線形代数学

-Linear Algebra-

東京理科大学　(TOKYO UNIVERSITY OF SIENCE)
野田数学研究会
理工学部２年　宮下　祥
令和２年　10月

はじめに

この pdf は線形代数学ゼミの資料として筆者が作ったものです．主に三宅　敏恒　「線形代数学　初歩からジョルダン標準形へ」を参考にしてあります．筆者が TeX の扱いに慣れておらず手探りで作業を続けた結果，表記に表記に一貫性のない場合などが多々あり申し訳ないです．また内容も抜けているところや，議論が不十分なところがあるかもしれません．そのような箇所が見つかった場合にはご教授いただけるとありがたいです．終わりに筆者の稚拙な講義をきいてくださった線形代数学ゼミメンバーに感謝をここに記して申し上げます．

第 1 章　行列

§1 行列の定義と様々な行列

定義 1.1.1(行列)

自然数 m, n に対し, $m \times n$ 個の数 $a_{ij} (i = 1, \cdots, m; 1, \cdots, n)$ を縦 m 個，横の長方形に並べ, $\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}$ で囲ったものを $m \times n$ 型の行列という．また，m 行 n 列の行列，mn 行列，（m, n）行列などということもある．このとき, 行列を構成する mn 個の数を行列の成分という．とくに，

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

としたとき，a_{ij}を A の (i, j) 成分という．全ての成分が実数である行列を実行列という．以下では行列と書けば実行列のこととする．

行列 A の成分の横の並び

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

を A の第 i 行という．同様に，行列 A の縦の成分の並び

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

を行列 A の第 j 列という．

行列を描書く際，[] ではなく () で囲う場合もある．また，(i, j) 成分が a_{ij}である $m \times n$ 行列 A を

$$A = [a_{ij}],\ A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

などと書く場合もある．

定義 1.1.2(零行列)

全ての成分が 0 であるような $m \times n$ 行列を $m \times n$ 零行列といい，$O_{m,n}$と書く.混同の恐れがない場合は省略し単に O と書く．

例 1.1.1

2×3 型の零行列は次のようにかける．

$$O = O_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定義 1.1.3(正方行列)

行と列の数が等しい行列，つまり $n \times n$ 行列を n 次正方行列という．

定義 1.1.4

n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ について，$a_{11}, \cdots, a_{nn}$を A の対角成分という．そして，n 次正方行列のうち対角成分以外の成分が 0 である行列を対角行列という．また，正方行列 A に対してその対角成分の和を A のトレースといい，$tr(A)$ と書く．

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

例 1.1.2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

とすると，A, B ともに 3 次の正方行列であり，$tr(A) = 6, tr(B) = 10$ である．また B は対角行列である．

定義 1.1.5(単位行列)

対角成分が全て 1 でそれ以外の成分が全て 0 であるような正方行列を単位行列といい，E と書く．特に次数を明示したいときは，n 次の単位行列を E_nと書く．

例 1.1.3

$$E = E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{である．}$$

定義 1.1.6（スカラー行列）

対角成分が全て等しい対角行列をスカラー行列という

定義 1.1.7(転置行列)

$A = [a_{ij}] : m \times n$ 行列

$$^tA := [a_{ji}]$$

例 1.1.4

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{とすると,} \ ^tA = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

定義 1.1.8（行ベクトル，列ベクトル）

A, B : 行列, $n, m \in \mathbb{N}$

$$A \text{ が } n \text{ 次の行ベクトルである．} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \text{ は } 1 \times n \text{ 行列である．}$$

$$B \text{ が } n \text{ 次の列ベクトルである．} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B \text{ は } m \times 1 \text{ 行列である．}$$

行ベクトルとッ列ベクトルを合わせて数ベクトルという．また，成分が全て 0 である数ベクトルを零ベクトルといい，$\mathbf{0}$ と書く．

定義 1.1.9

次のように定義される記号δ_{ij}をクロネッカーのデルタと呼ぶ．

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

§2 行列の演算

定義 1.2.1（行列の和）

$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$: $n \times m$ 行列

$$A + B := [(a_{ij} + b_{ij})]$$

二つの行列の型が同じ時，その和が定義される．二つの行列の和の行列は，もとの行列の対応する成分の和を成分とする行列である．また，定義からすぐにわかるが，

$$A + O = O + A = A$$

が成り立つ．つまり，行列の和について単位律が成り立つ．さらに，実数が結合律を満たすことから A, B, C を同型の行列とした時

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

が成り立つこと，言い換えれば行列の和について結合律が成り立つことも瞬時にわかるだろう．

例 1.2.1

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ としたとき，この二つの行列の和は

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 6 & 0 & 11 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

定義 1.2.2（行列のスカラー倍）

$A = [a_{ij}]$: $n \times m$ 行列
$c \in \mathbb{R}$

$$cA := [ca_{ij}]$$

とくに，$c = -1$ の時，$-1A = [-a_{ij}] = -A$ とかく．そして，

$$A + (-A) = [a_{ij} + (-a_{ij})] = O = [(-a_{ij}) + a_{ij}] = (-A) + A$$

となるので，$-A$ は A の和に関する逆元となる．したがって行列の和について可逆律が成り立つ．

例 1.2.2

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $c = 3$ としたとき，$cA = 3A = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 15 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

定義 1.2.3（行列どうしの積）

$A = [a_{ik}] : m \times n$ 行列，$B = [b_{kj}] : n \times r$ 行列

$$AB := [\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}]$$

つまり，

$$(AB \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

二つの行列 A，B の積 AB が定義されたとしても，BA が定義されるとは限らない．もし定義されるならば，A と B は同じ型の正方行列である．

例 1.2.3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ とすると，} AB = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

命題 1.2.1

$A = [a_{ij}] : n \times m$ 行列

$$AE_m = E_n A = A$$

Proof.

単位行列の定義より $E_m = \delta_{ij}$である．このとき行列の定義より，

$$(AE_m \text{の } (i, j) \text{ 成分}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}$$

$$\therefore AE_m = A$$

$E_n A = A$ も同様に示すことができ，この命題の主張が成り立つ．

∎

命題 2.1.1 から分かるように，行列に適切な型の単位行列をかけてもその積はもとの行列と一致することが単位行列の名前の由来である．

命題 1.2.2（行列の演算に関する性質）

和の性質　(i)$A + B = B + A$

(ii)$A + O = O + A = A$

積の性質　(i)$AO = O$

(ii)$OA = O$

(iii)(AB)C=A(BC)

スカラー倍の性質　(i)$(ab)A = a(bA)$

(ii)$(aA)B = a(AB)$

分配律　(i)$a(A + B) = aA + aB$

(ii)$(a + b)A = aA + bA$

(iii)$A(B + C) = AB + AC$

(iv)$(A + B)C = AC + BC$

証明に関しては簡単なので省略する．

§3 行列の分割

定義 1.3.1

行列の行と列を次のように分けることによって，行列をいくつかの小さな行列に分割し，あたかも行列を成分とする行列のように考えると，無駄な計算を省くことや，証明が見やすくなることが多々ある．これを行列の分割という．

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

例 1.3.1

$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ であるとき，$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ である．

命題 1.3.1

$A : m \times n$ 行列

$B : n \times r$ 行列

次の A と B の分割において，A の列の分け方と B の行の分け方が同じであるとする．

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tu} \end{bmatrix}$$

このとき，A，B の各ブロックの行列を数であるかのように捉えて積を求めることができる．つまり，

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{su} \end{bmatrix}, \ C_{ij} = A_{i1}B1j + \cdots A_{it}B_{tj} \quad (i = 1, \cdots, s\,;\, j = 1, \cdots, u)$$

