1 階線形同次連立常微分方程式の解き方

東京理科大学 物理研究会

2020 年 10 月 19 日

1 趣旨

2 変数や 3 変数の微分方程式ならばゴリ押しで何とかなる (場合もある). しかしもっと多い数の変数であれば単純に解くのは難しいし, 時間もかかる. そこで, 今回は 1 階線形同次連立常微分方程式の解き方について n 変数 ($n \in \mathbb{N}$) で述べ, 特に 3 変数の微分方程式について例を出してみる.

2 諸々の準備

2.1 線形空間

集合 $V\,(\neq \emptyset)$ が $\mathbb{C}$ 上の線形空間であるとは,$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V, \forall c \in \mathbb{C}$ に対し,

(a) 和 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$
(b) スカラー倍 $c\boldsymbol{x} \in V$

が次のように定義されているときをいう.

(a) (1) $(x + y) + z = x + (y + z)$
(2) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$
(3) $\exists \boldsymbol{0} \in V s.t. \boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}\,(\forall \boldsymbol{x} \in V)$
(4) $\forall x \in V, \exists \boldsymbol{x}' \in V s.t. \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$

(b) (1) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$
(2) $(ab)\,\boldsymbol{x} = a\,(b\boldsymbol{x})$
(3) $a\,(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}$
(4) $(a + b)\,\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}$

この V に対して次が成立する.

(1) $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
(2) $(-1)\,\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$

(3) $2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}$

2.2 部分空間

V を線形空間とする.V の部分集合 $W\,(\neq \emptyset)$ が V の部分空間であるとは,

(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W \Longrightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$
(2) $\boldsymbol{x} \in W \Longrightarrow c\boldsymbol{x} \in W\,(\forall c \in \mathbb{C})$

が成立するときをいう.W が V の部分空間であるとき, 必ず $\mathbf{0} \in W$ となる.

2.3 線形変換

V, V' を線形空間とする. 写像 $f : V \to V'$ が線形であるとは,$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V, \forall c \in \mathbb{C}$ に対して

(1) $f\,(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f\,(x) + f\,(y)$
(2) $f\,(c \cdot \boldsymbol{x}) = c \cdot f\,(\boldsymbol{x})$

が成立するときをいう.

$\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^m$ への任意の線形写像は

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,(\exists A \in M_{m\times n}\,(\mathbb{C}))$$

と表される.

$f : V \to V'$ が線形写像でしかも全単射のとき,f は同型写像という. このとき f の逆写像 $f^{-1} : V' \to V$ が存在して,f' も逆写像である.

$f : V \to V'$ が線形写像のとき,$f\,(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$ となる.

2.4 線形空間の基底, 次元

V を線形空間とする.V のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が一次独立であるとは,

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n = \mathbf{0} \Longrightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0$$

が成立するときをいう.

$\varepsilon = \{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ が V の基底であるとは,

1. $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ が一次独立
2. $\forall \boldsymbol{x} \in V$ は $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n\,(\exists x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C})$

が成立するときをいう. このとき, 写像

$$\varphi_\varepsilon : V \to \mathbb{C}^n : \boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

が定まる.φ_ε は全単射な線形写像である.

V の基底として $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ ($\leftarrow n$ 個) が取れるとき, その個数を V の次元といい,$\dim_{\mathbb{C}} V = n$ と書く.

$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \in V$ に対して,$\mathbb{C}\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ を $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ の一次結合で表せるベクトル全体と定める. これは V の部分空間となる.

2.5 線形写像の行列表現

$f : V \to V'$ を線形写像とし,$\varepsilon = \{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$,$\varepsilon' = \{\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_n\}$ をそれぞれ V, V' の基底とする. 次の図式を考える.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_\varepsilon"'] & V' \arrow[d, "\varphi_{\varepsilon'}"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "\varphi_{\varepsilon'} \circ f \circ \varphi_\varepsilon^{-1}"'] & \mathbb{C}^m \end{tikzcd}$$

$\varphi_{\varepsilon'} \circ f \circ \varphi_\varepsilon^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ は線形写像となる. すなわち

$$\left(\varphi_{\varepsilon'} \circ f \circ \varphi_\varepsilon^{-1}\right) \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ (\exists A \in M_{m \times n}(\mathbb{C}))$$

の形で表せる. この A を $\varepsilon, \varepsilon'$ に関する f の表現行列という. ただし $V = V'$ のときは $\varepsilon = \varepsilon'$ と取るものとする.

