

定理 2.23 整域 $\langle A, +, \times \rangle$ に対して, 乗法 \times の消去律(すなわち, $c \neq q$ かつ $c \times a = c \times b$ ならば, $a = b$ である。ここで q は加法 $+$ の単位元。)は零因子がない条件と同じである。

【証明】

- (1) 零因子がないとき, $c \neq q$ かつ $c \times a = c \times b$ ならば,
 $q = (c \times a) - (c \times b) = c \times (a - b)$ である。よって, $a - b = q$, すなわち, $a = b$
である。ゆえに, 消去律が成り立つ。
- (2) 消去律が成り立つとき, $a \neq q$ かつ $a \times x = q$ ならば, $a \times x = a \times q$ である。
よって, $x = q$ である, すなわち, 零因子がない。