2 章

2．1

【1】(1)○(2)○(3)○(4)×

【2】各代数系に対して，すべて満たす。

【3】演算$*$は演算★に関して分配的ではない．
演算★は演算$*$に関して分配的である．
吸収律を満たさない。

【4】$<A,*>$の左単位元：なし，右単位元：β とγ．$<A,★>$の左単位元：β，右単位元：なし．

【5】$<A,*>$の左零元：γ，右零元：なし．
$<A,★>$の左零元：なし，右零元：β．

【6】(1) $\max\{x, y\}$ ：1，$\min\{x, y\}$ ：10，
$GCD(x, y)$ ：なし，$LCM(x,y)$ ：1．
(2) $\max\{x, y\}$ ：10，$\min\{x, y\}$ ：1，
$GCD(x, y)$ ：1，$LCM(x,y)$ ：なし．

【7】$\max\{x, y\}$ ：$1^{-1}=1$，$\min\{x, y\}$ ：$10^{-1}=10$，
$LCD(x, y)$ ：$1^{-1}=1$．その他の要素：なし。

【8】$2\times(1\Delta 1)=2\neq 0=(2\times 1)\Delta(2\times 1)$，
$2\Delta(2\times 2)=-2\neq 0=(2\Delta 2)\times(2\Delta 2)$．

2．2

【1】(1)

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

(2)①上記の演算表より，$*$はA上の閉じた演算である．②$(x*y)*z=x*(y*z)=x\times y\times z\ (\mathrm{mod}4)$，即ち，$*$は$A$上の結合的な演算である．よって，$<A,*>$は半群である．

【2】

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

$*$	0	2
0	0	0
2	0	0

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

$*$	0	1	3
0	0	0	0
1	0	1	3
3	0	3	1

【3】$(x★y)★z=(x*a*y)★z=(x*a*y)*a*z=x*a*(y*a*z)=x*a*(y★z)=x★(y★z)$

【4】(1) $a*b=a*(a*a)=(a*a)*a=b*a$
(2)①$a*b=a$の時，$b*b=(a*a)*b=a*(a*b)=a*a=b$ ②$a*b=b$の時，$b*b=(a*a)*b=a*(a*b)=a*b=b$
①と②より，$b*b=b$．

【5】(1) $(a*b)*c=a*(b*c)=a*(c*b)=(a*c)*b=(c*a)*b=c*(a*b)$．
(2) $(a*b)*(a*b)=(b*a)*(a*b)=b*(a*a)*b=b*a*b=a*b*b=a*b$．

【6】(1) $b=a*a$とする．$a*b=a*(a*a)=(a*a)*a=b*a$，よって，$a=b=a*a$ (2) $c=a*b*a$とする．(1)より，$a*c=a*(a*b*a)=(a*a)*b*a=a*b*a=c$，$c*a=(a*b*a)*a=a*b*(a*a)=a*b*a=c$，よって，$a=c=a*b*a$．(3) $d=a*b*c$，$e=a*c$とする．(2)より，$d*e=(a*b*c)*(a*c)=(a*(b*c)*a)*c=a*c=a*(c*(a*b)*c)=(a*c)*(a*b*c)=e*d$，よって，$d=e$，即ち，$a*b*c=a*c$．

【7】

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

【8】単位元をeとし，bとcが共にaの逆元とすると，$b=b*e=b*(a*c)=(b*a)*c=e*c=c$．問の主張が成り立つ．

2．3

【1】数学的帰納法で，任意の正整数kに対して，$(a^k)^{-1}=a^{-k}$が証明できる. よって，$(a^i*b^j)*(b^{-j}*a^{-i})=a^i*(b^j*b^{-j})*a^{-i}=a^i*e*a^{-i}=a^i*a^{-i}=e$. 同じように，$(b^{-j}*a^{-i})*(a^i*b^j)=e$が証明できる. ゆえに，$(a^i*b^j)^{-1}=b^{-j}*a^{-i}$.

【2】$+_6$はI_6上の閉じた結合的な演算である. 0が$<I_6,+_6>$の単位元であり，$6-i$が$i\in I_6$の逆元である. ゆえに，$<I_6,+_6>$は群である.

【3】$<\{0\},+_6>$，$<\{0,3\},+_6>$，$<\{0,2,4\},+_6>$，$<I_6,+_6>$.

