定理 4.12 無向連結グラフGがオイラーグラフである必要十分条件は各頂点の次数が偶数であることである。

【証明】

(1) まず，補題：「無向連結グラフ$G(V,E)$の全ての頂点の次数が偶数であるとき，単純閉路が存在する。」ことを証明する。

無向連結グラフ$G(V,E)$の各頂点の次数が偶数であるとき，任意の頂点vの次数は2以上である。

① $(v,v)\in E$であるとき，(v,v)という単純閉路が存在する。

② $(v,v)\notin E$であるとき，vに接続する二つの辺(v,x)と(v,y)が存在する。

(ⅰ) $x=y$ならば，vと$x(y)$の間に2本の辺が存在するので，(v,x,v)という単純閉路が存在する。

(ⅱ) $x\neq y$ならば，辺(v,x)と(v,y)をそれぞれe_1とe_2とすると，グラフ$G'=G-\{e_1,e_2\}$は，xとyの次数は奇数であるが，他の頂点の次数は偶数である。xとyがG'の同じ連結成分に属さなければ，G'を部分グラフG_1とG_2に分けることができる。ここで，xとyはそれぞれG_1とG_2に属する。G'ではxとyの次数は奇数であるが，他の頂点の次数は偶数であるので，G_1の全ての頂点の次数の和もG_2の全ての頂点の次数の和も奇数になる。これは定理4.1に矛盾する。ゆえに，xとyがG'の同じ連結成分に属する。すなわち，G'にはxからyまでの単純道がある。よって，Gにはvを通る単純閉路が存在する。

①と②より，補題の主張が成り立つ。

(2) 定理を証明する。

“$\Rightarrow$”：無向連結グラフ$G(V,E)$がオイラーグラフであるとき，Gのすべての辺を含む単純閉路がある。$C=(v_0,e_1,v_1,e_2,\ldots,e_m,v_m=v_0)$をその単純閉路とする。よって，$E=\{e_i\mid 1\le i\le m\}$，かつ$i\neq j$のとき($1\le i,j\le m$)，$e_i\neq e_j$である（すなわち$|E|=m$）。連結グラフであるので，$V=\{v_i\mid 0\le i\le m\}$である(すなわち，$G$のすべての頂点は単純閉路$C$

に含まれる)。$1 \le i < m$ に対して，辺 e_i と e_{i+1} は頂点 v_i の次数に 2 を与え，辺 e_m と e_1 は頂点 $v_0(v_m)$ の次数に 2 を与える。よって，$0 \le i \le m$ に対して，$\deg(v_i) = 2t_i$ である。ここで，t_i は C 内の v_i と同じ頂点の個数である。ゆえに，G の各頂点の次数は偶数である。

"$\Leftarrow$"：補題より，G は単純閉路が存在する。その中で $C = (v_0, e_1, v_1, e_2, ..., e_t, v_t = v_0)$ を最大数の辺を含むものとし，H を $G - \{e_1, e_2, ..., e_t\}$ とする。H に辺があるとすると，H には $|E_1| > 0$ となるような連結成分 $G_1(V_1, E_1)$ がある。ここで H は G から単純閉路 C を削除したものだから V_1 の全ての頂点の次数も偶数である。G は連結グラフであるので，V_1 に含まれる頂点のうちの一つが必ず C にも含まれる。これを $u_0 (= v_i, 0 \le i \le t)$ とすると，u_0 を通る単純閉路 $D =$ $(u_0, f_1, u_1, ..., f_k, u_k = u_0)$ も G_1 中に含まれる。よって，これを用いて $(v_i, e_{i+1}, ..., e_t, v_0, e_1, v_1, ..., e_i, v_i = u_0, f_1, ..., f_k, u_0 = v_i)$ という C より長い単純閉路を G 中に作れることになるので C が最大辺数を持つ閉路であるという仮定に矛盾する。ゆえに，H は辺がないグラフである。つまり，C は G のすべての辺を含む閉路，すなわちオイラー閉路であり，G はオイラーグラフである。