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_1) = & a_{11}\boldsymbol{e}'_1 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{e}'_m \\ & \vdots \\ f(\boldsymbol{e}_n) = & a_{1n}\boldsymbol{e}'_1 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{e}'_m \end{cases} \text{とすると } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ である.}$$

2.6 基底のとりかえ

$f: V \to V'$ を線形写像,V, V' の基底 $\varepsilon, \varepsilon'$ に関する表現行列を A とする.V と V' の別の基底 f, f' に関する表現行列が B になったとき,A と B の関係は以下のようになる.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{C}^m \\ V \arrow[u, "\varphi_\varepsilon"] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_f"'] & V' \arrow[u, "\varphi_{\varepsilon'}"'] \arrow[d, "\varphi_{f'}"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{C}^m \end{tikzcd}$$

上の図式において $\varphi_\varepsilon \circ \varphi_f^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は全単射な線形写像.

よって $\exists P : n$ 次正方行列 $s.t. \varphi_\varepsilon \circ \varphi_f^{-1}(\boldsymbol{x}) = P\boldsymbol{x}$.

$\varphi_{\varepsilon'} \circ \varphi_{f'}^{-1}$ も同様に $\varphi_{\varepsilon'} \circ \varphi_{f'}^{-1}(\boldsymbol{x}) = Q\boldsymbol{x}$.

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して,$QB\boldsymbol{x} = AP\boldsymbol{x}$ が成立するので,$QB = AP. \therefore B = Q^{-1}AP$.

特に $V = V'$ のときは $\varepsilon = \varepsilon', f = f'$ ととるので,$B = P^{-1}AP$ となる. この P を ε から f へのとりかえ行列という.

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 = & p_{11}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{e}_n \\ & \vdots \\ \boldsymbol{f}_n = & p_{1n}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{cases} \text{とするとき,} P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \text{となる.}$$

2.7 固有値と固有ベクトル

$f: V \to V'$ を線形写像とする. また $V = V'$ のときのみ考える. このとき f を線形変換という. また V の基底を 1 つ定める. このとき f の表現行列が対角行列 D になると望ましい.A が対角行列となるように基底をとりかえることを考える. つまり $P^{-1}AP = D$ となるような正則行列 P を見つける. 見つけられるとき A は対角化可能という.

V の線形変換 f に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}, \exists \boldsymbol{x} \in V\,(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}), \exists \alpha \in \mathbb{C}$$

となるとき α を f の固有値,$\boldsymbol{x}$ を f の固有値という. 正方行列 A に対して

$$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}, \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n\,(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}), \exists \alpha \in \mathbb{C}$$

となるとき α を A の固有値,$\boldsymbol{x}$ を A の固有ベクトルという.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_\varepsilon"'] & V \arrow[d, "\varphi_\varepsilon"'] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "A"'] & \mathbb{C}^n \end{tikzcd}$$

上の図式より $f\left(\boldsymbol{x}\right)=\alpha\boldsymbol{x}\Longleftrightarrow A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\left(\text{ただし}\varphi_\varepsilon\left(\boldsymbol{x}\right)=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)$

$\det\left(\alpha E_n-A\right)=0$ となる $\alpha\in\mathbb{C}$ が A の固有値で,α に関する固有ベクトルを求めるには方程式 $\left(\alpha E_n-A\right)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ を解けばよい.

$A\in M_{n\times n}\left(\mathbb{C}\right)$ に対して A の特性多項式を $\Phi_A\left(x\right):=\det\left(xE_n-A\right)$ と定める.$\Phi_A\left(x\right)$ は x の n 次式であり,$\Phi_A\left(x\right)=0$ を A の特性多項式, その解を A の特性根という.A の特性根は重解も含めて n 個ある.

A と $P^{-1}AP$ の特性根は一致する.($\leftarrow f$ の表現行列によらない)

A の特性根を $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ とすると $\det A=\alpha_1\cdot\cdots\cdot\alpha_n$.

A の固有値 α に対して,$W\left\langle\alpha,A\right\rangle:=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n|A\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}\right\}$ (αに対する A の固有ベクトル全体と $\mathbf{0}$) を固有空間という.$W\left\langle\alpha,A\right\rangle$ は $\mathbb{C}^n$ の部分空間となる.

