定理 2.26 環の準同型像はまた環である。

【証明】

環＜B,$\oplus$,$\otimes$＞を環＜A,＋,$\times$＞の準同型像とし，f を準同型写像とする。

(1) 定理 2.21(3)により，＜A,＋＞がアーベル群であるとき，＜B,$\oplus$＞は群である。B の任意の要素 b_1 と b_2 に対して，A の中に a_1 と a_2 があり，$b_1 = f(a_1)$ と $b_2 = f(a_2)$ が成り立つ。＋は可換演算であるから，$a_1 + a_2 = a_2 + a_1$ である。

よって，$b_1 \oplus b_2 = f(a_1) \oplus f(a_2) = f(a_1 + a_2) = f(a_2 + a_1) = f(a_2) \oplus f(a_1)$
$= b_2 \oplus b_1$ である。すなわち，$\oplus$ は可換演算である。ゆえに，＜B,$\oplus$＞はアーベル群である。

(2) 定理 2.21(1)により，＜A,$\times$＞が半群であるとき，＜B,$\otimes$＞は半群である。

(3) B の任意の要素 b_1 と b_2 と b_3 に対して，A の中に a_1 と a_2 と a_3 があり，$b_1 = f(a_1)$ と $b_2 = f(a_2)$ と $b_3 = f(a_3)$ が成り立つ。よって，

$$
\begin{aligned}
b_1 \otimes (b_2 \oplus b_3) &= f(a_1) \otimes (f(a_2) \oplus f(a_3)) \\
&= f(a_1) \otimes f(a_2 + a_3) \\
&= f(a_1 \times (a_2 + a_3)) \\
&= f((a_1 \times a_2) + (a_1 \times a_3)) \\
&= f(a_1 \times a_2) \oplus f(a_1 \times a_3) \\
&= (f(a_1) \otimes f(a_2)) \oplus (f(a_1) \otimes f(a_3)) \\
&= (b_1 \otimes b_2) \oplus (b_1 \otimes b_3)
\end{aligned}
$$

である。$(b_2 \oplus b_3) \otimes b_1 = (b_2 \otimes b_1) \oplus (b_3 \otimes b_1)$ であることは，同様に証明される。

(1)と(2)と(3)より，環＜A,＋,$\times$＞の準同型像＜B,$\oplus$,$\otimes$＞はまた環である。