定理 1.30 関数 $f:X \to Y$ と $g:Y \to Z$ に対して，合成関係 $f \circ g$ は，$X \to Z$ の関数である。

【証明】

f と g の合成関係 $f \circ g$

$=\{<x,z>|(x\in X),(z\in Z),(\text{ある}\,y\in Y\text{が存在して},<x,y>\in f,<y,z>\in g)\}$

$=\{<x,z>|(x\in X),(z\in Z),(\text{ある}\,y\in Y\text{が存在して},y=f(x),z=g(y))\}$

$=\{<x,z>|(x\in X),(z\in Z),(z=g(f(x)))\}$

(1) 任意の $x\in X$ に対して，ある $z=g(f(x))$ が存在して，$<x,z>\in f\circ g$ となる。

(2) 任意の $x_1,x_2\in X,z_1,z_2\in Z$ に対して，$<x_1,z_1>,<x_2,z_2>\in f\circ g$，すなわち，$z_1=g(f(x_1),z_2=g(f(x_2))$ のとき，$z_1\neq z_2$ とすると，$f(x_1)\neq f(x_2)$，よって，$x_1\neq x_2$。

関数の定義より，合成関係 $f\circ g$ はX→Zの関数である。