スペクトラムと分離公理

東京理科大学 金子千奈

2020 年 10 月 19 日

環のスペクトラム $X = \operatorname{Spec} A$ は，滅多に Hausdorff 空間にならない，という話を小耳にはさんだ．例えば，（Affine）代数多様体の拡張として得られるスキームの底空間のような，「良い」環のスペクトラムは Hausdorff 空間にはなりそうにない．それでは，実際にどの程度 Hausdorff 空間にならないのか？同値な言い換えは？その部分が気になり，調べてみたところ，面白い，きれいな結果が知られていることを知った．それを書き起こしたものが本稿である．

１節から４節はほとんど５，６節の準備である．５，６節で用いる概念の定義や定理はなるべくのべるように努めたが，抜けているものがあるかもしれない．また，そのような定理のすべてに証明をつける余裕がなかったので，気になる人は参考文献をみてほしい．

目次

1　環とイデアル

準備の第一段階として，環のイデアルやその根基，局所化や環の次元などの定義と簡単な性質をみよう．なお，本書では「環」とは単位元をもつ可換環とする．

定義 1.1. A の部分集合 $\mathfrak{a}$ が加法に関して A の部分群であり，また $a \in A,\ x \in \mathfrak{a}$ ならば $ax \in \mathfrak{a}$ を満たすとき，$\mathfrak{a}$ を A の**イデアル**という．

$\{0\}$ や A は A のイデアルであり，これらを**自明なイデアル**と呼ぶ．また $\mathfrak{a} \neq A$ であるような A のイデアル $\mathfrak{a}$ を A の真のイデアルという．

例 1.2. 環 A と有限個の元 $f_1, \ldots, f_r \in A$ に対して，

$$(f_1, \ldots, f_r) = \{a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r \mid a_1, \ldots, a_r \in A\}$$

とおくと，$(f_1, \ldots, f_r)$ は A のイデアルである．このイデアルを，$f_1, \ldots, f_r$ が A 上で**生成する**イデアルという．また，A のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して，有限個の元 $f_1, \ldots, f_r$ を選んで $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_r)$ となるとき，$\mathfrak{a}$ は**有限生成イデアル**と呼ばれ，特に 1 つの元が生成するイデアルは**単項イデアル**とよばれる．

イデアルの中でも特別なものとして，

定義 1.3. A の真のイデアル $\mathfrak{p}$ について，「$xy \in \mathfrak{p}$ ならば $x \in \mathfrak{p}$ または $y \in \mathfrak{p}$」という条件を満たすとき，$\mathfrak{p}$ を A の**素イデアル**という．また，A の真のイデアル $\mathfrak{m}$ について，これを真に含む A の真のイデアルが存在しないとき，$\mathfrak{m}$ を A の**極大イデアル**という．

Zorn の補題の応用として，零でない環は少なくとも 1 つの極大イデアルをもつことが示される．この定理は **Krull の定理**と呼ばれている[*1]．

環のイデアル，特にその素イデアルや極大イデアルは，環の構造をよく反映している．例えば環が整域であることは，自明なイデアル 0 が素イデアルであることと同値であり，また環が体であることは極大イデアルは 0 であることと同値である．環の構造を調べる上で，そのイデアルや素イデアルを調べることは本質的なのである．

定義 1.4. A のベキ零元[*2]全体の集合は A のイデアルとなる．これを $\mathrm{nil}\,A$ とかき，A の**ベキ零根基**という．また，A のすべての極大イデアルの共通部分は A のイデアルとなる．これを A の **Jacobson 根基**という．

ベキ零根基や Jacobson 根基がイデアルであることは容易に確かめられるので省略するが，Jacobson 根基は次のような特徴づけをもつ．

命題 1.5. A の元 x について，x が Jacobson 根基の元であるための必要十分条件は，すべての $y \in A$ に対して，$1 - xy$ は A の可逆元[*3]であることである．

[*1] Krull の定理の証明のために，環が乗法の単位元 1 をもつことが必要となる．実際に，単位元 1 をもたない環で，極大イデアルをもたないものが存在する（らしい）．
[*2] $f^n = 0$ となる自然数 n が存在するような $f \in A$ を A のベキ零元という．
[*3] $x \in A$ について，$xy = 1$ となる $y \in A$ が存在するとき，x を A の可逆元という．

証明. ($\Longrightarrow$) x を Jacobson 根基の元とする．ある $y \in A$ がとれて $1 - xy$ が可逆でないと仮定すると，Krull の定理から $1 - xy \in \mathfrak{m}$ となる A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在する．一方 $x \in \mathfrak{m}$ であるから，$xy \in \mathfrak{m}$ である．従って，$1 = (1 - xy) + xy \in \mathfrak{m}$ となるが，これは $\mathfrak{m}$ が極大イデアル，特に真のイデアルであることに反する．

($\Longleftarrow$) x が Jacobson 根基の元でないとすると，ある極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在して，$x \notin \mathfrak{m}$ となる．すると，$(x) + \mathfrak{m}$ は $\mathfrak{m}$ を真に含む A のイデアルなので，$\mathfrak{m}$ の極大性から，$(x) + \mathfrak{m} = (1)$ である．よって $xy + t = 1$ となる $y \in A,\ t \in \mathfrak{m}$ が存在するが，このとき $1 - xy = t \in \mathfrak{m}$ は可逆でない． □

A のベキ零根基 $\operatorname{nil} A$ の以下の命題 1.8 のようにキレイな特徴づけがあるが，その証明に局所化を用いるので，先に環の局所化という操作について簡単に説明する．環 A の部分集合 S で，1 を含み，乗法について閉じているものを積閉集合という．直積集合 $A \times S$ 上の次の関係 $\sim$ は同値関係となる；

$$(a, s) \sim (b, t) \iff u(at - bs) = 0 \text{ となる } u \in S \text{ が存在する}$$

この同値関係による商集合を $S^{-1}A$ とかき，(a, s) の同値類を a/s とかく．$S^{-1}A$ 上に次の演算を入れることにより，環となる；

$$(a/s) + (b/t) = (at + bs)/st$$
$$(a/s)(b/t) = ab/st$$

この環 $S^{-1}A$ を A の S による**商環**という．また，環 A から商環 $S^{-1}A$ を作る操作を**局所化**ということもある．

もし $S^{-1}A$ が零環ならば，$1/1 = 0/1$ であるから，$s(1 - 0) = 0$ となる $s \in S$ が存在する．従って $0 \in S$ である．

