演習問題の略解

1　章

1．1

【1】 $A = F = G = \{1,3\}$，
$B = C = H = \{2,4\}$，$D = E = \{6,8\}$

【2】 $A = \{1\}$，$B = \phi$，$C = \{0,1,2,3,4\}$

【3】 ⑴ × ⑵ ○ ⑶ ○ ⑷ × ⑸ ×

【4】 ⑴ ○ ⑵ × ⑶ ○ ⑷ × ⑸ ×

【5】 ⑴ $\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\}$
⑵ $\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,3\},\{1,4\},$
$\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,3,4\},$
$\{2,3,4\}$
⑶ $\{3\},\{4\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},$
$\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},$
$\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}$
⑷ $\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\}$
⑸ $\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,3\},\{1,4\},$
$\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}$

【6】 ⑴ $\{\phi\}$ ⑵ $\{\phi,\{\phi\}\}$
⑶ $\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$
⑷ $\{\phi,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}$
⑸ $\{\phi,\{\{a,\{a\}\}\}\}$

【7】 ⑴ ○ ⑵ ○ ⑶ ○ ⑷ × ⑸ ○

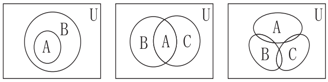
【8】 ⑴ $2^{15} = 32768$ ⑵ $2^{14} = 16384$

1．2

【1】 ⑴ $\{\phi\}$ ⑵ ϕ ⑶ $\{\phi,\{\phi\}\}$ ⑷ $\{\phi\}$
⑸ $\{\phi,\{\phi\}\}$ ⑹ $\{\{\phi\}\}$

【2】 ⑴ $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,15,16,18,$
$21,24,27,30\}$ ⑵ ϕ ⑶ $\{4,5\}$
⑷ $\{2,3,4,5,6,8,16\}$ ⑸ $\{5\}$

【3】



⑴　　⑵　　⑶

【4】 ⑴ $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow$
$A \cup B = B \Leftrightarrow {\sim}A \cap {\sim}B = {\sim}B$
$\Leftrightarrow {\sim}B \subseteq {\sim}A$
⑵ $A \subseteq {\sim}B \Leftrightarrow A \cup {\sim}B = {\sim}B$
$\Leftrightarrow A \cap B = \phi \Leftrightarrow {\sim}A \cup B = {\sim}A$
$\Leftrightarrow B \subseteq {\sim}A$
⑶ ${\sim}A \subseteq B \Leftrightarrow {\sim}A \cup B = B \Leftrightarrow$
$A \cup B = \mathrm{U} \Leftrightarrow A \cap {\sim}B = {\sim}B$
$\Leftrightarrow {\sim}B \subseteq A$
⑷ $A \oplus B = \phi \Leftrightarrow A - B = \phi$ かつ
$B - A = \phi \Leftrightarrow A = B$

【5】 ⑴ $(A-B) \cup (A-C) = A$
$\Rightarrow (A \cap {\sim}B) \cup (A \cap {\sim}C) = A$
$\Rightarrow A \cap ({\sim}B \cup {\sim}C) = A$
$\Rightarrow A \cap {\sim}(B \cap C) = A$
$\Rightarrow A \cap B \cap C = \phi$
⑵ $(A-B) \cup (A-C) = \phi$
$\Rightarrow (A \cap {\sim}B) \cup (A \cap {\sim}C) = \phi$
$\Rightarrow A \cap ({\sim}B \cup {\sim}C) = \phi$
$\Rightarrow A \cap {\sim}(B \cap C) = \phi$
$\Rightarrow {\sim}A \cup B \cap C = \mathrm{U}$
⑶ $(A-B) \cap (A-C) = \phi$
$\Rightarrow (A \cap {\sim}B) \cap (A \cap {\sim}C) = \phi$
$\Rightarrow A \cap ({\sim}B \cap {\sim}C) = \phi$
$\Rightarrow A \cap {\sim}(B \cup C) = \phi$
$\Rightarrow {\sim}A \cup (B \cup C) = \mathrm{U}$
$\Rightarrow A \cap (B \cup C) = A$
⑷ $(A-B) \oplus (A-C) = \phi$
$\Rightarrow (A-B) = (A-C)$
$\Rightarrow A \cap {\sim}B = A \cap {\sim}C$
$\Rightarrow \phi = A \cap B \cap {\sim}C$

