定理 4.23 n 個の頂点と m 本の辺を持つグラフ G に対して，次は同値である。
(1) G は木である。
(2) G には閉路がなく，$m=n-1$ である。
(3) G は連結であり，$m=n-1$ である。
(4) G には閉路がなく，一つの辺をどのように追加したとしても，一つの閉路ができる。
(5) G は連結であり，G の任意の辺は G の切断辺(橋)である。
(6) G の任意の２頂点間には，ただ一つの道が存在する。

【証明】
$n=1$ のときは上記６個の命題が同値であるのは自明なので，以下では $n\geq 2$ と仮定する。

$(1)\Rightarrow(2)$：n 個の頂点と m 本の辺を持つ木 G に対して，$n=2$ のとき，$m=1=n-1$ であり，$n=3$ のとき，$m=2=n-1$ である。
$n<k$ のとき，$m=n-1$ であると仮定する。
$n=k$ のとき，e を G の辺とすると，G は閉路を含まない連結グラフであるので，$G-e$ は二つの木 T_1 と T_2 になる。T_1 と T_2 がそれぞれ n_1 個と n_2 個の頂点を持つとすると，$n_1+n_2=n$，$1\leq n_1<n=k$，$1\leq n_2<n=k$ である。仮定より，木 T_1 は n_1-1 本の辺があり，木 T_2 は n_2-1 本の辺がある。よって，G に対して，
$m=(n_1-1)+(n_2-1)+1=(n_1+n_2)-1=n-1$ である。

$(2)\Rightarrow(3)$：G には閉路がなく，$m=n-1$ であるとする。G が連結ではないと仮定すると G には $k\geq 2$ 個の連結成分 $T_1, T_2, \cdots, T_k$ が含まれる。任意の T_i は連結で閉路がない，すなわち，木である。n_i を T_i の頂点数とすると，$n=n_1+n_2+\ldots+n_k$ である。$(1)\Rightarrow(2)$ より，T_i は n_i-1 本の辺がある。よって，G に対して，$m=(n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_k-1)=\ n-k<n-1$ であり，$m=n-1$ という仮定に矛盾する。ゆえに，G は連結である。

(3) $\Rightarrow$ (4)：G は連結で，$m = n-1$ であるとする。$n = 2$ のとき，$m = 2-1 = 1$ である。G は閉路がなく，一つの辺を追加すると，一つの閉路ができる。$n = k-1$ のとき，G には閉路がなく，一つの辺を追加すると，一つの閉路ができると仮定する。$n = k$ のとき，G には次数１の頂点 u が存在するので（存在しないと，$2m \geq 2n$，すなわち，$m \geq n$，$m = n-1$ に矛盾），仮定より，$G-u$ には閉路がなく，一つの辺を追加すると，一つの閉路ができる。よって，$\deg(u) = 1$ であるので，G にも閉路はなく，一つの辺を追加すると，一つの閉路ができる。

(4) $\Rightarrow$ (5)：G は閉路がなく，一つの辺を追加すると，一つの閉路ができるとする。G の任意の二つの頂点 u_1 と u_2 を考える。辺 (u_1, u_2) を追加して閉路ができるということは u_1, u_2 の間に道が存在するということである。ゆえに G は連結である。G は連結で閉路がないので，G の任意の辺 e に対して，$G-e$ は連結ではない。すなわち，G の任意の辺は G の切断辺である。

(5) $\Rightarrow$ (6)：G は連結であり，G の任意の辺は G の切断辺であるとする。G は連結であるので，G の任意の２頂点間には，道が存在する。ある２頂点の間に２本の道が存在すると，G に閉路があることになり，この閉路に含まれる辺は切断辺ではないので仮定に矛盾する。ゆえに，G の任意の２頂点間には，ただ一つの道が存在する。

(6) $\Rightarrow$ (1)：G の任意の２頂点間には，ただ一つの道が存在するとすると，G は連結であり，かつ閉路がない。つまり，G は木である。