

**定理 4.28** 正則  $k$  分木  $T$  に対して、枝点と葉の個数がそれぞれ  $i$  と  $t$  であるとき、 $(k-1)i = t-1$  が成り立つ。

【証明】

頂点  $r$  を  $T$  の根とする。

- (1)  $i=1$  , すなわち枝点は根  $r$  しか存在しないとき ,  $t=k$  であるので ,  $(k-1)i = t-1$  が成り立つ。
- (2)  $i < m$  のとき ,  $(k-1)i = t-1$  が成り立つと仮定すると ,  $i = m$  のとき ,  $r$  の  $k$  個の部分木  $T_j$  に対して , それぞれの枝点の数を  $i_j$  , 葉の数を  $t_j$  とすると ,  $(k-1)i_j = t_j - 1$  が成り立つので ,  $\sum_{j=1}^k (k-1)i_j = \sum_{j=1}^k (t_j - 1)$  である。ここ

で ,  $\sum_{j=1}^k i_j = i-1$  ,  $\sum_{j=1}^k t_j = t$  である。

すなわち ,  $(k-1)(i-1) = t-k$  である。ゆえに ,  $(k-1)i = t-1$  である。

数学的帰納法により , 定理の主張を満たす。