位相空間
Topological Space

令和２年度　基礎数学ゼミ

目次

第 0 章

はじめに

これは筆者がゼミの内容のまとめも兼ねて, 個人的な勉強のためのノートとしてつくったものです. 後期から位相空間を扱い始めたため, 内容は本当に最初の部分しかまとめられておらず, 距離空間の中途半端なところから始まっており, 加えて第 1 章には定義などに番号も振られていませんが, その辺りは目をつぶっていただけると助かります. 本ゼミは進行中のゼミであり, この PDF はまだまだ未完成で至らない部分も多々ありますが, 温かい目で見ていただけると幸いです.

この PDF は主に内田伏一さんの「集合と位相」をもとに作成しています. 証明の行間は可能な限り埋めたつもりです. ただし, 本書は内田さん以外の本も参考に作成してあるので, 内田さんのには載っていない例や定理を記載している部分もあります. また, 内田さんの本に載っている問題であってもこの PDF には掲載していないものもあるので, その点には注意してください. もしかしたら表記にばらつきや 統一されていない箇所があり, 読みにくい部分もあるかもしれません. なるべくそのようなことがないように気を付けたつもりですが, 定義や書き方についてわからないところがある場合は参考文献をあたってください.

上述の通り, 筆者のノート的な役割が大きいので間違いがある可能性は極めて高いです. すべての間違いは筆者のみの責任です. 見つけた方がいましたらお知らせください.

東京理科大学理工学部数学科 1 年 高屋敷祥太

第 1 章

距離空間

1.1　近傍系と連続写像

1.1.1　近傍系

Def(近傍, 近傍系)

(X, d) : 距離空間
X の部分集合 U が点 a の**近傍**である $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ a が U の内点
点 a の ε -近傍はすべての点 a の近傍である.
点 a の近傍全体からなる集合を点 a の**近傍系**といい, $\mathfrak{N}(a)$ で表す.

位相を導入するのに距離関数を用いると, 限定されたものしか得られない.
そこで, 距離空間の ε -近傍のもつ性質を抽象化した近傍の概念を用いて一般の位相を得る.

Thm
(X, d) : 距離空間, 近傍系は次の条件を満たす.
(1)$a \in X \Rightarrow X \in \mathfrak{N}(a)$, $U \in \mathfrak{N}(a) \Rightarrow a \in U$
(2)$U_1, U_2 \in \mathfrak{N}(a) \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{N}(a)$
(3)$U \in \mathfrak{N}(a)$ かつ $U \subset V \subset X \Rightarrow V \in \mathfrak{N}(a)$
(4)$\forall U \in \mathfrak{N}(a)$, $\exists V \in \mathfrak{N}(a)$ $s.t.$ $\forall b \in V$, $U \in \mathfrak{N}(b)$

Proof

(1) 定義より明らか.

(2)$U_1, U_2 \in \mathfrak{N}(a)$ とすると, 正の実数$\varepsilon_1, \varepsilon_2$で $N(a;\varepsilon_i) \subset U_i (i=1,2)$ を満たすものが存在する. $\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とおけば, $\varepsilon > 0$ かつ $N(a;\varepsilon) \subset U_1 \cap U_2$となる.

$\therefore U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{N}(a)$

(3) 定義より a は U の内点であり, V は U を部分集合としてもつので, a は V の内点でもある.よって V は a の近傍であり, $V \in \mathfrak{N}(a)$ となる.

(4)$U \in \mathfrak{N}(a)$ に対して $V = U^i$とおけば, $V \in \mathfrak{N}(a)$ であり, さらに任意の $b \in V = U^i$に対して (1) より $V \in \mathfrak{N}(b)$ となる.$V \subset U$ なので (3) より $U \in \mathfrak{N}(b)$ でなる. ■

1.1.2 連続写像

Def(ある点において連続)

$(X_1, d_1), (X_2, d_2)$: 距離空間

写像 $f : X_1 \to X_2$が X_1の**点 x で連続**である.

$\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \ s.t. \ \forall y \in X_1 \big((d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon\big) \quad \cdots \quad (*)$

上の定義を近傍の概念を用いて, 言い換えてみよう.

$(*) \Leftrightarrow$「任意の$\varepsilon > 0$ に対しても, (X_2, d_2) における点 f(x) の ε -近傍の f による逆像 $f^{-1}\big(N(f(x);\varepsilon)\big)$ が (X_1, d_1) において点 x の近傍となる」

Rem

ある正の実数εに対して $f^{-1}\big(N(f(x);\varepsilon)\big)$ が点 x の近傍であれば, $\varepsilon' > \varepsilon$であるようなどんな実数$\varepsilon'$に対しても $f^{-1}\big(N(f(x);\varepsilon')\big)$ は点 x の近傍になる.

($\because$ $f^{-1}\big(N(f(x);\varepsilon)\big) \subset f^{-1}\big(N(f(x);\varepsilon')\big)$ であり, $Thm(3)$ により $f^{-1}\big(N(f(x);\varepsilon')\big)$ も点 x の近傍になる.)

上の Rem で言いたかったことは, 写像 $f : X_1 \to X_2$が X_1の点 x で連続であるかどうかを判定するときは, 十分小さいある正の実数ε_0より小さいεに対してのみ調べればよいということである.

