

補題 2.2 $\langle A, \vee, \wedge, \bar{} \rangle$ を有限ブール代数とする。 b を 0 でない A の要素とし、 a_1, a_2, \dots, a_k を $a_i \leq b$ であるような A のすべての原子とする。このとき、 $b = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k$ が成り立つ。

【証明】

$a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k$ を c と記す。 $1 \leq i \leq k$ に対して、 $a_i \leq b$ であるから、 $c \leq b$ となる。
 $b \wedge \bar{c} \neq 0$ と仮定する。この場合、原子 a があり、 $a \leq b \wedge \bar{c}$ が成り立つ。推移律により、 $a \leq b$ かつ $a \leq \bar{c}$ である。 $a \leq b$ であるから、 a は a_1, a_2, \dots, a_k のどれか一つと一致する。したがって、 $a \leq c$ となる。 $a \leq \bar{c}$ と $a \leq c$ より、 $a \leq \bar{c} \wedge c$ である。すなわち、 $a \leq 0$ である。これは a が原子であることと矛盾する。よって $b \wedge \bar{c} = 0$ でなければならない。補題 2.1 により、 $b \leq c$ となる。関係 \leq の反対称律により、 $b = c = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k$ である。