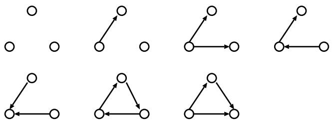
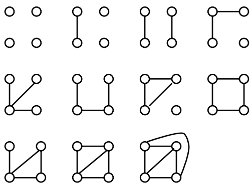
4　章

4.1

【1】 (1) 同型なものは省略

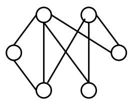


(2) 同型なものは省略

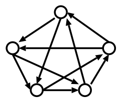


【2】 $deg(a) = 3$, $deg(b) = 3$, $deg(c) = 4$, $deg(d) = 2$, $deg(e) = 2$, $\Delta(G) = 4$, $\delta(G) = 2$.

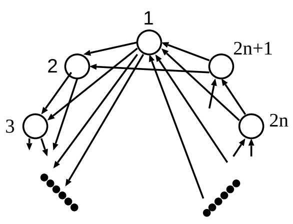
【3】



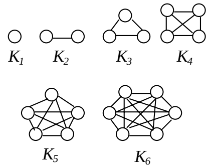
【4】 5 頂点のもの：



$2n+1$ 頂点のもの：頂点 i から，頂点 $i+1, \ldots, i+n \pmod{2n+1}$ への有向辺を作るようにする．

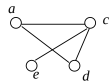


【5】 (1)

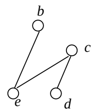


(2) それぞれ，$0, 1, 3, 6, 10, 15$.

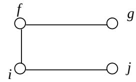
【6】 (1)



(2)

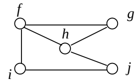


【7】 (1)

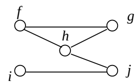


(2)

(3)



(4)



【8】 以下の写像 z を考える：$z(a) = i, z(b) = f, z(c) = h, z(d) = j, z(e) = g$.

$(a, b) \in E(G) \Leftrightarrow (i, f) \in E(H)$

$(a, c) \in E(G) \Leftrightarrow (i, h) \in E(H)$

$(a, d) \in E(G) \Leftrightarrow (i, j) \in E(H)$

$(b, c) \in E(G) \Leftrightarrow (f, h) \in E(H)$

$(b,e) \in E(G) \Leftrightarrow (f,g) \in E(H)$
$(c,d) \in E(G) \Leftrightarrow (h,j) \in E(H)$
$(c,e) \in E(G) \Leftrightarrow (h,g) \in E(H)$
よって，G と H は同型.

4.2

【1】 (1) (a,d,e) (2) (b,c) (3) (a,b,c)

【2】 (1) (c,d,f,b) (2) (c,d,f,b)
(3) (c,e,d,f)

【3】 (1) (a,g,e) (2) (b,c) (3) (a,g,e,c)

【4】 (1) (c,d,f,b) (2) (c,d,f,b)
(3) (e,c,f,g)

【5】 (1) $(\{a,b,c,d,e,f,g\})_G$
(2) $(\{a,b,c,d,e,f,g\})_G$
(3) $(\{a,b,c,d,e,f,g\})_G$

【6】 (1) $\{c\},\{d\}$ (2) $\{e,g\}$ (3) 存在しない. (4) $\{(c,d)\}$ (5) $\{(d,e),(d,g)\}$
(6) $\{(e,f),(e,h),(d,g)\}$，ならびに，次数 3 の各頂点が接続している辺の集合すべて，例えば c に対して $\{(a,c),(b,c),(c,d)\}$

【7】 $\kappa(G) = \lambda(G) = 1,\ \delta(G) = 2,\ \Delta(G) = 3$

【8】 $d(a,b) = 1, d(a,c) = 2, d(a,d) = 1, d(a,e) = 2, d(a,f) = 2, d(a,g) = 1, d(b,c) = 1, d(b,d) = 2, d(b,e) = 2, d(b,f) = 1, d(b,g) = 2, d(c,d) = 1, d(c,e) = 1, d(c,f) = 1, d(c,g) = 2, d(d,e) = 1, d(d,f) = 1, d(d,g) = 2, d(e,f) = 2, d(e,g) = 1, d(f,g) = 1, D(G) = 2.$