$\Rightarrow A \cap B - C = \phi$

【6】(1)　$(A \cap B) \oplus (A \cap C)$

$= ((A \cap B) - (A \cap C))$

$\cup ((A \cap C) - (A \cap B))$

$= ((A \cap B) - C) \cup ((A \cap C) - B)$

$= (A \cap (B - C)) \cup (A \cap (C - B))$

$= A \cap ((B - C) \cup (C - B))$

$= A \cap (B \oplus C)$

(2) 例えば，$A = B = C = \{1\}$ とすると，

$A \cup (B \oplus C) = \{1\}$，

$(A \cup B) \oplus (A \cup C) = \phi$．

(3)　$\wp(A \cap B)$

$= \{X \mid X \subseteq A \cap B\}$

$= \{X \mid X \subseteq A$ かつ $X \subseteq B\}$

$= \{X \mid X \subseteq A\} \cap \{X \mid X \subseteq B\}$

$= \wp(A) \cap \wp(B)$

(4) 例えば，$A = \{1,2\}, B = \{2,3\}$ とすると，$\{1,2,3\} \in \wp(A \cup B)$，

$\{1,2,3\} \notin \wp(A) \cup \wp(B)$．

【7】(1) 45% (2) 5%

【8】16

1．3

【1】(1) $\{<0,1>, <0,2>, <1,1>, <1,2>\}$

(2) $\{<1,0>, <2,0>, <1,1>, <2,1>\}$

(3) $\{<0,1,1>, <0,1,2>, <1,1,1>, <1,1,2>\}$

(4) $\{<0,0>, <0,1>, <1,0>, <1,1>\}$

【2】(1) $\{<\phi, a>, <\{a\}, a>, <\{b\}, a>, <\{a,b\}, a>, <\phi, b>, <\{a\}, b>, <\{b\}, b>, <\{a,b\}, b>\}$

(2) ϕ

【3】$\{<1,1>, <1,4>\}, \{<1,1>, <1,4>\}$

【4】(1) 任意の $x \in A$ に対して，

$<x,x> \in A \times A = A \times B$ より，

$x \in B$，即ち，　$A \subseteq B$

(2) 任意の $x \in B$ とある $a \in A$ に対して，$<a,x> \in A \times B = A \times A$ より，

$x \in A$，即ち，　$B \subseteq A$

(1) と (2) より (定理1.1.2参照)，

$A = B$．

【5】$A \neq \phi$ より，ある $a \in A$ 存在する．

(1) 任意の $x \in B$ に対して，

$<a,x> \in A \times B = A \times C$ より，

$x \in C$，即ち，　$B \subseteq C$．

(2) 任意の $x \in C$ に対して，

$<a,x> \in A \times C = A \times B$ より，

$x \in B$，即ち，　$C \subseteq B$．

(1) と (2) より，　$B = C$．

【6】任意の $<x,y> \in A \times B$ に対して，

$x \in A \subseteq C$ かつ $y \in B \subseteq D$ より，

$<x,y> \in C \times D$．ゆえに，

$A \times B \subseteq C \times D$．

【7】(1) $A = D = \phi, B = C = \{1\}$ とすると，$(A \times C) \cup (B \times D) = \phi$，

$(A \cup B) \times (C \cup D) = \{<1,1>\}$．

(2) $<x,y> \in (A \cap B) \times (C \cap D)$

$\Leftrightarrow x \in A, x \in B, y \in C, y \in D$

$\Leftrightarrow <x,y> \in (A \times C) \cap (B \times D)$

(3) $A = B = \{1\}, C = \{2\}, D = \{3\}$ とすると，

$(A - B) \times (C - D) = \phi$，

$(A \times C) - (B \times D) = \{<1,2>\}$．

(4) $A = B = C = \{1\}, D = \phi$ とすると，　$(A \oplus B) \times (C \oplus D) = \phi$