証明は省略する．

例 1.3.2

$A = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$とすると，

$$AB = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 16 & 10 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 9 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\therefore AB = \begin{bmatrix} 6 & 16 & 10 \\ 2 & 6 & 5 \\ 5 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

第2章　正則行列と行列の基本変形

§1 正則行列と様々な行列

定義 2.1.1

行列 A が n 次正方行列である $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ A は $n \times n$ 行列である

例 2.1.1

次の行列 A,B はそれぞれ 2 次正方行列、3 次正方行列である。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

第 1 章で述べた様に，一般 2 つの行列 A, B の積は定義されるとは限らない．しかし，2 つの n 次正方行列 C, D に関しては，積 CD, DC が定義される．また，この場合でも，$CD = DC$ となるとは限らない. (ならない方が一般的である)

例 2.1.2

n 次正方行列同士の積は n 次行列である.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 10 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 3 & 15 & 6 \end{bmatrix}$$

定義 2.1.2

A : n 次正方行列

$A = (a_{ij})$ において、$a_{ii} (i = 1, 2, \cdots, n)$ を対角成分と言う.

$$A \text{ が対角行列である } \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \text{ の対角成分以外の成分は } 0 \text{ である.}$$

例 2.1.3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 496 \end{bmatrix} \text{ とおく.}$$

このとき, A の対角成分は, 2, 11, 13 であり, B の対角成分は, 6, 28, 496 である.また, B は対角行列である.

$cE_n(c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ の形で表される行列を**スカラー行列**という．当然，スカラー行列は対角行列である．また,第 1 章でも取り上げた様に，一般に 2 つの行列の積は可換でないことが知られているが，n 次対角行列同士の積は，可換であるので，示してみよう．

命題 2.1.1

n 次対角行列同士の積は可換である

proof

$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ を n 次対角行列とする.A, B は n 次正方行列であることから，行列の積 AB，BA が定義されることは明らかである.
いま，$AB = BA$ を示せば良い．定義より，
$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right]$である．また A, B は対角行列なので，

$$(AB \text{ の } (i,j) \text{ 成分}) = \begin{cases} 0 \ (i \neq j) \\ a_{ii}b_{ii} \ (i = j) \end{cases}$$

である．
同様に $BA = \left[\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}\right]$より，

$$(BA \text{ の } (i,j) \text{ 成分}) = \begin{cases} 0(i \neq j) \\ b_{ii}a_{ii}(i = j) \end{cases}$$

である.よって，$AB = BA$ が成立する．

■

定義 2.1.3

A：n 次正方行列

$$n \text{ 次正方行列 } B \text{ が行列 } A \text{ の逆行列である．} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad AB = BA = E_n$$

また，行列 A の逆行列を A^{-1}と書く．

全ての行列に対して逆行列が存在するわけでない.例えば,行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$には逆行列が存在しない。実際 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$が A の逆行列と仮定すると,$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix}$となり、当然 AB は単位行列ではない。したがって,A には逆行列が存在しない.この様に全ての行列に対して逆行列が存在するわけでないので,次の用語を定める.

定義 2.1.4

A：n 次正方行列

$$\text{行列 } A \text{ が正則行列である.} \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{行列 } A \text{ の逆行列が存在する.}$$

命題 2.1.2

逆行列は一意である．

proof

A を n 次正則行列とし，行列 A^{-1}, B を A の逆行列であると仮定する．定義より $AA^{-1} = E_n$である.両辺に左から B をかけると

$$B(AA^{-1}) = BE_n$$

$$(BA)A^{-1} = B$$

$$A^{-1} = B$$

■

命題 2.1.3

A, B : n 次正則行列

(1)$(A^{-1})^{-1} = A$

(2)$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

proof

(1) 定義より，$(A^{-1})^{-1}A^{-1} = E$

両辺に右から A をかけると，$((A^{-1})^{-1}A^{-1})A = EA$

$$(A^{-1})^{-1}(A^{-1}A) = A$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

■

(2) 定義より，$(AB)^{-1}AB = E$

両辺に右から B^{-1}をかけると（$(AB)^{-1}AB$）$B^{-1} = EB^{-1}$

$$(AB)^{-1}(ABB^{-1}) = B^{-1}$$

$$(AB)^{-1}A = B^{-1}$$

両辺に右から A^{-1}をかけると $((AB)^{-1}A)A^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$((AB)^{-1}(AA^{-1})) = B^{-1}A^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

■

定義より明らかだと思うが，命題 2.3 は,“A, B : n 次正則行列 $\Rightarrow A^{-1}, AB$ も正則行列である.”ということである．

命題 2.1.4

A が正則行列 $\Rightarrow {}^tA$ も正則行列である。

Proof

A が正則行列より，A の逆行列 A^{-1}が存在する.定義より，

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

それぞれの行列の転地行列を取ると，

$${}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tE$$

転地行列の性質より，

$${}^t(A^{-1}){}^tA = {}^tA{}^t(A^{-1}) = E$$

$${}^tA{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}){}^tA = E$$

$\therefore$ 定義より, ${}^tA$ は正則行列である。また，$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

■

この命題から，$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ が一般にない立つこと分かったので，以降では両者を区別せず単に, ${}^tA^{-1}$と書くこととする．この様に，最初は区別していたが，一般的に等しいことがわかり，表記を統一する場合がある．（例えば，A, B, C を行列とすると，$(A+B)+C$ と $A+(B+C)$ は，異なる表記だが，等しいことが分かっているので，単に $A + B + C$ とかく．また，わかりやすくするために，敢えて元の表記で書く場合もある.)

定義 2.1.5

$A : n$ 次正方行列

$$trA \text{ が } A \text{ のトレースである} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} trA = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}t$$

つまり，trA とは,行列 A の対角成分の総和のことである.

本によっては，A のトレースのことを A の跡，A の固有和という．また，trA を TrA と書く本もある．この授業では，大学の演習問題集に合わせ，トレース，trA を採用する.

例 2.1.4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix}, B = E_3 \text{とおくと，} trA = 36, trB = 3 \text{ である.}$$

命題 2.1.5

A, B : n 次正方行列, $c \in \mathbb{R}$
(1)$tr(cA) = c\ trA$
(2)$tr(A+B) = trA + trB$
(3)$trA = tr({}^tA)$
(4)$tr(AB) = tr(BA)$

Proof

(1) 明らか
(2) 明らか

(3)$A = [a_{ij}]$ とする．定義より, ${}^tA = [a_{ji}]$
$\therefore tr({}^tA) = trA = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = trA$

(4)$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right]$とかけるので，$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$ である．
同様に，$tr(BA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ik}$である．
これは，$tr(BA) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$と書き換えることができる．

$$\therefore tr(AB) = tr(BA)$$

■

命題 2.1.6

A, B : $m \times n$ 行列

$$tr({}^tAB) = tr({}^tBA)$$

Proof

${}^t({}^tAB) = {}^tB{}^t({}^tA) = {}^tBA$ が成立するので，命題 2.3(3) より，

$$tr({}^tAB) = tr({}^tBA)$$

■

§2 基本行列と行列の基本変形

定義 2.2.1

次の様な特別な n 次正方行列を基本行列という.