各 i に対して,α_i の重複度が $\dim_{\mathbb{C}}W\left\langle\alpha_i,A\right\rangle$ と等しいとき,A は対角化できる. つまりいつでも対角化できるとは限らない.

しかし $\forall A\in M_{n\times n}\left(\mathbb{C}\right)$ に対して,$\exists P$: 正則行列 $s.t.P^{-1}AP$ は次の形にできる.

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\blacksquare & & & O\\ & \blacksquare & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \blacksquare\end{pmatrix}\text{(ジョルダン標準形という)}$$

ただし $\blacksquare=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & & O\\ & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ O & & & \alpha\end{pmatrix}$ の形である.

$n=3$ のとき, ジョルダン標準形は次の 3 種類である.

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 0\\ 0 & \alpha & 1\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}\left(\alpha,\beta,\gamma\text{は同じでもいい}\right)$$

2.8 部分空間の和

V を $\mathbb{C}$ 上の線形空間,$W_1,W_2\subset V$ を V の部分空間とする.W_1,W_2 の和空間を $W_1+W_2:=\left\{\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x}_2|\boldsymbol{x_1}\in W_1,\boldsymbol{x}_2\in W_2\right\}$ と定める.$W=W_1+W_2$ とするとき, 次は同値である.

(1) $\forall\boldsymbol{x}\in W,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\left(\boldsymbol{x}_1\in W_1,\boldsymbol{x}_2\in W_2\right)$ という表し方が一意的である.

(2) $W_1\cap W_2=\left\{\mathbf{0}\right\}$

このとき W_1+W_2 を $W_1 \oplus W_2$ と書き,W は W_1, W_2 の直和であるという.

2.9　その他の準備事項

V を $\mathbb{C}$ 上の線形空間とする.V のベクトル全てを $\nvdash$ に写像する線形変換を零変換といい,O と書く.

$\exists m \in \mathbb{N} s.t. f^m = O$ となる V 上の線形変換をべき零変換という.f がべき零変換であることと,f の固有値が全て 0 であることは同値である.

V が部分空間 W_i の直和, つまり $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ であるとする.$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_r \left(\boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w}_i \in W_i\right)$ に対して V 上の線形変換 f が W_i 上の線形変換 f_i を用いて

$$f\left(\boldsymbol{v}\right) = f_1\left(\boldsymbol{w}_1\right) + \cdots + f_r\left(\boldsymbol{w}_r\right)$$

と定められる. これを $\{f_1, \cdots, f_r\}$ の直和といい,$f = f_1 \oplus \cdots \oplus f_r$ と書く.

$A \in M_{n\times n}\left(\mathbb{C}\right)$ が

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_r \end{pmatrix}$$

と表されるとき,($A_1, \cdots, A_r$: 正方行列)A は $A_1, \cdots, A_r$ の直和であるといい,$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$ と書く.

f を V 上の線形変換,I を V 上の恒等変換とし,α を f の固有値とする. このとき

$$\widetilde{W}\langle\alpha, f\rangle := \{\boldsymbol{x} \in V | \exists m \in \mathbb{N} s.t. \left(f - \alpha I\right)^m \left(\boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{0}\}$$

を f の固有値 α に関する準固有空間という. 固有空間は準固有空間の部分空間である.

$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ を f の相異なる固有値の集合とする.f は $\widetilde{W}\langle\alpha_i, f\rangle$ を $\widetilde{W}\langle\alpha_i, f\rangle$ に写像する. つまり f の $\widetilde{W}\langle\alpha_i, f\rangle$ への制限は $\widetilde{W}\langle\alpha_i, f\rangle$ 上の線形変換と見なせる.

$V = \widetilde{W}\langle\alpha_1, f\rangle \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}\langle\alpha_r, f\rangle$ が成立し, また,$\widetilde{W}\langle\alpha_i, f\rangle$ の次元は α_i の重複度に一致する.

3　ジョルダン標準形

3.1　べき零変換の表現行列

次の形の n 次正方行列をジョルダン細胞といい,$J\left(\alpha, n\right)$ と書く.

$$J\left(\alpha, n\right) := \left.\begin{pmatrix} \alpha & 1 & & O \\ & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \alpha \end{pmatrix}\right\} n$$

ただし $J\left(\alpha, 1\right) = \left(\alpha\right)$ である.

