

定理 4.2 グラフ $G(V, E)$ に対して, 次数が奇数である頂点は偶数個存在する。

【証明】

X と Y をそれぞれ次数が奇数である頂点の集合と次数が偶数である頂点の集合とする。定理 4.1 により, $\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in X} \deg(v) + \sum_{v \in Y} \deg(v) = 2|E|$ である。 $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ と $2|E|$ は共に偶数であるので, $\sum_{v \in X} \deg(v)$ も偶数でなければならない。ここで, 任意の $v \in X$ に対して, $\deg(v)$ は奇数であるので, $|X|$ が奇数だとすると $\sum_{v \in X} \deg(v)$ も奇数になってしまう。よって, $|X|$ も偶数である。すなわち, 次数が奇数である頂点は偶数個存在する。