定理 4.10 A **を** n **個の頂点** $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ **を持つ有向グラフの隣接行列とすると, 行列** A^m **の** $[i, j]$ **成分は頂点** v_i **から** v_j **への長さ** m ($m \geq 0$) **の道の個数である。**

【証明】

A^m **の** $[i, j]$ **成分を** $a_{i,j}^{(m)}$ **とする。** m **に関する数学的帰納法を用いて示す。**

(1) $m=0$ **のとき,** $A^0=I$ **(すなわち単位行列)である。定理の主張を満たす。**

(2) $m=k \geq 0$ **のとき, 定理の主張を満たすと仮定すると,** $a_{i,t}^{(k)}$ **は頂点** v_i **から頂点** v_t **への長さ** k **の道の個数であり,** $a_{i,t}^{(k)} a_{t,j}$ **は頂点** v_i **から頂点** v_t **を経由して頂点** v_j **へ到る長さ** $k+1$ **の道の個数である。ゆえに,** $\sum_{t=1}^{n} a_{i,t}^{(k)} a_{t,j}$ **は頂点** v_i **から頂点** v_j **への長さ** $k+1$ **の道の個数である。** $A^{k+1}=A^k A$ **の** $[i, j]$ **成分は** $\sum_{t=1}^{n} a_{i,t}^{(k)} a_{t,j}$ **であるので,** $m=k+1$ **のとき, 定理の主張を満たす。**

(1)と(2)より, 定理の主張を満たす。