

定理 1.16 集合 A, B, C について, 次の式が成り立つ。

$$(1) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad (2) A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(3) (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) \quad (4) (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

【証明】

$$\begin{aligned}(1): A \times (B \cup C) &= \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A, y \in B \cup C \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A, y \in B \text{ または } y \in C \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid (x \in A, y \in B) \text{ または } (x \in A, y \in C) \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in A \times B \text{ または } \langle x, y \rangle \in A \times C \} \\ &= (A \times B) \cup (A \times C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2): A \times (B \cap C) &= \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A, y \in B \cap C \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A, y \in B, y \in C \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid (x \in A, y \in B), (x \in A, y \in C) \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in A \times B, \langle x, y \rangle \in A \times C \} \\ &= (A \times B) \cap (A \times C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3): (A \cup B) \times C &= \{ \langle x, y \rangle \mid x \in (A \cup B), y \in C \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \text{ または } x \in B, y \in C \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid (x \in A, y \in C) \text{ または } (x \in B, y \in C) \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in A \times C \text{ または } \langle x, y \rangle \in B \times C \} \\ &= (A \times C) \cup (B \times C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4): (A \cap B) \times C &= \{ \langle x, y \rangle \mid x \in (A \cap B), y \in C \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A, x \in B, y \in C \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid (x \in A, y \in C), (x \in B, y \in C) \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in A \times C, \langle x, y \rangle \in B \times C \} \\ &= (A \times C) \cap (B \times C)\end{aligned}$$