

定理 3.5 P と Q を二つの論理式とする。 $P \Leftrightarrow Q$ が成り立つ必要十分条件は $P \Rightarrow Q$ かつ $Q \Rightarrow P$ である。

【証明】

“ \Rightarrow ” : $P \Leftrightarrow Q$ が成り立つならば, $P \Leftrightarrow Q$ が恒真式である。すなわち,
 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ が恒真式である。よって, $P \rightarrow Q$ も $Q \rightarrow P$ も
ともに恒真式である。ゆえに, $P \Rightarrow Q$ かつ $Q \Rightarrow P$ である。

“ \Leftarrow ” : $P \Rightarrow Q$ かつ $Q \Rightarrow P$ であるならば, $P \rightarrow Q$ も $Q \rightarrow P$ もともに恒真式
である。すなわち, $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ が恒真式である。よって,
 $P \Leftrightarrow Q$ が恒真式である。ゆえに, $P \Leftrightarrow Q$ が成り立つ。