

定理 1.32 関数 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow X$ が全単射であれば, つぎの各式は等しい。

$$(1) \quad g \circ f = I_X \qquad (2) \quad f^{-1} = g \qquad (3) \quad f \circ g = I_Y \qquad (4) \quad g^{-1} = f$$

【証明】

$$(1) \quad (2): \quad f^{-1} = I_X \circ f^{-1} = (g \circ f) \circ f^{-1} = g \circ (f \circ f^{-1}) = g \circ I_Y = g。$$

$$(2) \quad (3): \quad f \circ g = f \circ f^{-1} = I_Y。$$

$$(3) \quad (4): \quad g^{-1} = I_Y \circ g^{-1} = (f \circ g) \circ g^{-1} = f \circ (g \circ g^{-1}) = f \circ I_X = f。$$

$$(4) \quad (1): \quad g \circ f = g \circ g^{-1} = I_X。$$