例 1.6. $A = \mathbb{Z},\ S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ととれば，商環は有理数体 $\mathbb{Q}$ となることがわかる．

このように，局所化とは $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Q}$ を作る操作を，一般化したものであるということができる．別の例を挙げると，

例 1.7. 環 A と，その素イデアル $\mathfrak{p}$ が与えらえたとき，$S = A \setminus \mathfrak{p}$ とおくと，S は A の積閉集合である．この積閉集合 S による局所化を $A_{\mathfrak{p}}$ とかき，A の素イデアル $\mathfrak{p}$ による局所化という．$A_{\mathfrak{p}}$ は**局所環**である．すなわち，唯一つの極大イデアルをもつ．

局所化の応用として，次の $\operatorname{nil} A$ の特徴づけを与える命題を示そう[*4]．

命題 1.8. $\operatorname{nil} A$ は A のすべての素イデアルの共通集合である．

証明. $f \in A$ をベキ零元とすると，ある n に対して $f^n = 0$ である．任意の A の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して，$0 = f^n \in \mathfrak{p}$ であるが，$\mathfrak{p}$ は素なので $f \in \mathfrak{p}$ となる．

逆に $f \in A$ をベキ零でないとする．$S = \{f^n \in A \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ とすると，これは A の積閉集合である．この積閉集合による商環を A_f とかく．f がベキ零でないから，S は 0 を含まないので，S による商環 $S^{-1}A = A_f$ は零環でない．従って，Krull 定理から A_f の極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在する．もし $\mathfrak{m}$ の A への縮約 $\mathfrak{m} \cap A$ が S と交われば，$s \in \mathfrak{m} \cap A$ なる $s \in S$ が存在するが，このとき $s/1 \in \mathfrak{m}$ となる．$1/s \in A_f$ なので，$s/1$ は A_f の単元である．これは $\mathfrak{m}$ が極大イデアルであること，特に真のイデアルであることに反する．従って $\mathfrak{m} \cap A$ と S は交わらない．このことから $f \notin \mathfrak{m}$ である． □

[*4] 局所化を用いずに，Zorn の補題を用いて証明することもできる．詳しくは [1] 命題 1.8.

次に，環のある性質 P が局所的であるということの定義だけ紹介しておく．

定義 1.9. 環の性質 P は，次が成り立つとき**局所的性質**であるという；A が性質 P をもつことと，A の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して，$A_{\mathfrak{p}}$ は性質 P をもつ．

環 A に対して，その素イデアル $\mathfrak{p}$ における局所化 $A_{\mathfrak{p}}$ を作る操作は，これから定義する $X = \operatorname{Spec} A$ という位相空間において，$\mathfrak{p}$ の周りの局所的な情報に着目することに対応し，$A_{\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{p}$ での局所的な構造を反映する．性質 P が局所的性質であるとは即ち，各点（の周り）で成り立っていれば，大域的に成り立つ性質であることを意味しているのである．

可換環論に登場する言葉は，しばしば幾何的なイメージに由来していて，この「局所的性質」もそのような言葉の一つである．純粋に代数的な文脈で話が展開しているようにみえても，実は幾何的な対象を扱っているのである．次に定義する Krull 次元も，（代数多様体の列に対応するという意味で）幾何的直観に基づいて環の「おおきさ」を測る 1 つの尺度である．

定義 1.10. 環 A に対して，A の素イデアルの真の減少列

$$\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_r$$

の長さ r の上限を A の **(Krull) 次元**といい，$\dim A$ とかく．

2　環のスペクトラムと例

いよいよ環 A の素イデアル全体の集合 $X = \operatorname{Spec} A$ に位相をいれ，その性質を調べよう．

定義 2.1. A のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して，X の部分集合 $V(\mathfrak{a})$ を

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in X \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$$

と定める．

補題 2.2. (i) A のイデアル $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ に対して，$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$.

(ii) A の任意のイデアルの族 $\{\mathfrak{a}_i\}_i$ について，$\bigcap_i V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum_i \mathfrak{a}_i)$.

(iii) $V(0) = X,\ V(1) = \emptyset$.

証明. (i) $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ ならば，$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ である．$\mathfrak{p}$ は素イデアルなので，$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ または $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ が成り立つ．従って $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ である．逆は容易である．

(ii) $\mathfrak{p} \in \bigcap_i \mathfrak{a}_i$ とすると，すべての i に対して $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{a}_i$ を含むので，和 $\sum_i \mathfrak{a}_i$ を含む．従って $\mathfrak{p} \in V(\sum_i \mathfrak{a}_i)$ となることがわかる．逆も同様である．

(iii) は容易なので省略する．□

補題 2.2 により，X に $V(\mathfrak{a})$ の形の集合を閉集合とする位相を入れることができる．

定義 2.3. $\{V(\mathfrak{a}) \subset X \mid \mathfrak{a}\ はイデアル\ \}$ は閉集合系の公理を満たす．この閉集合系が定める X 上の位相を **Zariski 位相**といい，位相空間 $X = \operatorname{Spec} A$ を A の**スペクトラム**という．

位相空間 $X = \operatorname{Spec} A$ に，正則関数のなす層 $\mathscr{O}$ を乗せたものを A のスペクトラムと呼ぶ本もあるが，本書

では位相空間そのものをスペクトラムとよぶこととする．この位相空間は，環を幾何的な対象物として扱う際の舞台となる．

各 $f \in A$ に対して，$D(f) = \{\mathfrak{p} \in X \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ とおくと，$D(f)$ は閉集合 $V((f))$ の補集合であるから，X の開集合である．以下にこのかたちの開集合たちに関する性質をまとめよう．

