

定理 1.20 A から B へ の関係 を P , B から C へ の関係 を Q , C から D へ の関係 を S とすると , $(P \circ Q) \circ S = P \circ (Q \circ S)$ となる。

【証明】

- (1) $\langle a, d \rangle \in (P \circ Q) \circ S$ とすると , $\langle a, c \rangle \in P \circ Q$ かつ $\langle c, d \rangle \in S$ となる $c \in C$ が存在する。また , $\langle a, b \rangle \in P$ かつ $\langle b, c \rangle \in Q$ となる $b \in B$ が存在するので , $\langle a, b \rangle \in P$ かつ $\langle b, d \rangle \in Q \circ S$ 。すなわち , $\langle a, d \rangle \in P \circ (Q \circ S)$ 。ゆえに , $(P \circ Q) \circ S \subseteq P \circ (Q \circ S)$ 。
- (2) $\langle a, d \rangle \in P \circ (Q \circ S)$ とすると , $\langle a, b \rangle \in P$ かつ $\langle b, d \rangle \in Q \circ S$ となる $b \in B$ が存在する。また , $\langle b, c \rangle \in Q$ かつ $\langle c, d \rangle \in S$ となる $c \in C$ が存在するので , $\langle a, c \rangle \in P \circ Q$ かつ $\langle c, d \rangle \in S$ 。すなわち , $\langle a, d \rangle \in (P \circ Q) \circ S$ 。ゆえに , $(P \circ Q) \circ S \supseteq P \circ (Q \circ S)$ 。
- (1), (2) より $(P \circ Q) \circ S = P \circ (Q \circ S)$ 。