

定理 4.35 (最大流最小切断定理) 任意のネットワークにおいて、最大流の値は、切断の容量の最小値と等しい。

【証明】

mF をネットワーク N の最大流とすると、 N の残余容量ネットワーク N' を以下のようにして作る。 N に対して流れ mF の向きを反転する。つまり、 mF が通らない辺 $\langle i, j \rangle$ に対しては $C'(i, j) = C(i, j)$ 。 mF が通る辺 $\langle i, j \rangle$ に関しては $C'(i, j) = C(i, j) - mF(i, j)$ とし、さらに、辺 $\langle j, i \rangle$ が存在しないならば、 $C'(j, i) = mF(i, j)$ となる辺 $\langle j, i \rangle$ を追加し、辺 $\langle j, i \rangle$ が存在するならば $C'(j, i) = C(j, i) + mF(i, j)$ とする。そうすると、 N' の中に a から z への道は存在しない。 N' で a から到達可能な点を P 、 $V(N') - P$ を \bar{P} とおくと、切断 (P, \bar{P}) になっている。

(1) N において P から出る辺 $\langle i, j \rangle$ は N' に存在しないので、 $mF(i, j) = C(i, j)$ 。

(2) N において P へ入る辺 $\langle i', j' \rangle$ はその逆向きの辺 $\langle j', i' \rangle$ が N' に存在しないので、 $mF(i', j') = 0$ 。

(1) と (2) と定理 4.34 の証明より、 $mF_N = \sum_{i \in P, j \in \bar{P}} mF(i, j) - \sum_{i \in \bar{P}, j \in P} mF(j, i) = C(P, \bar{P})$ である。定理 4.34 より、 (P, \bar{P}) は最小切断になっている。