補題 2.4. $X = \operatorname{Spec} A$ を環 A のスペクトラムとする．

(i) $\{D(f) \subset X \mid f \in A\}$ は，$X = \operatorname{Spec} A$ の開基を成す．即ち，すべての開集合 $U \subset X$ に対して，$U = \bigcup_{f \in I} D(f)$ となる部分集合 $I \subset A$ が存在する．

(ii) 任意の $f, g \in A$ に対して，$D(f) \cap D(g) = D(fg)$ が成り立つ．

(iii) $D(f)$ が空集合であることと，f がベキ零元であることは同値である．

(iv) $D(f) = X$ であることと，f が単元であることは同値である．

(v) $D(f) = D(g)$ であることと，$\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$ であることは同値である．

証明. (i) U を X の任意の開集合とすると，$U = X \setminus V(\mathfrak{a})$ となるイデアル $\mathfrak{a}$ がとれる．ここで，$\mathfrak{a}$ の生成系を $\{f_i\}_{i \in I}$ とすると，$\mathfrak{a} = \sum_{i \in I}(f_i)$ である．このとき，$U = X \setminus V(\sum_i (f_i)) = X \setminus (\bigcap_i V(f_i)) = \bigcup_i (X \setminus V(f_i)) = \bigcup_i D(f_i)$ となる．従って，$D(f)$ の形の開集合たちは，X の開基を成す．

(ii) $D(f) \cap D(g) = (X \setminus V(f)) \cap (X \setminus V(g)) = X \setminus (V(f) \cup V(g)) = X \setminus V(fg) = D(fg)$.

(iii) $D(f) = \emptyset$ とすると，すべての素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $f \in \mathfrak{p}$ である．従って $f \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p} = \operatorname{nil} A$ である．逆に f をベキ零元とすると，任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して，$f \in \mathfrak{p}$ であるから，$\mathfrak{p} \notin D(f)$ である．即ち，$D(f) = \emptyset$ である．

(iv) f を単元でないとすると，Krull の定理からある極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在して，$f \in \mathfrak{m}$ となる．この $\mathfrak{m}$ について，$\mathfrak{m} \notin D(f)$ であり，もちろん $\mathfrak{m} \in X$ なので，$D(f) \subsetneq X$ である．

逆に f を単元とすると，すべての素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $f \notin \mathfrak{p}$ である．即ち $\mathfrak{p} \in D(f)$ であるから，$D(f) = X$ である．

(v) $D(f) = D(g)$ とすると，$V(f) = V(g)$ である．即ち，(f) を含む素イデアルの集合と，(g) を含む素イデアルの集合は一致する．イデアルの根基は，そのイデアルを含む素イデアルの共通集合であるから，$\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$ であることがわかる．逆は，$V(f) = V(\sqrt{f}) = V(\sqrt{g}) = V(g)$ であることから直ちに従う．□

本書の大きなテーマは，環のスペクトラム $X = \operatorname{Spec} A$ が Hausdorff 空間になる状況を調べることであった．そのような問題意識のもとで，いくつか例をみてみよう．

例 2.5. これは自明な（つまらない）例だが，A が Artin 局所環であるとき，特に体であるとき，そのスペクトラム $X = \operatorname{Spec} A$ は Hausdorff 空間になる．Artin 局所環の素イデアルはただ一つなので，X は一点集合になるからである．

以下 X は 1 点集合でない場合を考えよう．

例 2.6. A のベキ零根基 $\operatorname{nil} A = \{f \in A \mid \text{ある } n \text{ が存在して } f^n = 0\}$ が素イデアルならば，X は Hausdorff 空間ではない．これを示そう．

イデアル $\mathfrak{a}$ に対して，もし $\operatorname{nil} A \in V(\mathfrak{a})$ ならば，$\mathfrak{a} \subset \operatorname{nil} A$ となる．$\operatorname{nil} A$ は A のすべての素イデアルの共通部分なので，すべての素イデアルは $\operatorname{nil} A$ を含むから，$\mathfrak{a}$ を含む．従って，$V(\mathfrak{a})$ は全体 $X = \operatorname{Spec} A$ と一致

する．このことから，X の真閉部分集合は $\operatorname{nil} A$ を含まないことがわかる．

U を X の空でないような任意の開集合とすると，U は X のある真閉部分集合の補集合なので，$\operatorname{nil} A$ を含む．特に，X の空でない開集合は交わるので，X は Hausdorff 空間ではない．

例 2.7. 上の例の例として，A が整域ならば，$\operatorname{nil} A = 0$ は A の素イデアルなので，X は Hausdorff 空間ではない．

例 2.8. Artin 環のスペクトラムは Hausdorff 空間である．なぜなら，Artin 環（で整域でないもの）のすべての素イデアルは極大であり，さらに極大イデアルは有限個である．従って，このとき X は有限個の閉点から成る空間である．そこで $X = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r\}$ とおく．ここで相異なる i, j に対しては $\mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{m}_j$ となるようにする．このとき，各 i に対して，$\{\mathfrak{m}_i\}$ の補集合は，$\mathfrak{m}_i$ を除くすべての閉点から成る集合だが，これは閉集合の有限個の和集合 $\bigcup_{j\neq i}\{\mathfrak{m}_j\}$ であるから閉集合である．従って $\{\mathfrak{m}_i\}$ は開（かつ閉）集合であるから，X に入っている位相は実は離散位相である．特に X は Hausdorff 空間である．

このように，環のスペクトラムの Hausdorff 性は環によりけりだが，いつもコンパクトになる．

定理 2.9. 環 A のスペクトラム $X = \operatorname{Spec} A$ はコンパクトな位相空間である．

証明. $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の任意の開被覆とすると，$\{D(f)\}_{f\in A}$ は X の開基を成すので，各 O_λ に対して，$O_\lambda = \bigcup_{f\in B_\lambda} D(f)$ と表せる．$B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ と置けば，$\{D(f)\}_{f\in B}$ という形の X の開被覆ができる．

