

**定理 2.4**  $\langle A, * \rangle$  を単位元  $e$  を持つ 2 項演算の代数系とする。  $A$  の任意の要素  $a$  に対して、  $a$  の左逆元  $b$  が存在し、かつ演算  $*$  が結合的であるとき

- (1)  $a$  の右逆元も  $b$  である。
- (2)  $a$  の逆元は一つだけである。

【証明】

- (1):  $b$  を  $a$  の左逆元、かつ  $c$  を  $b$  の左逆元とする。  $(b * a) * b = e * b = b$  から、  
 $e = c * b = c * ((b * a) * b) = ((c * b) * a) * b = (e * a) * b = a * b$  である。ゆえに、  
 $a$  の右逆元も  $b$  である（すなわち、 $b$  は  $a$  の逆元である）。
- (2):  $d$  も  $a$  の逆元だとすると、  
 $d = d * e = d * (a * b) = (d * a) * b = e * b = b$  である。ゆえに、 $a$  の逆元は一つだけである。