【4】sに関する数学的帰納法で証明できる.

【5】任意の$x,y\in H_a$に対して，$x*a=a*x$，$y*a=a*y$. よって，$(x*y)*a=x*(y*a)=x*(a*y)=(x*a)*y=(a*x)*y=a*(x*y)$，即ち，$*$が$H_a$上の閉じた演算である. ゆえに，$<H_a,*>$は$<G,*>$の部分群である.

【6】$*$が結合的な演算なので，$HKH=(HK)H=H(KH)$. $HK=KH$より，$HKH=K(HH)$. $<H,*>$は群であるので，$*$がH上の閉じた演算であり，単位元$e\in H$である. よって，$HH=H$. ゆえに，$HKH=KH=HK$. 任意の$a,b\in HK$に対して，ある$h_1,h_2,h_2^{-1}\in H$，$k_1,k_2,k_2^{-1}\in K$，$a=h_1*k_1$，$b=h_2*k_2$，$b^{-1}=k_2^{-1}*h_2^{-1}$. よって，$a*b^{-1}=(h_1*k_1)*(k_2^{-1}*h_2^{-1})=h_1*(k_1*k_2^{-1})*h_2^{-1}\in HKH=HK$. 定理2.16により，$<HK,*>$は$<G,*>$の部分群である.

【7】①任意の$a\in HK$に対して，$a^{-1}\in HK$. よって，ある$h\in H,k\in K,a^{-1}=h*k$. ゆえに，$a=(a^{-1})^{-1}=k^{-1}*h^{-1}\in KH$. 即ち，$HK\subseteq KH$. ②同様に，$HK\subseteq KH$が証明できる. ①と②より，$HK=KH$.

【8】$G=\{e,a_1,a_2,...,a_{2k-1}\}$とし，$|G|$が偶数である. 群であるので，$a_i^{-1}\in G,i\neq j$の時，$a_i\neq a_j,a_i^{-1}\neq a_j^{-1}(1\leq i,j\leq 2k-1)$. $1\leq i\leq 2k-1$に対して，$a_i\neq a_i^{-1}$であれば，$H=\{a_1,a_1^{-1}\}\cup\{a_2,a_2^{-1}\}\cup...\cup\{a_{2k-1},a_{2k-1}^{-1}\}$とすると，$|H|$が偶数である. $|G|=|e|+|H|=1+|H|$より，$|H|$が奇数である. 矛盾. ゆえに，ある$1\leq j\leq 2k-1$，$a_j=a_j^{-1}$. 即ち，$a_j*a_j=e$.

2．4

【1】nに関する数学的帰納法で証明できる.

【2】任意の$a,b\in G$に対して，$a*b\in G$であるので，$(a*b)*(a*b)=e=a*a=a*(b*b)*a=(a*b)*(b*a)$. 群の消去律により，$a*b=b*a$. 即ち，$<G,*>$は可換群である.

【3】$a^5*b^5=(a*b)^5=(a*b)*(a*b)^4=a*b*a^4*b^4$. 消去律より，$a^4*b=b*a^4$. $a^4*b^4=(a*b)^4=(a*b)*(a*b)^3=a*b*a^3*b^3$. 消去律より，$a^3*b=b*a^3$. よって，$(a*b)*a^3=a*(b*a^3)=a*(a^3*b)=a^4*b=b*a^4=(b*a)*a^3$. 消去律より，$a*b=b*a$. 即ち，$<G,*>$は可換群である.

【4】$G=\{e,a,b\}$とする. 群$<G,*>$の演算表

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

はこれだけである. 主対角線より対称的なので, 可換群である.

【５】 $G=\{e,a,b,c\}$ とし e を群 $<G,*>$ の単位元とする. 群 $<G,*>$ の演算表に対して, 任意の行または任意の列は G の置換であるので, ① $a*a=e$ ならば, $a*b=c=b*a$, $a*c=b=c*a$ である. よって,（ⅰ）$b*b=e$ の時, $b*c=a=c*b$ である.（ⅱ）$b*b=a$ の時, $b*c=e=c*b$ である. ② $a*a=b$ ならば, $a*b=c=b*a$, $a*c=e=c*a$ である. よって, $b*b=e$, $b*c=a=c*b$, $c*c=b$ である. ③ $a*a=c$ ならば, $a*b=e=b*a$, $a*c=b=c*a$ である. よって, $b*b=c$, $b*c=a=c*b$, $c*c=e$ である. 即ち, 群 $<G,*>$ の演算表は下記の４つの可能だけである。

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e	c	a
c	c	b	a	e

すべての演算表は主対角線により対称的であるので, $<G,*>$ は可換群である.