この開被覆の有限部分被覆がとれるとき，即ち，有限個の $f_1, \ldots, f_k \in B$ を選んで，$X = \bigcup_{i=1}^k D(f_i)$ とできるとき，各 i に対して，$D(f_i) \subset O_{\lambda_i}$ となる $\lambda_i \in \Lambda$ が存在する．このような有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ に対して，$X = \bigcup_{i=1}^k D(f_i) \subset \bigcup_{i=1}^k O_{\lambda_i}$ となるから，$\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆 $\{O_{\lambda_i}\}_{i=1}^k$ がとれる．従って，$D(f)$ の形の開集合からなる X の任意の開被覆が，有限部分被覆をもつことを示せば充分である．

$\{D(f_i)\}_{i\in I}$ $(f_i \in A)$ という形の X の開被覆を任意に与える．このとき，もし $\sum_{i\in I}(f_i)$ が真のイデアルであるならば，Krull の定理から $\sum(f_i) \subset \mathfrak{m}$ となる極大イデアル $\mathfrak{m}$ がとれる．このとき，$\mathfrak{m} \in V(\sum(f_i))$ である．一方，$V(\sum(f_i)) = \bigcap V(f_i) = \bigcap(X \setminus D(f_i)) = X \setminus (\bigcup \quad D(f_i)) = \emptyset$ となるので，これは $\mathfrak{m} \in V(\sum(f_i))$ に反する．従って，$\sum_{i\in I}(f_i) = (1)$ である．

従って $1 \in \sum(f_i)$ なので，有限集合 $J \subset I$ と，$g_j \in A$ を選んで，$1 = \sum_{j\in J} g_j f_j$ となる．このとき，補題 2.4 から，$X = D(\sum g_j f_j) = X \setminus V(\sum g_j f_j) = X \setminus \bigcap V(g_j f_j) = \bigcup(X \setminus V(g_j f_j)) = \bigcup(X \setminus V(g_j)) \cap (X \setminus V(f_j)) \subset \bigcup_{j\in J} D(f_j)$ であるから，$\{D(f_i)\}_{i\in I}$ は有限部分被覆 $\{D(f_j)\}_{j\in J}$ をもつ．$\square$

3 分裂補題

準備の第 2 段階として，この節と次の節では，環上の加群の直和とテンソル積についての話をする．環 A 上の加群 M とは，ベクトル空間の一般化である（ベクトル空間は加群の一例である）．即ち，M は Abel 群であり，かつ A が線形に作用するものである．例えば，A のイデアル $\mathfrak{a}$ は積を作用とすることにより，A 加群となる．

2 つの A 加群 M_1, M_2 が与えられたとき，A 加群 $M_1 \oplus M_2$ を構成しよう．

定義 3.1. A 加群 M_1, M_2 の直積集合 $M_1 \times M_2$ に，演算と作用を $x_1, x_1' \in M_1$, $x_2, x_2' \in M_2$, $a \in A$ に対して

$$(x_1, x_2) + (x_1', x_2') = (x_1 + x_1', x_2 + x_2'), \quad a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$$

と定めることにより，A 加群となる．この A 加群を M_1 と M_2 の**直和**といい，$M_1 \oplus M_2$ とかく．

$i_1\colon M_1 \to M_1 \oplus M_2$, $i_2\colon M_2 \to M_1 \oplus M_2$ を $i_1(x_1) = (x_1, 0)$, $i_2(x_2) = (0, x_2)$ と定めると，i_1, i_2 は単射である．これらを**標準的単射**という．また，$p_1\colon M_1 \oplus M_2 \to M_1$, $p_2\colon M_1 \oplus M_2 \to M_2$ を $p_1(x_1, x_2) = x_1$, $p_2(x_1, x_2) = x_2$ と定めると，p_1, p_2 は全射である．これらを**標準的射影**と呼ぶ．

A 加群と A 線形写像の列

$$M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3 \tag{1}$$

に対して，$\operatorname{Ker}\varphi_2 = \operatorname{Im}\varphi_1$ が成立するとき，この列は**完全**であるという．直和とその標準的単射，射影は，自然な完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0 \tag{2}$$

を構成し，

$$p_1 \circ i_1 = 1_{M_1}, \quad p_2 \circ i_2 = 1_{M_2}$$

を満たす．ここで，$1_{M_1}, 1_{M_2}$ はそれぞれ M_1, M_2 の恒等写像である．次の意味で，この主張の逆が成り立つ；

定理 3.2. 完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M \xrightarrow{\varphi_2} M_2 \longrightarrow 0 \tag{3}$$

が次のいずれかの条件を満たすとき，$M \simeq M_1 \oplus M_2$ となる．

(i) $\psi_2\colon M_2 \to M$ で，$\varphi_2 \circ \psi_2 = 1_{M_2}$ となるものが存在する．
(ii) $\psi_1\colon M \to M_1$ で，$\psi_1 \circ \varphi_1 = 1_{M_1}$ となるものが存在する．

定理中の (i),(ii) を満たす完全列を**分裂完全列**というので，この定理は分裂補題と呼ばれる．

証明． 完全列 (3) が与えられたとき，(i) を仮定すると，$\varphi_1 \circ \psi_2$ が恒等射，特に単射なので，ψ_2 は単射である．φ_1 も単射なので，同型 $M_1 \simeq \operatorname{Im}\varphi_1$, $M_2 \simeq \operatorname{Im}\psi_2$ を得る．このとき，

$$f\colon \operatorname{Im}\varphi_1 \oplus \operatorname{Im}\psi_2 \longrightarrow M \ ; \ (x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2$$

が同型写像であることを示そう．

まず $f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)$ と仮定すると，$x_1 + x_2 = y_1 + y_2$．$x_1, y_1 \in \operatorname{Im}\varphi_1 = \operatorname{Ker}\varphi_2$ なので，φ_2 を施すと $\varphi_2(x_2) = \varphi_2(y_2)$ となる．さらに $x_1, y_2 \in \operatorname{Im}\psi_2$ なので，$\psi_2(x_2') = x_2$, $\psi_2(y_2') = y_2$ となるような $x_2', y_2' \in M_2$ が存在する．すると，$x_2' = \varphi_2(x_2) = \varphi_2(y_2) = y_2'$ となるから，ψ_2 を施して $x_2 = y_2$ を得る．ここから $x_1 = x_2$ もでるので，f は単射である．