(1)n 次単位行列の第 i 列と第 j 列を入れ替えた行列

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} & & & \downarrow\text{第 } i \text{ 列} & & & & \downarrow\text{第 } j \text{ 列} & & & \end{array} \\
P_n(i,j) = & \begin{bmatrix}
1 & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
 & & 1 & \vdots & & & & \vdots & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & 1 & & \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots & \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & & 1
\end{bmatrix}, \quad (i \neq J)
\end{array}
$$

(2)n 次単位行列の (i, j) 成分を 0 でない数 c に置き換えた行列

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & & \downarrow\text{第 } i \text{ 列} & & & \end{array} \\
Q_n(i,c) = & \\
\begin{array}{r} \\ \\ \\ i\text{ 行} \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix}
1 & & & \vdots & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & 1 & \vdots & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & c & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \vdots & 1 & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & \\
 & & & \vdots & & & 1
\end{bmatrix}, \quad (c \neq 0)
\end{array}
$$

(3)n 次単位行列の (i, j) 成分を 0 でない数 c に置き換えた行列

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & & & \downarrow\text{第 } j \text{ 列} & & \end{array} & \\
R_n(i,j:c) = & \begin{bmatrix}
1 & & & & \vdots & & \\
 & \ddots & & & \vdots & & \\
\cdots & \cdots & 1 & \cdots & c & \cdots & \cdots \\
 & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & \vdots & \ddots & \\
 & & & & \vdots & & 1
\end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{ 列} \\ , \quad (i \neq J) \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

$P_n(i, j)$ の逆行列は $(P_n(i, j))^{-1}, Q_n(i : c)$ の逆行列は, $Q_n(i : c^{-1}), R_n(i, j : c)$ の逆行列は, $R_n(i, j : -c)$ である.し

たがって，基本行列は，正則行列である．

命題 2.2.1

$$P_n(i,j) \text{ は正則行列であり, } \left(P_n(i,j)\right)^{-1} = P_n(i,j)$$

Proof.

$$S_n(i,j) := \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \text{とおく.} (S_n(i,j) \text{ は } n \text{ 次正方行列})$$

$$\text{この時,} P_n(i,j) = E_n + S \text{ と書ける.}$$

$$\begin{aligned} \therefore P_n(i,j)P_n(i,j) &= (E_n + S)(E_N + S) \\ &= E_n + E_nS + SE_n + SS \\ &= E_n + 2S + S^2 \end{aligned}$$

$$S^2 = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & 2 & 0 & \cdots & 0 & -2 & \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \text{より,} 2S + S^2 = O$$

$$\therefore P_n(i,j)P_n(i,j) = E_n$$

$$\therefore \left(P_n(i,j)\right)^{-1} = P_n(i,j)$$

∎

命題 2.2.2

行列 A の左から $P_n(i,j)$ を掛けた行列は，A の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列であり，行列 A の右から $P_n(i,j)$ を掛けた行列は，A の第 i 列と第 j 列を入れ替えた行列である．

*Proof.*行列 A の左から $P_n(i,j)$ を掛けた行列は，A の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列であることを示す.(右から掛ける場合も同様に示せる.)

$$\begin{aligned} PA &= (E+S)A \\ &= A + SA \end{aligned}$$

$$[BA \text{ の第 } k \text{ 行}] = \begin{cases} -[a_{i1}\cdots a_{in}] + [a_{j1}\cdots a_{jn}](k=i) \\ -[a_{j1}\cdots a_{jn}] + [a_{i1}\cdots a_{in}](k=j) \\ [0\cdots 0](k\neq i,j) \end{cases}$$ となることから，

行列 A の左から $P_n(i,j)$ を掛けた行列は，A の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列である

■

例 2.2.1

$$P_4(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ とする．

この時，$P_4(2,3)$ は, 正則行列であり，$P_4(2,3)A$ は，行列 A の第 2 行と第 3 行を入れ替えた行列である．

実際，$$P_4(2,3)P_4(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ となるので，

$P_4(2,3)$ は正則行列で，$\left(P_4(2,3)\right)^{-1} = P_4(2,3)$ また，

$$P_4(2,3)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

命題 2.2.3

$$Q_n(i,c)\text{ は正則行列であり, }\Big(Q_n(i,c)\Big)^{-1} = Q_n(i,c^{-1})(c \neq 0)$$

Proof.

$$T_n(i) \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\text{ とおく.}(T_n(i)\text{ は } n \text{ 次正方行列})$$

$$\text{このとき, } Q_n(i,c) = E_n + (c-1)T_n(i)\text{ である.また, }\Big(T_n(i)\Big)^2 = T_n(i)$$

$$\begin{aligned} \therefore Q_n(i,c)Q_n(i,c^{-1}) &= (E_n + (c-1)T_n(i))(E_n + (c^{-1}-1)T_n(i)) \\ &= E_n + (c-1)T_n(i) + (c^{-1}-1)T_n(i) + (c-1)(c^{-1}-1)\Big(T_n(i)\Big)^2 \\ &= E_n + (c-1)T_n(i) + (c^{-1}-1)T_n(i) + \Big(1 - c^{-1} - c + 1\Big)T_n(i) \\ &= E_n \end{aligned}$$

$$\therefore Q_n(i,c)Q_n(i,c^{-1}) = E_n$$

$$\therefore \Big(Q_n(i,c)\Big)^{-1} = Q_n(i,c^{-1})$$

■

命題 2.2.4

行列 A の左から $Q_n(i,c)$ を掛けた行列は，A の第 i 行を c 倍した行列であり，行列 A の右から $Q_n(i,c)$ を掛けた行列は，A の第 i 列を c 倍した行列である．

Proof.行列 A の左から $Q_n(i,c)$ を掛けた行列は，A の第 i 行を c 倍した行列であることを示す.(右から掛ける場合も同様に示せる.)

$$
\begin{aligned}
Q_n(i,c)A &= (E-(1-c)T_n(i))A \\
&= A-(1-c)T_n(i)A \\
&= A-T_n(i)A+cT_n(i)A
\end{aligned}
$$

$$
T_n(i)A = \begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{in} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix} \text{より,}
$$

$Q_n(i,c)A$ は,行列 A の第 i 行を c 倍した行列である.

■

例 2.2.2

$$
Q_4(3,5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{とする.}
$$

このとき，$Q_4(3)$ は,正則行列であり，$Q_4(3)A$ は，行列 A の第 3 行を 5 倍した行列である.

$$
\text{実際，} Q_4(3,5)Q_4(3,\frac{1}{5}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{となるので,}
$$

$Q_4(3,5)$ は正則行列であり,$\left(Q_4(3,5)\right)^{-1} = Q_4(3,\frac{1}{5})$ また,

$$
Q_4(3,5)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 10 & 0 & 20 & 15 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}
$$

命題 2.2.5

$R_n(i, j : c)$ は正則行列であり，$\left(R_n(i, j : c)\right)^{-1} = R_n(i, j : -c)(c \neq 0, i \neq j)$

Proof.

$$U_n(i, j) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{とおく.}(U_n(i, j)\text{ は } n \text{ 次正方行列})$$

$$\text{このとき}, R_n(i, j : c) = E_n + cU_n(i, j) \text{ である．また}, \left(U_n(i, j)\right)^2 = O$$

$$\begin{aligned} \therefore R_n(i, j : c)R_n(i, j : -c) &= \left(E_n + cU_n(i, j)\right)\left(E_n - cU_n(i, j)\right) \\ &= E_n + cU_n(i, j) - cU_n(i, j) - c^2\left(U_n(i, j)\right)^2 \\ &= E_n \end{aligned}$$

$$\therefore R_n(i, j : c)R_n(i, j : -c) = E_n$$

$$\therefore \left(R_n(i, j : c)\right)^{-1} = R_n(i, j : -c)$$

■

命題 2.2.6

行列 A の左から $R_n(i, j : c)$ を掛けた行列は，A の第 i 行に第 j 行の c 倍を加えた行列であり，行列 A の右から $R_n(i, j : c)$ を掛けた行列は，A の第 i 列に第 j 列の c 倍を加えた行列である．