【６】 $G=\{0,1,2,3,4\}$ とし, $a*b=a+b \pmod 5$ とする. $<G,*>$ は巡回群であり, 1 は生成元である.

【７】 $<G,\times_7>$ に対して, $\times_7$ は G 上の閉じた結合的な演算であり, 単位元は1 であり, 生成元は 3 である. $1^{-1}=1, 2^{-1}=4, 3^{-1}=5, 4^{-1}=2, 5^{-1}=3, 6^{-1}=6$. よって, $<G,\times_7>$ は巡回群である.

【８】 $G=\{a,a^2,\ldots,a^n=e\}$ とし, $H=\{a^{i_1}, a^{i_2},\ldots,a^{i_k}\}$ とする. ここで, $1\le i_1<i_2<\ldots<i_k=n$. $K=\{0,i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}\}$ とし, $a,b\in K$ に対して, $a\oplus b=a+b \pmod n$ とすると, $*$ は H 上の閉じた演算であるので, $\oplus$ は K 上の閉じた演算である. 背理法で, $K=\{0,i_1,2i_1,\ldots,(k-1)i_1\}$ かつ $ki_1=n$ が証明できる. ゆえに, $<H,*>$ が生成元 a^{i_1} を持つ巡回群である.

２．５

【１】 ① $g\circ f$ は $A\to C$ の全単射関数である. ② $g\circ f(a*b)=g(f(a*b))=g(f(a)\bigstar f(b))=g(f(a))\blacktriangle g(f(b))=g\circ f(a)\blacktriangle g\circ f(b)$. よって, $g\circ f$ は $<A,*>$ から $<C,\blacktriangle>$ への同型写像である.

【２】 ①任意の $y\in G$ に対して, ある $x=a^{-1}*y*a$, $f(x)=y$, 即ち, f が全射関数である. ② $x\ne y$ の時, $f(x)=a*x*a^{-1}\ne a*y*a^{-1}=f(y)$, 即ち, f が単射関数である. ③ $f(x*y)=a*(x*y)*a^{-1}=(a*x*a^{-1})*(a*y*a^{-1})=f(x)*f(y)$. よって, f は $<G,*>$ 上の自己同型写像である.

【３】 f を $<A,*>$ から $<B,\bigstar>$ への同型写像とし, a を $<A,*>$ の生成元とする. 任意の $f(a^i)\in B$ に対して, i に関する数学的帰納法で, $f(a^i)=f^i(a)$ が証明できる. よって, $<B,\bigstar>$ は生成元 $f(a)$ を持つ巡回群である.

【４】任意の群 $<\{e,a\},*>$ に対して, e は単位元であり, $e*a=a*e, a*a=e$ である. $f(e)=0, f(a)=1$ とすると, f は群

$<\{e,a\},*>$ から群 $<\{0,1\},+_2>$ の同型写像である. 即ち, 2個の要素からなる群はすべて群 $<\{0,1\},+_2>$ と同型である. ゆえに, 問の主張を満たす.

【5】任意の群 $<\{e,a,b\},*>$ に対して, e は単位元であり, $a*a=b, b*b=a, a*b=b*a=e$ である. $f(e)=0, f(a)=1, f(b)=2$ とすると, f は群 $<\{e,a,b\},*>$ から群 $<\{0,1,2\},+_3>$ の同型写像である. 即ち, 3個の要素からなる群はすべて群 $<\{0,1,2\},+_3>$ と同型である. ゆえに, 問の主張を満たす.

【6】同型写像(例えば, $f(a)=\gamma, f(b)=\alpha$, $f(c)=\beta, f(d)=\delta$)が存在するので, 同型である.

