

定理 4.5 u と v を n 個の頂点を持つ (有向 / 無向) グラフの二つの頂点とする。 u から v への道が存在するならば, u から v への初等道も存在する。

【証明】

u から v への道 P を $(u = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k = v)$ とし, P の長さを k とする。 P が初等道でなければ, 頂点列 (v_0, v_1, \dots, v_k) に対して, $v_i = v_j$ が成り立つような $0 \leq i < j \leq k$ となる i と j が存在する (下図を参照)。よって, 長さが $k' = k - (j - i) < k$ である u から v への道

$P' = (u = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_i, e_j, v_{j+1}, \dots, e_k, v_k = v)$ も存在する。この操作を, $v_i = v_j$ となるような i と j が存在しなくなるまで繰り返すと, 最後に得られる道は初等道になる。