つぎに $x \in M$ を勝手にとると，$\varphi_2(x - \psi_2(\varphi_2(x))) = 0$ なので，$x - \psi_2(\varphi_2(x)) \in \operatorname{Ker}\varphi_2 = \operatorname{Im}\varphi_1$ であるから，$x - \psi_2(\varphi_2(x)) = \varphi_1(x_1)$ となる $x_1 \in M_1$ がとれる．このとき $f(\varphi_1(x_1), \psi_2(\varphi_2)(x)) = x$ であるから，f は全射である．

以上より $M \simeq M_1 \oplus M_2$ が従う．

次に，(ii) を仮定すると，φ_1 は単射なので $M_1 \simeq \operatorname{Im}\varphi_1 = \operatorname{Ker}\varphi_2$ となる．また，$\operatorname{Ker}\psi_1 \simeq M_2$ $(x \mapsto \varphi_2(x))$ となる．実際 $x \in \operatorname{Ker}\psi_1$ に対して $\varphi_2(x) = 0$ と仮定すると，$x \in \operatorname{Im}\varphi_1$ なので，$x = \varphi_1(x_1)$ なる $x_1 \in M_1$ がとれる．ψ_1 を施せば，$x_1 = \psi_1(x) = 0$ となるから，$x = \varphi_1(x_1) = 0$．従って単射である．任意の $x_2 \in M_2$ に対して，φ_2 は全射なので，$x_2\varphi_2(x)$ なる $x \in M$ が存在する．このとき $\psi_1(x - \varphi_1(\psi_1(x))) = 0$ なので，$x - \varphi_1(\psi_1(x)) \in \operatorname{Ker}\psi_1$ である．さらに $\varphi_2(x - \varphi_1(\psi_1(x))) = \varphi_2(x) = x_2$ となる．

すると，(i) の場合と同じような方法で，

$$g\colon \operatorname{Ker}\psi_1 \oplus \operatorname{Ker}\varphi_2 \longrightarrow M \ ; \ (x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2$$

が同型写像になることが確かめられる．従って $M \simeq M_1 \oplus M_2$ が導かれる． □

4 平坦加群

次に，2 つの A 加群 M, N が与えられたとき，テンソル積と呼ばれる加群 $M \otimes_A N$ を構成しよう．

定義 4.1. M, N, P を A 加群とする．写像 $\varphi\colon M \times N \to P$ が次の性質をもつとき，A **双線形**であるという；

(i) $x_1, x_2 \in M,\ y \in N$ に対して，$\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$,
(ii) $x \in M,\ y_1, y_2 \in N$ に対して，$\varphi(x, y_1 + y_2) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$,
(iii) $x \in M,\ y \in N,\ a \in A$ に対して，$a\varphi(x, y) = \varphi(ax, y) = \varphi(x, ay)$.

テンソル積は，次のように「普遍性」で定義される．

定理 4.2. A 加群 M, N に対して，次の性質をもつ A 加群 $M \otimes_A N$ と，A 双線形 $\tau\colon M \times N \to M \otimes_A N$ が同型を除いて一意的に存在する；任意の A 加群 P と，A 双線形写像 $\varphi\colon M \times N \to P$ に対して，A 準同型 $\psi\colon M \otimes_A N \to P$ で，$\varphi = \psi \circ t$ となるものが唯一つ存在する．A 加群 $M \otimes_A N$ を，M と N の**テンソル**

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "t"] & P \\
M \otimes_A N \arrow[ur, dashed, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

図 1　テンソル積

積という．

「普遍性」とは，対象の構成ではなく，機能や，満たすべき性質に重みをおき，特徴づける方法である．実際にテンソル積の「普遍性」では，A 加群 M, N が与えられたとき，$M \otimes_A N$ という加群を，M, N から具体的に構成するのではなく，A 加群 P と，A 線形写像を用いて特徴づけている（なお，具体的に構成することが，定理 4.2 の証明の一部である．直和の定義の仕方と比較してみてほしい[*5]）．

このように対象と射（今でいうところの A 加群と A 線形写像）で，対象の帰納に着目して特徴づける方法は，抽象的で，直感的に理解しずらいかもしれないが，その一方で図式との相性がよく，特にホモロジー代数の文脈でよく用いられる．

定理 4.3. A 加群 M, N, L に対して，

(i) $A \otimes_A M \simeq M$.
(ii) $M \otimes_A N \simeq N \otimes_A M$.

[*5] 直和を普遍性を用いて定義することももちろんできるが，抽象度が高いことと，具体的に構成することが容易であることから，前に述べたような定義を採用した．テンソル積の場合は，具体的な構成が今後の議論で登場することがほとんどない上に，複雑であることから，普遍性による定義を採用した．

(iii) $(M \otimes_A N) \otimes_A L \simeq M \otimes_A (N \otimes_A L)$.

証明. (i) $\varphi\colon A \times M \to M$ を $\varphi(a,x) = ax$ と定義すると，φ は A 双線形写像である．従って φ は $\psi\colon A \otimes_A M \to M,\ \psi(a \times x) = ax$ を誘導する．$\psi(a \otimes x) = 0$ なら $ax = 0$ だから，$a \otimes x = 1 \otimes ax = 1 \otimes 0 = 0$ となるので，ψ は単射である．また任意の $x \in M$ に対して $\varphi(1 \otimes x) = x$ なので ψ は全射である．

(ii) $\varphi\colon M \times N \to N \otimes_A M$ を $\varphi(x,y) = y \otimes x$ と定めると φ は A 双線形なので，$\psi\colon M \otimes_A N \to N \otimes_A M$ を導く．同じようにすると，逆写像も構成できる．