*Proof.*行列 A の左から $R_n(i, j : c)$ を掛けた行列は，A の第 i 行に第 j 行の c 倍を加えた行列であることを示す．(右から掛ける場合も同様に示せる．)

$$R_n(i, j : c)A = E_nA + cU_n(i, j)A$$

$$cU_n(i, j)A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ ca_{j1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & ca_{jn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

行列 A の左から $R_n(i, j : c)$ を掛けた行列は，A の第 i 行に第 j 行の c 倍を加えた行列である．

■

例 2.2.3

$R_4(2,3:5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ とする．

$$\text{実際}, R_4(2,3:5)R_4(2,3:-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{となるので}$$

$R_4(2,3:5)$ は, 正則行列であり, $\left(R_4(2,3:5)\right)^{-1} = R_4(2,3:-5)$ また，

$$R_4(2,3:5)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 10 & -1 & 22 & 14 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

行列 A の左，または右から基本行列をかけることをそれぞれ左基本変形，右基本変形という．両方合わせて単に基本変形という場合もある．命題 2.7, 命題 2.9, 命題 2,11 からこの基本変形とは，次の 6 種類の変形とも言える．

(1)(左 1) 二つの行を入れ替える
(2)(左 2) ある行に 0 出ない数を掛ける．
(3)(左 3) ある行に他のある行の定数倍を加える．
(4)(右 1) 二つの列を入れ替える．
(5)(右 2) ある列に 0 でない数を掛ける．
(6)(右 3) ある列に他のある列の定数倍を加える．

教科書（『線形代数学　初歩からジョルダン系へ』) では，上の (1),(2),(3) を行列の（行）基本変形として取り上げている．また，命題 2.6, 命題 2.8, 命題 2,10 から基本変形の逆行列は，基本行列なので，基本変形も可逆な操作である．つまりは，行列 A が基本変形を何度か行うことにより，B に変形できたとすると，逆に B に基本変形を何度か繰り返し，行列 A に変形することができる．さらに，基本行列を学ぶことで，教科書の掃き出し法や逆行列の求め方が説明できる．

定義 2.2.2

$A = [a_{ij}] : m \times n$ 行列

(i)$a_{ij} \neq 0$ のとき, “(p, q) をかなめとして第 q 列を掃き出す” という操作が次の様に定義される.

(1) 行列 A の第 q 列を a_{ij}^{-1}倍する.

(2) 各 $i(\neq q)$ 行に対して, p 行の $-a_{iq}$倍を加える.

(ii) $a_{ij} \neq 0$ のとき, “(p, q) をかなめとして第 p 行を掃き出す” という操作が次の様に定義される.

(1) 行列 A の第 p 行を a_{ij}^{-1}倍する.

(2) 各 $i(\neq p)$ 行に対して, q 列の $-a_{pi}$倍を加える.

補題 2.2.1

A:正方行列

$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$ と区分けしたとき，A_{11}, A_{22}が正則ならば，A も正則である.

また，$A^{-1} = \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} & A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$ である.

Proof.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & -A_{12}A_{22}^{-1} + A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix} = E$$

また，同様に $A^{-1}A = E$ も成り立つ.

$\therefore$ このとき A は正則行列である.

■

定理 2.2.1

n 次正方行列 A に対し，$XA = E$ ならば A は正則行列である．

Proof. n に関する数学的帰納法を用いて示す．

(1)$n = 1$ のとき成り立つことは明らかである．

(2)$n > 1$ とし，$n - 1$ 次までの行列について主張が成り立つとする．A は零行列でないので，必要ならば行や列の入れ替えを行うことで $(1,1)$ 成分が 0 でないようにできる．そこで，$(1,1)$ をかなめとして，第 1 行，第 1 列を掃き出すと，適切な正則行列 P, Q を用いて，

$$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & {}^tO \\ O & A_1 \end{bmatrix}$$

とかける．このとき，A_1 は $n - 1$ 次の正方行列である．この P, Q に対して

$$Q^{-1}XP^{-1} = \begin{bmatrix} u & {}^tz \\ y & X_1 \end{bmatrix}$$

とおく．ここで，y, z は $n - 1$ 次の列ベクトルであり，X_1 は $n - 1$ 次の正方行列である．仮定より，

$$\begin{bmatrix} 1 & {}^tO \\ O & E_{n-1} \end{bmatrix} = E_n = (Q^{-1}XP^{-1})(PAQ) = \begin{bmatrix} u & {}^tzA_1 \\ y & X_1A_1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X_1A_1 = E_{n-1}$$

帰納法の仮定より，A_1 は正則行列．したがって〜より，$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & {}^tO \\ O & A_1 \end{bmatrix}$ も正則行列である．

$$\therefore P, Q \text{ が正則より，} A \text{ も正則行列である．}$$

■

§3 行列の標準形と簡約な行列

定義 2.3.1

$A : m \times n$ 次正方行列

$$\text{行列 } A \text{ が標準形である} \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A = \begin{bmatrix} E_r & \vdots & & O & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & 0 & & \\ O & \vdots & & \ddots & \\ & \vdots & & & 0 \end{bmatrix}, \qquad (0 \leqq r \leqq n)$$

このとき，$F_{m,n}(r) = A$ とおくこととする．

定理 2.3.1

任意の $m \times n$ 行列 A は基本変形を何回か繰り返すことで標準形に一意に変形することができる．

Proof.

(変形できること) $A = O$ の時は明らかなので,$A \neq O$ として考える．

このとき必要ならば行と列の入れ替えにより，$(1,1)$ 成分が 0 でない様にできる．そこで $(1,1)$ をかなめとして第 1 列及び第 1 行を掃き出せば，A は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

の形に変形できる．ここで A_1は $m-1 \times n-1$ 行列である．$A = O$ ならば,A は基本変形を繰り返すことで $F_{m,n}(1)$ に変形できると言える．$A =\neq O$ ならば, 行と列の入れ替えにより，$(2,2)$ 成分が 0 でない様にできるので，$(2,2)$ をかなめとして第 2 列及び第 2 行を掃き出せば,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_2 & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

と変形できる．この操作を繰り返せば行列を標準形に変形できる．

(一意性)　行列 A が二通りの標準形 $F_{m,n}(r)$ 及び $F_{m,n}(s)$ に変形できると仮定する.($r \leqq s$) 基本変形の可逆性から,

$$F_{m,n}(s) = PF_{m,n}(r)Q$$

となる様な正則行列 P, Q が存在する．P, Q の行及び列を r 番目で区切って，4 つに区分分けし，

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$$

とすると，

$$F_{m,n}(s) = \begin{bmatrix} P_{11} & P12 \\ P_{21} & P22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}Q_{11} & P_{11}Q_{12} \\ P_{21}Q_{11} & P_{21}Q_{12} \end{bmatrix}$$

$r \leqq s$ より，

$$\therefore P_{11}Q_{11} = E_r, P_{11}Q_{12} = O_{r,n-r}, P_{21}Q_{11} = O_{m-r,r}$$

$$\therefore P_{21}Q_{12} = O_{m-r,n-r}$$

$$F_{m,n}(s) = \begin{bmatrix} E_s & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}Q_{11} & P_{11}Q_{12} \\ P_{21}Q_{11} & P_{21}Q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & O_{s,n-s} \\ O_{m-s,s} & O_{m-s,n-s} \end{bmatrix} = F_{m,n}(r)$$

$$\therefore r = s$$

■

この定理 2.2 より，任意の行列 A に対して，A が標準形に一意に変形できることが分かったので，その標準形のことを A の標準化と呼び，　$F_A(r)$ と表すこととする．ここで r は,A の標準化の 0 でない成分の個数である．r は任意の行列に対して一意に決まるので次を定める．

定義 2.3.2

A : 行列

$$rank(A) = r \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \text{ は } F_A(r) \text{ に標準化できる.}$$

また，$rank(A) = r$ であるとき,“A の階数（ランク）は r である.”という.

