

定理 1.26 A の一つの分割は A 上の一つの同値関係を決める。

【証明】

$S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ を A の分割とすると, 関係 $R = (S_1 \times S_1) \cup (S_2 \times S_2) \cup \dots \cup (S_m \times S_m)$ は A 上の同値関係である。 R が反射的と対称的である証明は簡単なので, R が推移的であることを証明する。

$\langle a, b \rangle \in R$ かつ $\langle b, c \rangle \in R$ とすると, ある i と j が存在して, $\langle a, b \rangle \in S_i \times S_i$ かつ $\langle b, c \rangle \in S_j \times S_j$ となり, $\langle a, c \rangle \in S_i \times S_j$ 。ここで, $b \in S_i \cap S_j$ であり, S は分割なので, $S_i = S_j$ 。ゆえに, $\langle a, c \rangle \in S_i \times S_j \subseteq R$ 。すなわち, R は推移的である。ゆえに, $S = A/R$ 。