

定理 4.30 重み $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_t$ を持つ木のうち下記の条件を満たす最適木がある。

- (1) 重み w_1 と w_2 を持つ葉 v_1 と v_2 が兄弟である。
- (2) 葉 v_1 と v_2 の親は根からの道の長さが最大となる枝点である。

【証明】

重み $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_t$ を持つ最適木 T' に対して、 v を道の長さが最大となる枝点とする。 $w_x \leq w_y$ である w_x と w_y を v の二つの子の重みとすると、 $L(w_x) = L(w_y)$ 、 $L(w_x) \geq L(w_1)$ 、 $L(w_y) \geq L(w_2)$ 、 $w_1 \leq w_x$ 、 $w_2 \leq w_y$ が成り立つ。 T' の中で、 w_1 を w_x と、 w_2 を w_y と交換した新しい T を考えると、

$$\begin{aligned} W(T) - W(T') &= (w_x L(w_1) + w_1 L(w_x) + w_y L(w_2) + w_2 L(w_y)) \\ &\quad - (w_1 L(w_1) + w_x L(w_x) + w_2 L(w_2) + w_y L(w_y)) \\ &= (w_x - w_1)(L(w_1) - L(w_x)) + (w_y - w_2)(L(w_2) - L(w_y)) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

である。 T' は最適木であるので、 $W(T) - W(T') = 0$ である。よって、 T も最適木である。すなわち、 T は定理の条件を満たす最適木である。