

定理 2.25 有限整域(すなわち,有限集合上の整域)は体である。

【証明】

n を有限集合 A の要素の個数とする。 A の任意の要素 a, b, c に対して,
 $\langle A, +, \times \rangle$ は整域であるから, $c \neq 0$ とき $a \neq b$ ならば, $c \times a \neq c \times b$ である。
よって, $c \times A$ の中に, n 個の異なる要素がある。乗法は A 上の閉じた演算
であるから, $c \times A = A$ が成り立つ。よって, A の乗法の単位元 1 に対して, A の
中に必ず要素 d があり, $c \times d = 1$ が成り立つ。すなわち, d は c の逆元である。
よって,可換モノイド $\langle A, \times \rangle$ に対して, $\langle A - \{0\}, \times \rangle$ はアーベル群である。
ゆえに,有限整域 $\langle A, +, \times \rangle$ は体である。