定理 4.22（Kempe，Heawood）任意の単純平面的グラフ G に対して，$\chi(G) \leq 5$ である。

【証明】

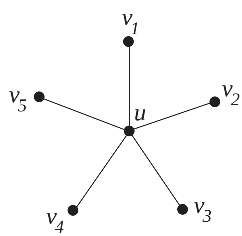
G の頂点の個数 v に関する数学的帰納法による。

（1） $v = 1,2,3,4,5$ のとき，明らかに，定理の主張を満たす。

（2） $v = k(k \geq 5)$ のとき，定理の主張を満たすことを仮定すると，$v = k+1$ のとき，定理 4.21 より，G の中に $\deg(u) \leq 5$ の頂点 u が存在する。仮定より，グラフ $G-u$ は５-彩色できる。

$\deg(u) < 5$ のとき，u には u と隣接している頂点と異なる色を塗ることができるので，G は５-彩色できる。

$\deg(u) = 5$ のとき，$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ をとき計回りで u と隣接している五つの頂点とし（右図参照），$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ の色はそれぞれ $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ とし，H を色 c_1 と色 c_3 をつけた $G-u$ の頂点の集合とする。以下の二つの場合が考えられる。



① v_1 と v_3 はともに点誘導部分グラフ $(H)_{G-u}$ の同じ連結成分にある。このとき，v_1 と v_3 の間に色 c_1 と色 c_3 だけの頂点の道 P がある。道 P は辺 (v_1, u) と辺 (u, v_3) とともに閉路 L を構成し，閉路 L は G の面を二つの領域 R_1 と R_2 に分割する。ここで，v_2 は R_1 にあるが，v_4 は R_2 にある。R_1 の中で色 c_2 を色 c_4 と交換して，頂点 u に色 c_2 で色をつけると，G が５-彩色できる。

② v_1 と v_3 はそれぞれ点誘導部分グラフ $(H)_{G-u}$ の二つの異なる連結成分 W_1 と W_2 にある。W_1 の中で色 c_1 を色 c_3 と交換して，頂点 u に色 c_1 で色をつけると，G が５-彩色できる。

ゆえに，定理の主張を満たす。