Ex

各自然数 n について, 関数 $f(x)=x^n$ が 1 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R},d^{(1)})$ から $(\mathbb{R},d^{(1)})$ への写像として, 各点 $x\in\mathbb{R}$ で連続である.
$\because$ 正の実数 ε に対して

$$\delta=\min\Big\{1,\frac{\varepsilon}{(2|x|+1)^{n-1}}\Big\}$$

とおく. $\delta>0$ であることに注意する.
$|x-y|<\delta$ ならば

$$\begin{aligned}
|x^n-y^n| &\le |(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-2})\\
&\le |x-y|\cdot\Big|\sum_{i=0}^{n-1}x^iy^{n-i-1}\Big|\\
&\le |x-y|\cdot\sum_{i=0}^{n-1}|x|^i|y|^{n-i-1} \quad (\because \text{三角不等式})\\
&\le |x-y|\cdot(|x|+|y|)^{n-1} \quad (\leftarrow \text{係数の分増えている}.n=3\text{ のときを確かめてみよう.})\\
&< \delta(2|x|+\delta)^{n-1} \quad (\because |x-y|<\delta \text{より} \delta>|y-x|>|y|-|x|)\\
&\le \delta(2|x|+1)^{n-1}\\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

$\therefore N(x;\delta)\subset f^{-1}\big(N(f(x);\varepsilon)\big)$ が成り立ち, f は点 $x\in\mathbb{R}$ で連続である.

次の定理は連続写像を特徴づける非常に大事な定理である.
(ネタバレになるが, 下の定理によって連続写像を定義する.)

Thm
$(X_1,d_1),(X_2,d_2)$: 距離空間
写像 $f:X_1\to X_2$ について, 次の 4 つの条件は互いに同値である.
(1)f は X_1 の各点で連続である.
(2)(X_2,d_2) の開集合 O に対して, f による逆像 $f^{-1}(O)$ は常に (X_1,d_1) の開集合である.
(3)(X_2,d_2) の閉集合 F に対して, f による逆像 $f^{-1}(F)$ は常に (X_1,d_1) の閉集合である.
(4)X_1 の部分集合 A について $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$ が常に成り立つ.

Proof
・$(1)\Rightarrow(4)$

X_1の部分集合 A と X_1の点 x について $f(x) \notin \overline{f(x)}$と仮定する.
$U = X_2 - \overline{f(A)}$とおけば,$U$ は (X_2, d_2) の開集合であり, $f(x) \in U$.
したがって近傍系に関する定理 (1) より,U は (X_2, d_2) における点 $f(x)$ の近傍である.
今回は (1) を仮定しているので f は X_1の各点で連続であり, $f^{-1}(U)$ は (X_1, d_1) における点 x の近傍である.
さらに,
$f^{-1}(U) = X_1 - f^{-1}(\overline{f(A)}) \subset X_1 - f^{-1}(f(A)) \subset X_1 - A$
が成り立つ.
点 x の近傍 $f^{-1}(U)$ が A と交わらず,$x \notin \bar{A}$となる.
対偶をとると, $x \in \bar{A}$に対して $f(x) \subset \overline{f(A)}$, すなわち $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$が成り立つ.
・(4) $\Rightarrow$ (3)
$F : (X_2, d_2)$ の集合, $A = f^{-1}(F)$ とおく.
(4) を仮定したので
$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(F))}$
が成り立つ.
一般に $f(f^{-1}(F)) \subset F$ が成り立ち,F は開集合だから, $f(f^{-1}(F))$ の閉包[*1]は F に包まれる.
$\therefore f(\bar{A}) \subset F$
$\therefore \bar{A} \subset f^{-1}(F) = A$
一般には$\bar{A} \supset A$ が成り立つので, $f^{-1}(F)$ が (X_2, d_2) の閉集合であるとわかる.
・(3) $\Rightarrow$ (2)
$O : (X_2, d_2)$ の開集合, $F = X_2 - O$ とおく.
$f^{-1}(O) = X_1 - f^{-1}(F)$
が成り立ち, (3) を仮定したので, $f^{-1}(F)$ は (X_1, d_1) の閉集合である.
$\therefore f^{-1}(O)$ は (X_1, d_1) の開集合である.
・(2) $\Rightarrow$ (1)
X_1の点および (X_2, d_2) における点 $f(x)$ の近傍 U について $O = U^i$とおく.
$f(x) \in O$ だから $x \in f^{-1}(O)$ であり, (2) を仮定したので $f^{-1}(O)$ は (X_1, d_1) の開集合である.
$x \in f^{-1}(O) \subset f^{-1}(U)$
が成り立つので, $f^{-1}(U)$ は (X_1, d_1) における点 x の近傍になる.

[*1] ある集合 A の閉包とは集合 A の触点全体の集合であった.

$\therefore$ 写像 f は X_1の各点 x で連続になる. ■

Def(連続写像)

上の定理の条件 (1)〜(4) のいずれかが成り立つとき (すなわち, 互いに同値なので (1)〜(4) のすべてが成り立つとき), 写像 $f : X_1 \to X_2$は**連続**であるといい, f を距離空間 (X_1, d_1) から距離空間 (X_2, d_2) への**連続写像**という.

Exer

(X, d) : 距離空間, $A \subset X(A \neq \emptyset)$

実数値関数 $f : X \to \mathbb{R}$ を $f(x) = d(x, A)$ で定義する.f は距離空間 (X, d) から 1 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}, d^{(1)})$ への連続写像になることを示せ.

Proof

$\forall\varepsilon > 0$ に対して$\delta = \varepsilon$とすると,$\forall y \in X$ に対して $d(x, y) < \delta$ であるとき *Thm13.3* の (*1*) より, $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ が成り立つので $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\therefore$ f は連続写像である. ■

Exer

距離空間 (X, d) において, A, B を互いに交わらない空でない閉集合とすれば, 互いに交わらない (X, d) の開集合 U, V で $A \subset U$ かつ $B \subset V$ となるようなものが存在することを示せ.

Proof

$U = \{x \in X | d(x, A) < d(x, B)\}$, $V = \{x \in X | d(x, A) > d(x, B)\}$

と定めると, 条件を満たす. ■

Exer

(X, d) : 距離空間,　$A, B \subset X(A, B \neq \emptyset)$

集合 A, B の距離を

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

と定義する.