ジョルダン細胞の直和で表される行列をジョルダン標準形という.

Thm 1. 線形変換 V のべき零変換 f は,V の適当な基底の表現行列 A がジョルダン細胞 $J(0,k_i)$ のいくつかの直和で表され, 直和の順序を除き一意的に定まる.

proof $f=O$ のとき, 表現行列は零行列で, ジョルダン標準形となる.

$f\neq O$ のとき,$\exists m\geq 2$ に対して $f^m=O, f^{m-1}\neq O$ とする.

$0\leq k\leq m\,(k\in\mathbb{Z})$ に対して集合 $V(k)$ を

$$V(k):=\left\{\boldsymbol{x}\in V\middle|f^k(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\right\}$$

と定めると,$f^0=I$ より $V(0)=\{\boldsymbol{0}\}$, また $V(m)=V$.

$\boldsymbol{x}\in V(k)$ とすると $f(k)(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ より $f^{k+1}(\boldsymbol{x})=f\left(f^k(\boldsymbol{x})\right)=f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$.

$\therefore\ \boldsymbol{x}\in V(k+1)$ なので $\{\boldsymbol{0}\}=V(0)\subset V(1)\subset\cdots\subset V(m-1)\subset V(m)=V$. 更に $V(k)$ は $V(k+1)$ の部分空間である.$\cdots(1)$

ここで $s_k:=\dim_{\mathbb{C}}(V(k))-\dim_{\mathbb{C}}(V(k-1))\geq 0\,(1\leq k\leq m)$ とし,$t_m=s_m$ とする. また $V(m)$ の一次独立なベクトル $\{\boldsymbol{u}_{m,1},\cdots,\boldsymbol{u}_{m,t_m}\}$ を

$$V(m)=\mathbb{C}\{\boldsymbol{u}_{m,1},\cdots,\boldsymbol{u}_{m,t_m}\}\oplus V(m-1)\cdots(2)$$

となるようにとる.

$0\leq k\leq m-1$ に対して,

$$a_1f^k(u_{m,1})+\cdots+a_{t_m}f^k(u_{m,t_m})=\boldsymbol{0}$$

とする. また $\boldsymbol{u}=a_1\boldsymbol{u}_{m,1}+\cdots+a_{t_m}\boldsymbol{u}_{m,t_m}$ とする.

そのとき $f^k(\boldsymbol{u})=a_1f^k(\boldsymbol{u}_{m,1})+\cdots+a_{t_m}f^k(\boldsymbol{u}_{m,t_m})=\boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{u}\in V(k)\subset V(m-1)$.

また $\boldsymbol{u}\in\mathbb{C}\{\boldsymbol{u}_{m,1},\cdots,\boldsymbol{u}_{m,t_m}\}$ なので $\boldsymbol{u}\in\mathbb{C}\{\boldsymbol{u}_{m,1},\cdots,\boldsymbol{u}_{m,t_m}\}\cap V(m-1)$.

$V(m)$ はこれらの直和なので $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}.\boldsymbol{u}_{m,1},\cdots,\boldsymbol{u}_{m,t_m}$ は一次独立なので $a_1=\cdots=a_{t_m}=0$. よって $f^k(\boldsymbol{u}_{m,1}),\cdots,f^k(\boldsymbol{u}_{m,t_m})$ は一次独立.

ここで,$1\leq i\leq t_m$ に対して $f^k(\boldsymbol{u}_{m,i})\in V(m-k), f^k(u_{m,i})\notin V(m-k-1)$ なので, これと $(1),(2)$ より

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_{m,1}, & \cdots, & \boldsymbol{u}_{m,t_m}\\ f(\boldsymbol{u}_{m,1}), & \cdots, & f(\boldsymbol{u}_{m,t_m})\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f^{m-1}(\boldsymbol{u}_{m,1}), & \cdots, & f^{m-1}(\boldsymbol{u}_{m,t_m})\end{cases}$$

は一次独立である.

$\mathbb{C}\{f(\boldsymbol{u}_{m,1}),\cdots,f(\boldsymbol{u}_{m,t_m})\}\cap V(m-2)=\{\boldsymbol{0}\}$ で,

また $\mathbb{C}\{f(\boldsymbol{u}_{m,1}),\cdots,f(\boldsymbol{u}_{m,t_m})\}\oplus V(m-2)\subset V(m-1)$.