$(A \times C) \oplus (B \times D) = \{<1,1>\}$．

【8】$A \cap B \neq \phi$ より，　$A \neq \phi, B \neq \phi$．

$(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$ より，

$C \neq \phi, D \neq \phi, C \times D = D \times C$．よっ

て， $C=D, A\subseteq C, B\subseteq C$ ．任意の $x\in C$ に対して， $<x,x>\in C\times C$ $=(A\times B)\bigcup(B\times A)$, 即ち， $x\in A$, $x\in B$, よって， $C\subseteq A, C\subseteq B$ ．ゆえに， $A=B=C=D$ ．

1．4

【1】 $R_0=\phi, R_1=\{<a,1>\}, R_2=\{<b,1>\}$,
$R_3=\{<a,1>,<b,1>\}, R_4=\{<c,1>\}$,
$R_5=\{<a,1>,<c,1>\}$,
$R_6=\{<b,1>,<c,1>\}$,
$R_7=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>\}$.

【2】 2^{n^2}

【3】 (1) $\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$
(2) $\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,1>,$
$<2,2>,<2,3>,<3,1>,<3,2>,$
$<3,3>\}$ (3) $\{<1,2>,<1,3>,$
$<2,1>,<2,3>,<3,1>,<3,2>\}$
(4) $\{<1,2>,<1,3>,<2,3>\}$
(5) $\{<2,1>,<3,1>,<3,2>\}$

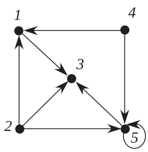
【4】 $\{<1,4>,<1,2>,<2,4>,<2,5>,<3,1>,$
$<3,3>,<4,4>,<5,1>,<5,3>\}$

【5】 $R\bigcup S=A\times A$ より， $\sim R=(A\times A)$
$-R=(R\bigcup S)-R=(R\bigcup S)\bigcap\sim R$
$=S\bigcap\sim R=S-R$.

【6】 $\{<1,2>,<1,3>,<2,4>,<3,3>,<4,2>\}$,
$\{<2,4>\}$, $\{1,2,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3\}$,
$\{2,3,4\}$, $\{2\}$, $\{4\}$.

【7】

$$M_R=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1\\0&0&1&0&1\end{bmatrix}$$



【8】 $\{<1,1>,<1,3>,<1,5>,<2,4>,<3,2>,$
$<3,5>,<5,2>,<5,4>\}$

1．5

【1】(1) 推移的, 反対称的
(2) 反射的, 対称的, 推移的
(3) 反対称的
(4) 対称的, 推移的, 反反射的, 反対称的
(5) 反射的, 対称的, 推移的

【2】(1) 反射的, 推移的, 反対称的
(2) 推移的, 反対称的
(3) 対称的, 反反射的

【3】(1) $\{<1,2>\}$
(2) $\{<1,1>,<1,2>,<2,2>,<3,3>\}$
(3) $\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,$
$<2,3>,<3,2>,<3,3>\}$
(4) $\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$ (5) ϕ

【4】 I_A を A 上の恒等関係とする.
(1) $R\supseteq I_A, S\supseteq I_A$ より， $R\bigcap S\supseteq I_A$, $R\bigcup S\supseteq I_A$. (2) 任意の $<x,y>\in R\bigcup S$ に対して, $<x,y>\in R$ または $<x,y>\in S$. よって, $<y,x>\in R$ または $<y,x>\in S$. 即ち, $<y,x>\in R\bigcup S$ ゆえに, $R\bigcup S$ も対称的である. 他も同様に証明できる. (3) 任意の $<x,y>,<y,z>\in R\bigcap S$ に対して, $<x,y>,<y,z>\in R$ かつ $<x,y>,<y,z>\in S$. よって， $<x,z>\in R$ かつ $<x,z>\in S$, 即ち, $<x,z>\in R\bigcap S$. ゆえに, $R\bigcap S$ も推移的である. (4) $R\bigcap I_A=\phi, S\bigcap I_A=\phi$ より, $(R\bigcap S)\bigcap I_A=\phi$, $(R-S)\bigcap I_A=\phi$, $(R\oplus S)\bigcap I_A=\phi$.
(5) 任意の $<x,y>,<y,x>\in R\bigcap S$ に対して, $<x,y>,<y,x>\in R$. よって, $x=y$. ゆえに, $R\bigcap S$ も反対称的である. $R-S$ も同様に証明できる.