特に A,B を交わらない空でない閉集合とすれば, 常に $d(A,B) > 0$ は成り立つだろうか.

Ans
$(\mathbb{R}^2, d^{(2)})$ において

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 1\}, B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 0\}$$

とおくと, A, B はともに $(\mathbb{R}^2, d^{(2)})$ の閉集合であり, 互いに交わらないが, $d(A, B) = 0$ となる. ■

第 2 章

位相空間

2.1 位相

位相の定義の仕方はさまざまある. 定義はできるだけ応用範囲が広いものが望ましいが, その一方で, 私たちが慣れ親しんだ空間（例えば,Euclid 空間や距離空間）に関する性質を一般的な位相空間にも持ってもらいたいものである.

最終的な定義はやや抽象的になっている. しかし位相空間を考えていく中で, この概念が良いものであると感じることができるようになるだろう.

私たちは最近の主流である開集合に注目した位相の概念を採用する.

Def 2.1(位相)

X : 空でない集合

X の部分集合の族（すなわち, X の冪集合 $\mathfrak{P}(X)$[*1]の部分集合）$\mathscr{O}$ は, 次の条件を満たすとき集合 X の**位相**であるという.

$\mathbf{O}_1$ $X \in \mathscr{O}$, $\emptyset \in \mathscr{O}$

$\mathbf{O}_2$ $O_1, \cdots, O_k \in \mathscr{O} \Rightarrow O_1 \cap \cdots \cap O_k \in \mathscr{O}$

$\mathbf{O}_3$ $(O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ を $\mathscr{O}$ の元から成る集合系とすれば

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathscr{O}$$

[*1] 本書では, これから集合 X の冪集合を表す場合には, 基本的に 2^X という表記を用いることとする.

位相 $\mathscr{O}$ を与えられた空間を**位相空間**といい, $(X,\mathscr{O})$ で表す.$\mathscr{O}$ に属する X の部分集合を位相空間 $(X,\mathscr{O})$ の**開集合** (厳密には $\mathscr{O}$-開集合) という.集合 X の元を位相空間 $(X,\mathscr{O})$ の**点**という.

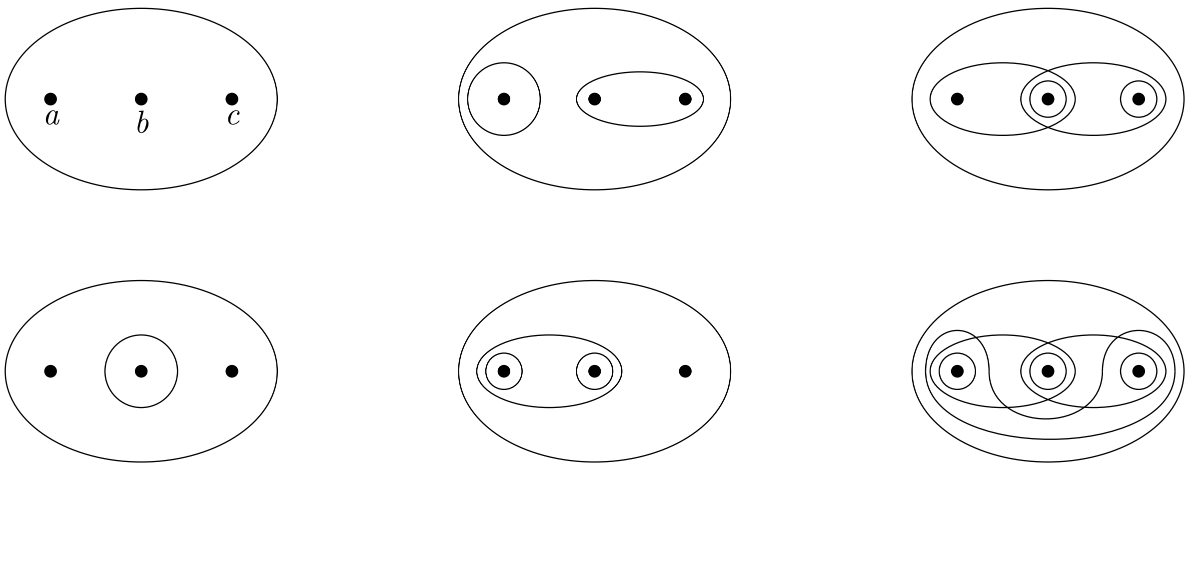
Rem 2.2
上の位相の定義は, 内田 [1] においてユークリッド空間や距離空間を扱った際に問として出てきている.

Rem 2.3
集合 X に対して, X の位相空間を一つ定めることを **位相を導入する** ということもある.

Ex 2.4 (離散空間)
X の冪集合 2^X は集合 X の部分集合をすべて集めたものなので, $\mathscr{O}=2^X$ とすると, 位相の条件 $\mathbf{O}_1$〜$\mathbf{O}_3$ を満たし, 集合 X の一つの位相であるとわかる. この位相を **離散位相** といい, 位相空間 $(X,2^X)$ を**離散空間**という.

Ex 2.5 (密着空間)
$\mathscr{O}=\{X,\emptyset\}$ は明らかに集合 X の一つの位相である. この位相を**密着位相**といい, 位相空間 $(X,\{X,\emptyset\})$ を**密着位相**という.

もう少し具体的な例を通して理解を深めよう.
$X=\{a,b,c\}$ として, X 上の位相を考える.下の図を見てほしい.

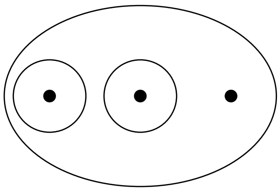


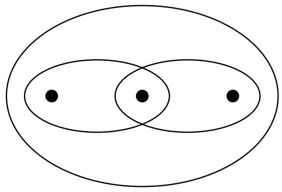
図には例として 6 つ採用した. 他にもまだまだ X に位相を導入することができる.（なんと X の位相は全部で 29 個!!)[*1]

左上のは密着位相になっていて, 右下のは離散位相になっている.

