定理 3.7 命題変数 $P_1, P_2, ..., P_n$ を含む論理式 $A(P_1, P_2, ..., P_n)$ に対して, 次の式が成り立つ。 $A^*(P_1, P_2, ..., P_n) \Leftrightarrow \neg A(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n)$ 。

【証明】

$A(P_1, P_2, ..., P_n)$ **が含む論理演算子の数に関する数学的帰納法で証明する。**

（基礎） $A(P_1, P_2, ..., P_n)$ **が論理演算子を含まないと仮定すると，三つの場合が存在する。**

① $A(P_1, P_2, ..., P_n) = F$ **であるとき，** $A(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n) = F$ 。**定義 3.17 より，**

$A^*(P_1, P_2, ..., P_n) \Leftrightarrow T \Leftrightarrow \neg F \Leftrightarrow \neg A(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n)$ **である。**

② $A(P_1, P_2, ..., P_n) = T$ **であるとき，** $A(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n) = T$ 。**定義 3.17 より，**

$A^*(P_1, P_2, ..., P_n) \Leftrightarrow F \Leftrightarrow \neg T \Leftrightarrow \neg A(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n)$ **である。**

③ $A(P_1, P_2, ..., P_n) = P_i$ （$1 \le i \le n$）**であるとき，** $A(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n) = \neg P_i$ 。

定義 3.17 より， $A^*(P_1, P_2, ..., P_n) \Leftrightarrow P_i \Leftrightarrow \neg(\neg P_i) \Leftrightarrow \neg A(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n)$ **である。**

以上により， $A(P_1, P_2, ..., P_n)$ **が論理演算子を含まないときには，**

$A^*(P_1, P_2, ..., P_n) \Leftrightarrow \neg A(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n)$ **が成り立つ。**

[仮定] $A(P_1, P_2, ..., P_n)$ **が** m **個以下の論理演算子を含むとき，式**

$$A^*(P_1, P_2, ..., P_n) \Leftrightarrow \neg A(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n)$$

が成り立つと仮定する。

[帰納ステップ] $A(P_1, P_2, ..., P_n)$ **が** $m+1$ **個の論理演算子を含むとき，三つの場合が存在する。**

① **ある** m **個以下の論理演算子を含む論理式** $B(P_1, P_2, ..., P_n)$ **に対して，**

$A(P_1, P_2, ..., P_n) = \neg B(P_1, P_2, ..., P_n)$ **であるとき，**

$$\begin{aligned} A^*(P_1, P_2, ..., P_n) &\Leftrightarrow (\neg B(P_1, P_2, ..., P_n))^* \\ \text{（定義 3.17 より）} &\Leftrightarrow \neg B^*(P_1, P_2, ..., P_n) \\ \text{（仮定により）} &\Leftrightarrow \neg(\neg B(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n)) \\ &\Leftrightarrow \neg A(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n) \end{aligned}$$

② **ある** m **個以下の論理演算子を含む論理式** $B(P_1, P_2, ..., P_n)$ **と** $C(P_1, P_2, ..., P_n)$ **に対して，** $A(P_1, P_2, ..., P_n) = B(P_1, P_2, ..., P_n) \vee C(P_1, P_2, ..., P_n)$ **であるとき，**

$$A^*(P_1,P_2,...,P_n) \Leftrightarrow (B(P_1,P_2,..., P_n) \vee C(P_1,P_2,...,P_n))^*$$

（定義 3.17 より） $\Leftrightarrow B^*(P_1,P_2,..., P_n) \wedge C^*(P_1,P_2,..., P_n)$

（仮定により） $\Leftrightarrow \neg B(\neg P_1,\neg P_2,...,\neg P_n) \wedge \neg C(\neg P_1,\neg P_2,...,\neg P_n)$

$\Leftrightarrow \neg(B(\neg P_1,\neg P_2,...,\neg P_n) \vee C(\neg P_1,\neg P_2,...,\neg P_n))$

$\Leftrightarrow \neg A(\neg P_1,\neg P_2,...,\neg P_n)$

③ $A(P_1,P_2,...,P_n) = B(P_1,P_2,...,P_n) \wedge C(P_1,P_2,...,P_n)$ **であるときも, ②と同様に証明できる。**

以上の [仮定] と [帰納ステップ] により， $A(P_1,P_2,...,P_n)$ **が** m **個の論理演算子を含むときに,** $A^*(P_1,P_2,...,P_n) \Leftrightarrow \neg A(\neg P_1,\neg P_2,...,\neg P_n)$ **が成立すると仮定すると,** $m+1$ **個の論理演算子を含む** $A(P_1,P_2,...,P_n)$ **に対して,**

$A^*(P_1,P_2,...,P_n) \Leftrightarrow \neg A(\neg P_1,\neg P_2,...,\neg P_n)$ **が成立する。**

以上により，常に $A^*(P_1,P_2,...,P_n) \Leftrightarrow \neg A(\neg P_1,\neg P_2,...,\neg P_n)$ **が成立する。**