ランクという概念は線形代数学において最も重要な概念の一つである．上の定義は計算上は便利だが本質を示しているとは必ずしも言えない．以後同値な定義を扱う予定である．

定義 2.3.3

A:行列
行列 A の 0 ベクトルでない行ベクトルの 0 でない最初の成分をその行の主成分という.

定義 2.10

A:行列

$$A\text{ が簡約な行列である } \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{A が次の (i)(ii)(iii)(iv) を満たす.}$$

(i)行ベクトルのうち零ベクトルがあれば，それは零ベクトルでないものよりも下にある.
(ii)零ベクトルでない行ベクトルの主成分は 1 である.
(iii)第 i 行の主成分を a_{ij_i}とすると, $j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$ となる.
(iv)各行の主成分を含む列の他の成分は 0 である.

例 2.3.1

次の行列 A, B は簡約な行列である. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

定理 2.3.2

任意の行列 A は左基本変形を施すことで簡約な行列に変形できる.

Proof. $A = O$ の時は明らかなので $A \neq O$ として考える.

まず，A が零行列でないことから，零行ベクトルでない行が少なくとも一つ存在する．この様な列のうち最も左側にある行列の 0 でない成分 a_{ij}をかなめとして第 i 行を掃き出し，第 1 行と，第 i 行を入れ替えると，A は,

$$\begin{bmatrix} 1 & {}^t\mathbf{x} \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{bmatrix}$$

と表すことができる．ここで, ${}^t\mathbf{x_2}$は $n-1$ 次の行ベクトルであり，B は $m-1 \times n-1$ 次の行列である. $B = O$ の時，この行列は A の簡約かである.$B \neq O$ とすると，B の列ベクトルで，零ベクトルでないものが存在する．この様な列のうち最も左側にある行列の 0 でない成分 b_{ij}をかなめとして第 i 行を掃き出し，B の第 1 行と，第 i 行を入れ替えると,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & {}^t\mathbf{x_1} \\ 0 & 1 & {}^t\mathbf{x_2} \\ \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & C \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

と変形できる．この操作を繰り返せば，左基本変形を行うことで行列 A を簡約な行列に変形できる.

∎

定義 2.3.4

A : 行列
B : A の簡約化

$$\mathrm{rank}'(A) \overset{\mathrm{def}}{=} (B \text{ の零ベクトルではない行ベクトルの個数})$$

定理 2.3.3

A : $m \times n$ 行列

$$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}'(A)$$

Proof.

rank′(A)=p とし，A の簡約化を B とする．まず，B の各主成分 a_{ij} を要として第 i 行を掃き出す．このとき各行の主成分以外の成分は 0 になる．この行列に適当に右基本変形を施すと次の様になる．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} p \text{ 個} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

B は簡約な行列であり，定義の(iii) から 掃き出した行列は列基本変形を行うことで標準形となる．また，主成分の個数は p 個なので，標準形は $F_A(p)$ である．よって $\mathrm{rank}(A) = p$

$$\therefore \mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}'(A)$$

■

系 2.3.1

A:行列
$\mathrm{rank}'(A)$ は一意に定まる．

Proof. 背理法で示す. $\mathrm{rank}'(A)= p$ かつ$\mathrm{rank}'(A)= p'$と仮定する．$(p \neq p')$

定理 2.2 より，A の標準化は一意に定まるので，$\mathrm{rank}(A)$ も一意に定まる．ここで $\mathrm{rank}(A) = r$ とおくと，

$$\text{Th2.4 より，} p = r, p' = r$$

$$\therefore p = p'$$

これは，仮定に矛盾する． $\therefore \mathrm{rank}'(A)$ は一意に定まる．

■

§4 連立一次方程式

２つ，３つの変数に関する２個，３個の連立方程式は中学校（中学 2 年生くらい？）で学んだと思う．ここでは一般的な連立一次方程式について考える．つまり，n 個の変数 $x_i(1 \leq i \leq n)$ の変数に関する m 個の一次方程式からなる連立方程式について考察する．

n 個の変数 $x_i(1 \leq i \leq n)$ の変数に関する m 個の一次方程式からなる連立方程式

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{array}\right\} m \text{ 個} \qquad (1)$$

の解法を考える．しかし，われわれは，解が定まらない場合でも，「不定の場合」と切り捨てるのではなく，解全体の集合について考える．さて，この連立一次方程式を解くことは，次の行列の方程式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

を解くことと同等である．ここで，

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_n \end{bmatrix}$$

とおき，A を系数行列,$\tilde{A}$を拡大係数行列ということとする．また，

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

とおけば，連立方程式 (1) を解くことは,行列の方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{c}, \qquad \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = O$$

を解くことと同等であるといえる．

命題 2.4.1

$\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = O$: 行列の方程式
P : 正則な行列
行列の方程式$\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = O$ は $P\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = O$ と同値である．

Proof. $\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = O \Rightarrow P\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = O$ は明らかなので，逆を示す．
$P\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = O$ とする．P は正則行列なので，両辺の左から P^{-1}を掛けると，

$$P^{-1}P\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = OP^{-1}$$

$$\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = O$$

■

$A\mathbf{x}$ は $n \times 1$ 行列 $(n \in \mathbb{N})$ となるので，上の命題と同様に列基本変形を施すことにより，連立方程式を変形することはできない．

また，行列$\tilde{A}$の簡約化を B とする．上の命題から，行列の方程式$\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = O$ を解くことは，行列の方程式 $B\tilde{\mathbf{x}} = O$ を解くことと同値であると分かる．このことから,$\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = O$ を解くには，B の主成分に対応しない変数に値を任意に与えればいいことがわかる．さらに，$A\tilde{\mathbf{x}} = O$ の形で書かれる行列の方程式が解を持つ時，

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

は明らかに解の一つである．この様な解を自明な解という．また，これに対して $\mathbf{x} = O$ 以外の解を自明でない解という．行列の方程式が解は次の様な場合には解を持たないので紹介しておく．

例 2.4.1

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ とおくと，行列の方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ は，解を持たない．実際，拡大行列$\tilde{A}$の簡約化 B は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ であり，$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1$ を満たす $\{x_1, x_2, x_3\}$ の組は存在しないので，この方程式に解が存在しないことが分かる．

例 2.4.2

連立方程式

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 + 3x_2 6x_3 + 2x_4 + x_5 = -7 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 + x_5 = -5 \end{cases}$$

を行列の簡約化を用いて解け

解

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

とおくと，上の連立方程式を解くことは，行列の方程式　$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解くことと同じである．行列 A の簡約化 B は，

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

である．$B\mathbf{x} = o$ に対応する連立方程式は，

$$\begin{cases} x_1 + 3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 1 = 0 \\ x_4 - 5 = 0 \\ x_5 - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{つまり,} \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 - 2x_3 \\ x_4 = 5 \\ x_5 = 3 \end{cases}$$

主成分に対応していない x_3 に任意の定数 c を与えることで，元の連立方程式の解は，$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1-2c \\ c \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ であると分かる．

また，この解を $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ と書くこともある．

命題 2.4.2

A : $m \times n$ 行列
$A\mathbf{x} = \mathbf{c}$: 行列の方程式
$\tilde{A}$: A の拡大係数行列
B : A の簡約化, $\tilde{B}$: $\tilde{A}$の簡約化

$$rank\tilde{A} = rank(A) \text{ または } rank\tilde{A} = rank(A) + 1 \text{ のどちらか一方が成り立つ}$$

Proof.

$$B = \begin{bmatrix} & \mathbf{B}' & \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}\right\} r \text{ 個}$$

$(0 \leq r \leq m)$ ここで B' は零行ベクトルを持たない簡約な行列である.

