$7.53 \cdot 10^{-14}$
19	50	$1.88 \cdot 10^{-13}$
20	105	$3.95 \cdot 10^{-13}$
21	336	$1.26 \cdot 10^{-12}$
22	1296	$4.88 \cdot 10^{-12}$
23	4172	$1.57 \cdot 10^{-11}$
24	10998	$4.14 \cdot 10^{-11}$
25	24848	$9.35 \cdot 10^{-11}$
26	57322	$2.16 \cdot 10^{-10}$
27	148085	$5.57 \cdot 10^{-10}$
28	392910	$1.48 \cdot 10^{-9}$
29	977924	$3.68 \cdot 10^{-9}$
30	2217799	$8.35 \cdot 10^{-9}$
31	4772698	$1.80 \cdot 10^{-8}$
32	10281991	$3.87 \cdot 10^{-8}$
33	22501459	$8.47 \cdot 10^{-8}$
34	48946664	$1.84 \cdot 10^{-7}$
35	102974081	$3.88 \cdot 10^{-7}$
36	208185556	$7.84 \cdot 10^{-7}$
37	408891909	$1.54 \cdot 10^{-6}$
38	789674411	$2.97 \cdot 10^{-6}$
39	1505462839	$5.67 \cdot 10^{-6}$
40	2821463640	$1.06 \cdot 10^{-5}$
41	5169933077	$1.95 \cdot 10^{-5}$
42	9242478529	$3.48 \cdot 10^{-5}$
43	16136748857	$6.07 \cdot 10^{-5}$
44	27565218214	$1.04 \cdot 10^{-4}$
45	46115148504	$1.74 \cdot 10^{-4}$
46	75545687739	$2.84 \cdot 10^{-4}$
47	121122495653	$4.56 \cdot 10^{-4}$
48	189993625527	$7.15 \cdot 10^{-4}$
49	291590341752	$1.10 \cdot 10^{-3}$
50	2222910835907	$8.37 \cdot 10^{-3}$
51	1140479412436	$4.29 \cdot 10^{-3}$
52	1273657848162	$4.79 \cdot 10^{-3}$
53	1521740068877	$5.73 \cdot 10^{-3}$
54	1903354111012	$7.17 \cdot 10^{-3}$
55	4324269511239	$1.63 \cdot 10^{-2}$
56	4990911640631	$1.88 \cdot 10^{-2}$
57	5462808191873	$2.06 \cdot 10^{-2}$
58	5843743543496	$2.20 \cdot 10^{-2}$
59	6229427619273	$2.35 \cdot 10^{-2}$
60	7428572443638	$2.80 \cdot 10^{-2}$
61	8581783401470	$3.23 \cdot 10^{-2}$
62	9544351287464	$3.59 \cdot 10^{-2}$
63	10251558872660	$3.86 \cdot 10^{-2}$
64	10703801926212	$4.03 \cdot 10^{-2}$
65	11106304083916	$4.18 \cdot 10^{-2}$
66	11462201250620	$4.32 \cdot 10^{-2}$
67	11735392925431	$4.42 \cdot 10^{-2}$
68	11876453915738	$4.47 \cdot 10^{-2}$
69	11844726575910	$4.46 \cdot 10^{-2}$
70	11648173066388	$4.39 \cdot 10^{-2}$
71	11318766971039	$4.26 \cdot 10^{-2}$
72	10897139393062	$4.10 \cdot 10^{-2}$
73	10408261921117	$3.92 \cdot 10^{-2}$
74	9846013482547	$3.71 \cdot 10^{-2}$
75	9183328004968	$3.46 \cdot 10^{-2}$
76	8412448590196	$3.17 \cdot 10^{-2}$
77	7591012681968	$2.86 \cdot 10^{-2}$
78	6816514091352	$2.57 \cdot 10^{-2}$
79	6157332840001	$2.32 \cdot 10^{-2}$
80	5589241687580	$2.10 \cdot 10^{-2}$
81	4979622489077	$1.87 \cdot 10^{-2}$
82	4241916485733	$1.60 \cdot 10^{-2}$
83	3447644226493	$1.30 \cdot 10^{-2}$
84	2752726593907	$1.04 \cdot 10^{-2}$
85	2327446436021	$8.76 \cdot 10^{-3}$
86	2142989480208	$8.07 \cdot 10^{-3}$
87	1931190809134	$7.27 \cdot 10^{-3}$
88	1577660163116	$5.94 \cdot 10^{-3}$
89	1094608832524	$4.12 \cdot 10^{-3}$
90	619528968551	$2.33 \cdot 10^{-3}$
91	458435550039	$1.73 \cdot 10^{-3}$
92	489667857836	$1.84 \cdot 10^{-3}$
93	495336772560	$1.86 \cdot 10^{-3}$
94	458115185161	$1.72 \cdot 10^{-3}$
95	249887585155	$9.41 \cdot 10^{-4}$
96	24209852020	$9.11 \cdot 10^{-5}$
97	31041309560	$1.17 \cdot 10^{-4}$
98	39573772300	$1.49 \cdot 10^{-4}$
99	50172740270	$1.89 \cdot 10^{-4}$
100	110967837771	$4.18 \cdot 10^{-4}$
Razem	265627833812591	1