Rem 2.6

ただし, 上の例において X の部分集合を好きなようにとっても,X の位相になるとは限らない. 反例を以下に 2 つ示す. （位相の定義の何を満たさないのか考えてみよう.）





Rem 2.7

位相空間の定義をもう一度みてほしい. $\mathbf{O}_2$ と $\mathbf{O}_3$ を比べたときに, 何か違いはないだろうか？ 二つの大きな違いとして, $\mathbf{O}_2$ は有限個の共通部分であるのに対して $\mathbf{O}_3$ の和集合は任意の個数の和集合を考えてよいということになっている. 共通部分はどうして任意の個数で考えないのだろうか？残念ながら, 開集合の任意の個数の共通部分は開集合になるとは限らないのである. どのような例があるか各自で考えてみてほしい.

Ex 2.8（通常の位相）

以前考えたように, n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合系 $\mathscr{O}$ は $\mathbb{R}^n$ の一つの位相である. この位相を $\mathbb{R}^n$ の**通常の位相**という.

Ex 2.9（距離位相）

(X, d) : 距離空間

以前考えた (X, d) の開集合系 $\mathscr{O}$ は X の一つの位相である. この位相を d によって定まる**距離位相**という. 集合 X 上の位相 $\mathscr{O}$ が一つの距離空間に一致するとき, この位相 $\mathscr{O}$ は**距離化可能**であるという.

Ex 2.10（相対位相）

[*1] 内田 [1] の問 15.1 を確認してみよう.

$(X, \mathscr{O})$ を位相空間とし, A を X の空でない部分集合とする.

$$\mathscr{O}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathscr{O}\}$$

は集合 A の一つの位相である. この位相を集合 A 上の $\mathscr{O}$ に関する**相対位相**といい, 位相空間 $(A, \mathscr{O}_A)$ を位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の**部分空間**という.

Exer 2.11
離散位相は常に距離化可能であり, 密着位相は一般に距離化可能でないことを示せ.

Proof
X を 2 点以上からなる集合とする.
まず, 離散位相が常に距離化可能であることを示す.
距離空間を考えたいので, 最初に距離関数を定義する必要がある. そこで, 集合 X 上の異なる 2 点の距離をすべて 1 とおくと, X は距離空間になる.(距離空間の条件 $\mathbf{D}_1$〜$\mathbf{D}_3$を満たすことは各自確認してほしい.) 次に距離空間の開集合系を考えるが, X の各点の 1/2 近傍にはその点しか含まれないので, すべての一点集合は開集合になる. よって, この距離位相は離散位相である. すなわち, 離散位相は距離化可能である.
続いて, 密着位相は一般に距離化可能でないことを示す.
集合 X の任意の距離位相について, 一点集合の補集合は常に開集合であり, X が 2 点以上からなれば, この位相は密着位相でない. よって, 2 点以上からなる集合の密着位相は距離化可能でない. ■

Def 2.12
$\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2$を集合 X の 2 つの位相とする.集合族として $\mathscr{O}_1 \supset \mathscr{O}_2$であるとき, $\mathscr{O}_1$は $\mathscr{O}_2$より**強い**(または**精**), $\mathscr{O}_2$は $\mathscr{O}_1$より**弱い**(または**粗**) という.

Rem 2.13
位相が強い・弱いや精・粗という表現の他に**大きい・小さい**という表現もある. (内田さんの教科書は大きい・小さいを採用していた.)
離散位相は最も強く, 密着位相は最も弱い.

Def 2.14（閉集合）

$(X,\mathscr{O})$: 位相空間, $F \subset X$
補集合 F^cが $\mathscr{O}$ に属すとき, 位相空間)$X,\mathscr{O}$) の**閉集合** (厳密には $\mathscr{O}$–**閉集合**) であるという.

Exer 2.15
位相空間 $(X,\mathscr{O})$ の閉集合の全体 $\mathfrak{A}$ は, 次の条件を満たすことを確認しよう.
(1) $X \in \mathfrak{A}$, $\emptyset \in \mathfrak{A}$
(2) $F_1, \cdots, F_k \in \mathfrak{A}$ ならば $F_1 \cup \cdots \cup F_k \in \mathfrak{A}$
(3) $(F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ を $\mathfrak{A}$ の元からなる集合系とすれば

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \mathfrak{A}$$

Ans
(1) は明らかである. (2) と (3) については, De Morgan の法則を利用する.例として (2) をやってみる. $F_1, \cdots, F_k \in \mathfrak{A}$ というのは定義から $F_1^c, \cdots, F_k^c \in \mathscr{O}$ ということなので, 位相空間の定義により $F_1^c \cap \cdots \cap F_k^c \in \mathscr{O}$ がわかる. De Morgan の法則から, $F_1^c \cap \cdots \cap F_k^c = (F_1 \cup \cdots \cup F_k)^c$が得られ, (2) は示された. (3) についても同様である. ■

Def 2.16 (内部 (開核), 内点, 開核作用子)

$(X,\mathscr{O})$: 位相空間 , $A \subset X$
A に包まれるような開集合全体の和集合を A^i で表すと, A^iも $\mathscr{O}$ 自身に属すので, A^iは A に包まれる最大の開集合である. A^iを A の**内部**または**開核**といい, A^iの点を**内点**という.*1
X の各部分集合 A にその内部 A^iを対応させると, 写像 $2^X \to 2^X$が定まる. この写像を位相空間 $(X,\mathscr{O})$ の**開核作用子**という.

Rem 2.17
上の定義では内部を定めてそこから内点を定めたが, 先に内点を定めるという流儀もある. 実際, 森田 [2] では内点を「*U(x)* $\subset A$ となる x の近傍 *U(x)* が存在するときの $x \in X$ を内点である」と定めており, X の部分集合 A の内点全体の集合を内部として定義してい

*1 A の内部を表す表記として Int A という書き方もある.

