

**定理 1.24**  $R$  を  $A$  上の同値関係とすると, 任意の  $a, b \in A$  に対して,  $\langle a, b \rangle \in R$  は  $[a]_R = [b]_R$  の必要十分条件である。

【証明】

“  $\Rightarrow$  ”:  $\langle a, b \rangle \in R$  とすると,  $c \in [a]_R$   $\overset{\text{対称律}}{\Rightarrow} \langle a, c \rangle \in R$   $\overset{\text{推移律}}{\Rightarrow} \langle c, a \rangle \in R$   
 $\langle c, b \rangle \in R$   $\overset{\text{推移律}}{\Rightarrow} \langle b, c \rangle \in R$   $c \in [b]_R$ , すなわち,  $[a]_R \subseteq [b]_R$ , か  
 $\text{つ } c \in [b]_R$   $\langle b, c \rangle \in R$   $\overset{\text{推移律}}{\Rightarrow} \langle a, c \rangle \in R$   $c \in [a]_R$ , すなわち,  
 $[a]_R \supseteq [b]_R$ 。ゆえに,  $[a]_R = [b]_R$ 。  
 “  $\Leftarrow$  ”:  $[a]_R = [b]_R$  より,  $b \in [b]_R = [a]_R$ , ゆえに,  $\langle a, b \rangle \in R$ 。