k	Liczba przeplotów	Pr(`tally` $= k$)
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0
11	0	0
12	0	0
13	0	0
14	0	0
15	0	0
16	0	0
17	0	0
18	0	0
19	0	0
20	0	0
21	0	0
22	0	0
23	0	0
24	0	0
25	0	0
26	0	0
27	0	0
28	0	0
29	0	0
30	0	0
31	1	$2.97 \cdot 10^{-9}$
32	6	$1.78 \cdot 10^{-8}$
33	20	$5.95 \cdot 10^{-8}$
34	50	$1.49 \cdot 10^{-7}$
35	105	$3.12 \cdot 10^{-7}$
36	196	$5.83 \cdot 10^{-7}$
37	336	$9.99 \cdot 10^{-7}$
38	540	$1.61 \cdot 10^{-6}$
39	825	$2.45 \cdot 10^{-6}$
40	1210	$3.60 \cdot 10^{-6}$
41	1796	$5.34 \cdot 10^{-6}$
42	2896	$8.61 \cdot 10^{-6}$
43	5127	$1.52 \cdot 10^{-5}$
44	9483	$2.82 \cdot 10^{-5}$
45	17388	$5.17 \cdot 10^{-5}$
46	30729	$9.14 \cdot 10^{-5}$
47	51869	$1.54 \cdot 10^{-4}$
48	83640	$2.49 \cdot 10^{-4}$
49	129316	$3.84 \cdot 10^{-4}$
50	11256206	$3.35 \cdot 10^{-2}$
51	2914105	$8.66 \cdot 10^{-3}$
52	2583372	$7.68 \cdot 10^{-3}$
53	2330646	$6.93 \cdot 10^{-3}$
54	2161528	$6.43 \cdot 10^{-3}$
55	2085349	$6.20 \cdot 10^{-3}$
56	2114835	$6.29 \cdot 10^{-3}$
57	2265435	$6.74 \cdot 10^{-3}$
58	2554348	$7.59 \cdot 10^{-3}$
59	2999285	$8.92 \cdot 10^{-3}$
60	10385167	$3.09 \cdot 10^{-2}$
61	11666164	$3.47 \cdot 10^{-2}$
62	12387658	$3.68 \cdot 10^{-2}$
63	12603099	$3.75 \cdot 10^{-2}$
64	12380455	$3.68 \cdot 10^{-2}$
65	11804598	$3.51 \cdot 10^{-2}$
66	10980360	$3.26 \cdot 10^{-2}$
67	10035408	$2.98 \cdot 10^{-2}$
68	9122802	$2.71 \cdot 10^{-2}$
69	8423100	$2.50 \cdot 10^{-2}$
70	9144084	$2.72 \cdot 10^{-2}$
71	10304138	$3.06 \cdot 10^{-2}$
72	11460785	$3.41 \cdot 10^{-2}$
73	12392394	$3.68 \cdot 10^{-2}$
74	12982380	$3.86 \cdot 10^{-2}$
75	13125647	$3.90 \cdot 10^{-2}$
76	12734554	$3.79 \cdot 10^{-2}$
77	11746129	$3.49 \cdot 10^{-2}$
78	10130641	$3.01 \cdot 10^{-2}$
79	7901640	$2.35 \cdot 10^{-2}$
80	5546940	$1.65 \cdot 10^{-2}$
81	4948551	$1.47 \cdot 10^{-2}$
82	5405163	$1.61 \cdot 10^{-2}$
83	5886331	$1.75 \cdot 10^{-2}$
84	6367660	$1.89 \cdot 10^{-2}$
85	6816255	$2.03 \cdot 10^{-2}$
86	7189281	$2.14 \cdot 10^{-2}$
87	7432353	$2.21 \cdot 10^{-2}$
88	7477746	$2.22 \cdot 10^{-2}$
89	7242415	$2.15 \cdot 10^{-2}$
90	4181985	$1.24 \cdot 10^{-2}$
91	446730	$1.33 \cdot 10^{-3}$
92	517950	$1.54 \cdot 10^{-3}$
93	599400	$1.78 \cdot 10^{-3}$
94	692510	$2.06 \cdot 10^{-3}$
95	798710	$2.37 \cdot 10^{-3}$
96	919430	$2.73 \cdot 10^{-3}$
97	1056100	$3.14 \cdot 10^{-3}$
98	1210150	$3.60 \cdot 10^{-3}$
99	1383010	$4.11 \cdot 10^{-3}$
100	4936491	$1.47 \cdot 10^{-2}$
Razem	336367006	1

