定理 2.20 代数系の集合において代数系の同型関係は同値関係である。

【証明】

Ωを代数系の集合とする。

(1) 反射性：Ωの任意の代数系$< A , * >$**に対して，** A **上の恒等関数** I_A **は**$< A , * >$**自身への同型写像である。よって，**$< A , * > \cong < A , * >$**である。**

(2) 対称性：Ωの任意の代数系$< A , * >$**と**$< B , ▲ >$**に対して，** $< A , * > \cong < B , ▲ >$**であれば，ある全単射関数** $f : A \to B$ **が存在して，** A **の任意の要素** a_1 **と** a_2 **に対して，式** $f(a_1 * a_2) = f(a_1) ▲ f(a_2)$ **が成り立つ。** f **は全単射関数であるから，** f **の逆関数** f^{-1} **が存在し，** f^{-1} **もまた** B **から** A **への全単射関数である。よって，** B **の任意の要素** b_1 **と** b_2 **に対して，** A **の要素** a_1' **と** a_2' **が存在して，** $f^{-1}(b_1) = a_1'$ **かつ** $f^{-1}(b_2) = a_2'$ **である。すなわち，** $f(a_1') = b_1$ **かつ** $f(a_2') = b_2$ **である。ゆえに，**

$$\begin{aligned} f^{-1}(b_1 ▲ b_2) &= f^{-1}(f(a_1') ▲ f(a_2')) \\ &= f^{-1}(f(a_1' * a_2')) \\ &= a_1' * a_2' \\ &= f^{-1}(b_1) * f^{-1}(b_2) \end{aligned}$$

である。すなわち，関数 f^{-1} **は**$< B , ▲ >$**から**$< A , * >$**への同型写像である。ゆえに，** $< B , ▲ > \cong < A , * >$**である。**

(3) 推移性：Ωの任意の代数系$< A , * >$**と**$< B , ▲ >$**と**$< C , ★ >$**に対して，**$< A , * > \cong < B , ▲ >$**かつ**$< B , ▲ > \cong < C , ★ >$**であるとき，ある全単射関数** $f : A \to B$ **と** $g : B \to C$ **に対して，合成関数** $g \circ f$ **は** A **から** C **への全単射関数である。** A **の任意の要素** a_1 **と** a_2 **に対して，**

$$\begin{aligned} g \circ f(a_1 * a_2) &= g(f(a_1 * a_2)) \\ &= g(f(a_1) ▲ f(a_2)) \\ &= g(f(a_1)) ★ g(f(a_2)) \\ &= g \circ f(a_1) ★ g \circ f(a_2) \end{aligned}$$

ゆえに， $< A , * > \cong < C , ★ >$**である。**

よって，Ωの代数系の同型関係は同値関係である。