定理 2.6 ＜S , $*$ ＞を半群とする。S が有限集合であるとき，$a*a=a$ となる S のある要素 a が存在する。

【証明】

＜S , $*$ ＞は半群であるから，$*$ は閉じた演算である。S の任意の要素 b に対して，$b^2=b*b\in S$, $b^3=b^2*b=b*b^2\in S$, $\cdots$, $b^{m+1}=b^m*b=b*b^m\in S$ 。

S は有限集合であるから，ある $j>i$ が存在して，$b^j=b^i$ が成り立つ。$p=j-i$ とすると，$b^i=b^p*b^i$ 。ゆえに，任意の $q\geq i$ に対して，$b^q=b^p*b^q$ が成り立つ。$p=j-i\geq 1$ であるから，$kp\geq i$ となるような $k\geq 1$ が存在する。よって，S の要素 b^{kp} に対して，

$$
\begin{aligned}
b^{kp} &= b^p*b^{kp} \\
&= b^p*(b^p*b^{kp}) \\
&= b^{2p}*b^{kp} \\
&= b^{2p}*(b^p*b^{kp}) \\
&= b^{3p}*b^{kp} \\
&\cdots \\
&= b^{kp}*b^{kp}
\end{aligned}
$$

である。

b^{kp} を a とすると，$a*a=a$ が成り立つ。