ここで, $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & \vdots & \mathbf{c} \end{bmatrix}$ であるから, 列ベクトル $\mathbf{d}$ を用いることで, $\tilde{B} = \begin{bmatrix} B & \vdots & \mathbf{d} \end{bmatrix}$ と書ける. $\tilde{B}$が簡約なな行列であることから

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ の二通りに分けられる.}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ のとき,} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} & \mathbf{B}' & & O \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ となるので,}$$

$$rank(\tilde{A}) = rank(A) + 1$$

となることがわかる. 逆に, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ のとき, $\tilde{B} = \begin{bmatrix} & \mathbf{B}' & & \mathbf{d}' \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ($\mathbf{d}'$は $n - r$ 次の列ベクトル) となるので,

$$rank\tilde{A} = rank(A)$$

以上より, $rank\tilde{A} = rank(A)$ または $rank\tilde{A} = rank(A) + 1$ のどちらか一方が成り立つ

■

定理 2.4.1

A : $m \times n$ 行列
$A\mathbf{x} = \mathbf{c}$: 行列の方程式
$\tilde{A}$: A の拡大係数行列
B : A の簡約化, $\tilde{B}$: $\tilde{A}$の簡約化

$$A\mathbf{x} = \mathbf{c} \text{ が解をもつ} \quad \Leftrightarrow \quad rank(A) = rank(\tilde{A})$$

Proof.
$\Rightarrow$) 対偶を示す．また命題 2.41 より，

$$rank(A) \neq rank(\tilde{A}) \Rightarrow \quad \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{O} \text{ が解をもたない}$$

を示す.命題 2.4.2 より，$rank(\tilde{A}) = rank(A) + 1$ となり，

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} & \mathbf{B}' & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r-1 \text{ 個}$$

$(0 \leq r < n)$(B’ は零行ベクトルを持たない簡約な行列) ここで第 $m - r + 1$ 行に着目すると，この行列を拡大行列として持つ連立方程式に解が存在しないことがわかる．

$$\therefore \tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{O} \text{ が解をもたない}$$

$\Leftarrow$)$rank(A) = rank(\tilde{A})$ なので命題 2.4.2 より，

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} & \mathbf{B}' & & \mathbf{d}' \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{d}' \text{は } m - r \text{ 次の列ベクトル})$$

と書ける．ここで $\mathbf{B}'$は零行ベクトルを持たない簡約な行列なので, $\tilde{B}$に対応する連立方程式には解が存在する．

$$\therefore \tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{O} \text{ が解をもつ.}$$

以上より，$A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ が解をもつ $\quad \Leftrightarrow \quad$ $rank(A) = rank(\tilde{A})$ と言える．

■

定理 2.42

$A : m \times n$ 行列
$A\mathbf{x} = \mathbf{c}$: 行列の方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{c} \text{ に解が一意に存在する} \Leftrightarrow rank(A) = rank(\tilde{A}) = n$$

Proof.
まず，定理 2.4.1 より，

$$A\mathbf{x} = \mathbf{c} \text{ の解が存在する} \Leftrightarrow rank(A) = rank(\tilde{A})$$

が成り立つ．$A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ に解が存在するとき，A が $m \times n$ 行列であることから，

$$rank(A) = n \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{c} \text{ の解が一意である}$$

$$\therefore A\mathbf{x} = \mathbf{c} \text{ に解が一意に存在する} \Leftrightarrow rank(A) = rank(\tilde{A}) = n$$

■

例 2.4.3

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$ とすると，$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}$ であり，その簡約化は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから，解は一意に存在する．また，$rank(A) = rank(\tilde{A}) = 3$ ともなる．

定理 2.4.3

A : n 次正方行列
このとき、次の (1) から (5) は同値である。
(1)$rank(A) = n$
(2)A の簡約化は E_n である。
(3)A は正則行列である．
(4)$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は任意の n 次の列ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対してただ 1 つの解を持つ。
(5)$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は自明な解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ に限る．

Proof
(1) ⇒ (2)　A は n 次正方行列で,rank$(A) = n$ なので,A の簡約化の全ての行は零行ベクトルでない.したがって,A の簡約かは E_n である．
(2) ⇒ (3)　明らか.
(3) ⇒ (4)　A が正則より，$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の両辺に左から A^{-1} を掛けると $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ となる．正則行列のの逆行列は一意に存在するので，$A^{-1}\mathbf{b}$ は一意に定まる．したがって，$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ はただ一つ解を持つ．
(4) ⇒ (5)　(5) は (4) において, $\mathbf{b} = o$ となる場合なので明らか.
(5) ⇒ (1)　定理 2.4.2 より明らか.

■

第3章　行列式

§1 置換

定義 3.1.1

n 個の元からなる集合 A に対して，A から A への全単射な写像を n 文字の置換と言う．
$\{1, 2, \cdots, n-1, n\}$ の置換σが，

$$\begin{array}{cccc} \sigma: & \{1, \cdots, n\} & \longrightarrow & \{1, \cdots, n\} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & i & \longmapsto & k_i \end{array}$$

であるとき，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

と書く．この際，上の段が順番に並んでいる必要性はない．

例 3.1.1

$\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 1$ とすると，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

である．

例 3.1.2

$\{1, 2, 3\}$ の置換は個あり，それらは，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

例 3.1.3

置換を表記する際，列の順序を変えても良い．また, $\sigma(i) = i$ となる列は省略して良い.つまり，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

として良い．

定義 3.1.2(恒等置換)

$$\sigma\text{が恒等置換である．}\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\sigma\text{は恒等写像である．}$$

$$\text{つまりこのとき，}\quad \sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n\end{pmatrix}\quad\text{となる．}$$

恒等置換は $1_n,\varepsilon$などと書く．また，恒等置換のことを単位置換と言うこともある．

例 3.1.4

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}\text{は恒等置換である．}$$

定義 3.1.3(逆置換)

置換は全単射な写像であるので，逆写像を考えることができる．このことから，次の様に定義する．

$$\sigma^{-1}\text{が置換}\sigma\text{の逆置換である．}\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\quad\sigma^{-1}\text{は}\sigma\text{の逆写像である．}$$

例 3.1.5

$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$の逆置換は, $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$である．

定義 3.1.4(置換の積)

σ,τを同じ集合の置換とする．このとき，置換は写像であることから，置換の積$\sigma\tau$を$\sigma\circ\tau$と定義する．
一般に$\sigma\tau$と$\tau\sigma$は等しくない．また, $\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=1_n$となる．

例 3.1.6

$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$，　$\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$とすると，　$\sigma\tau=\sigma\circ\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$である．実際，

$\sigma\tau(1)=\sigma(\tau(1))=\sigma(3)=3$　　$\sigma\tau(2)=\sigma(\tau(2))=\sigma(2)=4$

$\sigma\tau(3)=\sigma(\tau(3))=\sigma(4)=1$　　$\sigma\tau(4)=\sigma(\tau(4))=\sigma(1)=2$ となる．

また, $\tau\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$となる．よって, $\sigma\tau$と$\tau\sigma$は等しくない．

例 3.1.7

例 3.1.5 のσに関して, $\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=1_n=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}=1_n$となることがわかる．

定義 3.1.5(順回置換)

$\{1,\cdots,n\}$ のうち, $k_1,\cdots k_r$以外は動かさず, $\sigma(k_i) = k_{i+1}$となる置換$\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_1 \end{pmatrix}$を巡回置換といい,

$$\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix}$$

と書く.