4.3

【1】 行列の成分に 0,1 を入れるのではなく，接続している辺の数を書くようにする．対角要素がループに対応する．

【2】 対角要素はそのままにし，対角要素以外は，1 なら 0 へ，0 なら 1 へ変更する．

【3】 $m \geq n-1$ である無向グラフを考える．定理 4.11 より，$P = (I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1})_B$．また定理 4.10 より A^k の (i,j) 成分は頂点 i から頂点 j に至る長さ k の道の数である．ここで，$k > n-1$ と仮定すると，長さ k の道は初等道ではない．このような道から閉路を取り除くことにより初等道を得ることができるが，この初等道の長さ l は $1 \leq l \leq n-1$ を満たす．すなわちこのような初等道は，すでに $A^1, \ldots, A^{n-1}$ の中で考慮されており，到達性を考えるだけならば，新たに $(A^k)_B$ を考えなくとも十分である．よって，$P' = (I + A + A^2 + \cdots + A^m)_B = (I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1})_B = P$.
$m < n-1$ の場合はグラフは非連結であり，各連結成分に対して上記の議論が同様に成立するので，全体でも成立する．

【4】 (a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

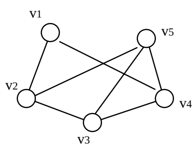
【5】 (a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

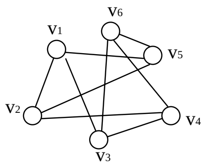
(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

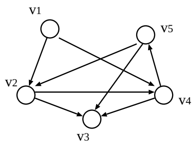
【6】 (1)



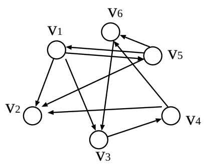
(2)



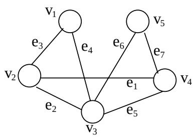
【7】 (1)



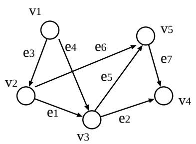
(2)



【8】 (1)



(2)



4.4

【1】 (4) と (5)

【2】 (2) と (5)

【3】 次数が奇数の頂点があるのでオイラー閉路はない.

【4】 1 つの閉路からなるグラフと任意の頂点

【5】 G に含まれるオイラー閉路を $(v, v_1, v_2, \cdots, v_k, v)$ と表す. v の次数は 2 なので, $v_1, \ldots, v_k$ は v と異なる. よって v と $(v, v_1), (v_k, v)$ を除去したグラフ $G - v$ には, オイラー道 $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ が含まれる.

【6】 (1) と (5)

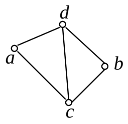
【7】 (4) と (5)

【8】 1 つの閉路からなるグラフ

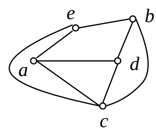
4.5

【1】 (a) 平面グラフ (b) 平面グラフでない (c) 平面グラフ

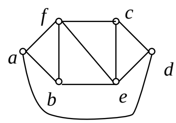
【2】 いずれも平面的



(a)

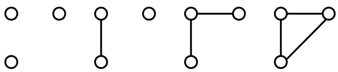


(b)



(c)

【3】 (1) 同型なものは省略



(2) 4.1 節の問【1】(2) と同様.

【4】 (a)

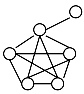
面	境界	次数
f_1	(a, b, d, e, a)	4
f_2	(a, b, d, c, a)	4
f_3	(a, c, d, a)	3
f_4	(a, d, e, a)	3

(b)

面	境界	次数
f_1	(a, b, d, e, f, a)	5
f_2	(a, b, f, a)	3
f_3	(b, e, f, b)	3
f_4	(b, d, c, e, b)	4
f_5	(d, c, e, d)	3

【5】 G を $G-v$ に変形することにより v の周囲の面が 1 つになる．v の次数を d とすると，v と隣接する頂点のうち，次数が 1 のものがなければ，$d-1$ だけ面数が減り，次数 1 の頂点が k 個あるとすると，面数が $d-1-k$ 減る．

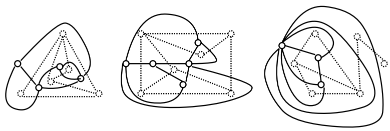
【6】 下記のグラフ (頂点数 6，辺数 11)．



【7】 (a) と (c)

4.6

【1】 点線が元のグラフで実線が双対．



(a) (b) (c)

【2】 (2) と (3) と (4)

【3】 (a)

頂点	a	c	d	b	e
色	1				
	1	2			2
	1	2	3	3	2

(b)

頂点	a	b	c	d	f	e
色	1		1			
	1	2	1		2	
	1	2	1	3	2	3

(c)

頂点	d	b	a	c	e	f
色	1					1
	1	2			2	1
	1	2	3	3	2	1

【4】 【3】で求めた彩色が 3 彩色になっている．

【5】 いずれのグラフも K_3 を含んでおり $\chi(G) \geq 3$ なので 2-彩色できない．

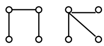
【6】 省略

【7】 $K_{3,3}$ は，2 部グラフのそれぞれの頂点集合を別の色で彩色することにより 2-彩色可能であるが平面的ではない．

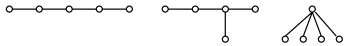
【8】 3-彩色可能と仮定する．例えば頂点 v_1, v_5, v_6 にそれぞれ色 1,2,3 で彩色したと仮定する．v_9 は v_5, v_6 と隣接しているので，色 1 で彩色しなければならず，また，v_{13} も同様．しかしながら，v_9 と v_{13} も隣接しているので，このような彩色はできない．よって 3-彩色可能であるという仮定と矛盾しており，3-彩色不可能であることが分かる．