$\therefore\dim_{\mathbb{C}}(V(m-1))-\dim_{\mathbb{C}}(V(m-2))\geq s_m$ より $s_{m-1}\geq s_m$.

よって $t_{m-1}=s_{m-1}-s_m\geq 0$ とし,$V(m-1)$ の一次独立なベクトル $\left\{\boldsymbol{u}_{m-1,1},\cdots,\boldsymbol{u}_{m-1,t_{m-1}}\right\}$ を

$$V(m-1)=\mathbb{C}\{f(\boldsymbol{u}_{m,1}),\cdots,f(\boldsymbol{u}_{m,t_m})\}\oplus\mathbb{C}\left\{\boldsymbol{u}_{m-1,1},\cdots,\boldsymbol{u}_{m-1,t_{m-1}}\right\}\oplus V(m-2)\cdots(3)$$

となるようにとる.

$1 \leq k \leq m-1$ に対して,

$$a_1 f^k(\boldsymbol{u}_{m,1}) + a_{t_m} f^k(\boldsymbol{u}_{m,t_m}) + b_1 f^{k-1}(\boldsymbol{u}_{m-1,1}) + \cdots + b_{t_{m-1}} f^{k-1}\left(\boldsymbol{u}_{m-1,t_{m-1}}\right) = \mathbf{0}$$

とする. また $\boldsymbol{u} = a_1 f(\boldsymbol{u}_{m,1}) + \cdots + a_{t_m} f(\boldsymbol{u}_{m,t_m}) + b_1 \boldsymbol{u}_{m-1,1} + \cdots + b_{t_{m-1}} \boldsymbol{u}_{m-1,t_{m-1}}$ とする.

そのとき $f^{k-1}(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ なので $\boldsymbol{u} \in V(k-1) \subset V(m-2)$.

また $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}\{f(\boldsymbol{u}_{m,1}), \cdots, f(\boldsymbol{u}_{m,t_m})\} + \mathbb{C}\left\{\boldsymbol{u}_{m-1,1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{m-1,t_{m-1}}\right\}$ なので

$\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}\{f(\boldsymbol{u}_{m,1}), \cdots, f(\boldsymbol{u}_{m,t_m})\} + \mathbb{C}\left\{\boldsymbol{u}_{m-1,1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{m-1,t_{m-1}}\right\} \cap V(m-2)$.

$V(m-1)$ はこれらの直和なので $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. $f(\boldsymbol{u}_{m,1}), \cdots, f(\boldsymbol{u}_{m,t_m}), \boldsymbol{u}_{m-1,1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{m-1,t_{m-1}}$ は一次独立なので $a_1 = \cdots = a_{t_m} = b_1 = b_{t_{m-1}} = 0$.

よって $f^k(\boldsymbol{u}_{m,1}), \cdots, f^k(\boldsymbol{u}_{m,t_m}), f^{k-1}(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{m-1,1}}), \cdots, f^{k-1}\left(\boldsymbol{u}_{m-1,t_{m-1}}\right)$ は一次独立.

ここで $1 \leq i \leq t_m, 1 \leq j \leq t_{m-1}$ に対して

$\begin{cases} f^k(\boldsymbol{u}_{m,i}) \in V(m-k), & f^k(\boldsymbol{u}_{m,i}) \notin V(m-k-1) \\ f^{k-1}(\boldsymbol{u}_{m-1,j}) \in V(m-k), & f^{k-1}(\boldsymbol{u}_{m-1,j}) \notin V(m-k-1) \end{cases}$ なので, これと $(1), (2), (3)$ より

$$\begin{cases} \begin{matrix} \boldsymbol{u}_{m,1}, & \cdots, & \boldsymbol{u}_{m,t_m} & & & \\ f(\boldsymbol{u}_{m,1}), & \cdots, & f(\boldsymbol{u}_{m,t_m}), & \boldsymbol{u}_{m-1,1}, & \cdots, & \boldsymbol{u}_{m-1,t_{m-1}} \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ f^{m-1}(\boldsymbol{u}_{m,1}), & \cdots, & f^{m-1}(\boldsymbol{u}_{m,t_m}), & f^{m-2}(\boldsymbol{u}_{m-1,1}), & \cdots, & f^{m-2}\left(\boldsymbol{u}_{m-1,t_{m-1}}\right) \end{matrix} \end{cases}$$

は一次独立である.