(iii) まず，$z_0 \in L$ を勝手にとり，固定する．すると $\varphi_{z_0}\colon M \times N \to M \otimes_A (N \otimes_A L)$ を，$\varphi'_{z_0}(x,y) = x \otimes (y \otimes z_0)$ と定義すると，φ は A 双線形写像である．従って，φ は $\psi_{z_0}\colon M \otimes_A N \to M \otimes_A (N \otimes_A L),\ \varphi_{z_0}(x \otimes y) = x \otimes (y \otimes z_0)$ を導く．

次に，$\varphi'\colon (M \otimes_A N) \times L \to M \otimes_A (N \otimes_A L),\ \varphi'((x,y),z) = \varphi_{z_0}(x \otimes y)$ と定めると，φ' は A 双線形写像だから，$\psi'\colon (M \otimes_A N) \otimes_A L \to M \otimes_A (N \otimes_A L),\ \varphi((x \otimes y) \otimes z) = \varphi_{z_0}(x \otimes y) = x \otimes (y \otimes z)$ が引き起こされる．

同じようにして，逆も構成できる． □

A 線形 $f\colon M_1 \to M_2$ と，A 加群 N が与えられたとき，$\varphi\colon M_1 \times N \to M_2 \otimes_A N$ を $\varphi(x,y) = f(x) \otimes y$ と定義すると，φ は A 双線形写像であることが確かめられる．従って φ は A 線形

$$f \otimes 1_N\colon M_1 \otimes_A N \longrightarrow M_2 \otimes_A N\ ;\ x \otimes y \longmapsto f(x) \otimes y$$

を導く．この写像について，

補題 4.4. (i) 恒等写像 $1_M\colon M \to M$ に対して，$1_M \otimes 1_N$ は $M \otimes_A N$ の恒等写像である．

(ii) A 線形 $f\colon M_1 \to M_2,\ g\colon M_2 \to M_3$ に対して，$(g \circ f) \otimes 1_N = (g \otimes 1_N) \circ (f \otimes 1_N)$.

補題 4.4 から，テンソル積をとる操作は，A 加群の圏から自身への**関手**である．さらに，この関手は右完全である．つまり，

定理 4.5. A 加群の完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3 \longrightarrow 0 \tag{4}$$

が与えられたとき，任意の A 加群 N に対して，

$$M_1 \otimes_A N \xrightarrow{\varphi_1 \otimes 1} M_2 \otimes_A N \xrightarrow{\varphi_2 \otimes 1} M_3 \otimes_A N \longrightarrow 0 \tag{5}$$

は完全である．

さらに (4) が分裂しているとき，

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes_A N \xrightarrow{\varphi_1 \otimes 1} M_2 \otimes_A N \xrightarrow{\varphi_2 \otimes 1} M_3 \otimes_A N \longrightarrow 0 \tag{6}$$

もまた分裂完全列である．

証明. 前半は準備不足なので省略する．[1] 命題 2.18 を参照してほしい．後半の主張を示そう．(4) が分裂しているとき，$\psi_1\colon M_2 \to M_1$ で，$\psi_1 \circ \varphi_1 = 1_{M_1}$ となるものがある．このとき，補題 4.4 から，$(\psi_1 \otimes 1_N) \circ (\varphi_1 \otimes 1_N) = (\psi_1 \circ \varphi_1) \otimes 1_N$ となり，これは $M \otimes_A N$ の恒等写像である．従って $\varphi_1 \otimes 1_N$ は単射であり，かつ (6) は分裂している． □

テンソル積をとる関手が完全になる加群を，平坦であるという．

定義 4.6. A 加群 N が**平坦**であるとは，任意の完全列 $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ に対して，

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes_A N \longrightarrow M_2 \otimes_A N \longrightarrow M_3 \otimes_A N \longrightarrow 0$$

がまた完全であることである．

例 4.7. 例えば A 加群 A は平坦である．なぜなら定理 4.3(i) により，A をテンソルした列は同じ列であるからである．

定理 4.8. 平坦性は局所的性質である．即ち，任意の A 加群 M に対して，次の条件は互いに同値である；

(i) M は平坦 A 加群である．
(ii) 任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して，$M_{\mathfrak{p}}$ は平坦 $A_{\mathfrak{p}}$ 加群である．
(iii) 任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して，$M_{\mathfrak{m}}$ は平坦 $A_{\mathfrak{m}}$ 加群である．

証明． [1] 命題 3.10 参照． □

さらに平坦性は次のように Tor を用いた特徴づけをもつ；

定理 4.9. A 加群 M が平坦であるための必要十分条件は，A のすべての有限生成イデアル $\mathfrak{a}$ に対して，$\mathrm{Tor}_1(A/\mathfrak{a}, M) = 0$ であることである．

5 絶対平坦

$X = \mathrm{Spec}\, A$ が Hausdorff であることを言い換える際に，絶対平坦という環が登場する．この節で，絶対平坦な環の定義とその性質を調べよう．

定義 5.1. すべての A 加群が平坦であるような環 A は**絶対平坦**であるという．

定理 5.2. 環 A に対して，次の条件は互いに同値である；

(i) A は絶対平坦である．
(ii) A のすべての単項イデアルはベキ等である．
(iii) A のすべての有限生成イデアルは A の直和因子である．

証明． (i)⇒(ii) A を絶対平坦な環とする．任意の $x \in A$ に対して，単項イデアル (x) がベキ等であること，即ち $(x) = (x^2)$ であることを示そう．

包含写像 $(x) \to A$ に，A 加群 $A/(x)$ を A 上でテンソルすることにより，$\alpha\colon (x) \otimes_A A/(x) \to A/(x)$ を得る．A が絶対平坦なので，α は単射である．さらに任意の $a, b \in A$ に対して，$\alpha(ax \otimes b + (x)) = abx + (x) = 0$ であるから，α は零射である．

また，自然な全射 $\pi\colon A \to A/(x)$ に A 上で (x) をテンソルすることにより，全射 $\beta\colon (x) \otimes_A A \to (x) \otimes A/(x)$ を得る．