る. 個人的にはこちらの定義の方が好みである. どちらの流儀を採用しても問題はないが, 二つの流儀を混同してはならない.

Thm 2.18（開核作用子の性質）
位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の開核作用子は次の性質を持つ.
(1) $X^i = X$
(2) $A^i \subset A$
(3) $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$
(4) $(A^i)^i = A^i$

Proof
(1) 位相空間の定義から $X \in \mathscr{O}$ であり, $X \subseteq X$ なので $X^i = X$ とわかる.
(2) は A^iの定義から明らかである.
(3)A^i, B^iはそれぞれ A, B に包まれる開集合であるから, $A^i \cap B^i$は $A \cap B$ に包まれる開集合である. また.$(A \cap B)^i$は $A \cap B$ に包まれる最大の開集合である. よって, $A^i \cap B^i \subset (A \cap B)^i$となる. さらに, $(A \cap B)^i$が $A \cap B$ に包まれる開集合であり, A^iが A に包まれる最大の開集合であることに注意すると $(A \cap B)^i \subset A^i$となる.同様に $(A \cap B)^i \subset B^i$もわかるので, $(A \cap B)^i \subset A^i \cap B^i$が成り立つ. 従って $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$
(4)A^iは開集合であるから, A^iに包まれる最大の開集合は A^i自身である. よって $(A^i)^i = A^i$ ■

Def 2.19（閉包, 触点, 閉包作用子）

$(X, \mathscr{O})$: 位相空間 , $A \subset X$
A を包むような閉集合全体の共通部分を$\bar{A}$または A^aで表すと, $\bar{A}$自身も閉集合であるので, $\bar{A}$は A を包む最小の閉集合である. $\bar{A}$を A の**閉包**といい, $\bar{A}$の点を**触点**という.[*1]
X の各部分集合 A にその閉包$\bar{A}$を対応させると, 写像 $2^X \to 2^X$が定まる.
この写像を位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の**閉包作用子**という.

Thm 2.20（閉包作用子の性質）

[*1] 先ほど内部や内点の定義の別の流儀を紹介したが, 閉包と触点についても同様に触点から先に定義する流儀もある. 触点を「x の任意の近傍 $U(x)$ に対し, $U(x) \cap A \neq \emptyset$ かつ $U(x) \cap (X - A) \neq \emptyset$ を満たす $x \in$ X」とすればよい. なお, 森田 [2] では閉包の定義を「A の集積点全体の集合と A の和集合」としている.

位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の閉包作用子は次の性質を持つ.
(1) $\bar{\emptyset} = \emptyset$
(2) $A \subset \bar{A}$
(3) $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$
(4) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

Proof
(1)（以前, 問でやった通り）$\emptyset$ は閉集合であるから, $\emptyset$ を含む最小の閉集合 $\bar{\emptyset}$ は $\emptyset$ 自身である.
(2) は定義から明らかである.
(3)$\bar{A}, \bar{B}$はそれぞれ A, B を包む閉集合であるから$\bar{A} \cup \bar{B}$は $A \cup B$ を包む閉集合であり, 一方 $\overline{(A \cup B)}$は $A \cup B$ を包む最小の閉集合である. よって $\overline{(A \cup B)} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ となる. また, $\overline{(A \cup B)}$は $A \cup B$ を包む閉集合であるので, A を包む閉集合でもある. 一方 $\bar{A}$は A を包む最小の閉集合であるから$\bar{A} \subset \overline{(A \cup B)}$ が成り立つ. 同様に $\bar{B} \subset \overline{(A \cup B)}$ となるので, $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{(A \cup B)}$ とわかる. 故に $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ が成り立つ.
(4)$\bar{A}$は閉集合であるから, $\bar{A}$を包む最小の閉集合は$\bar{A}$自身である. よって$\bar{\bar{A}} = \bar{A}$となる. ■

内部や閉包の定義からから容易にわかることであるが, 一般に

$$\mathrm{Int}A \subseteq A \subseteq \bar{A}$$

が成り立ち, A が開集合であれば $A = \mathrm{Int}A$ であり, A が閉集合であれば $A = \bar{A}$ である.

C.Kuratowski は, 集合 X の部分集合 A に対し, A の閉包と称する部分集合が何らかの方法によって定められ, それが先ほどの定理（閉包作用子の性質）の条件を満たすならば, これによって X の位相が定められると考え, 次の定理を証明した. （森田 [2]）

Thm 2.21
X : 空でない集合
写像 $k : 2^X \to 2^X$が次の条件（**Kuratowski の公理系**）を満たしているとする.
$\mathbf{K}_1$ $k(\emptyset) = \emptyset$
$\mathbf{K}_2$ $\forall A \in 2^X,\ A \in k(A)$
$\mathbf{K}_3$ $\forall A, B \in 2^X,\ k(A \cup B) = k(A) \cup k(B)$
$\mathbf{K}_4$ $\forall A \in 2^X,\ k(k(A)) = k(A)$

このとき, 集合 X の位相 $\mathscr{O}$ で, 写像 k が位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の閉包作用子に一致するものが唯一つ存在する.

Proof

・存在性を示す前に, 先に一意性を示す.