Tablica 3: Liczba przeplotów dla $M = 31$, 32, 33 i 40.

$M = 31$		
k	n	Pr
47	2	0.000
48	10	0.000
49	30	0.000
50	20625	0.031
51	7955	0.012
52	7507	0.011
53	7113	0.011
54	6775	0.010
55	6485	0.010
56	6215	0.009
57	5967	0.009
58	5743	0.009
59	5545	0.008
60	5375	0.008
61	5235	0.008
62	5129	0.008
63	5094	0.008
64	5190	0.008
65	13975	0.021
66	23525	0.035
67	25048	0.037
68	24556	0.036
69	22010	0.033
70	21580	0.032
71	21960	0.033
72	22288	0.033
73	22562	0.033
74	22780	0.034
75	22940	0.034
76	23040	0.034
77	23078	0.034
78	23055	0.034
79	22981	0.034
80	22961	0.034
81	23231	0.034
82	23842	0.035
83	24658	0.037
84	25440	0.038
85	2250	0.003
86	2650	0.004
87	3050	0.005
88	3450	0.005
89	3850	0.006
90	4250	0.006
91	4650	0.007
92	5050	0.007
93	5450	0.008
94	5850	0.009
95	6250	0.009
96	6650	0.010
97	7060	0.010
98	7490	0.011
99	7940	0.012
100	36946	0.055
Σ	674341	1.000

$M = 32$		
k	n	Pr
49	1	0.000
50	14332	0.028
51	6248	0.012
52	5902	0.012
53	5581	0.011
54	5275	0.010
55	4982	0.010
56	4704	0.009
57	4443	0.009
58	4201	0.008
59	3980	0.008
60	3782	0.007
61	3609	0.007
62	3463	0.007
63	3346	0.007
64	3260	0.006
65	3215	0.006
66	16162	0.032
67	17140	0.034
68	16657	0.033
69	16512	0.033
70	16874	0.033
71	17191	0.034
72	17461	0.034
73	17682	0.035
74	17852	0.035
75	17969	0.035
76	18031	0.036
77	18036	0.036
78	17982	0.035
79	17867	0.035
80	17689	0.035
81	17448	0.034
82	17533	0.035
83	18092	0.036
84	11877	0.023
85	1810	0.004
86	2160	0.004
87	2510	0.005
88	2860	0.006
89	3210	0.006
90	3560	0.007
91	3910	0.008
92	4260	0.008
93	4610	0.009
94	4960	0.010
95	5310	0.010
96	5660	0.011
97	6010	0.012
98	6368	0.013
99	6734	0.013
100	36946	0.073
Σ	507257	1.000

