圏論
Category Theory

令和 2 年度 圏論ゼミ

目次

第 0 章

はじめに

本ゼミは, 主に T・レンスター氏のベーシック圏論（丸善出版 2017）を使って進めています. また, しばしば壱大整域さんも参考にさせていただいています,（詳しくは参考文献のページを確認してください.）この PDF は主にベーシック圏論の流れに沿って書いています,

本当はもっとたくさんの具体例や内容を盛り込みたかったのですが, 時間の都合で米田の補題くらいまでしか掲載することができず, 最後は駆け足で中途半端にこの PDF を終わらせてしまうことになりました. 圏論が本当に面白くなる普遍性などについて間に合わなかったのが残念です. 圏論に興味が持たれた方がいましたら, 最後に参考文献を掲載しているのでぜひ調べていただきたいです.

この PDF は筆者が圏論を学ぶにあたり, ノートとして作成し始めたものなので間違いがあるかもしれませんが, それらはすべて筆者の責任です. 間違いを見つけた方がいましたら, 連絡していただけると助かります. また, 表記は統一することを心掛けましたが, 参考文献に応じて書き方が異なっている場合があります. そして, 書き方が至らない部分も多々あると思います. 読みにくいかもしれませんが温かい目で見ていただけると幸いです.

東京理科大学理工学部数学科 1 年 高屋敷祥太

第 1 章

圏

1.1　数学の議論領域について

圏論の話を始める前に, 簡単ではあるが数学の議論領域について話しておきたい. 数学は集合論の言葉で記述される[*1]が, 集合論も数学の一分野であるので集合論自体も圏論の考察の対象である. しかし, 集合全体の集合を考えるとラッセルのパラドックスに陥ってしまう. 厳密には, 圏論を考えるときの数学的枠組みについては集合論との関係に注意しなければならない. そこで私たちは, 集合全体の集まりを集合よりも上位の概念のクラス（類）というものと考える. 本来ならば慎重に扱うべき概念であり, これらの数学基礎論や集合論に関する話は個人的に非常に興味がある分野でもあるので詳しく書きたい気持ちもあるが, 今回のメインは圏論なので深追いはしない. 特に注意が必要な場合は, その都度お知らせする.

1.2　圏

それでは, 圏の定義をみていこう.

[*1] この言い方は語弊を招く恐れがあるので補足しておく. 既存の数学理論のほとんどは集合論の部分理論としてコードされるが, 数学理論は集合論の部分体系として展開されるべきだということを主張しているのではない.

Def 1.1 (圏)

圏(category) C とは,

・**対象**(object) の集まり $\mathrm{Ob}(C)$

・対象から対象への **射**(map, morphism) または **矢印**(arrow) の集まり

（例えば a , b $\in$ Ob(C) に対して a から b への射の集まりは $C(a,b)$ または $Hom_C(a,b)$ と書く. ）

で構成されており, 以下の条件を満たす.

・任意の a $\in$ Ob(C) について, a 上の **恒等射**(identity) と呼ばれる $C(a,a)$ の元 id_a が定義されている. なお, 1_a という書き方もある.

・各 a , b , c $\in$ Ob(C) に対して, 射の **合成**(composition)ができる.

$$\begin{array}{ccc} C(b,c) \times C(a,b) & \longrightarrow & C(a,c) \\ \Cup & & \Cup \\ (g,f) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

・結合法則が成り立つ.

$\forall f \in C(a,b),\ \forall g \in C(b,c),\ \forall h \in C(c,d),\ (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

・単位法則が成り立つ.

$\forall f \in C(a,b),\ f \circ id_a = id_b \circ f = f$

Rem 1.2

・$c \in Ob(C)$ を $c \in C$

・$f \in C(a,b)$ を $a \xrightarrow{f} b$, $f : a \to b$

・$g \circ f$ を gf

と書くことがある.

Rem 1.3

恒等射は任意の対象に対して定義されていないといけないが, 任意の二つの対象 a と b の間に射が定義されるとは限らない.

Ex 1.4

・圏 **Set** とは対象が集合で、射は写像となる圏のこと.

・圏 **Grp** は対象が群で, 射は準同型写像.

・圏 $\mathbf{Vect}_k$ は対象が体 k 上のベクトル空間で, 射は線型写像.

・圏 **Top** は対象が位相空間で, 射は連続写像.

ここで少し違和感を覚えた人はいないだろうか. 集合の圏 **Set** を考えた時に, 対象の集まりというのは集合の集まりであり, このときに「集合全体の集合」にはなってしまわないのだろうか. その問いに答えるのは最初に述べたクラスという概念である. 対象の集まりが必ずしも集合にはならないということに注意してほしい.

圏は何か数学的構造をもった集合である必要はない. わかりやすく言えば, 圏の条件を満たすように“もの”と“矢印”があればよいのである. 例えば, 対象が A と B の 2 つ（集合でなくてもよい）で, 射は恒等射と A から B への射（写像でなくてよい）があるようなものは圏になる.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "1_A"] \arrow[r, bend left] \arrow[r] \arrow[r, bend right] & B \arrow[loop right, "1_B"] \end{tikzcd}$$

しつこいかもしれないが, 上の例を見てもらってわかるように, 射は写像である必要は全くないのである. 従ってある対象からある対象への射は一つとは限らないのである. 実際, 上の例では A から B への射は 3 つある.

余談であるかもしれないが,「圏論では矢印の方が primary な存在で, 対象は secondary な存在である」という声がたまに聞かれる. この主張は, 対象というものは恒等射によって特徴づけられているという考えが根底にあると私は推察している. しかしながら,「対象と矢印という二種類の存在は他方の存在との相互関連によるものである」という主張があることもこの場で紹介しておく. 私はどちらの主張の気持ちもわかるので, なんとも言えないというのが正直なところである.

次に, 圏の中でも少し特殊な圏を紹介する.

Def 1.5（離散圏）

恒等射以外の射をもたない圏を **離散圏**（discrete category）という.

最初に注意で, 任意の二つの対象の間に射があるとは限らないと述べたが, 離散圏は（圏には必ず必要な）恒等射以外の射が存在しないという極端な場合であり, 各対象が完全に

独立しているということである.

1.3 同型射

次に同型射というものを定義する.

Def 1.6 (同型射)

C の射 $f : a \to b$ が**同型射**(isomorphism) である.
$\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists g : b \to a \ s.t. \ g \circ f = id_a, \ f \circ g = id_b$
a と b に同型写像が存在するとき, a は b と**同型**であるといい, $a \cong b$ と書く.
このとき, g は f の**逆射**と呼ばれ, $g = f^{-1}$ と書かれる.

おそらく, 集合を学んだ際に「ある全単射 f の逆写像 f^{-1} は一意に定まる」ということを示したと思われるが, 同様に圏の逆射も一意に定まる.

Prop 1.7
圏のある射が逆射をもつならば, それは一意に定まることを示せ.

Proof.
C : 圏, $a, b \in C, \ f \in C(a, b)$ とする.
$g, g' : b \to a$ が $g \circ f = id_a = g' \circ f$ かつ $f \circ g = id_b = f \circ g'$ を満たすとする.
このとき,

$$g = g \circ id_b = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = id_a \circ g' = g'$$

となる. ■

Ex 1.8
集合の圏 **Set** の同型射は全単射である.
※これは感覚的にはすぐに理解できるだろう. しかし, これは論理的には全く自明でない. この主張は両側の逆をもつ関数と単射かつ全射の関数の同値性そのものである.

Ex 1.9
Grp における同型射とは, 群同型写像のことである.

「群は唯一つの対象からなり, すべての射が同型射であるような圏と本質的に同じである.」

といって, 伝わるだろうか. 筆者はこの例を初めて見た時に少し感動した.
次のような圏を見てみよう. 対象は G のみである. 射の合成は $g\circ g=g^2,\ g\circ g^2=1_G$ とする.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[loop above, "g^2"] \arrow[loop below, "g"'] \arrow[loop right, "1_G"] \end{tikzcd}$$

　圏の話のはずが位数 3 の群に見えないだろうか？
逆に, 群 G が与えられたとき,C を
・C の対象は群 G
・C の射は G の元 $\big($ 今回は g , g^2 , $1_G(=e)\big)$
・射の合成は群 G の演算
・G の恒等射 1_G は G の単位元
からなるものとする.G は群なので結合法則も単位法則も成り立ち,C は圏になる.