例 3.1.8

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$とかける.

定義 3.1.6(互換)

巡回置換のうち，二つの文字以外の文字は動かさない置換を互換という．また，任意の巡回置換は互換の積で表すことができる.

例 3.1.9

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 \end{pmatrix}$

定義 3.1.7(置換の符号)

σ : 置換

$$\sigma\text{の符号は }(-1)^m\text{である．} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sigma\text{は }m\text{ 個の互換の積で表せられる.}$$

また､σの符号が m だあるとき, $sgn(\sigma) = (-1)^m$と書く. ただし，単位置換εについては，$sgn(\varepsilon) = 1$ とする.

命題 3.1.1

σ,τ : 置換

$$sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma)sgn(\tau)$$

Proof. 置換の積の定義から明らか.

■

定義 3.1.8

σ,τ : 置換

$$\sigma\text{が偶置換である．} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} sgn(\sigma) = 1$$

$$\tau\text{が奇置換である．} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} sgn(\tau) = -1$$

例 3.1.10

次の置換 σ を互換の席に分解し，符号を求めよ．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 6 & 3 & 1 & 5 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

解

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 9 \end{pmatrix}$

$$\therefore sgn(\sigma) = (-1)^7 = -1$$

定義 3.1.9

n 文字の置換全体の集合を S_n と表すこととする．

n 文字の置換σは，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \qquad (i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j, k_i \in \{1, ..., n\})$$

と表すことができるので，S_nの元の数は $n!$である．

命題 3.1.2

S_nは，有限群である．

Proof.

S_nは，置換の積を演算とすると，定義から次が成り立つので群となる．(代数構造となることは明らか.)

(結合律)　$\forall \sigma, \tau, \rho \in S_n, (\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho)$

(単位律)　$\varepsilon \in S_n, \forall \sigma \in S_n, \varepsilon\sigma = \varepsilon\sigma$

(可逆律)　$\forall \sigma \in S_n, \exists\ \sigma^{-1} s.t.\ \ \sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \varepsilon$

また，上で取り上げたように，S_nの元は有限個なので，S_nは有限群となる．

■

§2 行列式

定義 3.2.1(行列式)

$A = \left[a_{ij}\right]$: n 次正方行列

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

とし，これを A の行列式と呼ぶ．A の行列式は，

$$\left|A\right|, \left|a_{ij}\right|, det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

などと書く．

例 3.2.1

$S_2 = \{\varepsilon, (1\ \ 2)\}$ でありまた，$sgn(\varepsilon) = 1, sgn((1\ \ 2)) = -1$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= sgn(\varepsilon) a_{11} a_{22} + sgn((1\ \ 2)) a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{21} \end{aligned}$$

例 3.2.2

$S_2 = \{\varepsilon, (1\ \ 2), (2\ \ 3), (1\ \ 3), (1\ \ 2\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 2)\}$ でありまた，$sgn(\varepsilon) = sgn((1\ \ 3\ \ 2)) = sgn((1\ \ 2\ \ 3)) = 1 sgn((1\ \ 2)) = sgn((2\ \ 3)) = sgn((1\ \ 3)) = -1$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= sgn(\varepsilon) a_{11} a_{22} a_{33} + sgn((1\ \ 3\ \ 2)) a_{13} a_{32} a_{21} + sgn((1\ \ 2\ \ 3)) a_{12} a_{23} a_{31} \\ &\quad + sgn((1\ \ 2)) a_{12} a_{21} a_{33} + sgn((2\ \ 3)) a_{11} a_{23} a_{32} + sgn((1\ \ 3)) a_{13} a_{31} a_{22} \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{13} a_{32} a_{21} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{13} a_{31} a_{22} \end{aligned}$$

定理 3.2.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Proof. $A = \left[a_{ij}\right], a21 = \cdots = a_{n1} = 0$ と置く.
$\sigma \in S_n, \sigma(1) \neq \Longrightarrow \exists k (\neq 1) s.t. \sigma(k) = 1$ 仮定より，$a_{k\sigma(k)} = a_{k1} = 0$

$$a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$$

したがって, $\sigma(1) \neq$ となる項は 0 になるので,

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{\sigma} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots an\sigma(n) \\ &= \sum_{\sigma=1} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots an\sigma(n) \\ &= a_{11} \sum_{\sigma=1} sgn(\sigma) a_{2\sigma(2)} \cdots an\sigma(n) \end{aligned}$$

$\sigma(1)$ を満たすσは，$\{2, \cdots n\}$ の置換なので,

$$det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

■

定理 3.2.2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Proof.

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \sum_{\sigma} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots ca_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= c \sum_{\sigma} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

■

定理 3.2.3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Proof.

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \sum_{\sigma} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (a_{i\sigma(i)} + b_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

■

定理 3.2.4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Proof. σ　に対して、$\tau = \sigma(ij)$ とおくと、σが S_n全体を動くとき、τも S_n全体を動く.

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \sum_{\sigma} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\tau} -sgn(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{j\tau(j)} \cdots a_{i\tau(i)} \cdots a_{n\tau(n)} \\ &= -\sum_{\tau} sgn(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{i\tau(i)} \cdots a_{j\tau(j)} \cdots a_{n\tau(n)} \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

■

系 3.2.1

二つの行が等しい行列の行列式は 0 である.

Proof.

Th3.2.4 より明らか.

■

定理 3.2.5

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ca_{j1} & \cdots & a_{in}+ca_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Proof.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ca_{j1} & \cdots & a_{in}+ca_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

■

定理 3.2.6

$$det(A) = det({}^tA)$$

Proof.

$$\begin{aligned} det({}^tA) &= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma^{-1}(\sigma(1))} \cdots a_{\sigma(n)\sigma^{-1}(\sigma(n))} \end{aligned}$$

$\{\sigma(1), \cdots, \sigma(n)\} = \{1, \cdots, n\}$ であるから，

$$a_{\sigma(1)\sigma^{-1}(\sigma(1))} \cdots a_{\sigma(n)\sigma^{-1}(\sigma(n))} = a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

であり，また，$sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$ であるので，

$$\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma^{-1}(\sigma(1))} \cdots a_{\sigma(n)\sigma^{-1}(\sigma(n))} = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} sgn(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

$$\therefore det(A) = det({}^tA)$$

定理 3.2.6 より，定理 3.2.1 から定理 3..2.5 が列の場合についても成り立つ．

定理 3.2.7

A:r 次正方行列，　D:s 次正方行列

$$det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = det(A)det(D)$$

Proof.