同様に $1 \leq k \leq m-2$ に対して $t_k = s_k - s_{k-1}$ とし, 同様の操作をすれば

$$\begin{cases} \begin{matrix} \boldsymbol{u}_{m,1}, & \cdots, & \boldsymbol{u}_{m,t_m} & & & & & & & \\ f(\boldsymbol{u}_{m,1}), & \cdots, & f(\boldsymbol{u}_{m,t_m}), & \boldsymbol{u}_{m-1,1}, & \cdots, & \boldsymbol{u}_{m-1,t_{m-1}} & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & & & & \\ f^{m-1}(\boldsymbol{u}_{m,1}), & \cdots, & f^{m-1}(\boldsymbol{u}_{m,t_m}), & f^{m-2}(\boldsymbol{u}_{m-1,1}), & \cdots, & f^{m-2}\left(\boldsymbol{u}_{m-1,t_{m-1}}\right), & \cdots, & \boldsymbol{u}_{1,1}, & \cdots, & \boldsymbol{u}_{1,t_1} \end{matrix} \end{cases} \cdots \bigstar$$

が得られる.(見切れてますね, 申し訳ありません.)

$V = \mathbb{C}\{\boldsymbol{u}_{m,1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{m,t_m}\} \oplus \mathbb{C}\left\{\boldsymbol{u}_{m-1,1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{m-1,t_{m-1}}\right\} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\{\boldsymbol{u}_{1,1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{1,t_1}\}$ なので, これらのベクトルは V を張ることから V の基底となる.

$W(m,i) := \mathbb{C}\left\{f^{m-1}(\boldsymbol{u}_{m,i}), \cdots, \boldsymbol{u}_{m,i}\right\}$ とすると, これは V の部分空間になる.

$\boldsymbol{y} \in W(m,i)$ とすると $\exists a_0, \cdots, a_{m-1} \in \mathbb{C} s.t. \boldsymbol{y} = a_{m-1} f^{m-1}(\boldsymbol{u}_{m,i}) + \cdots + a_0 \boldsymbol{u}_{m,i}$ なので,$f(\boldsymbol{y}) = a_{m-2} f^{m-1}(\boldsymbol{u}_{m,i}) + \cdots + a_0 f(\boldsymbol{u}_{m,i}) \in W(m,i)$ より f は $W(m,i)$ を自分自身に写像するので,f の $W(m,i)$ への制限は $W(m,i)$ 上の線形変換と見なせる. よって基底 $\left\{f^{m-1}(\boldsymbol{u}_{m,i}), \cdots, \boldsymbol{u}_{m,i}\right\}$ に関する $f|_{W(m,i)}$ の表現行列は

$$J(0,m) = \left.\begin{pmatrix} 0 & 1 & & O \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & 0 \end{pmatrix}\right\} m$$

で,f の表現行列の直和で現れる $J(0,m)$ の個数は t_m 個.

一般に $1 \leq k \leq m$ に対して,$1 \leq i \leq t_k$ とする.$W(k,i) := \mathbb{C}\left\{f^{k-1}(\boldsymbol{u}_{k,i}), \cdots, \boldsymbol{u}_{k,i}\right\}$ とするとこれは V の部分空間となり, また f の $W(k,i)$ への制限は $W(k,i)$ 上の線形写像と見なせる. よって基底 $\left\{f^{k-1}(\boldsymbol{u}_{k,i}), \cdots, \boldsymbol{u}_{k,i}\right\}$ に関する $f|_{W(k,i)}$ の表現行列は

$$J(0,k) = \left.\begin{pmatrix} 0 & 1 & & O \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & 0 \end{pmatrix}\right\} k$$

で,f の表現行列の直和で現れる $J(0,k)$ の個数は t_k 個.

特に $k=1$ に関して,$\boldsymbol{u}_{1,t_i} \in V(1)$ より $f(\boldsymbol{u}_{1,t_i}) = \boldsymbol{0}$.$\therefore J(0,1) = (0)$ で,f の表現行列の直和で現れる $J(0,1)$ の個数は t_1 個.

これらより, 基底 ★ (を適当な順序に並べたもの) に関する f の表現行列 A は

$$A = \underbrace{J(0,m) \oplus \cdots \oplus J(0,m)}_{t_m\text{個}} \oplus \cdots \oplus \underbrace{J(0,1) \oplus \cdots \oplus J(0,1)}_{t_1\text{個}}$$

となる.

