

**系 4.1** 無向連結グラフ  $G$  に対して,  $G$  の開いたオイラー道が存在する必要十分条件は奇数の次数の頂点がちょうど 2 個存在することである。

【証明】

“  $\Rightarrow$  ”:  $G$  が開いたオイラー道が存在するので, 開いた二つの頂点に辺を追加すると, オイラーグラフになる。定理 4.12 より, 各頂点の次数が偶数である, すなわち,  $G$  の中には奇数の次数の頂点がちょうど 2 個 (開いた 2 つの頂点) 存在する。

“  $\Leftarrow$  ”: 奇数の次数の頂点がちょうど 2 個存在するので, その二つの頂点に辺を追加すると, 各頂点の次数が偶数である。定理 4.12 より, オイラーグラフになる。すなわち, オイラー閉路が存在する。追加した辺を削除すると,  $G$  が開いたオイラー道が存在することが分かる。