　学ぶ順番として, 多くの人が群を既知として圏論を学んでいるだろう. 今回は圏を既知であるとして, そこから群を学ぶことを想像してほしい.
　群は一つの代数構造であるわけで, 噛み砕いて言えば集合に演算を一つ定義したものであった.（この群のもとになっている演算が定義されていないただの集合を台集合という.）その演算を掘り下げると, 演算とは二項演算のことであり, これは写像である. そして, 群 G とは一種の対称性をもつものである. この対称性というのは,G の任意の元に対して逆元が存在して, 演算によって単位元となることを意味している. もちろん単位元は G の元であるので, 二項演算という写像は G から G への写像とみなすことができる.（本来, 二項演算は $G\times G$ から G への写像であるが, 今回の場合は G の元を一つ定めるとそれに依存して G の元が一意に定まって, 送り先は e であるということから G から G の写像とみなすことができるということ.）ここで, 勘のいい人は群というものは特殊な圏であるとわかるだろう. 繰り返しになるが, 群とはすべての射が同型射であり, 唯一つの対象からなる圏なのである.

1.4　双対圏と直積圏

Def 1.10(反対圏、双対圏)

C を圏とする.

C^{OP} とは,射を逆向きにした圏のこと. つまり, $C^{OP}(a,b) = C(b,a)$

これを**反対圏** (opposite category) または**双対圏** (dual category) という.

Rem 1.11

双対性 (duality) **の原理** は圏論の基本である. すべての圏論の定義・定理・証明は, 現れる矢印を逆転させて得られる双対をもつ. 双対性の原理を有効利用すれば, 作業の省略が可能になる. 初めのうちはあまりパッとしないかもしれないが, 大事な概念なので少しずつ慣れてほしい.

私たちが集合を扱うときに直積を考えたように, 圏においても直積を考える.

Def 1.12(直積圏)

C , D : 圏

直積圏 (product category) $C \times D$ は次で定義される.

・$Ob(C \times D) := Ob(C) \times Ob(D)$

・$(C \times D)((c,d),(c',d')) := C(c,c') \times D(d,d')$

言葉で表現すれば, 直積圏 $C \times D$ の対象は C と D の対象の組ということであり,射は C の射 $f : c \to c'$ と D の射 $g : d \to d'$ の組 (f,g) である.

上の直積圏の定義において対象と射は定義したが, まだ射の合成と恒等射の定義をしていない. 実はここまで定義すると, 理にかなった定義は一通りしかないと言っても過言ではない.

Exer 1.13

上の直積圏の定義において, 適切な射の合成と恒等射を定義せよ.

Ans.

$c, c', c'' \in C,\ d, d', d'' \in D,\ f \in C(c, c'),\ f' \in C(c', c''),\ g \in D(d, d'),\ g' \in D(d', d'')$ とする.

・合成

$(f, g) : (c, d) \to (c', d')$ と $(f', g') : (c', d') \to (c'', d'')$ の

合成 $(f', g') \circ (f, g) : (c, d) \to (c'', d'')$ を $(f' \circ f\ ,\ g' \circ g)$

・恒等射

$1_{(c,d)} = (1_c, 1_d)$

と定めると, $C \times D$ は圏の定義を満たすことがわかる. ■

第 2 章

関手・自然変換

圏論の特徴づけの一つに射がある. 何か新しい数学的対象に出くわしたならば, それらの間の理にかなった「射」が存在するかどうかを考えるのである. では, 圏と圏の間には「射」は存在するだろうか.

答えは “yes” で, 圏の間の射は関手と呼ばれている.

2.1　可換図式

関手を定義する前に,「可換である」ということがどういうことなのかを定義する. 可換図式はこれ以降, 頻繁に目にすることとなる.

Def 2.1（可換図式）

一般に, 図式が**可換** (commute）であるとは, 対象 X から Y への経路が二つ以上あるならいつでも, 片方の経路の合成で得られた X から Y への射が, 他に沿った合成で得られる射と等しいということをいう.
圏論における例として, 以下のような図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "h"'] & & B \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, "i"'] & D \arrow[r, "h"'] & E
\end{tikzcd}$$

上のように与えられた圏の対象と射について, $g \circ f = j \circ i \circ h$ が成り立ち, 上の図式は可換である.可換である図式のことを**可換図式**という.

2.2　関手

本章の冒頭で「圏と圏の間の射は存在するのかという問の答えとして関手がある」と述べた. 即ち, 関手は一種の射なのであり, もちろん射としての性質を持っている.

Def 2.2(関手)

C, D : 圏
関手(functor) $F : C \to D$ とは, C の対象を D の対象へ,C の射を D の射へ対応させる射であり, 具体的には次のような性質を持つ.
・対象 $c \in C$ に対しては $F(c) \in D$ を対応させる.
・圏 C における射 $f : c \to c'$に対しては $F(f) : F(c) \to F(c')$ を対応させる.
・圏 C の射 $c \xrightarrow{f} c' \xrightarrow{f'} c''$に対して、$F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$
・任意の $c \in C$ に対して $F(1_c) = 1_{F(c)}$

Rem 2.3
関手の射としての性質からわかることであるが, 任意の圏 C に対して **恒等関手** $1_C : C \to C$ が存在する.

Ex 2.4
対象を圏, 射を関手とする圏 **Cat** がある.

Ex 2.5
忘却関手[*1] $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$

この**忘却関手**（forgetfull functor）とは, 名前の通り“構造を忘れる”関手である.
詳しく見ていこう. 群というのは, 簡単に言うと集合に演算を一つ定義したものであった.
したがって, 任意の群には元となる集合がある.忘却関手 U は対象の群をそれぞれの元の集合に写す.（つまり, 対象は変わらない.）**Grp** の射であった群準同型写像はただの写像に写す.（つまり, 射が写すもの自体も変わらない.）
すると, 忘却関手 U によって対象はそのままに, 群構造のみを忘れたのである.

Rem 2.6
忘却関手は必ずしも全ての構造を忘れる必要はない.例えば, **Ring**を環の圏, **Ab** をアーベル群の圏とする.このとき, 環の乗法構造は忘れるが, 加法群は覚えているという忘却関手 $U : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Ab}$ が考えられる.

Ex 2.7
忘却関手の双対に **自由関手**[*2]（free functor）がある.

忘却関手は構造を“忘れる”のであったが, その双対である自由関手はもともと持っていない構造を与えるということである.

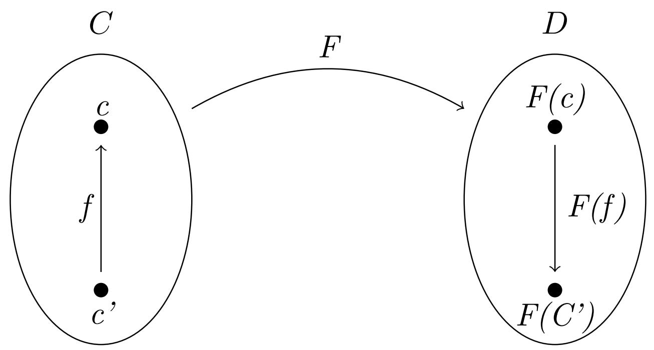
第 1 章で双対性の原理に触れたが, 関手のような操作で矢印の向きを逆転させるものがある. すなわち, C の射 $c \to c'$ について, D の射 $F(c) \leftarrow F(c')$ を誘導するものがある.

[*1] 忘却関手という言葉は非公式な用語であり, 正確な定義はない. しかしながら, 広く使われている言葉である.
[*2] この用語も忘却関手と同様に非公式な用語であるが, 広く使われている.

Def 2.8(反変関手)

$C \to D$ の**反変関手** (contravariant functor) とは $C^{OP} \to D$ のこと.
なお, $C \to D^{OP}$ と記述しても同じ意味である.

イメージは下の図のような感じである.



Rem 2.9
通常の関手 $C \to D$ は, 強調するために, しばしば C から D への **共変関手** (covariant functor) と呼ばれる.

2.3 忠実, 充満

私たちは集合の間の写像についてはよく知っており, しばしば単射・全射・全単射といった特別な種類の写像を考察することが有用である. また, 単射と部分集合の概念が関係していることも知っているだろう. 例えば, A が B の部分集合であれば, 包含写像で与えられる単射 $A \hookrightarrow B$ が存在する.

これから, 圏の間の関手に対して似たような概念を導入する.