また f の表現行列がもう 1 つのジョルダン標準形 B になったとする.

B に含まれる $J(0,k)\,(1 \leq k \leq m)$ の個数を p_k とすると,$V(k)$ の次元 r_k は

$$r_k = (p_1 + 2p_2 + \cdots + mp_m) - (p_m + (p_m + p_{m-1}) + \cdots + (p_m + p_{m-1} + \cdots + p_{k+1}))$$

となるので,

$$\begin{aligned} s_k &= \dim_{\mathbb{C}}(V(k)) - \dim_{\mathbb{C}}(V(k-1)) \\ &= (p_1 + 2p_2 + \cdots + mp_m) - (p_m + (p_m + p_{m-1}) + \cdots + (p_m + p_{m-1} \cdots + p_{k+1})) \\ &- ((p_1 + 2p_2 + \cdots + mp_m) - (p_m + (p_m + p_{m-1}) + \cdots + (p_m + p_{m-1} + \cdots + p_{k+1}) + (p_m + p_{m-1} + \cdots + p_k))) \\ &= p_m + p_{m-1} + \cdots + p_k \end{aligned}$$

$\therefore t_m = s_m = p_m$ で,$1 \leq k \leq m-1$ に対しては $t_k = s_k - s_{k+1} = p_k$ となるので A と B に含まれる $J(0,k)$ の個数は等しい. □

また V 上の線形変換を f,f の相異なる固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ とし,I_i を $\widetilde{W}\langle\alpha_i, f\rangle$ 上の恒等変換とする. このとき V 上の線形変換 $f - \{\alpha I_i \oplus \cdots \oplus \alpha_r I_r\}$ はべき零変換となる. よって以下が成立する.

Thm 2. 適当な基底をとると,f の表現行列はジョルダン標準形で表され, ジョルダン細胞の順序を除き一意的に表される.

proof f の $\widetilde{W}\langle\alpha_i, f\rangle$ への制限を f_i と書く.$(1 \leq i \leq r)$

このとき $f_i - \alpha_i I_i$ は $\widetilde{W}\langle\alpha_i, f\rangle$ 上のべき零変換である. よって Thm.1 より, 適当な基底をとると $f - \alpha_i I_i$ の表現行列はいくつかのジョルダン細胞の直和

$$J(0,k_{i,1}) \oplus \cdots \oplus J(0,k_{i,m_i})$$

と表せる.f_i の $\widetilde{W}\langle\alpha_i, f\rangle$ における固有値は α_i なので,f_i の表現行列は $J(\alpha_i, k_{i,j}) = \alpha E_{k_{i,j}} + J(0, k_{i,j})$ の直和となる.$(1 \leq j \leq m_i)$

よって f の表現行列として全ての i に対して考えればジョルダン標準形が得られる.Thm.1 より一意性も成立する. □

3.2 一般的な一次変換の表現行列

$V = \mathbb{C}^n$ とすると V 上の線形変換 f はある n 次正方行列 A を用いて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表せる.Thm.2 より f の適当な基 f に関する表現行列がジョルダン標準形 B になったとする.$\mathbb{C}^n$ の標準基底に関する表現行列 ε は A になるので,ε から f へのとりかえ行列を P として $B = P^{-1}AP$ となる. つまり任意の正方行列 A はある適当な正則行列 P を用いて $B = P^{-1}AP$ としたとき B がジョルダン標準形になる.

Thm.1,Thm.2 より,A のジョルダン標準形を求めるには $\widetilde{W}\langle\alpha_i, f\rangle$ の基底を全ての i で集めて順序を適当に固定した基底に関する表現行列を求めればよい.

3.3 最小多項式

多項式 $p_f(x)$ が $p_f(f) = O$ を満たし, 次数が最小で最高次の係数が 1 であるとき,$p_f(x)$ のことを線形変換 f の最小多項式と呼ぶ.

同様に, 多項式 $p_A(x)$ が $p_A(A) = O$ を満たし, 次数が最小で最高次の係数が 1 であるとき,$p_A(x)$ のことを正方行列 A の最小多項式と呼ぶ.

A を f の表現行列とすると,$p_f(x)$ と $p_A(x)$ は一致する.