4.7

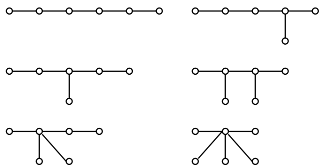
【1】 (1) 同型なものは省略．



(2) 同型なものは省略．



(3) 同型なものは省略．

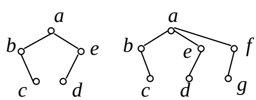


【2】 $\sum_{i=3}^{k}(i-2)n_i + 2$

【3】 まず，$k+1$ 頂点を用いて，長さ k の道を作り，その後，残りの $n-(k+1)$ 頂点は，その道中の端でない頂点のどれかに接続する．

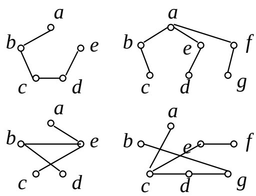
【4】 (b) が全域木．(a) は G に存在しない辺 (c,e) が含まれており，(c) は閉路 (a,d,e,a) を含んでおり木ではない．

【5】



(a) (b)

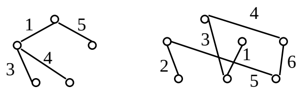
【6】



(a)　　　(b)

【7】 (a)19　(b) 16　(c) 20

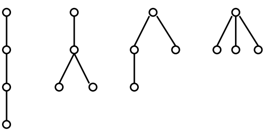
【8】 最小全域木は下記．重みはそれぞれ (c) 13 (d) 21



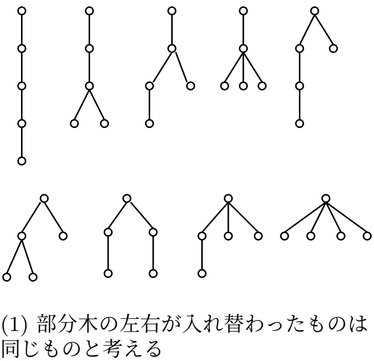
(c)　　　(d)

4.8

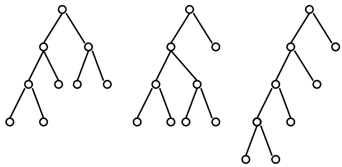
【1】 (1) 部分木の左右が入れ替わったものは同じものと考える



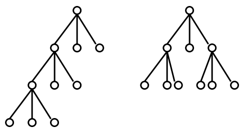
(2) 部分木の順序が入れ替わったものは同じものと考える．



【2】 (1) 部分木の左右が入れ替わったものは同じものと考える



(2) 部分木の順序が入れ替わったものは同じものと考える．

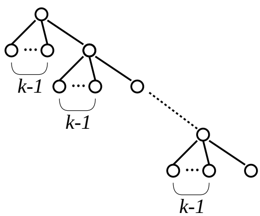


【3】 (1) (2) を参照．$k = 2$ を代入すれば得られる．

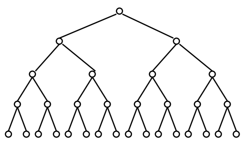
(2)(天井関数などの扱いは省略する)

最も高さが低いのは，完全 k 分木の時である．完全 k 分木なので，葉の親は m/k 個存在する．葉の親の親は m/k^2 個，同様に葉より i 個上の高さの頂点は，m/k^i 個存在する．そして $m/k^{h'} = 1$ となる，高さ h' の頂点が根になるので，この式を解くと $h' = \log_k m$

一方最も高さが高くなるのは，以下の図のような木である．この木の高さは，$(m-1)/(k-1)$ となる．よって，$\log_k m \leq h \leq (m-1)/(k-1)$．

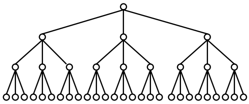


【4】 (1)

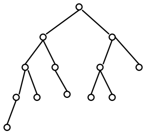


(1)

(2)



【5】 (1)

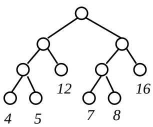


(2) 最も頂点数が多くなるのは，完全 2 分木の時．完全 2 分木においては，根からの距離が i である頂点の数は 2^i である．よって，高さ h の完全 2 分木の頂点数は，$1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^h = (2^h - 1)/(2-1) = 2^h - 1$.

