定理 1.17　集合 A,B,C **について，** $C \neq f$ **の場合，次の各事項は等しい。**

(1) $A \subseteq B$　　**(2)** $A \times C \subseteq B \times C$　　**(3)** $C \times A \subseteq C \times B$

【証明】

(1)⇒(2)： $<x,z>\in A\times C$ **とすると，** $x\in A$ **かつ** $z\in C$ 。$A\subseteq B$ **より，** $x\in B$ **かつ** $z\in C$ 。**すなわち，** $<x,z>\in B\times C$ 。**ゆえに，** $A\times C\subseteq B\times C$ 。

(2)⇒(3)： $<z,x>\in C\times A$ **とすると，** $z\in C$ **かつ** $x\in A$。**すなわち，** $<x,z>\in A\times C$ 。$A\times C\subseteq B\times C$ **より，** $<x,z>\in B\times C$ 。**よって，** $x\in B$ **かつ** $z\in C$ 。**すなわち，** $<z,x>\in C\times B$。**ゆえに，** $C\times A\subseteq C\times B$。

(3)⇒(1)： $x\in A$ **とすると,** $C\neq f$ **より,** $<z,x>\in C\times A$ **となる** $z\in C$ **が存在する。** $C\times A\subseteq C\times B$ **より,** $<z,x>\in C\times B$。**すなわち,** $x\in B$ 。**ゆえに,** $A\subseteq B$。