定理 3.6 論理式 A, B, C に対して,

(1) $A \Rightarrow B$ **であるとき,** A **が恒真式であるならば,** B **も恒真式である。**

(2) $A \Rightarrow B$ **かつ** $B \Rightarrow C$ **であるとき,** $A \Rightarrow C$ **が成り立つ。**

(3) $A \Rightarrow B$ **かつ** $A \Rightarrow C$ **であるとき,** $A \Rightarrow B \wedge C$ **が成り立つ。**

(4) $A \Rightarrow B$ **かつ** $C \Rightarrow B$ **であるとき,** $A \vee C \Rightarrow B$ **が成り立つ。**

【証明】

(1) $A \Rightarrow B$ **であるとき,** $A \to B \Leftrightarrow T$ 。**すなわち,** $\neg A \vee B \Leftrightarrow T$ 。A **が恒真式であるならば,** $\neg A$ **は恒偽式である。すなわち,** $\neg A \Leftrightarrow F$ 。
よって, $T \Leftrightarrow \neg A \vee B \Leftrightarrow F \vee B \Leftrightarrow B$ 。**ゆえに,** B **も恒真式である。**

(2) $A \Rightarrow B$ **かつ** $B \Rightarrow C$ **であるとき,** $A \to B \Leftrightarrow T$ **かつ** $B \to C \Leftrightarrow T$ 。**よって,**

$$
\begin{aligned}
T &\Leftrightarrow A \to B \\
&\Leftrightarrow \neg A \vee B \\
&\Leftrightarrow \neg A \vee B \wedge T \\
&\Leftrightarrow \neg A \vee B \wedge (B \to C) \\
&\Leftrightarrow \neg A \vee B \wedge (\neg B \vee C) \\
&\Leftrightarrow \neg A \vee B \wedge C \\
&\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \\
&\Leftrightarrow (A \to B) \wedge (A \to C) \\
&\Leftrightarrow T \wedge (A \to C) \\
&\Leftrightarrow (A \to C)
\end{aligned}
$$

。 **ゆえに,** $A \Rightarrow C$ **である。**

(3) $A \Rightarrow B$ **かつ** $A \Rightarrow C$ **であるとき,** $A \to B \Leftrightarrow T$ **かつ** $A \to C \Leftrightarrow T$ 。**よって,**

$$
\begin{aligned}
T &\Leftrightarrow (A \to B) \wedge (A \to C) \\
&\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \\
&\Leftrightarrow \neg A \vee B \wedge C \\
&\Leftrightarrow A \to B \wedge C
\end{aligned}
$$

。 **ゆえに,** $A \Rightarrow B \wedge C$ **である。**

(4) $A \Rightarrow B$ **かつ** $C \Rightarrow B$ **であるとき,** $A \to B \Leftrightarrow T$ **かつ** $C \to B \Leftrightarrow T$ 。**よって,**

$$
\begin{aligned}
T &\Leftrightarrow (A \to B) \wedge (C \to B) \\
&\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \\
&\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg C \vee B \\
&\Leftrightarrow \neg (A \vee C) \vee B \\
&\Leftrightarrow A \vee C \to B
\end{aligned}
$$

。 **ゆえに,** $A \vee C \Rightarrow B$ **である。**