また,$p_f(x)$ は f の固有値全てを根に持ち, 固有多項式 $\Phi_f(x)$ を割り切る.

Thm.2 から,$l_i := \max\{k_{i,j} | 1 \leq j \leq m_i\}$ とすると $\left(\alpha_i E_{k_{i,j}} - J(\alpha_i, k_{i,j})\right)^{l_i} = O$ となるので,$p_A(x)$ は $(x-\alpha_i)^{l_i}$ を因子に持てばよい. よって A の最小多項式は $\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)^{l_i}$ と表せる.

これと Thm.1,Thm.2 より,$(f_i - \alpha_i I_i)^{l_i}$ は $\widetilde{W}\langle\alpha_i, f\rangle$ 上のべき零変換となる.

$n = 2, 3$ であれば, 正方行列 A のジョルダン標準形を求めるには以下の例に示すような解法ではなく最小多項式と固有多項式のみからジョルダン標準形を求めてもよい.n が大きくなるとこの 2 つだけではジョルダン標準形が求められないことがある.$\left(n = 4 \text{ のときにもある } \left(p_A^2 = \Phi_A\right)\right)$

Ex 1.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

のジョルダン標準形を求める.

解 $\Phi_A(x) = (x-2)(x-1)^2 \therefore$ 固有値 $\alpha = 2, 1$ (重解). 最小多項式は $(x-2)(x-1), \Phi_A(x)$ のどちらかで,$(A-2E_3)(A-E_3) \neq O$ より $p_A(x) = \Phi_A(x)$.

(1) $\alpha = 1$ に対して

$$(A-2E|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore \widetilde{W}\langle 2, A\rangle = \left\{ a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{C} \right\}.$$

(2) $\alpha = 1$ に対して

$$(A-E|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\left((A-E)^2 \,|\mathbf{0}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore \widetilde{W}\langle 1, A\rangle = \left\{ b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると $A\boldsymbol{u}_1 = 2\boldsymbol{u}_1, A\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2, (A-E_3)\,\boldsymbol{u}_3 = -\boldsymbol{u}_2$.

$\therefore \boldsymbol{u}_2' := -\boldsymbol{u}_2$ とすると $A\boldsymbol{u}_1 = 2\boldsymbol{u}_1, A\boldsymbol{u}_2' = \boldsymbol{u}_2', A\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_2' + \boldsymbol{u}_3$.

よって例えば

$$P := \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると P は正則で

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.4 微分方程式の解き方

ここで本来の趣旨である微分方程式に立ち戻る.1 階線形同次連立常微分方程式は $\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt} = A\boldsymbol{y}$ の形で表される. このときある正則行列 P を用いて変数変換 $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ を考えると,$\dfrac{d\boldsymbol{z}}{dt} = \left(P^{-1}AP\right)\boldsymbol{z}$ となる.$P^{-1}AP$ がジョルダン標準形となるとき, 各々の常微分方程式は容易に解くことができる.

Ex 2. 微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + 4x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -x_1 + 3x_3 \end{cases}$$

を解く.

解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると例 1 の A を用いて $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$ となる.

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ を例 1 の P を用いて $P\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ とすると, $\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt} = B\boldsymbol{y}$.

$$\therefore \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 & \cdots (1) \\ \frac{dy_2}{dt} = y_2 + y_3 & \cdots (2) \\ \frac{dy_3}{dt} = y_3 & \cdots (3) \end{cases}$$

(1) より $y_1(t) = c_1 e^{2t}$.(3) より $y_3(t) = c_3 e^t$

(2) より $\dfrac{dy_2}{dt} = y_2 + c_3 e^t$. これを解けば $y_2(t) = c_2 e^t + c_3 t e^t$.

$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ より $\begin{cases} x_1(t) = -2c_2 e^t - 2c_3 t e^t + c_3 e^t \\ x_2(t) = c_1 e^{2t} + c_3 e^t \\ x_3(t) = -c_2 e^t - c_3 t e^t \end{cases}$

4 参考文献

三宅敏恒 (2008)『線形代数学-初歩からジョルダン標準形へ-』培風館

5 最後に

展示資料に関するご質問を Zoom にて受け付けております.『物理研究会 Zoom 質問受付のご案内』に受付時間や参加方法等の詳細を載せております. お気軽にお尋ねください.