【7】(1) $(f(a)\bigstar f(b))\bigstar f(c)=f(a*b)\bigstar f(c)=f((a*b)*c)=f(a*(b*c))=f(a)\bigstar f(b*c)=f(a)\bigstar(f(b)\bigstar f(c))$ (2) 任意の $f(a)\in B$ に対して, $f(e)\bigstar f(a)=f(e*a)=f(a)=f(a*e)=f(a)\bigstar f(e)$. よって, $f(e)$ は $<B,\bigstar>$ の単位元である. (3) $f(a)\bigstar f(b)=f(a*b)=f(e)=f(b*a)=f(b)\bigstar f(a)$. よって, $f(b)$ が $f(a)$ の逆元である.

【8】任意の $a,b\in C$ に対して, $f(a*b^{-1})=f(a)\bigstar f(b^{-1})=g(a)\bigstar(f(b))^{-1}=g(a)\bigstar(g(b))^{-1}=g(a)\bigstar g(b^{-1})=g(a*b^{-1})$. よって, $a*b^{-1}\in C$. 定理 2.16 より, $<C,*>$ は $<A,*>$ の部分群である.

2.6

【1】任意の $a,b,c\in A$ に対して, $a*(b\bigstar c)=a*b=(a*b)\bigstar(a*c)$ である. 同様に $(b\bigstar c)*a=(b*a)\bigstar(c*a)$ もいえる. よって, ∗は★に関して分配的である.

【2】$a*(b\bigstar c)=(a*b)\bigstar(a*c)=(b*a)\bigstar(c*a)=(b\bigstar c)*a$, $a*(b*c)=(a*b)*c=(b*a)*c=b*(a*c)=b*(c*a)=(b*c)*a$.

【3】$(a\bigstar b)*(a\bigstar b)=((a\bigstar b)*a)\bigstar((a\bigstar b)*b)=(a*a)\bigstar(b*a)\bigstar(a*b)\bigstar(b*b)=(a*a)\bigstar(a*b)\bigstar(b*a)\bigstar(b*b)$.

【4】(1) a^{-1} を a の加法★の逆元とする. $a^{-1}\bigstar a=\theta=a^{-1}*\theta=a^{-1}*(a^{-1}\bigstar a)=(a^{-1}*a^{-1})\bigstar(a^{-1}*a)=a^{-1}\bigstar(a^{-1}*a)$. 群の消去律より, $a=a^{-1}*a$. よって, $a\bigstar a=(a*a)\bigstar(a^{-1}*a)=(a\bigstar a^{-1})*a=\theta*a=\theta$. (2) 問【3】より, $a\bigstar b=(a\bigstar b)*(a\bigstar b)=(a*a)\bigstar(a*b)\bigstar(b*a)\bigstar(b*b)=(a\bigstar b)\bigstar(a*b)\bigstar(b*a)$. よって, $(a\bigstar b)\bigstar(a\bigstar b)=(a\bigstar b)\bigstar(a\bigstar b)\bigstar(a*b)\bigstar(b*a)$, 即ち, $\theta=(a*b)\bigstar(b*a)$. (1) より, $(a*b)\bigstar(a*b)=\theta=(a*b)\bigstar(b*a)$. 群の消去律より, $a*b=b*a$ である.

【5】$<\{0,1,2\},+_3,\times_3>$, ここで, $a+_3b=a+b(\mathrm{mod}\,3)$, $a\times_3 b=a\times b(\mathrm{mod}\,3)$.

【6】①⊕ が I 上で閉じた結合的な演算であり, 1 が $<I,\oplus>$ の単位元である. $2-a$ が a の逆元であり, $a\oplus b=b\oplus a$ である. よって, $<I,\oplus>$ がアーベル群である. ②⊗ が I 上で閉じた結合的な演算であり, $a\otimes b=b\otimes a$ であり, 0 が $<I,\otimes>$ の単位元である. 即ち, $<I,\otimes>$ が可換的なモノイドである. さらに, $c\neq 1$ かつ $c\otimes a=c\otimes b$ ならば, $a=b$ になる. ③⊗ は⊕ に関して分配的できる. ①②③より, $<I,\oplus,\otimes>$ は整域である.

