定理 2.47 $E(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$ **をブール代数**$< A, \vee, \wedge, \bar{\ } >$**上のブール表現とすると，次の式が成り立つ。**

$$
\begin{aligned}
E(x_1,x_2,..., x_{n-1}, x_n) = &(E(0,0,...,0,0) \wedge \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge ... \wedge \overline{x_{n-1}} \wedge \overline{x_n}) \\
&\vee (E(0,0,...,0,1) \wedge \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge ... \wedge \overline{x_{n-1}} \wedge x_n) \\
&\vee (E(0,0,..., 1,0) \wedge \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge ... \wedge x_{n-1} \wedge \overline{x_n}) \\
&... \\
&\vee (E(1,1,..., 1,0) \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_{n-1} \wedge \overline{x_n}) \\
&\vee (E(1,1,..., 1,1) \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_{n-1} \wedge x_n)
\end{aligned}
$$

【証明】

$E(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, a, x_{i+1}, ...x_n)$ **を** $E(x_i = a)$ **と記す。**

(1) ブール表現$E(x_1, x_2, ..., x_n)$**の長さ（**$|E|$**と記す，すなわち，**$E(x_1, x_2, ..., x_n)$**の中の記号の個数）に関する帰納法を用いて，任意の**x_i**に対して，次の等式を証明する。** $E(x_1, x_2, ..., x_n) = (\overline{x_i} \wedge E(x_i = 0)) \vee (x_i \wedge E(x_i = 1))$。

① $|E| = 1$**のとき，** $E = a \in A$**，または，** $E = x_j$。

（ｉ） $E = a$ **であれば，** $a = E(x_i = 0) = E(x_i = 1) = (\overline{x_i} \wedge a) \vee (x_i \wedge a)$**，**

すなわち， $E(x_1, x_2, ..., x_n) = (\overline{x_i} \wedge E(x_i = 0)) \vee (x_i \wedge E(x_i = 1))$ **である。**

（ii） $E = x_j$ **であれば，** $x_j = E(x_i = 0) = E(x_i = 1) = (\overline{x_i} \wedge x_j) \vee (x_i \wedge x_j)$

すなわち， $E(x_1, x_2, ..., x_n) = (\overline{x_i} \wedge E(x_i = 0)) \vee (x_i \wedge E(x_i = 1))$ **である。**

② $|E| \le m$ **のとき，定理の結果が成り立つならば，** $|E| = m + 1$ **のとき，三つの場合がある。**

（ｉ） $E = E_1 \vee E_2$**，** $|E_1| \le m$**，** $|E_2| \le m$**，よって，**

$E_1 = (\overline{x_i} \wedge E_1(x_i = 0)) \vee (x_i \wedge E_1(x_i = 1))$**，**

$E_2 = (\overline{x_i} \wedge E_2(x_i = 0)) \vee (x_i \wedge E_2(x_i = 1))$。**ゆえに，**

$$
\begin{aligned}
E &= E_1 \vee E_2 \\
&= (\overline{x_i} \wedge E_1(x_i = 0)) \vee (x_i \wedge E_1(x_i = 1)) \\
&\qquad \vee (\overline{x_i} \wedge E_2(x_i = 0)) \vee (x_i \wedge E_2(x_i = 1)) \\
&= (\overline{x_i} \wedge (E_1(x_i = 0) \vee E_2(x_i = 0)) \\
&\qquad \vee (x_i \wedge (E_1(x_i = 1) \vee E_2(x_i = 1))
\end{aligned}
$$

$$=(\overline{x_i}\wedge E(x_i=0))\vee(x_i\wedge E(x_i=1))$$ である。

(ii) $E=E_1\wedge E_2$，$|E_1|\le m$，$|E_2|\le m$，よって,

$$E_1=(\overline{x_i}\wedge E_1(x_i=0))\vee(x_i\wedge E_1(x_i=1))$$,

$$E_2=(\overline{x_i}\wedge E_2(x_i=0))\vee(x_i\wedge E_2(x_i=1))$$ 。ゆえに,

$$\begin{aligned}
E&=E_1\wedge E_2\\
&=((\overline{x_i}\wedge E_1(x_i=0))\vee(x_i\wedge E_1(x_i=1)))\\
&\qquad\wedge((\overline{x_i}\wedge E_2(x_i=0))\vee(x_i\wedge E_2(x_i=1)))\\
&=(\overline{x_i}\wedge(E_1(x_i=0)\wedge E_2(x_i=0)))\\
&\qquad\vee(x_i\wedge(E_1(x_i=1)\wedge E_2(x_i=1)))\\
&=(\overline{x_i}\wedge E(x_i=0))\vee(x_i\wedge E(x_i=1))
\end{aligned}$$ である。

(iii) $E=\overline{E_1}$，$|E_1|\le m$，よって,

$$E_1=(\overline{x_i}\wedge E_1(x_i=0))\vee(x_i\wedge E_1(x_i=1))$$ 。ゆえに,

$$\begin{aligned}
E&=\overline{(\overline{x_i}\wedge E_1(x_i=0))\vee(x_i\wedge E_1(x_i=1))}\\
&=\overline{\overline{x_i}\wedge E_1(x_i=0)}\wedge\overline{x_i\wedge E_1(x_i=1)}\\
&=(x_i\vee\overline{E_1(x_i=0)})\wedge(\overline{x_i}\vee\overline{E_1(x_i=1)})\\
&=(x_i\wedge\overline{E_1(x_i=1)})\vee(\overline{x_i}\wedge\overline{E_1(x_i=0)})\vee\overline{E_1(x_i=1)}\wedge\overline{E_1(x_i=0)}\\
&=(x_i\wedge\overline{E_1(x_i=1)})\vee(\overline{x_i}\wedge\overline{E_1(x_i=0)})\\
&\qquad\vee(x_i\vee\overline{x_i})\wedge\overline{E_1(x_i=1)}\wedge\overline{E_1(x_i=0)})\\
&=(x_i\wedge\overline{E_1(x_i=1)})\vee(x_i\wedge\overline{E_1(x_i=1)}\wedge\overline{E_1(x_i=0)})\\
&\qquad\vee(\overline{x_i}\wedge\overline{E_1(x_i=0)})\vee(\overline{x_i}\wedge\overline{E_1(x_i=0)}\wedge\overline{E_1(x_i=1)})\\
&=(x_i\wedge\overline{E_1(x_i=1)})\vee(\overline{x_i}\wedge\overline{E_1(x_i=0)})\\
&=(\overline{x_i}\wedge E(x_i=0))\vee(x_i\wedge E(x_i=1))
\end{aligned}$$

①と②より，$E(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(\overline{x_i}\wedge E(x_i=0))\vee(x_i\wedge E(x_i=1))$ である。

(2) すべての変数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ に，(1)の結果を用いて，$E(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ を展開すると，定理の結果を得る。