$M = 33$		
k	n	Pr
50	10287	0.026
51	5244	0.013
52	4950	0.012
53	4664	0.012
54	4388	0.011
55	4124	0.010
56	3874	0.010
57	3640	0.009
58	3424	0.009
59	3228	0.008
60	3054	0.008
61	2904	0.007
62	2780	0.007
63	2684	0.007
64	2618	0.007
65	2584	0.006
66	7992	0.020
67	13243	0.033
68	13543	0.034
69	13956	0.035
70	14327	0.036
71	14654	0.037
72	14935	0.037
73	15168	0.038
74	15351	0.038
75	15482	0.039
76	15559	0.039
77	15580	0.039
78	15543	0.039
79	15446	0.039
80	15287	0.038
81	15064	0.038
82	14776	0.037
83	14535	0.036
84	833	0.002
85	1139	0.003
86	1445	0.004
87	1751	0.004
88	2057	0.005
89	2363	0.006
90	2669	0.007
91	2975	0.007
92	3281	0.008
93	3587	0.009
94	3893	0.010
95	4199	0.011
96	4505	0.011
97	4811	0.012
98	5117	0.013
99	5423	0.014
100	24107	0.060
Σ	399043	1.000

$M = 40$		
k	n	Pr
50	3330	0.055
51	1120	0.019
52	1010	0.017
53	900	0.015
54	790	0.013
55	680	0.011
56	570	0.009
57	460	0.008
58	350	0.006
59	240	0.004
60	130	0.002
61	76	0.001
62	80	0.001
63	89	0.001
64	105	0.002
65	130	0.002
66	166	0.003
67	215	0.004
68	279	0.005
69	360	0.006
70	2775	0.046
71	2949	0.049
72	3100	0.051
73	3226	0.053
74	3325	0.055
75	3395	0.056
76	3434	0.057
77	3440	0.057
78	3411	0.057
79	3345	0.055
80	1995	0.033
81–89	170	0.003
90	280	0.005
91	390	0.006
92	500	0.008
93	610	0.010
94	720	0.012
95	830	0.014
96	940	0.016
97	1050	0.017
98	1160	0.019
99	1270	0.021
100	5606	0.093
Σ	60361	1.000

Tablica 4: Liczba przeplotów dla $M = 49$–52, 81 i 90–100.

$M = 49$		
k	n	Pr
50	77	0.027
51	28	0.010
52–73	27	0.010
74	58	0.021
75	110	0.039
76–98	54	0.019
99	55	0.020
100	651	0.231
Σ	2815	1.000

$M = 50$		
k	n	Pr
50–74	25	0.010
75	75	0.029
76–99	50	0.020
100	651	0.255
Σ	2551	1.000

$M = 51$		
k	n	Pr
50–75	25	0.010
76–99	50	0.020
100	601	0.245
Σ	2451	1.000

$M = 52$		
k	n	Pr
50–74	24	0.010
76–99	48	0.020
100	601	0.255
Σ	2353	1.000

$M = 81$		
k	n	Pr
50–59	10	0.026
90	10	0.026
91–99	20	0.052
100	91	0.239
Σ	381	1.000

$M = 90$		
k	n	Pr
50–55	5	0.045
95–99	10	0.090
100	31	0.279
Σ	111	1.000

$M = 91$		
k	n	Pr
50–54	5	0.055
95	5	0.055
96–99	10	0.110
100	21	0.231
Σ	91	1.000

$M = 92$		
k	n	Pr
50–54	4	0.055
96–99	8	0.110
100	21	0.288
Σ	73	1.000

$M = 93$		
k	n	Pr
50–53	4	0.070
96	4	0.070
97–99	8	0.140
100	13	0.228
Σ	57	1.000

$M = 94$		
k	n	Pr
50–53	3	0.070
97–99	6	0.140
100	13	0.302
Σ	43	1.000

$M = 95$		
k	n	Pr
50–52	3	0.097
97	3	0.097
98–99	6	0.194
100	7	0.226
Σ	31	1.000

$M = 96$		
k	n	Pr
50–52	2	0.095
98–99	4	0.190
100	7	0.333
Σ	21	1.000

$M = 97$		
k	n	Pr
50–51	2	0.154
98	2	0.154
99	4	0.308
100	3	0.231
Σ	13	1.000

$M = 98$		
k	n	Pr
50–51	1	0.143
99	2	0.286
100	3	0.429
Σ	7	1.000

$M = 99$		
k	n	Pr
50	1	0.333
99	1	0.333
100	1	0.333
Σ	3	1.000

$M = 100$		
k	n	Pr
100	1	1.000
Σ	1	1.000