もし, 与えられた写像 k が位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の閉包作用子と一致するならば, X の部分集合 M について, $M \in \mathscr{O}$ であることと, $k(M^c) = M^c$ であることは同等である. ($\because$ X の部分集合 M が $M \in \mathscr{O}$ ということは M が開集合であるということであり, このとき M^cは閉集合であるというのであった. M が閉集合であるとき $M = \overline{M}$が成り立つのであり, 今の場合は $M^c = \overline{M^c}$ということである. 写像 k を視覚的に表現すれば"バーをつける操作"なので, $M \in \mathscr{O}$ ならば, $k(M^c) = \overline{M^c} = M^c$ということ. 逆も同様にわかる.)　従って, 集合 X 上に条件を満たす位相 $\mathscr{O}$ が存在すれば, この位相 $\mathscr{O}$ は

$$\mathscr{O} = \{M \in 2^X \mid k(M^c) = M^c\} \quad \cdots (*)$$

という等式によって定義されなければならない. よって一意性は示された.

・次に存在性を示す.

上の等式 $(*)$ によって 2^X の部分集合 $\mathscr{O}$ を与えたとき, $\mathscr{O}$ が集合 X の位相になることを示せばよい.

($\mathbf{O}_1$) $X^c = \emptyset$ に注意すれば, $\mathbf{K}_1$ によって $X \in \mathscr{O}$ がわかる. 続いて $\mathbf{K}_2$ より, $X \subset k(X)$ がわかる. $k(X) \in 2^X$ なので, $k(X) \subset X$ がわかり, $k(X) = X$ が成り立つ. $\emptyset^c = X$ に注意すると, $\emptyset \in \mathscr{O}$ がわかる. 従って $\mathbf{O}_1$ が言えた.

($\mathbf{O}_2$) $M_1 \in \mathscr{O}, M_2 \in \mathscr{O}$ とすれば, $k(M_j^c) = M_j^c$ $(j = 1, 2)$ であるから, $\mathbf{K}_3$ と *De Morgan* の法則によって

$$k((M_1 \cap M_2)^c) \overset{\mathbf{K}_3}{=} k(M_1^c) \cup k(M_2^c) = M_1^c \cup M_2^c \overset{De\ Morgan}{=} (M_1 \cap M_2)^c$$

が成り立ち, $M_1 \cap M_2 \in \mathscr{O}$ となる. これを有限回繰り返せば, $\mathscr{O}$ に属する $M_1, \cdots, M_n$ に対して $M_1 \cap \cdots \cap M_n \in \mathscr{O}$ となり, $\mathbf{O}_2$ が言えた.

($\mathbf{O}_3$) 次に $(M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ を $\mathscr{O}$ の元からなる集合系とし, $M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_i$ とおく. $\mathbf{K}_3$ によって, X の部分集合 A,B について, $A \subset B$ ならば $k(A) \subset k(B)$ であることがわかる. ($\because$ $A \subset B$ ならば $A \cup B = B$ であるので $\mathbf{K}_3$から $k(B) = k(A) \cup k(B)$ となり, $k(A) \subset k(B)$ がわかる.) 各 $\lambda \in \Lambda$ について, $M^c \subset M_\lambda^c$ であり, $M_\lambda \in \mathscr{O}$ であるから

$$k(M^c) \subset k(M_\lambda^c) = M_\lambda^c$$

が成り立つ．よって

$$k(M^c) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^c = \Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\Big)^c = M^c$$

となる．一方, $\mathbf{K}_2$ により $M^c \subset k(M^c)$ であるから, $k(M^c) = M^c$ となり, $M \in \mathscr{O}$ となる．従って $\mathbf{O}_3$ が言えた．
以上で等式 $(*)$ によって定められる 2^X の部分集合 $\mathscr{O}$ は集合 X の位相であることがわかった．
・最後に, この位相空間 $(X, \mathscr{O})$ における閉包作用子が, 与えられた写像 k に一致することを示そう．A を X の部分集合とし, 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ における A の閉包を $\bar{A}$ で表す．$\bar{A}$ の補集合は $\mathscr{O}$-開集合であり, $\mathscr{O}$ の定義 $(*)$ から, $k(\bar{A}) = \bar{A}$ となる．また, $A \subset \bar{A}$ より, $k(A) \subset k(\bar{A})$ となるので, $k(A) \subset \bar{A}$ が成り立つ．一方, $\mathbf{K}_4$ によって, *k(A)* の補集合は $\mathscr{O}$-開集合だから, *k(A)* は位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の閉集合である．$\mathbf{K}_2$ によって *k(A)* は A を包む $\mathscr{O}$-閉集合であり, $\bar{A}$ は A を包む最小の $\mathscr{O}$-閉集合であるから, $\bar{A} \subset k(A)$ が成り立つ．結局, $\bar{A} = k(A)$ が X のすべての部分集合に対して成り立ち, 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ における閉包作用子が, 与えられた写像 k に一致することがわかった． ■

内田 [1] には, この開核作用子 ver. も問として掲載されている. 証明の内容としてはほぼ同じことをやっているので, ここでは書かないこととする.

先ほどの定理の主張から何が言えるだろう. 端的に言い表すとすれば,「位相空間における諸概念は原理的に, すべて閉包によって表される」ということだ.

Def 2.22 (外部, 外点, 境界点, 境界)

$(X, \mathscr{O})$: 位相空間 , $A \subset X$
A の補集合の内部 $(A^c)^i$を A の**外部**であるといい A^eで表し, A^eの点を**外点** という.*1
A の内点でも外点ない X の点を A の**境界点**であるといい, A の境界点全体の集合を A の**境界**といい A^fで表す.
距離空間の場合と同様に

$$X = A^i \coprod A^e \coprod A^f$$

が成り立つ.

Ex 2.23

Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ において, 円盤

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

については

$$A^i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$
$$A^f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$
$$A^e = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$$

となり, 私たちが直感的に抱いている（言葉の）イメージと一致する.

Def 2.24（集積点, 導集合, 孤立点）

$(X, \mathscr{O})$: 位相空間 , $A \subset X$
X の点 x が集合 $A - \{x\}$ の触点であるとき, x を A の**集積点**という. 集積点全体の集合を A の**導集合**といい, A^dで表す. また, $A - A^d$の点を A の**孤立点**という.