Def 2.10(忠実、充満)

関手 $F: C \to D$ は任意の $c, c' \in C$ について, 射関数

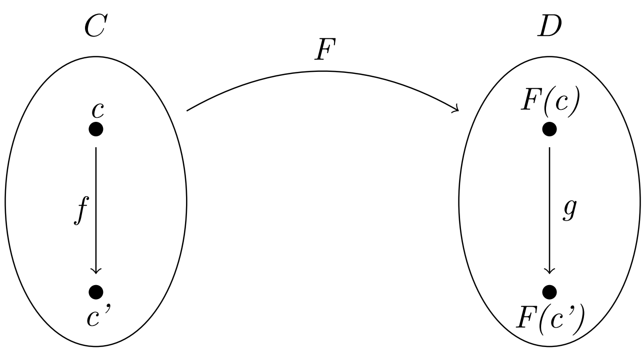
$$
\begin{array}{cccc}
F: C(c,c') & \longrightarrow & D(d,d') \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
f & \longmapsto & F(f)
\end{array}
$$

が単射のときは F は**忠実** (faithful), 全射のときは F は**充満** (full) であるという.
F が**忠実充満** (fully faithful) であるとは, F が忠実かつ充満であるということ.

Rem 2.11
忠実性は, $f_1 \neq f_2 \Rightarrow F(f_1) \neq F(f_2)$ であることを言っては <u>**いない**</u>

上の注意を見て少し変な感じがしないだろうか. 上の注意で述べていることは単射そのもののはずである. ここで気を付けなければならないのは, C の対象 c と c' の役割である. "$f_1 \neq f_2$" という表記ではどこからどこへの射であるかが定まっていないので, 違和感を生み出してしまっているのだ.[*3]

下の図を見てほしい. 各 $c, c' \in C$ と $g \in D(F(c), F(c'))$ について, F で g に送られる矢印 f が高々一つであれば忠実であり, 少なくとも一つあれば充満である.



まだすっきりしない人もいるかもしれないので実際に反例を見つけてみよう.

Exer 2.12
圏 C の射 f_1, f_2 について, $f_1 \neq f_2$ であるとき, $F(f_1) = F(f_2)$ を満たす忠実な関

[*3] ちなみに, 筆者はこの部分で躓いて非常に悩んだ.

手 $F : C \to D$ の例を見つけよ.

Ans.
圏 C を二つ以上の対象からなる離散圏とする.これに対して,圏 D を $\mathbf{1}$（これは対象が一つで射は恒等射のみの圏）とする.このとき,唯一つの関手 $F : C \to D$ が存在する. F は題意を満たす関手となっている.
($\because$ 簡単のために, 圏 C の対象は c と c' の二つとする. C は離散圏なので, 射は $1_c : c \to c$ と $1'_c : c' \to c'$ の二つである. もちろん, $1_c \neq 1'_c$ である. ここで圏 D の射は恒等射のみなので, $F(1_c) = F(1'_c) = 1_D$ となる. このとき, c から c への射で F で写すと D の恒等射 1_Dとなるものは高々一つだけであり,c'から c'への射も同様である.) ■

注意の説明が長くなってしまったが, 忠実性と充満性に関する例を見てみよう.

Ex 2.13
忘却関手 $F : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ は忠実だが, 充満でない.

Proof.
$\forall X, Y \in \mathbf{Grp},\ f \in \mathbf{Grp}(X, Y)$ に対して, 忘却関手の定義から
$F(X) = X,\ F(Y) = Y,\ F(f) = f$
が成り立つことに注意する.
ここで $f_1, f_2 : X \to Y$ を準同型写像として, $F(f_1) = F(f_2)$ と仮定すると $f_1 = f_2$である.
$\therefore F$ は単射である.(i.e. F は忠実である.)
充満でないことを示すために反例をあげる.
圏 $\mathbf{Set}$ の射 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$
\begin{array}{cccc}
g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & x & \longmapsto & 2
\end{array}
$$

と定める. $\mathbb{R}$ は, 例えば加法に関して群であるということに注意する.
このとき, g は準同型写像でないので F でこの g に写される $\mathbf{Grp}$ の射は一つもない
$\therefore F$ は全射ではない.(i.e. F は充満でない.) ■

この節の冒頭で, 部分集合と包含写像の関係について述べたが, 圏においてもそのよう

な関係は存在する. まずは部分圏というものが何なのかを定義しよう.

Def 2.14(部分圏)

C の**部分圏** (subcategory) S とは, $Ob(C)$ の部分クラス $Ob(S)$ と, 各 $s, s' \in Ob(S)$ について $C(s, s')$ の部分クラス $S(s, s')$ からなり, S が合成と恒等射で閉じているもの.

部分圏に付随して充満部分圏という概念も存在する.

Def 2.15（充満部分圏）

C : 圏, S : 部分圏
S が**充満部分圏**であるとは, 各 $s, s' \in Ob(S)$ について $S(s, s') = C(s, s')$ となるもの.

Ex 2.16
Ab は **Grp** の充満部分圏である.

Ex 2.17
集合を離散圏とみなした時, 部分圏とは部分集合のことである.このとき, 部分圏は常に充満部分圏となる.

Rem 2.18
S が C の部分圏であれば, 包含関手 $I : S \to C$ が $I(s) = s,\ I(f) = f$ で定義される.これは自動的に忠実で, S が充満部分圏であるときに限って充満である.

2.4 自然変換

私たちは圏の間の射である関手を考えた. ここで,「関手の間にも射があるのではないか？」という疑問が出てきても不思議でない. 実際, この概念は存在し, このような射は自然変換と呼ばれている. 自然変換はこれから圏論を学ぶ上で非常に重要な概念である.

Def 2.19(自然変換)

C, D : 圏, $C \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} B$: 関手

自然変換 (natural transformation) $\alpha : F \to G$ とは, D の射の族 $(F(c) \overset{\alpha_c}{\to} G(c))_{c \in C}$ であって, C の各射 $c \overset{f}{\to} c'$ について, 図式

$$\begin{tikzcd} F(c) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_c"'] & F(c') \arrow[d, "\alpha_{c'}"] \\ G(c) \arrow[r, "G(f)"'] & G(c') \end{tikzcd}$$

が可換になるもののこと. 射 α_c は α の**成分** (component) と呼ばれる.

Rem 2.20

自然変換は, 二つの関手の定義域と値域が同じときに限って適用される.

Rem 2.21

自然変換 α を

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & D \end{tikzcd}$$

と書くこともある.

また, 通常の射と区別するために $\alpha : F \to G$ を $\alpha : F \Rightarrow G$ と表記することがある.

Rem 2.22

自然変換は射の一種なので合成ができると容易に想像できる. 実際, 合成は可能であり, 与えられた自然変換

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=50, "H"'] & D \end{tikzcd} \quad (\Downarrow\alpha,\ \Downarrow\beta)$$

において, 合成された自然変換

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "H"'{name=L}] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\circ\alpha"] & D \end{tikzcd}$$

が, $c \in C$ に対して $(\beta \circ \alpha)_C = \beta_c \circ \alpha_c$ と定義される. (これを**垂直合成**という.[*4])
また, 恒等自然変換

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_F"] & D \end{tikzcd}$$

も, 各関手 F ごとに $(1_F)_c = 1_{F(c)}$ と定義される.

注意 2.22 では自然変換の合成が可能であることを保証してくれた. ということは関手を圏, 自然変換を射とする圏 (**関手圏** (functor category)) を考えることができる. C から D への関手圏は $[C, D]$ あるいは D^C と書かれる. この関手圏という考え方は後々よく使うことになる重要な概念である.

Ex 2.23
$\mathbf{2}$ で二つの対象からなる離散圏を表すこととする. $\mathbf{2}$ から圏 C への関手とは C の対象の組のことであり, 自然変換は射の組である.(自身で適当な C を与えて, 可換図式を考えるとわかりやすい.) ゆえに, 関手圏 $[\mathbf{2}, C]$ は直積圏 $C \times C$ と同型である.[*5]
このことは関手圏の別の表記法 $C^{\mathbf{2}}$ にもよく適合している.

さて, ここまで定義すれば "十分" であるといって伝わるだろうか.
何を言いたいかというと, 関手圏を考えたのと同様の方法で, 自然変換を対象として自然変換同士の関係を射として $\cdots$ と, ずっと続きを考えられるということである. このときに圏, 射, 関手, 自然変換の概念があればこれ以上続けていったとしても構成できるという意味で "十分" なのである.

