定理 2.45（Stone 定理）＜ A , ∨ , ∧ , $\bar{\ }$ ＞を有限ブール代数とする。S を A のすべての原子の集合とする。このとき，＜ A , ∨ , ∧ , $\bar{\ }$ ＞は束＜ $\wp(S)$, ⊆ ＞によって定義される代数系＜ $\wp(S)$, ∪ , ∩ , ～＞と同型である。

【証明】

補題 2.3 により，A の任意の 0 でない要素 b に対して，$b = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k$ は原子の結びによる b の一意な表現である。ここで，$a_1, a_2, \ldots, a_k$ は $a_i \leqslant b$ であるような A のすべての原子である。集合 $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ を S_b と記し, 関数 $f : A \to \wp(S)$, $a = 0$ のとき，$f(a) = \phi$ ，$a \neq 0$ のとき，$f(a) = S_a$ とする。ϕ を S_0 とする。

(1)　A の任意の要素 x と y に対して，$x \neq y$ のとき，$S_x \neq S_y$ である。すなわち，$f(x) \neq f(y)$ である。ゆえに，$\boxed{f \text{ は単射関数である。}}$

(2)　$\wp(S)$ の任意の要素 $S' = \{a_1', a_2', \ldots, a_j'\}$ に対して，∨ が閉じた演算であるから，$a_1' \vee a_2' \vee \ldots \vee a_j' = b' \in A$ である。すなわち，$f(b') = S'$ である。

ゆえに，$\boxed{f \text{ は全射関数である。}}$

(1) と (2) により，$\boxed{f \text{ は } A \text{ から } \wp(S) \text{ への全単射関数である。}}$

次の結果を証明する。

A の任意の要素 a と b に対して，

① $f(a \wedge b) = f(a) \cap f(b)$

② $f(a \vee b) = f(a) \cup f(b)$

③ $f(\bar{a}) = \sim f(a)$

が成り立つ。

証明：

① $f(a \wedge b)$ の任意の要素 x に対して，x は $x \leqslant a \wedge b$ を満たす原子であるとする。$a \wedge b \leqslant a$ と $a \wedge b \leqslant b$ であるから，$x \leqslant a$ と $x \leqslant b$ である。すなわち，$x \in f(a)$ かつ $x \in f(b)$ である。よって，$x \in f(a) \cap f(b)$ である。ゆえに，

$f(a \wedge b) \subseteq f(a) \cap f(b)$ である。

$f(a) \cap f(b)$ の任意の要素 x に対して，$x \in f(a)$ かつ $x \in f(b)$ であるとする。すなわち，x は $x \leqslant a$ と $x \leqslant b$ を満たす原子である。よって，$x \leqslant a \wedge b$ である。すなわち，$x \in f(a \wedge b)$ である。ゆえに，$f(a \wedge b) \supseteq f(a) \cap f(b)$ である。

よって，$f(a \wedge b) = f(a) \cap f(b)$ である。

②A の任意の要素 a と b に対して，$a = a_1' \vee a_2' \vee \ldots \vee a_j'$，$b = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k$ とすると，$f(a) = \{a_1', a_2', \ldots, a_j'\}$ と $f(b) = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ である。

$$a \vee b = (a_1' \vee a_2' \vee \ldots \vee a_j') \vee (a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k)$$
$$= a_1' \vee a_2' \vee \ldots \vee a_j' \vee a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k$$

であるから，$f(a \vee b) = \{a_1', a_2', \ldots, a_j', a_1, a_2, \ldots, a_k\} = f(a) \cup f(b)$ である。

③A の任意の要素 a に対して，$a = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$ とすると，

$f(a) = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \subseteq S$ かつ$\sim f(a) = S - f(a)$ である。

$\overline{a} = \overline{a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k} = \overline{a_1} \wedge \overline{a_2} \wedge \cdots \wedge \overline{a_k}$ であるから，①により，

$f(\overline{a}) = f(\overline{a_1} \wedge \overline{a_2} \wedge \cdots \wedge \overline{a_k}) = f(\overline{a_1}) \cap f(\overline{a_2}) \cap \cdots \cap f(\overline{a_k})$ である。系 2.3 により，任意の原子 a_i に対して，$f(\overline{a_i}) = S - \{a_i\}$ である。すなわち，

$$f(\overline{a}) = (S - \{a_1\}) \cap (S - \{a_2\}) \cap \cdots \cap (S - \{a_k\})$$
$$= S - \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = S - f(a) = \sim f(a)$$ である。

①と②と③によって，A から $\wp(S)$ への全単射関数 f は＜A , $\vee$, $\wedge$, $\bar{}$ ＞から＜$\wp(S)$, $\cup$, $\cap$, $\sim$ ＞への同型関数である。