上の集積点の定義は閉包によるものである. 他に近傍[*2]での定義も可能であり, 「x（$\in X$）の任意の近傍が x と異なる A（$\subset X$）の点を含むとき, 点 x を A の集積点という」という風に定義されることも多い. 個人的には近傍による定義の方が自然な気がする. 次の例は Munkres[3] の例に少し加筆したものである.

Ex 2.25

実数直線 $\mathbb{R}$ を考えてみよう. $A = (0, 1]$ とすると, A の集積点は閉区間 $[0, 1]$ の任意の実数である. よって $A^d = [0, 1]$ であり, 孤立点はない. 次に $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ としよう. この場合, 0 が唯一の集積点である. よって $B^d = \{0\}$ であり, 孤立点は B の任意の点である. では, $C = \{0\} \cup (1, 2)$ としよう. このときの集積点は閉区間 $[1, 2]$ の任意の実数である. よって, $C^d = [1, 2]$ であり, 孤立点は 0 のみである.

[*1] 定義から明らかであるが, $A^e = Int(X - A)$ である.

[*2] 次節で扱う概念である.

2.2 近傍系と連続写像

近傍という概念は位相空間の基礎となっているものであり, 森田 [2] や Munkres[3] をはじめとして, 多くの本ではもっと早い段階で近傍を紹介している.

Def 2.26（近傍）

$(X, \mathscr{O})$: 位相空間
X の部分集合 N が X の点 a の**近傍**である $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ a が N の内点となること
特に点 a を含む開集合は, 全ての点 a の近傍である. これを点 a の**開近傍**という.
位相空間 $(X, \mathscr{O})$ において, 点 a の近傍全体の集合を点 a の**近傍系**といい, $\mathfrak{N}(a)$ で表す.

近傍系の特徴づけとして以下の定理がある. なお, 森田 [2] ではこれの一部を近傍系の定義として採用している.

Thm 2.27（近傍系の特徴づけ）
(1)$\forall a \in X, X \in \mathfrak{N}(a)$, $N \in \mathfrak{N}(a) \Rightarrow a \in N$
(2)$N_1, N_2 \in \mathfrak{N}(a) \Rightarrow N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{N}(a)$
(3)$N \in \mathfrak{N}(a)$ かつ $N \subset M \subset X \Rightarrow M \in \mathfrak{N}(a)$
(4)$\forall N \in \mathfrak{N}(a),\ \exists M \in \mathfrak{N}(a)\ s.t.\ \forall b \in M,\ N \in \mathfrak{N}(b)$

Proof
(1) 定義より明らか.
(2)$N_1, N_2 \in \mathfrak{N}(a)$ より $a \in N_j^i$ $(j = 1, 2)$ が成り立つ. ここで, 開核作用子の性質から $(N_1 \cap N_2)^i = N_1^i \cap N_2^i$ なので $a \in (N_1 \cap N_2)^i$ となる. 従って (1) から $N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{N}(a)$
(3)$N \in \mathfrak{N}(a)$ より $a \in N$. $N \subset M$ なので $a \in M$ であり, $M \in \mathfrak{N}(a)$ とわかる.
(4)$N \in \mathfrak{N}(a)$ に対して $M := N^i$ と定めると, 題意を満たす. ■

Thm 2.28
X : 空でない集合
写像 $h : X \to 2^{(2^X)}$ が次の条件（**Hausdorffの公理系**）を満たすとする.

$\mathbf{N}_1$ $\forall a \in X,\ X \in h(a)$ であり, $U \in h(a) \Rightarrow a \in U$
$\mathbf{N}_2$ $U_1, U_2 \in h(a) \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in h(a)$
$\mathbf{N}_3$ $U \in h(a)$ かつ $U \subset V \subset X \Rightarrow V \in h(a)$
$\mathbf{N}_4$ $\forall U \in h(a),\ \exists V \in h(a)\ s.t.\ \forall b \in V,\ U \in h(b)$
このとき,集合 X の位相 $\mathscr{O}$ で,位相空間 $(X, \mathscr{O})$ における各点 a の近傍系 $\mathfrak{N}(a)$ が $h(a)$ に一致するものが唯一つ存在する.

Proof
・存在性を示す前に, まず位相 $\mathscr{O}$ の一意性を示す.
もし, ある位相 $\mathscr{O}$ に対して, 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ における各点 a の近傍系 $\mathfrak{N}(a)$ が与えられた集合系 $h(a)$ に一致するならば, X の空でない部分集合 N が $\mathscr{O}$ の元であることと, "$a \in N$ ならば $N \in h(a)$ である" という命題 $(*)$ が成り立つことは同等である. ($\because \Rightarrow$) $N \in \mathscr{O}$ ということは, N が位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の $\mathscr{O}$-開集合であることを表している. このとき $a \in N$ ならば $N \in \mathfrak{N}(a)$ ということであり, 仮定から $\mathfrak{N}(a) = h(a)$ なので $N \in h(a)$ が成り立つ. 逆は明らか.) 従って, 集合 X 上に条件を満足する位相 $\mathscr{O}$ が存在すれば, この位相 $\mathscr{O}$ は

$$\mathscr{O} = \{N \in 2^X \mid N \text{ は命題 } (*) \text{ を満足する }\} \quad \cdots (**)$$