【5】(1) $R=S=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$
(2) $R=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$,

$S=\{<1,1>,<1,3>\}$

(3) $R=\{<1,2>\}$, $S=\{<2,1>\}$

【6】(1)例えば$<1,2>,<2,1>\in R,<1,1>\notin R$

(2) $R_1=R\bigcup\{<1,1>,<3,2>,<4,1>,$ $<4,2>\}$ (3)存在する. 例えば,

$R_2=R_1\bigcup\{<4,4>\}$

【7】"$\Rightarrow$":$<a,b>\in R,<a,c>\in R$ ならば, R が対称的であるので, $<b,a>\in R$. R が推移的であるので, $<b,c>\in R$. "$\Leftarrow$": ①$<x,y>\in R$ に対して, R が反射的であるので, $<x,x>\in R$. $a=c=x,b=y$ とし, 条件により, $<b,c>=<y,x>\in R$, 即ち, R が対称的である. ②$<x,y>,<y,z>\in R$ に対して, ①より, $<y,x>\in R$. $a=y$, $b=x,c=z$ とし, 条件により, $<b,c>=<x,z>\in R$, 即ち, R が推移的である.

【8】(1) $2^{n(n-1)}$ (2) $2^{n(n-1)}$

(3) $2^{n(n+1)/2}$ (4) $2^{n(n-1)/2}$

1．6

【1】$R\circ S=\{<1,1>,<1,3>,<1,4>,<3,2>\}$

$S\circ R=\{<2,2>,<2,3>,<2,4>\}$

$R\circ S\circ R=\{<1,2>,<1,3>,<1,4>\}$

$S\circ S=\{<2,2>,<4,1>,<4,3>,<4,4>\}$

$S\circ S\circ S=\{<2,1>,<2,3>,<2,4>,<4,2>\}$

$R^c=\{<2,1>,<3,3>,<4,3>\}$

$R^c\circ S^c=\{<2,2>,<3,2>,<4,2>\}$

【2】(1)○: $R\supseteq I_A,S\supseteq I_A$より, $R\circ S\supseteq I_A$

(2)×: $R=\{<1,2>,<2,1>\}$,

$S=\{<2,3>,<3,2>\}$ とすると,

$R\circ S=\{<1,3>\}$.

(3)×: $R=\{<1,1>,<2,3>\}$,

$S=\{<1,2>,<3,3>\}$ とすると,

$R\circ S=\{<1,2>,<2,3>\}$.

【3】(1) "$\Rightarrow$": R が反射的であるので, 任意の $x\in A$ に対して, $<x,x>\in R$, 即ち, $I_A\subseteq R$. "$\Leftarrow$": $I_A\subseteq R$ より, 任意の $x\in A$ に対して, $<x,x>\in R$, 即ち, R が反射的である. (2) "$\Rightarrow$": 任意の $x\in A$ に対して, 反反射的であるので, $<x,x>\notin R$. よって, $R\bigcap I_A=\phi$. "$\Leftarrow$": $R\bigcap I_A=\phi$ より, 任意の $x\in A$ に対して, $<x,x>\notin R$. ゆえに, R が反反射である.

【4】"$\Rightarrow$": 任意の$<x,z>\in R\circ R$ に対して, ある $y\in A,<x,y>\in R,<y,z>\in R$. R が推移的であるので, $<x,z>\in R$. 即ち, $R\circ R\subseteq R$. "$\Leftarrow$": 任意の$<x,y>\in R,<y,z>\in R$ に対して, $<x,z>\in R\circ R\subseteq R$. 即ち, R が推移的である.

【5】(1)①問【4】より, $R\circ R\subseteq R$. ②任意の$<x,y>\in R$ に対して, R が反射的であるので, $<y,y>\in R$. よって, $<x,y>\in R\circ R$, 即ち, $R\subseteq R\circ R$. ①と②より, $R=R\circ R$. (2)推移的であるが, 反射的ではない可能性がある. 例えば, $A=\{1\},R=\phi$.

【6】(1)○: $R\supseteq I_A$ より, $R^c\supseteq I_A$.

(2)○: $R=R^c$ より, $R^c=R=(R^c)^c$.

(3)○: $R\circ R\subseteq R$ より, $R^c\circ R^c\subseteq R^c$.

