定理 1.23 I_A **は** A **上の恒等関係であり，** R **が** A **上の関係であれば，**

(1) R **は対称的である** $\Leftrightarrow$ $R = R^c$ **が成り立つ。**

(2) R **は反対称的である** $\Leftrightarrow$ $R \cap R^c \subseteq I_A$ **が成り立つ。**

【証明】

(1) “ $\Rightarrow$ **”:** R **が対称的であるので，** $<x,y> \in R$ **ならば，** $<y,x> \in R$ **である。すなわち，** $<x,y> \in R \Leftrightarrow <x,y> \in R^c$ **。ゆえに，** $R = R^c$ **が成り立つ。**

“ $\Leftarrow$ **”:** $R = R^c$ **とすると，** $<x,y> \in R \Leftrightarrow <x,y> \in R^c$ **。すなわち，** $<x,y> \in R$ **ならば，** $<y,x> \in R$ **である。ゆえに，R は対称的である。**

(2) “ $\Rightarrow$ **”: 任意の** $<x,y> \in R \cap R^c$ **に対して，** $<x,y> \in R$ **かつ** $<x,y> \in R^c$ **。すなわち，** $<x,y> \in R$ **かつ** $<y,x> \in R$ **。反対称性により，** $x = y$ **となる。よって，** $<x,y> \in I_A$ **である。ゆえに，** $R \cap R^c \subseteq I_A$ **である。**

“ $\Leftarrow$ **”: 任意の** x **と** y **に対して，** $<x,y> \in R \cap R^c$ **とすると，** $<x,y> \in R$ **かつ** $<y,x> \in R$ **である。ここで** $R \cap R^c \subseteq I_A$ **より，** $<x,y> \in I_A$ **，すなわち，** $x = y$ **である。ゆえに，** R **は反対称的である。**