

**定理 4.6** 任意のグラフ  $G$  に対して,  $k(G) \leq I(G) \leq d(G)$  が成り立つ。

【証明】

$G$  が非連結グラフまたは自明グラフであるとき,  $k(G) \leq I(G) \leq d(G)$  が成り立つ。 $G$  が自明グラフでない連結グラフであるとき,

- (1) 任意の頂点に接続するすべての辺の集合は辺切断集合になる。ゆえに,  $I(G) \leq d(G)$  が成り立つ。
- (2) 次に,  $k(G) \leq I(G)$  が成り立つことを証明する。

$I(G) = 1$  であるとき,  $G$  は切断辺を含む。よって, 切断辺の端点は  $G$  の切断点であるので,  $k(G) = 1$ 。ゆえに,  $k(G) \leq I(G)$  が成り立つ。

$I(G) \geq 2$  であるとき, ある辺切断集合  $\{e_1, e_2, \dots, e_{I(G)}\}$  が存在し,  $e_1$  は連結グラフ  $G - \{e_2, \dots, e_{I(G)}\}$  の切断辺であると考えられる。 $u$  と  $v$  を  $e_1$  に接続する二つの頂点とし,  $v_i$  ( $2 \leq i \leq I(G)$ ) を  $e_i$  に接続し,  $u, v$  と異なる頂点のうちの一つとすると,  $G - \{v_2, \dots, v_{I(G)}\} \subseteq G - \{e_2, \dots, e_{I(G)}\}$  である。よって,  $G - \{v, v_2, \dots, v_{I(G)}\} \subseteq G - \{e_1, e_2, \dots, e_{I(G)}\}$  である。 $G - \{e_1, e_2, \dots, e_{I(G)}\}$  が非連結または自明グラフであることから, 頂点  $u$  を持つグラフ  $G - \{v, v_2, \dots, v_{I(G)}\}$  も非連結または自明グラフになる。ゆえに, 必ず  $I(G)$  よりもサイズの小さい点切断集合が存在する, つまり  $k(G) \leq I(G)$  が成り立つ。

(1)と(2)から, 任意のグラフ  $G$  に対して  $k(G) \leq I(G) \leq d(G)$  が成り立つことを得る。