$X = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$ とし，$n := r + s$ とする．また，X の ij 成分を x_{ij} と表すこととする．定義より，

$$det(X) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots x_{r\sigma(r)} x_{r+1\sigma(r+1)} \cdots x_{n\sigma(n)} \quad \cdots (1)$$

$x_{ij} = 0 \ \ (1 \leq i \leq r, r+1 \leq j \leq r+s = n)$ なので，$\{\sigma(1) \cdots \sigma(n)\}$ の中に，r より大きい数があれば，

$$sgn(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots x_{r\sigma(r)} x_{r+1\sigma(r+1)} \cdots x_{n\sigma(n)} = 0$$

したがって，(1) は，$\{\sigma(1), \cdots, \sigma(r)\} = \{1, \cdots, r\}$ となるσについてのみ和を取ればいい．

このようなσについて，$\{\sigma(r+1), \cdots, \sigma(n)\} = \{r+1, \cdots, n\}$ である．

さて，以上を満たす，任意の n 文字の置換σは，ある $\{1, \cdots, r\}$, $\{r+1, \cdots, n\}$ の置換, $\tau\rho$ を用いて，

$$\sigma = \tau\rho$$

と書ける．以上から，

$$\begin{aligned}
det(X) &= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots x_{r\sigma(r)} x_{r+1\sigma(r+1)} \cdots x_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\tau \in S_r,\ \rho \in S_{n-r}} sgn(\tau\rho) x_{1\tau(1)} \cdots a_{r\tau(r)} x_{r+1\rho(r+1)} \cdots x_{n\rho(n)} \\
&= \Big(\sum_{\tau \in S_r} sgn(\tau) x_{1\tau(1)} \cdots x_{r\tau(r)} \Big) \Big(\sum_{\rho \in S_{n-r}} sgn(\rho) x_{r+1\rho(r+1)} \cdots x_{n\rho(n)} \Big) \\
&= \Big(\sum_{\tau \in S_r} sgn(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{r\tau(r)} \Big) \Big(\sum_{\rho \in S_s} sgn(\rho) d_{1\rho(1)} \cdots d_{s\rho(s)} \Big) \\
&= det(A)det(D)
\end{aligned}$$

■

定理 3.2.8

A,B:n 次正方行列

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

Proof.

$det\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix}$ を二通りの方法で考える．まず，定理 3.2.7 より $det\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = det(A)det(B)$

次に，$det\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix}$ に対して，第一列に b_{1k}. . . . . 第 n 列に b_{nk} をかけ，第 $n+k$ 列に加える作業を $k-1...n$ について行うと，

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & AB \\ -E & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} -E & 0 \\ A & AB \end{vmatrix} = det(AB)$$

$$\therefore det(AB) = det(A)det(B)$$

■

§3 余因子行列とクレーメルの公式

定義 3.3.1

$A = [a_{ij}]$: n 次正方行列

A の第 i 行と第 j 列を取り除いた $n-1$ 次正方行列を A_{ij} と書くこととする．つまり，

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ a_{i-11} & & \ddots & & & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & & & \ddots & & a_{i+1n} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

例 3.3.1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \text{とすると，} A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

定義 3.3.2（余因子展開）

$A = [a_{ij}]$: n 次正方行列

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \text{とかけることから，}$$

$$\left|A\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

と書ける．右辺の i 番目の項を計算すると，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j-2} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\therefore \left|A\right| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left|A_{ij}\right|$ であり，これを $\left|A\right|$ の第 j 列に関する余因子展開という．同様に

$\left|A\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left|A_{ij}\right|$ を $\left|A\right|$ の第 i 行に関する余因子展開という．

例 3.3.2

$A=\begin{bmatrix}3&4&2\\2&0&1\\1&5&2\end{bmatrix}$ を第 2 列に関して余因子展開すると，

$$\begin{vmatrix}3&4&2\\2&0&1\\1&5&2\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}3&2\\1&2\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}3&2\\2&1\end{vmatrix}=-7$$

となる．実際基の行列の行列式を定義に沿って計算しても-7 となる．

定義 3.3.3

$A=[a_{ij}]$: n 次正方行列

$$a^*_{ij}:=(-1)^{i+j}\left|A_{ji}\right|$$

と定める．そして，

$$\widetilde{A}:=[a^*_{ij}]$$

と定義し，これを A の余因子行列という．

定理 3.3.1

A : n 次正方行列　　$\widetilde{A}$: A の余因子行列

$$A\widetilde{A}=\widetilde{A}A=det(A)E$$

Proof.　$A=[a_{ij}]$, $\widetilde{A}:=[a^*_{ij}]$, $A\widetilde{A}=[c_{ij}]$ とくと定義より，

$$c_{ij}=a_{i1}a^*_{1j}+\cdots+a_{in}a^*_{nj}$$

ここで行列 A の第 i 行に関する余因子展開を考えると，

$$\begin{aligned}\left|A\right|&=(-1)^{i+1}a_{i1}\left|A_{i1}\right|+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}\left|A_{in}\right|\\&=a_{i1}a^*_{1i}+\cdots+a_{in}a^*_{ni}=c_{ii}\end{aligned}$$

次に，第 j 行以外は A と同じで，第 j 行として A の第 i 行 $(i\neq j)$ をとった行列を B とする．このとき，B は等しい行を持つので，$\left|B\right|=0$ また，定義より

$$b_{j1}=a_{i1},\cdots,b_{jn}=a_{in};B_{j1}=A_{j1},\cdots,B_{jn}=A_{jn}\text{が成り立つ．}$$

B の第 j 行に関する余因子展開を考えるとこれらのことから，

$$\begin{aligned}0=\left|B\right|=(-1)^{j+1}b_{ji}\left|B_{j1}\right|+\cdots(-1)^{j+n}b_{jn}\left|B_{jn}\right|&=(-1)^{j+1}a_{i1}\left|A_{j1}\right|+\cdots+(-1)^{j+n}a_{in}\left|A_{jn}\right|\\&=a_{i1}a^*_{1j}+\cdots+a_{in}a^*_{nj}\end{aligned}$$

$\therefore c_{ij}=\begin{cases}\left|A\right| & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$　であるので，$A\widetilde{A}=det(A)E$ である．同様に　$\widetilde{A}A=det(A)E$ も示せる．

■

定理 3.3.2

$$A : 正則行列 \Leftrightarrow det(A) \neq 0$$

このとき $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\widetilde{A}$である．

Proof. ⇒) A が正則行列のとき逆行列が存在するので，定理 3.2.8 より，det(A) ≠ 0

⇐) 実際に $B = \frac{1}{det(A)}\widetilde{A}$とおくと，

$$BA = \frac{1}{det(A)}\widetilde{A}A = \frac{1}{det(A)}det(A)E = E$$

したがって，A は正則行列．

■

定理 3.3.3

A:n 次正方行列

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は次のように与えられる．

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x_i = \frac{det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{b}^i \cdots \boldsymbol{a}_n]}{det(A)}$$

ただし，$[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{b}^i \cdots \boldsymbol{a}_n]$ は A の第 $\boldsymbol{i}$ 列を列ベクトル $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列である．

Proof. A が正則ならば解がただ一つ存在する．A の行ベクトルを $[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$ とすると，

$$\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 \cdots x_n\boldsymbol{a}_n となる．$$

したがって，

$$|\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{b}^i \cdots \boldsymbol{a}_n| = |\boldsymbol{a}_1 \cdots x_1\boldsymbol{a}_1 \cdots x_n\boldsymbol{a}_n \cdots \boldsymbol{a}_n|$$

$$= x_1|\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a_1}^i \cdots \boldsymbol{a}_n| + \cdots x_i|\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a_i}^i \cdots \boldsymbol{a}_n| + \cdots x_n|\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{x_n}^i \cdots \boldsymbol{a}_n|$$

$$= x_i|\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a_i}^i \cdots \boldsymbol{a}_n| = x_i|A|$$

∴ 両辺を $|A|$ で割り，定理は示される．

■

参考文献

[1] 三宅　敏恒　「線形代数学　初歩からジョルダン標準形へ」（培風館 2008）

[2] 齋藤　正彦　「線型代数入門」（東京大学出版会 1966）