定理 4.18 f 個の面, v 個の頂点, e 本の辺を持つ平面的グラフ G に対して, $f = e - v + 2$ が成り立つ。

【証明】

e に関する数学的帰納法による。

(1) $e = 0$ のとき, $v = 1$, $f = 1$ であり, オイラー公式 $f = e - v + 2$ が成り立つ。
$e = 1$ のとき, $v = 2$, $f = 1$ であり, オイラー公式 $f = e - v + 2$ が成り立つ。

(2) $e = k$ のとき, すべての平面的グラフに対して, オイラー公式が成り立つと仮定する。k 本の辺を持つ任意のグラフ $G(V, E)$ に平面性を壊さずに新しい辺 h を追加して新たなグラフ $G'(V', E')$ を作るとき, 次の二つの状況が考えられる。ここで G' の面数, $|V'|$, $|E'|$ をそれぞれ f', v', e' とする。

① 新しい頂点も一つ追加して, この頂点を元からある一つの頂点と辺で結ぶ。そうすると, $e' = e + 1$, $v' = v + 1$, $f' = f$ である。
$e' - v' + 2 = (e + 1) - (v + 1) + 2 = e - v + 2 = f = f'$ が成り立つ。

② 元からある二つの頂点を辺で結ぶ。そうすると, $e' = e + 1$, $v' = v$, $f' = f + 1$ である。$e' - v' + 2 = (e + 1) - v + 2 = (e - v + 2) + 1 = f + 1 = f'$ が成り立つ。

ゆえに, $e = k + 1$ のときにも, オイラー公式が成り立つ。

よって, 定理は証明された。