【7】(1)○(2)×

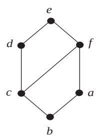
【8】$e_1=e_1*e_2=e_1*(e_1\bigstar e_2)=(e_1*e_1)\bigstar(e_1*e_2)=(e_1*e_1)\bigstar e_1=(e_1\bigstar e_1)*(e_1\bigstar e_1)=e_1*e_1$, $e_2=e_1\bigstar e_2=(e_1*e_2)\bigstar e_2=(e_1\bigstar e_2)*(e_2\bigstar e_2)=e_2*(e_2\bigstar e_2)=(e_2*e_2)\bigstar(e_2*e_2)=e_2\bigstar e_2$. よって, $x=x*e_2=x*(e_2\bigstar e_2)=(x*e_2)\bigstar(x*e_2)=x\bigstar x$, $x=x\bigstar e_1=x\bigstar(e_1*e_1)=(x\bigstar e_1)*(x\bigstar e_1)=x*x$.

2．7

【1】(1)○ (2)× (3)×

【2】(a)× (b)○ (c)○ (d)×

【3】



$A=\{a,b,c,d,e,f\}$

$B=\{a,b,c,d,e\}$

【4】"$\Rightarrow$": $a\wedge b=a$ より, $a\vee b=(a\wedge b)\vee b$. 吸収律より, $a\vee b=b$. "$\Leftarrow$": $a\vee b=b$ より, $a\wedge b=a\wedge(a\vee b)$. 吸収律より, $a\wedge b=a$.

【5】任意の $x,y\in B$ に対して, $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant y\leqslant b$. よって, $a\leqslant x\vee y\leqslant b$, $a\leqslant x\wedge y\leqslant b$, 即ち, $x\vee y\in B$, $x\wedge y\in B$. ゆえに, $<B,\leqslant>$ も束である.

【6】$a\leqslant b\leqslant c$ より, $(a\wedge b)\vee(b\wedge c)=a\vee b=b=b\wedge c=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$.

【7】①$a\wedge b\leqslant a$, $c\wedge d\leqslant c$, よって, $(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\leqslant a\vee c$. ②$a\wedge b\leqslant b$, $c\wedge d\leqslant d$, よって, $(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\leqslant b\vee d$. ①②より, $(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\leqslant(a\vee c)\wedge(b\vee d)$.

【8】①$a\wedge b\leqslant a$, $b\wedge c\leqslant b$, $c\wedge a\leqslant a$, よって, $(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\leqslant a\vee b$. ②$a\wedge b\leqslant b$, $b\wedge c\leqslant c$, $c\wedge a\leqslant c$, よって, $(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\leqslant b\vee c$. ③$a\wedge b\leqslant a$, $b\wedge c\leqslant c$, $c\wedge a\leqslant a$, よって, $(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\leqslant c\vee a$. ①②③より, $(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\leqslant(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$.

2．8

【1】$<\{1,2,3,4,5,6\}$,"以下"$>$

【2】$<\{1,2,3,4,5,60\}$,"倍数"$>$

【3】任意の $a,b\in I$ に対して, $\max\{a,b\}\in I$, $\min\{a,b\}\in I$, 即ち, $<I,\max,\min>$ が束である. ①$\max\{a,\min\{b,c\}\}$ に対して, (ⅰ) $a\le\min\{b,c\}$ の時, $a\le b$, $a\le c$. よって, $\max\{a,\min\{b,c\}\}=\min\{b,c\}=\min\{\max\{a,b\},\max\{a,c\}\}$. (ⅱ) $a>\min\{b,c\}$ の時, $\max\{a,\min\{b,c\}\}=a=\min\{\max\{a,b\},\max\{a,c\}\}$. (ⅰ)(ⅱ)より, max は min に関して分配的である. 定理 2.8.1 より, min は max に関して分配的である. ゆえに, 問の主張を満たす.

【4】$a\wedge c\leqslant a$ より, $(a\wedge c)\vee(b\wedge c)\leqslant a\vee(b\wedge c)$. 分配的なので, $(a\vee b)\wedge c\leqslant a\vee(b\wedge c)$.

【5】任意の $x,y,z\in A$ に対して, ①$x\vee(y\wedge z)\leqslant(x\vee y)\wedge(x\vee z)$ が成り立つ. ②条件より, $y\wedge(x\vee z)=(x\vee z)\wedge y\leqslant x\vee(y\wedge z)$. $a=x,b=y,c=x\vee z$ とすると, 条件より, $(x\vee y)\wedge(x\vee z)\leqslant x\vee(y\wedge(x\vee z))\leqslant x\vee(x\vee(y\wedge z))=x\vee(y\wedge z)$. ①②より, $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$. 即ち, $<A,\leqslant>$ は分配束である.