ここで構成した射は，次の図式を可換にする；

α は零射かつ単射だから，$\mathrm{Im}\, \beta \subset \mathrm{Ker}\, \alpha = 0$ となるので，$\mathrm{Im}\, \beta = 0$ である．さらに β は全射であったか

$$\begin{array}{ccc} (x)\otimes A & \xrightarrow{\beta} & (x)\otimes A/(x) \\ \downarrow & & \downarrow \alpha \\ A & \xrightarrow{\pi} & A/(x) \end{array}$$

図 2

ら，$0 = \operatorname{Im}\beta = (x)\otimes A/(x) \simeq (x)/(x^2)$．即ち $(x) = (x^2)$ である．

(ii)⇒(iii)　まず任意の $f \in A$ に対して，あるベキ等元 $e \in A$ が存在して，$(f) = (e)$ となることを示そう．(ii) により (f) はベキ等イデアルなので，$f = af^2$ となる $a \in A$ が存在する．$e = af$ とおくと，$e^2 = a(af^2) = af = e$ であるから，e はベキ等元である．このとき $e = af \in (f)$ であり，また $f = af^2 = fe \in (e)$ なので $(f) = (e)$ となる．

次に，任意のベキ等元 e_1, e_2 に対して，$e = e_1 + e_2 - e_1e_2$ とおく．すると，$e^2 = e$ となることが確かめられる．さらに $e_1e = e_1$，$e_2e = e_2$ なので，$e_1, e_2 \in (e)$ となるから，(e_1, e_2) は e で生成される．

以上のことから，任意の有限生成イデアル $\mathfrak{a} = \{f_1, \ldots, f_r\}$ はある 1 つのベキ等元 e で生成される．このとき，$A \simeq (e) \oplus (1-e)$ であることを示そう．次の列を考える；

$$0 \longrightarrow (e) \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} (1-e) \longrightarrow 0$$

図 3

ここで，$ae \in (e)$ に対して $\varphi(ae) = ae$，$a \in A$ に対して $\psi(a) = a(1-e)$ とする．

すると上の列は完全である．実際 φ の単射性，ψ の全射性は定義から明らかである．また，任意の $ae \in (e)$ に対して，$\psi(\varphi(ae)) = \psi(ae) = ae(1-e) = 0$ であるから $\operatorname{Im}\varphi \subset \operatorname{Ker}\psi$．$\psi(a) = 0$ とすると，$a(1-e) = 0$ より $a = ae \in (e) \in \operatorname{Im}\varphi$ なので $\operatorname{Ker}\psi \subset \operatorname{Im}\varphi$ となる．

そこで $\xi\colon (1-e) \to A$ を $\xi(a(1-e)) = a(1-e)$ と定めると，$\psi\circ\xi(a(1-e)) = \psi(a(1-e)) = a(1-e)^2 = a(1-e)$．従って $\psi\circ\xi = \mathrm{id}_{(1-e)}$ であるから，上の列は分裂完全列である．即ち，$A \simeq (e) \oplus (1-e)$ であることがわかる．

(iii)⇒(i) N を任意の A 加群とし，これが平坦であることを示そう．定理 4.9 から，すべての有限生成イデアル $\mathfrak{a}$ に対して $\operatorname{Tor}_1^A(A/\mathfrak{a}, N) = 0$ であることを示せばよい．

$\mathfrak{a}$ を任意の有限生成なイデアルとする．仮定から $\mathfrak{a}$ は A の直和因子であるから，

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{a} \longrightarrow 0 \tag{7}$$

は分裂完全列である．このとき，次のような Tor の長完全列を得る；

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^A(\mathfrak{a}, N) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^A(A, N) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^A(A/\mathfrak{a}, N)$$

$$\xrightarrow{\delta} \mathfrak{a}\otimes_A N \xrightarrow{\varphi} A\otimes_A N \longrightarrow (A/\mathfrak{a})\otimes_A N \longrightarrow 0$$

図 4

A は A 加群として平坦であるから，$\operatorname{Tor}_1(A, N) = 0$ なので，δ は単射である．また (7) が分裂完全列であることから，φ は単射である．従って $\operatorname{Tor}_1^A(A/\mathfrak{a}, N) = \operatorname{Im}\delta = \operatorname{Ker}\varphi = 0$ となる．N は平坦 A 加群である． □

補題 5.3. 絶対平坦な局所環は体である．

証明. A を絶対平坦な局所環，$\mathfrak{m}$ をその極大イデアルとする．$f \in \mathfrak{m}$ を任意にとると，定理 5.2 により (f) はベキ等なので，$f = af^2$ となる $a \in A$ が存在する．このとき $f(1-af) = 0$ となるが，f は A の Jacobson 根基 $\mathfrak{m}$ の元であるから，$1 - af$ は A の単元なので，$f = 0$ である．従って $\mathfrak{m} = 0$ であるから，A は体である． □

絶対平坦性は局所的性質である．

補題 5.4. 環 A に対して，

(i) A を絶対平坦な環，S をその任意の積閉集合とすると，$S^{-1}A$ は絶対平坦である．
(ii) A が絶対平坦であるための必要十分条件は，すべての極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して，$A_{\mathfrak{m}}$ は体であることである．

証明. (i) $S^{-1}A$ の単項イデアルがベキ等になることが確かめられる．

(ii) A を絶対平坦とすると，各極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して，その局所化 $A_{\mathfrak{m}}$ は (i) から絶対平坦な局所環であるから，補題 5.3 から体である．逆にすべての極大イデアルでの局所化が体であると仮定する．任意の A 加群 M と A の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して，$A_{\mathfrak{m}}$ は体だから，$M_{\mathfrak{m}}$ は自由 $A_{\mathfrak{m}}$ 加群，特に平坦である．平坦性は局所的性質なので，M は平坦 A 加群である．従って A は絶対平坦である． □

6 スペクトラムの Hausdorff 性

定理 6.1. 環 A に対して，次の条件は互いに同値である；

(i) $A/\operatorname{nil} A$ は絶対平坦である．
(ii) $\dim A = 0$.
(iii) $\operatorname{Spec} A$ は T_1 空間である．
(iv) $\operatorname{Spec} A$ は Hausdorff 空間である．

