

**定理 1.31** 合成関数  $g \circ f$  において,

- (1)  $f$  と  $g$  が全射であれば,  $g \circ f$  も全射である。
- (2)  $f$  と  $g$  が単射であれば,  $g \circ f$  も単射である。
- (3)  $f$  と  $g$  が全単射であれば,  $g \circ f$  も全単射である。

**【証明】**

- (1):  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  が与えられて,  $f$  と  $g$  が全射であれば,  $f(X) = Y$ ,  $g(Y) = Z$  となる。よって,  $g \circ f(X) = g(f(X)) = g(Y) = Z$ 。ゆえに,  $g \circ f$  も全射である。
- (2): すべての  $x, x' \in X$  に関して,  
 $g \circ f(x) = g \circ f(x')$  ならば,  $g(f(x)) = g(f(x'))$  である。  
 $g$  が単射であるので,  $f(x) = f(x')$  が成り立つ。  
 $f$  も単射であるので,  $x = x'$  が成り立つ。  
ゆえに,  $g \circ f$  も単射である。
- (3): (1)と(2)により。