【7】"$\Rightarrow$": $(R\circ R)\bigcap R\neq\phi$ であれば, ある $<a,c>\in(R\circ R)\bigcap R$, よって, $<a,c>\in(R\circ R),<a,c>\in R$. 即ち, ある$b\in A,<a,b>\in R,<b,c>\in R$. これは条件に矛盾. ゆえに, $(R\circ R)\bigcap R=\phi$. "$\Leftarrow$":$<a,b>\in R,<b,c>\in R$ ならば, $<a,c>\in(R\circ R)$. $<a,c>\in R$ であると, $<a,c>\in(R\circ R)\bigcap R$. これは

$(R\circ R)\cap R=\phi$ に矛盾. ゆえに, $<a,c>\notin R$.

【８】 $R\circ(S\cup T)=\{<x,y>|<x,y>\in R\circ(S\cup T)\}$ $=\{<x,y>|$ ある $a\in A, <x,a>\in R$, $<a,y>\in S\cup T\}=\{<x,y>|$ ある $a\in A$, $<x,a>\in R$, $(<a,y>\in S$, または, $<a,y>\in T)\}=\{<x,y>|$（ある $a_1\in A$, $<x,a_1>\in R$, $<a_1,y>\in S$), または, (ある $a_2\in A$, $<x,a_2>\in R, <a_2,y>\in T$) $=\{<x,y>|<x,y>\in R\circ S$, または, $<x,y>\in R\circ T\}=(R\circ S)\cup(R\circ T)$.

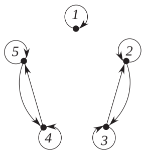
１．７

【１】(1) 15 (2) 15

【２】① $A_i\cap B\neq\phi$ $(1\le i\le k)$. ② $A_i\neq A_j$ ならば, $A_i\cap A_j=\phi$. よって, $A_i\cap B\neq A_j\cap B$, $(A_i\cap B)\cap(A_j\cap B)=\phi$. ③ $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k=A$ より, $(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cup\ldots\cup(A_k\cap B)=(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k)\cap B=A\cap B$. ①②③より, 問の主張が成り立つ.

【３】

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$



【４】 S の定義より, $S=R\circ R$. R が反射的かつ推移的であるので, 1.6 節の【５】(1)より, $R\circ R=R$. 即ち, $S=R$. ゆえに, 問の主張が成り立つ.

【５】任意の $a\in A$ に対して, ある $b\in A$, $<a,b>\in R$. R が対称的であるので, $<b,a>\in R$. R が推移的であるので, $<a,a>\in R$. 即ち, R が反射的である. ゆえに, R が同値関係である.

【６】(1)×:例えば, $R=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,1>\}$, $(A\times A-R)\cup I$ が推移的ではない. (2)×:例えば, $R=A\times A$, S を(1)の R とすると, (1)と同じである. (3)○: $R\circ R=R$ (4)×: $R=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,1>\}$, $S=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<2,3>,<3,2>\}$, $R\circ S$ が対称的ではない.

【７】(1) ①任意の $<a,b>\in Z\times Z$ に対して, $a+b=b+a$ であるので, $<<a,b>,<a,b>>\in R$. ゆえに, R が反射的である. ②任意の $<<a,b>,<c,d>>\in R$ に対して, $a+d=b+c$ であるので, $c+b=d+a$ である. よって, $<<c,d>,<a,b>>\in R$ ゆえに, R が対称的である. ③任意の $<<a,b>,<c,d>>\in R, <<c,d>,<e,f>>\in R$ に対して, $a+d=b+c, c+f=d+e$ であるので, $a+d+c+f=b+c+d+e$ である。即ち, $a+f=b+e$. よって, $<<a,b>,<e,f>>\in R$. ゆえに, R が推移的である. ①②③より. R が同値関係である.

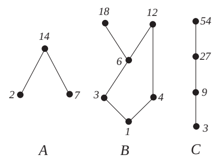
(2) $[<3,9>]_R=\{<1,7>,<2,8>,<3,9>\}$

【８】 $A/R=\{\{6,12,18\},\{1,7,13,19\},\{2,8,14\},\{3,9,15\},\{4,10,16\},\{5,11,17\}\}$

１．８

【１】(1)○(2)×(3)×(4)○

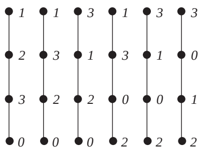
【２】$\langle C,\leq\rangle$ が全順序集合である.