証明. (i)⇒(iv) 相異なる任意の素イデアル $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ をとると，$\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{q}$ または $\mathfrak{q} \not\subset \mathfrak{p}$ であるから，ここでは $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{q}$ と仮定する．すると $f \in \mathfrak{p}$ だが $f \notin \mathfrak{q}$ となる $f \in A$ が存在する．このとき $\mathfrak{q} \in D(f)$ である．

また $\mathfrak{p} \notin D(f)$ なので，$D(f)$ は真の $X = \operatorname{Spec} A$ の開部分集合，従って f は A の単元ではない．このとき，$f + \operatorname{nil} A$ は $A/\operatorname{nil} A$ の単元でないことが次のように確かめられる．実際 $f + \operatorname{nil} A$ が単元だとすると，ある $h + \operatorname{nil} A \in A/\operatorname{nil} A$ が存在して，$(f + \operatorname{nil} A)(h + \operatorname{nil} A) = 1$ となるから，$1 - fh \in \operatorname{nil} A$ となる．$1 - fh = n$ とおくと，$n \in \operatorname{nil} A$ であるから，n は A の Jacobson 根基に含まれる．このとき $fh = 1 - n$ は A の単元であるから，f は A の単元となり，矛盾が生じる．

$A/\operatorname{nil} A$ が絶対平坦なので，$(f + \operatorname{nil} A)$ は真のベキ等イデアルである．よって $f + \operatorname{nil} A = (a + \operatorname{nil} A)(f^2 + \operatorname{nil} A)$ となる $a + \operatorname{nil} A \in A/\operatorname{nil} A$ が存在するから，$f(1-af) \in \operatorname{nil} A$ となる．そこで $g = 1 - af$ とおけば，$fg \in \operatorname{nil} A$ により，$D(f) \cap D(g) = \emptyset$ である．

さらにもし $g \in \mathfrak{p}$ ならば，$f \in \mathfrak{p}$ により，$1 = g + af \in \mathfrak{p}$ となり矛盾が生じる．従って $g \notin \mathfrak{p}$ であるから，$\mathfrak{p} \in D(g)$ である．

以上により，$\mathfrak{p} \in D(g)$, $\mathfrak{q} \in D(f)$, $D(f) \cap D(g) = \emptyset$ となる．X は Hausdorff 空間である．

(iv)⇒(iii)　は明らかである．

(iii)⇒(ii) $X = \operatorname{Spec} A$ が T_1 空間ならば，1 点集合が閉集合なので，X のすべての点が閉点である．これを環の言葉で言い換えると，A のすべての素イデアルは極大イデアルであるから，$\dim A = 0$ である．

(ii)⇒(i) 補題 5.4 から，すべての極大イデアル $\bar{\mathfrak{m}} \in A/\operatorname{nil} A$ に対して，局所化 $(A/\operatorname{nil} A)_{\bar{\mathfrak{m}}}$ が体であることを示せばよい．局所化と剰余をとる操作は可換であるから，$(A/\operatorname{nil} A)_{\bar{\mathfrak{m}}} \simeq A_{\mathfrak{m}}/(\operatorname{nil} A)A_{\mathfrak{m}}$ である．このとき $A_{\mathfrak{m}}$ のイデアル $(\operatorname{nil} A)A_{\mathfrak{m}}$ について，A が 0 次元であることから，$\operatorname{nil} A$ は A の Jacobson 根基に一致する．よって A の極大イデアルの集合を $\operatorname{Spm} A$ と書けば，局所化とイデアルの交わりをとる操作が可換であることに注意して，$(\operatorname{nil} A)A_{\mathfrak{m}} = (\bigcap_{\mathfrak{n} \in \operatorname{Spm} A} \mathfrak{n})A_{\mathfrak{m}} = \bigcap_{\mathfrak{n} \in \operatorname{Spm} A} \mathfrak{n}A_{\mathfrak{m}}$ を得る．$\mathfrak{m}$ でない極大イデアル $\mathfrak{n}$ に対して，$\mathfrak{n} \not\subset \mathfrak{m}$ であるから，$\mathfrak{n}A_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}}$ である．これらを合わせると $(\operatorname{nil} A)A_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ となる．即ち $(\operatorname{nil} A)A_{\mathfrak{m}}$ は $A_{\mathfrak{m}}$ の極大イデアルなので，$(A/\operatorname{nil} A)_{\bar{\mathfrak{m}}}$ は体である．□

この定理から，例えば次の系を得る．

系 6.2. Noether 環 A に対して，$X = \operatorname{Spec} A$ が Hausdorff 空間であることと，A が Artin 環であることは同値である．

証明. Artin 環は次元が 0 の Noether 環なので，これは定理から明らかである．□

おわりに

今年は新型コロナウイルス流行の影響で，理大祭もオンラインでの開催となった．例年通りであれば，理大祭は，数学研究会にとって，同じゼミに参加していないメンバーが集まる数少ない機会の 1 つであるが，それがなくなってしまったことはとても残念である．その一方で，オンラインでの実施によって，実際にキャンパスに足を運ばずとも，数学研究会の活動を知ってもらえるのではないだろうか．即ち，対面での実施よりも，本稿のようなノートをより気軽に覗いていただけるのではないか，という期待もほんの少しだけある．その意味で，身の引き締まる思いである．

このような大変な状況下でも，オンラインでの理大祭の実施を決定してくださった運営の皆様，新歓活動やゼミ，部会を積極的に計画し，実施してくれた数学研究会のメンバー，そして私の近傍（自然な位相を入れます）に存在する皆様に感謝します．

参考文献

[1] Atiyah-MacDonald（新妻弘訳），可換代数入門（共立出版，2006）

[2] Robin Hartshorne, Algebraic Geometry (Springer,1977)

[3] 松村英之，復刊可換環論（共立出版株式会社，2017）

[4] 河田敬義，ホモロジー代数 I（岩波書店，1982）

[5] 渡辺敬一，草場公邦，代数の世界（朝倉書店，2015）