という等式によって定義されなければならない. これは条件を満足する位相 $\mathscr{O}$ の一意性を示している.
・次に存在性を示す.
上の等式 $(**)$ によって 2^X の部分集合 $\mathscr{O}$ を与えたとき, $\mathscr{O}$ が集合 X 上の位相になることを示せばよい.
$(\mathbf{O}_1)$ $\mathbf{N}_1$ によって $X (\in 2^X)$ は条件 $(*)$ を満たすので, $X \in \mathscr{O}$ となる. 空集合 $\emptyset$ は $(*)$ の前提の部分が偽になる(空集合は元をもたない)ので,$(*)$ は真となり, $\emptyset \in \mathscr{O}$ となる. よって $\mathbf{O}_1$ が言えた.
$(\mathbf{O}_2)$ $M_1, M_2 \in \mathscr{O}$ とすれば, $a \in M_1 \cap M_2$ に対して $M_j \in h(a)$ $(j = 1, 2)$ が成り立ち, $\mathbf{N}_2$ によって $M_1 \cap M_2 \in h(a)$ となる. ゆえに $M_1 \cap M_2$ に対しても $(*)$ が成り立ち, $M_1 \cap M_2 \in \mathscr{O}$ となる. これで $\mathbf{O}_2$ が言えた.
$(\mathbf{O}_3)$ 次に $(M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ を $\mathscr{O}$ の元から成る集合系とし, $M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ とする. a を M の任意の元とすれば, ある $\lambda \in \Lambda$ に対して $a \in M_\lambda$ となり, $M_\lambda \in \mathscr{O}$ であるから, $M_\lambda \in h(a)$ となる. $M_\lambda \subset M \subset X$ であるから, $\mathbf{N}_3$ によって $M \in h(a)$ となる. ゆえに M に対しても命題 $(*)$ が成り立ち, $M \in \mathscr{O}$ となる. よって $\mathbf{O}_3$ が言えた.

以上から, 等式 $(**)$ によって定義される 2^X の部分集合 $\mathscr{O}$ は, 集合 X の位相であることがわかった.

・最後に, この位相空間 $(X, \mathscr{O})$ における点 a の近傍系 $\mathfrak{N}(a)$ が $h(a)$ に一致することを示す. $N \in \mathfrak{N}(a)$ とする. 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ における N の内部 N^i について, $N^i \in \mathscr{O}$ かつ $a \in N^i$ が成り立っている. 位相 $\mathscr{O}$ の定義によって, N^i は命題 $(*)$ を満足し, $a \in N^i$ なので $N^i \in h(a)$ となる. $\mathbf{N}_3$ によって, $N \in h(a)$ となる. ゆえに $\mathfrak{N}(a) \subset h(a)$ が X の各点 a に対して成り立つ. 逆に $N \in h(a)$ とする. X の部分集合 N^0 を

$$N^0 = \{x \in X \mid N \in h(x)\}$$

によって定義する. $\mathbf{N}_1$ により $x \in N$ が成り立つので $N^0 \subset N$ となる. $N \in h(a)$ であるから, N^0 の定義により $a \in N^0$ である. 次に N^0が $\mathscr{O}$-開集合であることを示そう. $x \in N^0$ に対して $N \in h(x)$ であるから, $\mathbf{N}_4$ によって, ある $M \in h(x)$ を選んで, 各点 $y \in M$ に対して $N \in h(y)$ となるようにできる. N^0 の定義から, $M \subset N^0$ となり, $\mathbf{N}_3$ よって $N^0 \in h(x)$ となる. 結局, N^0 に対して命題 $(*)$ が成り立ち, $N^0 \in \mathscr{O}$ となる. 従って, N の部分集合 N^0 は点 a を含む $\mathscr{O}$-開集合である. よって, 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ において, 点 a は N の内点となるので, $N \in \mathfrak{N}(a)$ となる. ゆえに $h(a) \subset \mathfrak{N}(a)$ が X の各点 a に対して成り立つ. 結局, X の各点 a に対して, $h(a) = \mathfrak{N}(a)$ が成り立つ. ■

Thm 2.29

$(X, \mathscr{O})$: 位相空間

X の部分集合 A と X の点 x について, $x \in \bar{A}$であるための必要十分条件は, 点 x の各近傍が A と交わることである.($i.e.$ $x \in \bar{A} \Leftrightarrow x$ の任意の近傍 $U(x)$ に対して $U(x) \cap A \neq \emptyset$)

Proof

$\Leftarrow$) （対偶）

$x \notin \bar{A}$ とすれば, $U = X - \bar{A}$ は点 x の開近傍であり, A と交わらない. ゆえに, 点 x の各近傍が A と交われば, $x \in \bar{A}$ となる.

$\Rightarrow$) （対偶）

点 x のある近傍 N が A と交わらなければ, $x \in N^i$かつ $A \subset X - N^i$ が成り立つ. $X - N^i$ は閉集合だから, $\bar{A} \subset X - N^i$ となり, $x \notin \bar{A}$ が成り立つ. ゆえに $x \in \bar{A}$ ならば, 点 x の各近傍は A と交わる. ■

Exer 2.30

$(X, \mathscr{O})$: 位相空間 , $A \subset X$

A の閉包 $\bar{A}$ と導集合 A^d について, $\bar{A} = A \cup A^d$ が成り立つことを示せ.

Proof

$x \in A^d \Leftrightarrow x \in \overline{A - \{x\}} \Leftrightarrow x \in \bar{A}$ であり, $A \subset \bar{A}$ は明らかなので, $A \cup A^d \subset \bar{A}$ が成り立つ.

逆に $x \in \bar{A} - A$ とする. x の任意の近傍 N は A と交わるが, $x \notin A$ なので, N は $A - \{x\}$ と交わる. ゆえに, $\bar{A} - A \subset A^d$ であり, $\bar{A} \subset A \cup A^d$ が成り立つ.

従って, $\bar{A} = A \cup A^d$ が成り立つ. ■

参考文献

[1] 内田伏一 「集合と位相 増補新装版」（裳華房 2020）
[2] 森田紀一 「位相空間論」（岩波書店 1981）
[3] James R. Munkres *Topology*. Second Edition, 1999
[4] 森田茂之 「集合と位相空間」（朝倉書店 2002）
[5] 松阪和夫 「集合・位相入門」（岩波書店 1968）