[*4] 垂直合成があるということは水平合成なるものが存在しているということであるが, 今回は紹介しない. しかし,Kan 拡張を扱う際には重要になるので機会があれば紹介したい.
[*5] 紹介が遅れてしまったが, 私たちは既に **Cat** を知っているので二つの圏が同型であるとはどういうことかを定義することができる. 次節で詳しく述べているが,**Cat** の対象として同型であるとき, 二つの圏 C と D は**同型**であるといい $C \cong D$ と書く.

2.5 自然同型

「二つの空間の積」というような言い回しを私たちは日常的に使っている. このような言い回しは, ある圏における二つの同型な対象についてそれらが集合について同じかどうかは問題にしないという考え方を暗に反映している.

特に, この教訓は圏として関手圏を考えたときに適用される. つまり, 二つの関手 $F, G : C \to D$ が文字通り同じかどうかを普通は問題にしないということである.（ここでの関手が同じというのは, 任意の $c \in C$ に対して $F(c) = G(c)$ となるということ.）

ここで大切になってくるのは, 次に紹介する"自然同型"である.

Def 2.24(自然同型)

C, D : 圏

C から D への関手の間の**自然同型** (natural isomorphism) とは,C から D への関手圏 $[C, D]$ における同型射のこと.

定義 2.24 の言い回しは少々わかりにくいかもしれない. そこで, 内容は同じであるが別の言い回しとして次の定義を紹介する.

Def 2.24′

C, D : 圏

(1) 関手 $F : C \to D$ が同型関手

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ ある関手 $G : D \to C$ が存在して $GF = id_C,\ FG = id_D$ となる.

(2) C と D が (自然) 同型 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ ある同型関手 $F : C \to D$ が存在する.

なお, 次の命題でわかる自然同型の定義 2.24 の言い換えはしばしば有用である.

Prop 2.25

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & D \end{tikzcd}$$

を自然変換とする. 以下の（１）と（２）は同値である.
(1) α が自然同型である.
(2)$\forall c \in C$ に対して $\alpha_c : F(c) \to G(c)$ が同型射である.

Proof.
略.

上の命題は, わざわざ α^{-1} を構成しなくても, α が自然同型であることが言えるという主張である.

Rem 2.26
自然同型は特別な圏（つまり $[C, D]$）の同型なので, すでに表記法 $F \cong G$ がある.

Def 2.27

圏 C, D の関手 F, G について, F と G が自然同型であるとき

$$c\ (\in C) \text{ について}\textbf{自然に}\text{ (naturally) } F(c) \cong G(c)$$

という.

Ex 2.28

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Grp} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] & \mathbf{Grp} \end{tikzcd}$$

F : 恒等関手, G : 逆転群[*6]にとばす関手
定義から F や G によって対象は変化しないとわかる. では, 射はどうだろう？
ここで, $f^{OP} := f$ と定めると関手 G は共変関手となる. 実際,

$$f^{OP}(a\ \ *^{OP}\ b) = f(b * a) = f(b) * f(a) = f^{OP}(a)\ \ *^{OP}\ f^{OP}(b)$$

が成り立つので, f^{OP} は準同型写像であり, G が共変関手であるとわかる.
ここで, 自然変換 $\alpha : F \to G$ が存在することがわかる.

[*6] 逆転群とは簡単にいうと, 元の群の演算を行う順番のみを変えた群である. 逆転群の演算を $*^{OP}$, 元の群の演算を $*$ とすると, $a\ \ *^{OP}\ b := b * a$ である.
ちなみに, 元の群が Abel 群ならば逆転群はもとの群と全く同じ群である.

∵ 以下の図式が可換になる. $(c, c' \in C)$
なお, F と G の定義から $F(c) = c,\ F(c') = c',\ G(c) = c,\ G(c') = c'$ であることに注意する.

$$
\begin{array}{ccc}
F(c) & \xrightarrow{F(f)=f} & F(c') \\
{\scriptstyle \alpha_c = 1_c}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{c'} = 1'_c} \\
G(c) & \xrightarrow[G(f)=f^{OP}]{} & G(c')
\end{array}
$$

このとき, 関手 F と G は自然同型になる.

Ex 2.29
$F, G : C \to D$ を離散圏 C から圏 D への関手とする.
このとき, $F \cong G$ と, 各 $c \in C$ について $F(c) \cong G(c)$ であることは同値である.
従って, この場合に限っては c について自然に $F(c) \cong G(c)$ であることと, 各 $c \in C$ 対して $F(c) \cong G(c)$ であることは同値である.
しかし, このことは C が離散圏だから真なのであって, 一般には正しくないということを強調しておく.

2.6 圏同値

圏同値と呼ばれる有用な圏の同一性の概念は, 二つの圏が同型であることより緩い条件で定義される.「同型程度の違いは許す」ようにするのである.

Def 2.30(圏同値)

圏 C と D が**圏同値** (equivalence of categories) である
$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ 関手 $F : C \to D,\ G : D \to C$ と自然同型 $GF \cong id_C,\ FG \cong id_D$が存在する.
圏 C と D が圏同値であるとき $C \simeq D$ と書く.

圏同値の定義はすることができたが, いまいちしっくりこないと思われる. 実は, 圏同値を与える関手には非常に有用な別の特徴づけがある. そのために必要な定義を行っていく.

Def 3.31(本質的に全射)

関手 $F : C \to D$ が **対象について本質的に全射** (essentially surjective on objects) とは,

$$\text{任意の } d \in D \text{ に対して, ある } c \in C \text{ が存在して } F(c) \cong d$$

が成り立つこと.

次に紹介する定理が圏同値の条件の有用な言い換えである.

Thm 3.32
関手 $F : C \to D$ が圏同値を与える $\Leftrightarrow$ F が忠実充満かつ本質的に全射

Proof.
$\Rightarrow$)
関手 F が 圏同値を与えることから, 関手 $G : D \to C$ と自然同型 $\theta : GF \Rightarrow id_C$, $\varepsilon : FG \Rightarrow id_D$ が存在するとする.
・本質的全射
任意に $d \in D$ をとる. $c := G(d)$ と定めると $\varepsilon_d : FG(d) \to d$ は仮定より D 上の同型射であるから, $FG(d) \cong d$ である. 従って $F(c) \cong d$ とわかる.
・忠実性
任意の $c, c' \in C$ に対して $f, f' \in C(c, c')$ が $F(f) = F(f')$ を満たすと仮定する.
このとき $\theta : GF \to id_C$ が自然同型であることより次が可換である.

$$\begin{tikzcd}
GF(c) \arrow[r, "\theta_c"] \arrow[d, shift right=2, "GF(f)"'] \arrow[d, shift left=2, "GF(f')"] \arrow[d, phantom, "="] & c \arrow[d, shift right=2, "f"'] \arrow[d, shift left=2, "f'"] \\
GF(c') \arrow[r, "\theta_{c'}"'] & c'
\end{tikzcd}$$

$\therefore f = \theta_{c'} \circ GF(f) \circ\ \theta_c^{-1} = \theta_{c'} \circ GF(f') \circ\ \theta_{c'}^{-1} = f'$
$\therefore$ 単射である.（つまり, 忠実である.）
また, 同様のことが G についても言える.
・充満性
対象 $c, c' \in C$ と射 $g \in F(c) \to F(c')$ を任意にとる.

$f := \theta'_c \circ G(g) \circ\ \theta_c^{-1}$とすると,次が可換である.

$$
\begin{tikzcd}
GF(c) \arrow[r, "\theta_c"] \arrow[d, "G(g)"'] & c \arrow[d, "f"] \\
GF(c') \arrow[r, "\theta_{c'}"'] & c'
\end{tikzcd}
$$

$\theta : GF \Rightarrow id_C$ が自然同型なので次も可換となる.

$$
\begin{tikzcd}
GF(c) \arrow[r, "\theta_c"] \arrow[d, "GF(f)"'] & c \arrow[d, "f"] \\
GF(c') \arrow[r, "\theta_{c'}"'] & c'
\end{tikzcd}
$$

$\therefore GF(f) =\ \theta_c^{-1} \circ f \circ\ \theta_c$
また, f の定義より $G(g) =\ \theta_{c'}^{-1} \circ f \circ\ \theta_c$
$\therefore G(g) = GF(f)$
G は先ほど示したように忠実なので $g = F(f)$ とわかる.