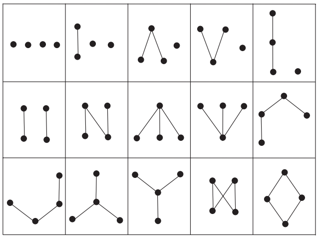
【３】 $B\subseteq A, R\supseteq I_A, R\cap R^c\subseteq I_A, R\circ R\subseteq R$ より, $S=R\cap(B\times B)\supseteq I_A\cap(B\times B)=I_B$, $S\cap S^c=(R\cap(B\times B))\cap(R\cap(B\times B))^c$ $=(R\cap R^c)\cap(B\times B)\subseteq I_A\cap(B\times B)=I_B$,

$S\circ S=(R\bigcap(B\times B))\circ(R\bigcap(B\times B))$
$\subseteq(R\circ R)\bigcap(R\circ(B\times B))\bigcap((B\times B)\circ R)$
$\bigcap((B\times B)\circ(B\times B))\subseteq(R\circ R)\bigcap(B\times B)$
$\subseteq R\bigcap(B\times B)=S$. ゆえに, Sが反射的, 反対称的, 推移的である. 即ち, 半順序関係である.

【4】



【5】



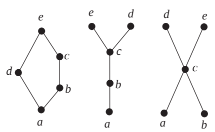
【6】(1)極大元: e, f. 極小元: a,b. 他はなし. (2)極大元, 最大元, 上界, 上限: e. 極小元, 最小元, 下界, 下限: a. (3)極大元, 最大元, 上限: d. 上界: d,e,f. 他はなし.

【7】

$$M_1=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\quad M_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$M_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\\0&0&1&0&1\\1&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

【8】



(1) (2) (3)

1.9

【1】(1)全射(2)なんでもない(3)全単射

【2】任意の$y\in f(A)-f(C)$に対して, $y\in f(A)$, $y\notin f(C)$. よって, ある$x\in A, x\notin C$, $y=f(x)$. よって, $x\in A-C, y=f(x)\in f(A-C)$. ゆえに, $f(A)-f(C)\subseteq f(A-C)$.

【3】(1) $n\leq m$ (2) $n\geq m$ (3)単射の時: $m!/(m-n)!$ 全単射の時: $n!$

【4】(1) $f(C\bigcup D)=\{y\,|\,y\in f(C\bigcup D)\}$
$=\{y\,|$ ある$x, x\in C\bigcup D, y=f(x)\}$
$=\{y\,|$ ある$x, (x\in C,$ または$, x\in D),$ $y=f(x)\}=\{y\,|($ ある$x_1, x_1\in C, y=f(x_1)),$ または$,($ ある$x_2, x_2\in D, y=f(x_2))\}=\{y\,|$ $y\in f(C),$ または$y\in f(D)\}=f(C)\bigcup f(D)$.
(2) $f(C\bigcap D)=\{y\,|\,y\in f(C\bigcap D)\}$
$=\{y\,|$ ある$x, x\in C\bigcap D, y=f(x)\}$
$=\{y\,|$ ある$x, (x\in C, x\in D), y=f(x)\}\subseteq$ $\{y\,|($ ある$x_1, x_1\in C, y=f(x_1)), ($ ある $x_2, x_2\in D, y=f(x_2))\}=\{y\,|\,y\in f(C),$ $y\in f(D)\}=f(C)\bigcap f(D)$.

【5】任意の$b_1, b_2\in B$に対して, $b_1\neq b_2$と仮定する. fが$A\to B$の全射関数であるので, ① ある $a_1, a_2\in A, b_1=f(a_1), b_2=f(a_2)$. ② $f(a_1)\neq f(a_2)$の時, $a_1\neq a_2$である. 即ち, $a_1\in g(b_1)\subseteq A, a_2\in g(b_2)$ $\subseteq A$よって, $g(b_1)\neq g(b_2)$. ゆえに, gが$B\to\wp(A)$の単射関数である。

【6】(1) $f(1)=2, f(2)=3, f(3)=4, f(4)=1$.
(2) $f^2(1)=3, f^2(2)=4, f^2(3)=1, f^2(4)=2$.
$f^3(1)=4, f^3(2)=1, f^3(3)=2, f^3(4)=3$.
$f^{-1}=f^3$. $f\circ f^{-1}=I_A$.
(3) $g(1)=2, g(2)=1, g(3)=4, g(4)=3$.