最も頂点数が少なくなる場合を考える．$N(h)$ を高さ h の場合の頂点数の最小値と考えると，$N(0) = 0, N(1) = 1, N(h) = N(h-1) + N(h-2)$ となる．$\phi = (1+\sqrt{5})/2, \hat{\phi} = (1-\sqrt{5})/2$ とすると数学的帰納法を用いて $N(h) = (\phi^h - \hat{\phi}^h)/\sqrt{5}$ を示すことができる．よって，頂点数の最小値は $\frac{\phi^h - \hat{\phi}^h}{\sqrt{5}}$.

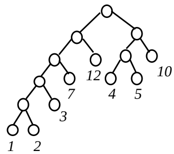
【6】 (1)

$$
\begin{aligned}
& 4, 5, 7, 8, 12, 16 \\
\Rightarrow\ & 7, 8, 9(4+5), 12, 16 \\
\Rightarrow\ & 9, 12, 15(7+8), 16 \\
\Rightarrow\ & 15, 16, 21(9+12) \\
\Rightarrow\ & 21, 31(15+16)
\end{aligned}
$$



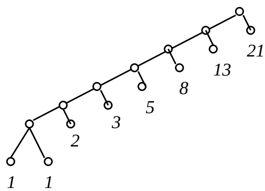
(2)

$$
\begin{aligned}
& 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 12 \\
\Rightarrow\ & 3(1+2), 3, 4, 5, 7, 10, 12 \\
\Rightarrow\ & 4, 5, 6(3+3), 7, 10, 12 \\
\Rightarrow\ & 6, 7, 9(4+5), 10, 12 \\
\Rightarrow\ & 9, 10, 12, 13(6+7) \\
\Rightarrow\ & 12, 13, 19(9+10) \\
\Rightarrow\ & 19, 25
\end{aligned}
$$



(3)

$$
\begin{aligned}
& 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \\
\Rightarrow\ & 2(1+1), 2, 3, 5, 8, 13, 21 \\
\Rightarrow\ & 3, 4(2+2), 5, 8, 13, 21 \\
\Rightarrow\ & 5, 7(3+4), 8, 13, 21 \\
\Rightarrow\ & 8, 12(5+7), 13, 21 \\
\Rightarrow\ & 13, 20(8+12), 21 \\
\Rightarrow\ & 21, 33(13+20)
\end{aligned}
$$



【7】 (1) プレフィックスコードでない．1 が 101 の接頭語として出現している．

(2) プレフィックスコード.

(3) プレフィックスコードでない．0 が 0111 の接頭語として出現している．

【8】 (a) $\{1, 010, 011\}$

(b) $\{00, 01, 1010, 1011, 110\}$

4.9

【1】 $F(a,b) = 3, F(a,c) = 2, F(a,d) = 3, F(b,z) = 3, F(c,z) = 2, F(d,e) = 3, F(e,z) = 3.$

【2】 $F(a,b)=3, F(a,c)=4, F(a,d)=4, F(b,z)=5, F(c,b)=2, F(c,z)=3, F(d,e)=4, F(e,c)=1, F(e,z)=3.$

【3】 正しいのは (2) 容量 13 と (3) 容量 11 と (5) 容量 12

【4】 (a)

$F(a,b)=3, F(a,d)=3, F(b,c)=1, F(b,z)=2, F(c,z)=1, F(d,z)=3.$

(b)

$F(a,b)=3, F(a,c)=3, F(b,e)=3, F(c,f)=3, F(e,z)=3, F(f,z)=3.$

【5】 (a)

$F(a,b)=5, F(a,d)=3, F(b,c)=3, F(b,z)=2, F(c,z)=2, F(c,d)=1, F(d,z)=4.$

(b)

$F(a,b)=3, F(a,d)=2, F(a,c)=3, F(b,e)=3, F(e,c)=1, F(e,z)=4, F(d,e)=2, F(c,f)=4, F(f,z)=4.$

【6】 (a) $(\{a,d\},\{b,c,z\})$

(b) $(\{a,b,c,d,f\},\{e,z\})$

【7】 図 4.57: $(\{a,b,c,d,e\},\{z\})$

図 4.58(a): $(\{a,b\},\{c,d,z\})$

図 4.58(b): $(\{a,b,d,e\},\{c,f,z\})$

【8】 ある最大流れ F を考える．飽和な辺が存在しないと仮定する．流れの定義より，$F(i,j)>0$ を満たす辺 (i,j) のみからなる，入口から出口に至る道が存在する．仮定より，この道に含まれる辺は全て不飽和であり，よってこの道に沿って流れを 1 増やすことができ，これは F が最大流れであることに矛盾する．よって最初の仮定が間違っており，飽和な辺が必ず存在する．