$\Leftarrow$)
関手 $F : C \to D$ が忠実充満かつ本質的に全射であるとする.
まず, 関手 $G : D \to C$ を構成する.
F が本質的に全射であることから, 任意の $d \in D$ に対してある $c \in C$ が存在して $F(c) \cong d$ を満たす. そのような c に対して $G(d) := c$ として, 同型射 $\varepsilon_d : F(G(d)) \to d$ をとる.
D の射 $g : d \to d'$ に対して C の射 $f : G(d) \to G(d')$ を $F(f) = \varepsilon_{d'}^{-1} \circ g \circ \varepsilon_d$ を満たすものとすると, 次が可換となる.

$$\begin{tikzcd}
F(G(d)) \arrow[r, "\varepsilon_d"] \arrow[d, "F(f)"'] & d \arrow[d, "g"] \\
F(G(d')) \arrow[r, "\varepsilon_{d'}"'] & d'
\end{tikzcd}$$

忠実充満性より f は一意に定まることに注意する. そして, この f を $G(g)$ と定める.
つまり, $F(G(g)) = \varepsilon_{d'}^{-1} \circ g \circ \varepsilon_d \quad (g : d \to d')$ を満たすものとして $G(g) : G(d) \to G(d')$ を定める.
以上から G は $D \to C$ の関手となることがわかる.
ここで本当に G が関手であるか, 合成と恒等射について確かめてみる.
$g : d_0 \to d_1,\ h : d_1 \to d_2$ を D の射とする. このとき以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}
F(G(h \circ g)) &= \varepsilon_{d_2}^{-1} \circ h \circ g \circ \varepsilon_{d_0} \\
&= \varepsilon_{d_2}^{-1} \circ h \circ \varepsilon_{d_1} \circ \varepsilon_{d_1}^{-1} \circ g \circ \varepsilon_{d_0} \\
&= F(G(h)) \circ F(G(g)) \\
&= F(G(h) \circ G(g)) \quad (\because F \text{ が関手であること})
\end{aligned}$$

F は忠実なので $G(h \circ g) = G(h) \circ G(g)$ であり, 合成は確かめることができた.
続いて恒等射について確かめる.
$F(G(1_d)) = \varepsilon_d^{-1} \circ 1_d \circ 1_{F(G(d))} = F(1_{G(d)})$ が成り立ち, F の忠実性から $G(1_d) = 1_{G(d)}$ とわかる. よって恒等射を保つことも確かめることができた. (以上で関手 $G : D \to C$ を構成できた)
次に自然同型 $\varepsilon : FG \Rightarrow 1_D$ をつくる.
$\varepsilon := \{\varepsilon_d : FG(d) \to d\}_{d \in D}$
とおく. ε が自然性を満たすことを言えばよい.
ここで, 命題 2.25 を利用する.
$g : d \to d'$ に対して G の射関数の定義から次が可換である.

$$\begin{tikzcd}
F(G(d)) \arrow[r, "\varepsilon_d", "\cong"'] \arrow[d, "F(G(g))"'] & d \arrow[d, "g"] \\
F(G(d')) \arrow[r, "\varepsilon_{d'}", "\cong"'] & d'
\end{tikzcd}$$

従って ε は自然変換であり, かつ自然同型である.
次に自然同型 $\eta : 1_C \Rightarrow GF$ をつくる必要があるが, ここでは省略する. ■

Ex 3.33
C を圏とし, D をその勝手な充満部分圏で C の各対象と同型な対象を少なくとも一つは含むものとする. このとき包含関手 $D \hookrightarrow C$ は忠実であり（これはどんな部分圏からの包含関手でもいえる.）, 充満でもあり, そして本質的に全射である. ゆえに $D \cong C$.

上の例からわかることとして, 圏が与えられたとき, 対象の同型類からいくつか（しかしすべてではなく）対象を捨てたとしても, このダイエットされた圏は元の圏と圏同値である. 逆に, 与えられた圏について既に存在する対象と同型な対象をいくら投げ入れても大差はない. 新しい大きな圏は元の圏と圏同値である.

例えば, **FinSet** を有限集合とその間の関数の圏とする. 各自然数 n について, n 点集合 $\mathbf{n}$ を選択し, C を対象が $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \cdots$ からなる **FinSet** の充実部分圏としよう. このとき C は **FinSet** よりずっと小さいわけだが, $C \cong$ **FinSet** である.

第 3 章

随伴

「随伴はあらゆるところに現れる」

この格言を読者のみなさんはご存じだろうか？ これは圏論界隈ではよく知られてた言葉である. 随伴を理解することで見える景色がさらに広がることだろう.

3.1　自然性の公理

自然性の公理を書き下すために, まず転置というものを定義する.

Def 3.1 (転置)

$C \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} D$ を圏と関手として, $D(F(c), d) \cong C(c, G(d))$ を満たすとする.
ここで, 射 $F(c) \to d$ と $c \to G(d)$ の間の対応を以下のように g や f の上に水平な上線を書くことで表すこととする.

$$\left(F(c) \xrightarrow{g} d\right) \mapsto \ \left(c \xrightarrow{\bar{g}} G(d)\right)$$

$$\left(F(c) \xrightarrow{\bar{f}} d\right) \leftarrow\!\shortmid \ \left(c \xrightarrow{f} G(d)\right)$$

従って $\bar{\bar{f}} = f$ かつ $\bar{\bar{g}} = g$ となる. $\bar{f}$は f の**転置**と呼ばれる. (g についても同様である.)

さて, 転置を定義したので本題の自然性の公理を定義する.

Def 3.2（自然性の公理）

$C \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} D$ を圏と関手とする.
自然性の公理は, 任意の射 g と q について.

$$\overline{F(c) \xrightarrow{g} d \xrightarrow{q} d'} \ = \ c \xrightarrow{\bar{g}} G(d) \xrightarrow{G(q)} G(d')$$

（すなわち $\overline{q \circ g} \ = \ G(q) \circ \bar{g}$ ）と任意の p と f について

$$\overline{c' \xrightarrow{p} c \xrightarrow{f} G(d)} = F(c') \xrightarrow{F(p)} F(c) \xrightarrow{\bar{f}} d$$

という二つからなる.

Rem 3.3
上線を書く操作は二回行うともとに戻るので, 上の式において左右どちらに長い上線を書くかは問題でない.

自然性の公理の主張を端的に言うならば, 「転置と合成の順番を入れ替えてよい」ということである.

3.2 随伴

Def 3.4（随伴）

$C \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} D$ を圏と関手とする.F が G の**左随伴** である（または, G が F の**右随伴**である）とは

$$D(F(c), d) \cong C(c, G(d)) \tag{$*$}$$

が $c \in C$ と $d \in D$ について自然性の公理を満たすことであり, $F \dashv G$ と書かれる.
F と G の**随伴** (adjunction) とは, 自然同型 $(*)$ の選択のことである.

Rem 3.5
定義 3.34 において, 自然同型 $(*)$ の選択というと何だかわかりにくいかもしれない. 言

い換えると, 随伴とは「$c \in C,\ d \in D$ 対して自然な同型射 $\varphi : Hom_D(F(c), d) \to Hom_C(c, G(d))$ が存在するとき, 3 つの組 $\langle F, G, \varphi \rangle$ のこと」をいう.

Ex 3.6

自由 $\dashv$ 忘却

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Grp} \arrow[d, shift left=1ex, "G"] \\
\mathbf{Set} \arrow[u, shift left=1ex, "F"] \arrow[u, phantom, "\dashv"]
\end{tikzcd}
$$

Ex 3.7

集合 A と B について, 直積 $A \times B$ が構成できて, A から B への写像がなす集合 B^A も構成できる. これは集合 $\mathbf{Set}(A, B)$ と同じだが, A や B と同じ圏の対象であることを強調したいときは B^A という記法をよく用いる.

ここで, 集合 B を固定する. B と直積集合を取るという操作は関手

$$
\begin{array}{rccc}
- \times B : & \mathbf{Set} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\
& \Cup & & \Cup \\
& A & \longmapsto & A \times B
\end{array}
$$

を定めることと考えられる. ($-$ には任意の空でない集合が入る.)

また, 関手

$$
\begin{array}{rccc}
(-)^B : & \mathbf{Set} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\
& \Cup & & \Cup \\
& C & \longmapsto & C^B
\end{array}
$$

もある.