【7】$f^{-1}=f^{-1}\circ I_B=f^{-1}\circ(f\circ g)=(f^{-1}\circ f)\circ g$

$= I_A \circ g = g$, $g^{-1} = I_B \circ g^{-1} = (f \circ g)$
$\circ g^{-1} = f \circ (g \circ g^{-1}) = f \circ I_A = f$.

【８】$(g \circ f)^{-1}$ が $C \to A$ の関数であるならば, $g \circ f$ が $A \to C$ の全単射関数である. よって, $C \supseteq g(B) \supseteq g(f(A)) = g \circ f(A) = C$, 即ち, $g(B) = C$. ゆえに, g が全射関数である. f が単射関数ではないと, ある $x, y \in A, x \neq y, f(x) = f(y) \in B$. よって, $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = g \circ f(y)$, 即ち, $g \circ f$ が単射関数ではない. 矛盾. ゆえに, f が単射関数である.

１．１０

【１】⑴ $f(x) = 2x$ ⑵ $f(x) = -(1/4)x + 1/2$ ⑶ $f(x) = 2^x$

【２】⑴ $A' = \{n/(n+1) \mid n = 1, 2, \ldots\}$ とし, $x \in A - A'$ の時, $f(x) = x$, $x \in A'$ の時, $f(x) = 2 - (1/x)$ とする. ⑵ $A' = \{1/n \mid n = 2, 3, \ldots\}$ とし, $x \in A - A'$ の時, $f(x) = x$, $x \in A'$ の時, $f(x) = x/(1-x)$ とする. ⑶ $A' = \{x \mid x = 0, 1, 2, \ldots\}$ とし, $x \in A - A'$ の時, $f(x) = x$, $x \in A'$ の時, $f(x) = x + 1$ とする.

【３】f と g をそれぞれ $A \approx B$ と $C \approx D$ の対等の全単射関数とする. 以下の h が $(A \cup C) \approx (B \cup D)$ の全単射関数である : $x \in A$ の時, $h(x) = f(x)$, $x \in C$ の時, $h(x) = g(x)$ である.

【４】f と g をそれぞれ $A \approx B$ と $C \approx D$ の対等の全単射関数とする. 以下の h が $A \times C \approx B \times D$ の全単射関数である : $x \in A, y \in C$ に対して, $h(<x, y>) = <f(x), g(y)>$ である.

【５】⑴ 35 ⑵ $\aleph_0$ ⑶ $\aleph$

【６】R を実数集合とする. ⑴ f と g をそれぞれ $A \approx R$ と $B \approx R$ の対等の全単射関数とする. 以下の h が $(A \cup B) \approx (R - \{0\})$ の全単射関数である : $x \in A$ の時, $h(x) = 2^{f(x)}$, $x \in B$ の時, $h(x) = -2^{g(x)}$ である. 問 1.10.1⑶ より, $R \approx (R - \{0\})$. ゆえに, $(A \cup B) \approx (R - \{0\})$ である. ⑵ f と g をそれぞれ $A \approx N$ (自然数集合) と $B \approx R$ の対等の全単射関数とする. 以下の h が $(A \cup B) \approx R$ の全単射関数である : $x \in A$ の時, $h(x) = 2f(x) + 1$, $x \in B$ の時, $g(x) \in R - N$ ならば, $h(x) = g(x)$, $g(x) \in N$ ならば, $h(x) = 2g(x)$ である.

【７】$A \to B$ の全射関数があるので, $B \to A$ の単射関数が存在する. よって, $\#(B) \leq \#(A)$.

【８】f を $A \to B$ の単射関数とする. 以下の g が $A \times C \to B \times C$ の単射関数である : $g(<a, c>) = <f(a), c>$ である。ゆえに, $\#(A \times C) \leq \#(B \times C)$ である.