【6】$b\leqslant a$ より, $a\wedge b=b$. よって, $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)=b\vee(a\wedge c)$.

【7】b が a の補元であるので, $a\vee b=1$,

$a \wedge b = 0$．$a = b$ であれば，$1 = a \vee b = a = a \wedge b = 0$．矛盾．ゆえに，$a \neq b$．

【８】n 個（$n \geq 3$）の要素からなる鎖 $< A, \leqslant >$ に対して，最小元と最大元以外の要素は補元がないので，相補束ではない．

２．９

【１】$x \leqslant y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow \overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{y} \Leftrightarrow \overline{y} \leqslant \overline{x}$．

【２】(1) $a \vee (\overline{a} \wedge b) = (a \vee \overline{a}) \wedge (a \vee b) = a \vee b$．(2) $a \wedge (\overline{a} \vee b) = (a \wedge \overline{a}) \vee (a \wedge b) = a \wedge b$．

【３】$\oplus$ が A 上の閉じた結合的な演算であり，最小元 0 が単位元である．a は a の逆元であり，$a \oplus b = b \oplus a$ である．ゆえに，$< A, \oplus >$ は可換群である．

【４】$(a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b) = ((a \wedge \overline{b}) \vee \overline{a}) \wedge ((a \wedge \overline{b}) \vee b) = (a \vee \overline{a}) \wedge (\overline{b} \vee \overline{a}) \wedge (a \vee b) \wedge (\overline{b} \vee b) = (a \vee b) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b})$．

【５】"$\Rightarrow$": $\overline{a} \vee b = \overline{a} \vee (a \vee b) = (\overline{a} \vee a) \vee b = 1$．"$\Leftarrow$": $a \vee b = (a \wedge (\overline{a} \vee b)) \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$．

【６】"$\Rightarrow$": $a \wedge \overline{b} = (a \wedge b) \wedge \overline{b} = a \wedge (b \wedge \overline{b}) = 0$．"$\Leftarrow$": $a \wedge b = a \wedge (b \vee (a \wedge \overline{b})) = a \wedge (b \vee a) \wedge (b \vee \overline{b}) = a$．

【７】"$\Rightarrow$": $b \leqslant (a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k)$ より，$(a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k) \wedge b = b$，即ち，$(a_1 \wedge b) \vee (a_2 \wedge b) \vee \ldots \vee (a_k \wedge b) = b$．$b \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ であれば，$1 \leq i \leq k$ に対して，$a_i \wedge b = 0$ である．よって，$b = 0$ である．b が原子であることに矛盾．ゆえに，$b \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$．"$\Leftarrow$": $b \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ より，$(a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k) \wedge b = b$．即ち，$b \leqslant (a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k)$ である．

【８】"$\Rightarrow$": 当然である．"$\Leftarrow$": すべての原子 $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ に対して，$(a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k) = 1$．$1 \leq i \leq k$ に対して，$x \wedge a_i = 0$ より，$(x \wedge a_1) \vee (x \wedge a_2) \vee \ldots \vee (x \wedge a_k) = 0$．即ち，$0 = x \wedge (a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k) = x \wedge 1 = x$．

２．１０

【１】(1) a (2) 0 (3) 1 (4) a (5) 1 (6) 1

【２】$E(x, y) = (a \vee x) \wedge \overline{b \wedge y} = (a \vee x) \wedge (\overline{b} \vee \overline{y}) = (a \vee x) \wedge (a \vee \overline{y}) = a \vee (x \wedge \overline{y}) = F(x, y)$．

【３】

x	y	E
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(1)

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(2)

【４】$f(0, a) = f(0,1) = 1$，他の x, y に対して，$f(x, y) = 0$ とする．定理 2.47 より，f がブール関数であれば，$f(x, y) = \overline{x} \wedge y$．よって，$f(0, a) = a \neq 1$．矛盾．ゆえに，$f$ がブール関数ではない．

【５】$(\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y \wedge z)$

【６】$(x \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$

【７】(a) $E(x) = 1$ (b) $F(x, y) = \overline{x \wedge y}$ (c) $G(x, y, z) = z$

【８】加法標準形：$(\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y \wedge \overline{z})$．乗法標準形：$(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$