さらに, 標準的な*1全単射

$$\mathbf{Set}(A \times B,\ C) \ \cong\ \mathbf{Set}(A,\ C^B)$$

が任意の集合 A と C について成り立つ.

*1 **標準的** (canonical) というのは, 非公式な用語である.「天与の」とか「恣意的な選択を用いることなく定義される」といった意味で使われる. 例えば二つの集合 A と B について, 標準的な全単射 $A \times B \to B \times A$ が $(a, b) \mapsto (b, a)$ と定義される.

$a \in A,\ b \in B$ とする. 与えられた射 $g : A \times B \to C$ について, $\bar{g} : A \to C^B$ が

$$\big(\bar{g}(a)\big)(b) \ = \ g(a, b)$$

で定義される. 逆向きに与えられた射 $f : A \to C^B$ について, $\bar{f} : A \times B$ が

$$\bar{f}(a, b) \ = \ \big(f(a)\big)(b)$$

で定義される.
以上をすべて合わせると, 任意の集合 B について随伴

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set} \arrow[d, shift left=2, "(-)^B"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathbf{Set} \arrow[u, shift left=2, "- \times B"] \end{tikzcd}$$

が得られた.

3.3 始対象・終対象

ここで, 始対象と終対象というものを定義する. 名前の通りのイメージである.

Def 3.8 (始対象・終対象)

C : 圏
対象 $I \in C$ が**始対象** (initial object) である $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall c \in C,\ \exists! f \in C(I, c)$
対象 $T \in C$ が**終対象** (terminal object) である $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall c \in C,\ \exists! f \in C(c, T)$

Ex 3.9
空集合 $\emptyset$ は **Set** の始対象である.
１点集合は **Set** の終対象である.

ここで,「おや？」と思った人はいないだろうか. 上の例で, 空集合は **Set** の始対象であると述べたが,「定義域が空集合の写像って存在するの？」と疑問に感じた人がいるかもしれない. この部分については誤解している人が少なからずいるようなので注意しておく.

Ex 3.10
単位群は **Grp** の始対象であり, かつ終対象でもある.

Ex 3.11
Cat の終対象は圏 **1** である.

Rem 3.12
圏の中に必ずしも始対象が存在するとは限らない. しかし, もし存在するならばそれは同型を除いて一意に定まる. 実際に証明してみよう.

Prop 3.13
I, I' : 圏の始対象
このとき唯一つの同型射 $I \to I'$ が存在する.（つまり, $I \cong I'$）

Proof.
I は始対象なので唯一つの同型射 $f : I \to I'$が存在する.
同様に I'も始対象なので唯一つの同型射 $f' : I' \to I$ が存在する.
ここで, $f' \circ f$ と 1_I（恒等射）という二つの射 $I \to I$ があるが, I は始対象なので $f' \circ f = 1_I$
同様に $f \circ f' = 1_{I'}$
$\therefore f$ は唯一つの同型射である. ■

Rem 3.14
終対象という概念は始対象という概念の双対である. （より一般に, 左随伴と右随伴という概念は互いに互いの双対である.）

3.4 単位と余単位

Def 3.15（単位・余単位）

随伴

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left=1.5ex, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & D \arrow[l, shift left=1.5ex, "G"] \end{tikzcd}$$

を考える. 任意の $c \in C$ に対して, 射

$$\left(c \xrightarrow{\eta_c} GF(c)\right) = \overline{\left(F(c) \xrightarrow{1} F(c)\right)}$$

があり, 双対的に, 任意の $d \in D$ に対して, 射

$$\left(FG(d) \xrightarrow{\varepsilon_d} GF(c)\right) = \overline{\left(G(d) \xrightarrow{1} G(d)\right)}$$

がある.これらは自然変換

$$\eta : 1_C \to GF, \quad \varepsilon : FG \to 1_D$$

を定め, η を随伴の**単位** (unit), ε を随伴の**余単位** (counit) と呼ぶ.

Lem 3.16

随伴 $F \dashv G$ の単位が η で余単位が ε であるとき, 三角形の図式

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "1_F"'] & FGF \arrow[d, "\varepsilon F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, "1_G"'] & GFG \arrow[d, "G\varepsilon"] \\ & G \end{tikzcd}$$

は可換である.

Rem 3.17

これらは**三角等式** (triangle identity) と呼ばれていて, それぞれ関手圏 $[C, D]$ および $[D, C]$ における可換図式である.

Proof.（補題 3.16 の証明）
任意の $c \in C$ を一つとる.
$\overline{1_{GF(c)}} = \varepsilon_{F(c)}$ より自然性の公理から

$$\overline{(c \overset{\eta_c}{\to} GF(c) \overset{1}{\to} GF(c))} = \big(F(c) \overset{F(\eta_c)}{\to} FGF(c) \overset{\varepsilon_{F(c)}}{\to} F(c)\big)$$

が成り立つが, $\overline{\eta_c} = \overline{\overline{1_{F(c)}}} = 1_{F(c)}$ から左側の三角等式が示された. 右側の三角等式は双対性から従う. ■

単位と余単位は, 恒等射の転置についてしか関係していないように見えるが, 面白いことに随伴を決定しているのである.

Lem 3.18

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left=2, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & D \arrow[l, shift left=2, "G"] \end{tikzcd}$$

を単位が η で余単位が ε の随伴とする. このとき, 任意の射 $g : F(c) \to d$ に対して $\bar{g} = G(g) \circ \eta_c$ が成り立つ.
同様に, 任意の射 $f : c \to G(d)$ に対して $\bar{f} = \varepsilon_d \circ F(f)$ が成り立つ.

Proof.
任意の射 $g : F(c) \to d$ について自然性の公理より

$$\begin{aligned} \overline{(F(c) \overset{g}{\to} d)} &= \overline{(F(c) \overset{1}{\to} F(c) \overset{g}{\to} d)} \\ &= \big(c \overset{\eta_c}{\to} GF(c) \overset{G(g)}{\to} G(d)\big) \end{aligned}$$

が成り立ち, 最初の主張が示された.
二つ目の主張は双対性に従う. ■

Thm 3.19
圏と関手 $C \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} D$ を考える.
このとき, 以下の (a) と (b) に 1 対 1 対応がある.

(a) F と G の間の随伴（F が左, G が右）
(b) 三角等式を満たす自然変換の組 $(1_C \xrightarrow{\eta} GF,\ FG \xrightarrow{\varepsilon} 1_D)$

Proof.
F と G の随伴が三角等式を満たす組 $(\eta\ ,\ \varepsilon)$ を与えることは既に示されている. この対応が全単射であればよい.
(b) を満たす組 $(\eta\ ,\ \varepsilon)$ をとる. $\eta\ ,\ \varepsilon$ がそれぞれ単位, 余単位であるような F と G の間の随伴が唯一つあればよい.
一意性は先ほどの補題 3.18 に従う.
次に存在性について示す. 各 c と d に対して, 対応

$$D(F(c),d) \ \rightleftarrows\ C(c,G(d))$$

を次のように定義し, 両方とも上線で表す.
$\forall g \in D(F(c),d)$ に対して $\bar{g} = G(g) \circ \eta_c \in C(c,G(d))$
$\forall f \in C(c,G(d))$ に対して $\bar{f} = \varepsilon_d \circ F(f)\ \in D(F(c),d)$
ここで, 次が可換となる.

$$\begin{tikzcd}
F(c) \arrow[r, "F(\eta_c)"] \arrow[dr, "1"'] & FGF(c) \arrow[r, "FG(g)"] \arrow[d, "\varepsilon_{F(c)}"] & FG(d) \arrow[d, "\varepsilon_d"] \\
& F(c) \arrow[r, "g"'] & d
\end{tikzcd}$$

可換図式から

$$\begin{aligned}
g &= g \circ 1 \\
&= \varepsilon_d \circ FG(g) \circ F(\eta_c) \\
&= \varepsilon_d \circ F(G(g) \circ \eta_c) \qquad (\because F \text{ が関手であること}) \\
&= \varepsilon_d \circ \bar{g} \\
&= \bar{\bar{g}}
\end{aligned}$$

双対性から $f = \bar{\bar{f}}$ も言うことができて, 自然性の公理を満たすことも容易にわかる.
従って, 主張は証明された. ■

3.5　コンマ圏・スライス圏

Def 3.20（コンマ圏）

圏と関手

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[d, "Q"] \\ C_0 \arrow[r, "P"'] & D \end{tikzcd}$$

が与えられたとき, **コンマ圏** (comma category) $P \downarrow Q$ [*1] は次を満たす圏のこと.

