

**定理 1.41** 実数集合  $R$  は可算集合ではない。

【証明】

$S = \{x \mid x \in R, 0 < x < 1\}$  とすると, 全単射関数  $f: R \rightarrow S, f(x) = \tan^{-1}(x/p) + 1/2$  があるので,  $R \approx S$  である。以下は, 背理法 (帰謬法) を利用して,  $S$  は可算集合ではないことを証明する。

もし  $S$  が可算集合であれば,  $S$  を  $\{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\}$  で表現できる。ここで,

$0 < s_i = 0.y_{i1}y_{i2}\dots y_{im}\dots < 1, y_{ij} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, j = 1, 2, \dots$  である

(例えば,  $0.123$  は  $0.122999\dots 9\dots$  と表し,  $0.5$  は  $0.4999\dots 9\dots$  と表す)

$S$  から次の数を作る。  $b = 0.b_1b_2\dots b_n\dots$  , ただし,  $b_j = 9 - y_{jj}$  である。すると,  $b$  は  $b_1$  では  $s_1$  と異なり,  $b_2$  では  $s_2$  と異なり,  $\dots$ ,  $b_n$  では  $s_n$  と異なり,  $\dots$ , ということで,  $S$  の中に存在しない実数である。つまり,  $S$  が可算集合であるという仮定は誤りだということになる。ゆえに,  $S$  は可算集合ではない。  $R \approx S$  より,  $R$  は可算集合ではない。(この証明法は Cantor の**対角線法**という。)