・対象は $c_0 \in C_0$, $c_1 \in C_1$ と D の射 $f : P(c_0) \to Q(c_1)$ の 3 つの組 $\langle c_0, c_1, f \rangle$

・射 $\langle c_0, c_1, f \rangle \to \langle c_0', c_1', f' \rangle$ は, 射の組 $\langle g_0 : c_0 \to c_0', g_1 : c_1 \to c_1' \rangle$ で, 以下の可換図式

$$\begin{tikzcd} P(c_0) \arrow[r, "P(g_0)"] \arrow[d, "f"'] & P(c_0') \arrow[d, "f'"] \\ Q(c_1) \arrow[r, "Q(g_1)"'] & Q(c_1') \end{tikzcd}$$

を満たすもの.

Ex 3.21（スライス圏）

C を圏として, $c \in C$ とする.

C の c 上の **スライス圏** (slice category) C/c とは,

対象が $c_0 \in C$ と $f : c_0 \to c$ の組 $\langle c_0, f \rangle$

射 $\langle c_0, f \rangle \to \langle c_0', f' \rangle$ は C の射 $g : c_0 \to c_0'$ で次が可換となるもの.

$$\begin{tikzcd} c_0 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & c_0' \arrow[dl, "f'"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

なお, スライス圏はコンマ圏の特殊な例である. 上の定義 3.20 において $D = C_0 = C$,

[*1] コンマ圏という名前は, もともと (P, Q) のようにコンマを用いて書き表していたことが由来らしい.

$C_1 = \mathbf{1} = \{*\}$ として, $P : C \to C$ を恒等関手 1_C, $Q : \mathbf{1} \to C$ を $Q(*) = c$ で定まる関手とする.

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{1} \arrow[d, "Q"] \\ C \arrow[r, "1_C"'] & C \end{tikzcd}$$

$1_C \downarrow Q$ の対象は本来ならば, $c_0 \in C$, $* \in \mathbf{1}$, C の射 $f : c_0 \to c$ からなる 3 つの組 $\langle c_0,\ *,\ f\rangle$ である. しかし, $\mathbf{1}$ は対象を唯一つしかもたないので, 3 つの組は 2 つの組 $\langle c_0, f\rangle$ としてよい. 従って, コンマ圏とスライス圏は同じ対象をもつ. 射も同様である.
$\therefore C/c \cong 1_C \downarrow Q$

これを双対的に(つまりすべての矢印を逆向きにして)考えると, **余スライス圏** (coslice category) を考えることができる.

さて, コンマ圏と随伴を関係づけていこう.

Lem 3.22
随伴

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left=2, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & D \arrow[l, shift left=2, "G"] \end{tikzcd}$$

と対象 $c \in C$ について, 単位射 $\eta_c : c \to GF(c)$ は $c \downarrow G$ の始対象である.

Proof.
$\langle d, f : c \to G(d)\rangle$ を $c \downarrow G$ の対象とする. $\langle F(c), \eta_c\rangle$ から $\langle d, f\rangle$ に唯一つの射が存在することを示せばよい.
$c \downarrow G$ の射 $\langle F(c), \eta_c\rangle \to \langle d, f\rangle$ は D の射 $q : F(c) \to d$ で次が可換となるもの.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "f"'] & GF(c) \arrow[d, "G(q)"] \\ & G(d) \end{tikzcd}$$

補題 3.18 より上の図式が可換であることと, $f = \bar{q}$ は同値である.
従って題意は示された. ■

Thm 3.33
圏と関手 $C \overset{F}{\underset{G}{\rightleftarrows}} D$ を考える. 次の（a）と（b）の間に 1 対 1 対応が存在する,
（a）F と G の間の随伴（F が左で G は右）
（b）各 $c \in C$ に対して $\eta_c : c \to GF(c)$ が $c \downarrow G$ の始対象であるような自然変換 $\eta : 1_C \to GF$

Proof.
（a）から（b）への存在性と一意性は補題 3.22 で既に示したので, 逆を示す.
$\eta : 1_C \to GF$ を（b）を満たす自然変換とする.
・まず, 存在性より先に一意性を示す.
$\varepsilon, \varepsilon' : FG \to 1_C$ を $(\eta, \varepsilon), (\eta, \varepsilon')$ がともに三角等式を満たす自然変換とする. 三角等式の 1 つは各 $d \in D$ に対して

$$\begin{tikzcd}
G(d) \arrow[r, "\eta_{G(d)}"] \arrow[dr, "1_{G(d)}"'] & GFG(d) \arrow[d, "G(\varepsilon_d)"] \\
& G(d)
\end{tikzcd}$$

が可換である. ゆえに ε_d は $G(d) \downarrow G$ の射

$$\langle FG(d), G(d) \overset{\eta_{G(d)}}{\to} GFG(d) \rangle \to \langle d, G(d) \overset{1}{\to} G(d) \rangle$$

である. ε' も同様である. しかし, $\eta_{G(d)}$ は始対象であるあるので, $\varepsilon_d = \varepsilon'_d$
・次に存在性を示す.
$d \in D$ に対して $\varepsilon_d : FG(d) \to d$ を $G(d) \downarrow G$ の唯一の射

$$\langle FG(d), \eta_{G(d)} \rangle \to \langle d, 1_{G(d)} \rangle$$

として定義する. このとき, $(\varepsilon_d)_{d \in D}$ が自然変換 $FG \to 1$ になり, η と ε が三角等式を満たすことを示す.
D の射 $d \overset{g}{\to} d'$ を取る. 可換図式

$$
\begin{tikzcd}
G(d) \arrow[r, "\eta_{G(d)}"] \arrow[dr, "1"] \arrow[ddr, "G(q)"'] & GFG(d) \arrow[d, "G(\varepsilon_d)"] \\
& G(d) \arrow[d, "G(q)"] \\
& G(d')
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
G(d) \arrow[r, "\eta_{G(d)}"] \arrow[d, "G(q)"] \arrow[ddr, bend right=60, "G(q)"'] & GFG(d) \arrow[d, "GFG(q)"] \\
G(d') \arrow[r, "\eta_{G(d')}"] \arrow[dr, "1"] & GFG(d') \arrow[d, "G(\varepsilon_{d'})"] \\
& G(d')
\end{tikzcd}
$$

より，$q \circ \varepsilon_d$ と $\varepsilon_{d'} \circ FG(q)$ はともに $G(d) \downarrow G$ の射 $\eta_{G(d)} \to G(q)$ になっている．$\eta_{G(d)}$ は始対象なので，$q \circ \varepsilon_d = \varepsilon_{d'} \circ FG(q)$ がわかる．

これは q についての ε の自然性の証明になっている．

もう一方の証明も同様にできる． ■

第 4 章

米田の補題と表現可能関手

4.1　大きい圏・小さい圏

圏が大きい・小さいとはどういうことかを考える. 第 1 章の冒頭で少し触れたが, 本節では正確な意味は問わずに数学的対象の集まりを表すのに **クラス** (class) という語を用いる. 集合はすべてクラスであるが, いくつかのクラスは集合としては巨大すぎる.(例えばすべての集合がなすクラス.) そして, クラスが **小さい** (small) とは, そのクラスが集合になるということである. そうでないときは **大きい** (large) という.

Def 4.1 (小さい圏・大きい圏)

圏が **小さい** (small) または **小圏** であるとは, その射のクラス（または集まり）が小さいことをいう. そうでないときは **大きい** (large) という.

Rem 4.2

対象は恒等射と 1 対 1 対応するので, 圏が小さければその対象のクラスも小さいといえる.

次節で出てくることになる局所小というものも定義しよう.

Def 4.3（局所小）

圏 C が **局所小** (locally small) であるとは, 各 $c, c' \in C$ についてクラス $C(c, c')$ が小さいことをいう.
（圏が小さいことは, その圏が局所小であることを導くことに注意.）

Ex 4.4
二つの集合 A と B について, A から B への写像全体は集合になるので, **Set** は局所小である.

Rem 4.5
本書において, これ以降は特に断らない場合, 圏は局所小であると仮定する.
念のために, 局所小であることは可能な限り明示する.

4.2 米田の補題

「米田の補題」という名前は聞いたことがある人も多いのではないだろうか. 何となく難しそうな印象を受けてしまうのかもしれないが, これまでの用語や概念を理解していれば決して難しくはないだろう.

C は局所小圏であるとすると, $a, b \in C$ に対して $Hom_C(a, b) \in \mathbf{Set}$ が成り立つのであった. ここで, a を固定したときの関数

$$\begin{array}{cccc} F: & Ob(C) & \longrightarrow & Ob(\mathbf{Set}) \\ & \mathrel{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \mathrel{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ & b & \longmapsto & Hom_C(a, b) \end{array}$$

を考えることができる. これは実は関手になる. 射関数をどのように定めるかというと,C の射 $g : b \to b'$ に対して, 写像 $F(g) : Hom_C(a, b) \to Hom_C(a, b')$ を

$$\begin{array}{cccc} F: & Hom_C(a, b) & \longrightarrow & Hom_C(a, b') \\ & \mathrel{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \mathrel{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ & a \xrightarrow{h} b & \longmapsto & a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{g} b' \end{array}$$

で定めればよい. ここでは, 恒等射や結合法則について確かめることは省略する.
この関手 F を **Hom 関手** といい, $Hom_C(a, -)$ で表す. 記号について少し説明を加え

ると, 射 $g : b \to b'$ に対して $Hom_C(a, g)$ は写像 $Hom'_C a, b) \to Hom_C(a, b')$ であり, $Hom_C(a, g)(h) = g \circ h$ となる. そこで, 写像 $Hom_C(a, g)$ を単に $g \circ -$ と書くことにする.

次に圏 C の代わりに C^{OP} を考えると, 関手 $Hom_{C^{OP}}(a, -) : C^{OP} \to \mathbf{Set}$ が得られる. 定義より, $Hom_{C^{OP}}(a, b) = Hom_C(b, a)$ であった. そこで $Hom_C(-, a) := Hom_{C^{OP}}(a, -)$ と書く. つまり, 関手 $Hom_C(-, a) : C^{OP} \to^m athbfSet$ は, 射 $f : b' \to b$ に対して

$$
\begin{array}{cccc}
Hom_C(f, a) : & Hom_C(b, a) & \longrightarrow & Hom_C(b', a) \\
& \uplus & & \uplus \\
& b \xrightarrow{h} a & \longmapsto & b' \xrightarrow{f} b \xrightarrow{h} a
\end{array}
$$

で与えられるものである. 先ほどと同様に, $Hom_C(f, a)$ を単に $- \circ f$ とも書くことにする.

さらに, この二つを組み合わせて考えると, 2 変数の関手 $Hom_C C^{OP} \times C \to \mathbf{Set}$ を考えることもできる. つまり, $f : a' \to a$ と $g : b \to b'$ に対して

$$
\begin{array}{cccc}
Hom_C(f, g) : & Hom_C(a, b) & \longrightarrow & Hom_C(a', b') \\
& \uplus & & \uplus \\
& a \xrightarrow{h} b & \longmapsto & a' \xrightarrow{f} a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{g} b'
\end{array}
$$

と定義する. この Him_C が関手となることは容易にわかる.

この関手から, 米田埋め込みというものを定義する.

Def 4.6 (米田埋め込み)

C : 局所小圏

C の **米田埋め込み** y とは, 圏 C から関手圏 $\mathbf{Set}^{C^{OP}}(= [C^{OP}, \mathbf{Set}])$ への関手で, 具体的には次のような関手である.

・対象 $a \in C$ に対しては, $y(c) = Hom_C(-, a)$

・射 $f : a \to b$ に対しては $y(f) : y(a) \Rightarrow y(b)$ という自然変換である.

なお, $\widehat{C} := \mathbf{Set}^{C^{OP}}$ とおいて, 米田埋め込みを $y : C \to \widehat{C}$ と表すこともある.

さて, いよいよ米田の補題を見ていこう.

Thm 4.7 (米田の補題)

C : 局所小圏, $a \in C$: 対象, $P : C^{OP} \to \mathbf{Set}$: 関手
このとき, 全単射 $\varphi_{a,P} : Hom_{\widehat{C}}(y(a), P) \to P(a)$ が存在する.

Proof.
$\alpha \in Hom_{\widehat{C}}(y(a), P)$ とすれば, α_a は写像 $Hom_C(a, a) \to P(a)$ である. そこで写像 $\varphi = \varphi_{a,P} : Hom_{\widehat{C}}(y(a), P) \to P(a)$ を $\varphi(\alpha) := \alpha_a(id_a)$ で定める. これが全単射であることを示せばよいのだが, そのために逆写像 $\psi = \psi_{a,P} : P(a) \to Hom_{\widehat{C}}(y(a), P)$ を定義する. $x \in P(a)$ に対して $\psi(x)_s : Hom_C(s, a) \to P(s)$ を $\psi(x)_s(f) := Pf(x)$ により定める. このとき $\psi(x)$ は自然変換 $y(a) \Rightarrow P$ である.
$\because$ $f : s \to t$ に対して次が可換であることを示せばよい.

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[d, "f"'] \\
t
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Hom_C(s,a) \arrow[r, "\psi(x)_s"] & Ps \\
Hom_C(t,a) \arrow[u, "-\circ f"] \arrow[r, "\psi(x)_t"'] & Pt \arrow[u, "Pf"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
g \circ f \arrow[r, mapsto] & P(g \circ f)(x) \\
 & Pf(Pg(x)) \\
g \arrow[uu, mapsto] \arrow[r, mapsto] & Pg(x) \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

しかし, それは P が関手であるから $P(g \circ f)(x) = (Pf \circ Pg)(x) = Pf(Pg(x))$ となり, 明らか. (ψ が自然変換であることの確認終了.)
従って, ψ は写像 $\psi : P(a) to Hom_{\widehat{C}}(y(a), P)$ となる. 後は $\varphi \circ \psi = id$ と $\psi \circ \varphi = id$ を示せばよい. 全射は $x \in P(a)$ に対して

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x)) = \psi(x)_a(id_a) = P(id_a)(x) = id(x) = x$$

が成り立つので示せた. 後者は自明ではないが, ここでは省略する. ■

Cor 4.8
米田埋め込み $y : C \to \widehat{C}$ は忠実充満である.

Proof.
$a, b \in C$ とする. 定理 4.7 で $P := y(b)$ とすれば, $Hom_{\widehat{C}}(y(a), y(b)) \cong Hom_C(a, b)$ を得る. 定理 4.7 の証明より, この同型は $\psi_{a,y(b)} : Hom_C(a, b) \to Hom_{\widehat{C}}(y(a), y(b))$ で与えられる. この $\psi_{a,y(b)}$ が $y : Hom_C(a, b) \to Hom_{\widehat{C}}(y(a), y(b))$ に一致することを示せばよい. そのためには $f \in Hom_C(a, b)$ に対して, 自然変換の等式 $\psi_{a,y(b)}(f) = y(f)$ を示せばよい.

定義から $s \in C$, $g \in Hom_C(s,a)$ に対して

$$\psi_{a,y(b)}(f)_s(g) = (y(b)(g))(f) = (Hom(g,b))(f) = f \circ g$$

である. 故に $y(f)$ の定義から $y(f) = \psi_{a,y(b)}(f)$ がわかる. ■

Cor 4.9
$y(a) \cong y(b)$ ならば $a \cong b$ である.

Proof.
略. ■

4.3 表現可能

Def 4.10(表現可能)

C : 局所小圏
関手 $F : C \to \mathbf{Set}$ が **表現可能関手** (representable functor) である
$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ ある対象 $a \in C$ と自然同型 $F \cong Hom_C(a,-)$ が存在する.
また, このとき a は F を**表現する** という.

Prop 4.11
表現可能関手 F を表現する対象は同型を除いて一意である.

Proof.
$F \cong Hom_C(a,-) \cong Hom_C(b,-)$ とすれば, 系 4.9 より $a \cong b$ である. ■

参考文献

[1] T・レンスター 著, 斎藤恭司 監修, 土岡俊介 訳 「ベーシック圏論 普遍性からの速習コース」（丸善出版 2017）

[2] alg_d 「壱大整域」 `http://alg-d.com/math/kan_extension/`

[3] Emily Riehl *Category theory in Context*. Cambridge University Press 2014

[4] Steve Awodey *Category Theory*. Clarendon Press 2006

[5]「現代思想 7 月号 特集 圏論の世界」（青土社 2020）