3　章

3.1

【1】 (1) 命題，真　(2) 命題，偽
(3) 命題，真　(4) 命題，偽
(5) 命題でない　(6) 命題，真

【2】 省略

【3】 例えば「整数 x に対して $x = 3x$」$x = 0$ の時は真だが他の場合は偽.

【4】 (1) 原子命題

(2) 複合命題「私はカレーライスが好きだ」「私の父は卵焼きが好きだ」

(3) 原子命題

(4) 複合命題「イギリスは島国だ」「日本は島国だ」

(5) 原子命題

(6) 原子命題

【5】 (1),(2) 状況により異なる

(3) 真　(4) 真　(5) 偽　(6) 真

【6】 例えば,「256 は偶数であり，かつ 13 は偶数である」

【7】 省略

【8】 省略

3.2

【1】 (1) 明日は晴れでない

(2) 明日は晴れであり，かつ太郎君は買い物に行く

(3) 明日は晴れか，または太郎君が買い物に行く

(4) 明日が晴れならば，太郎君は買い物に行く

(5) 明日が晴れならば太郎君は買い物に行く，かつ，太郎君が買い物に行くならば明日は晴れである

【2】 (1)$P \wedge Q$ (2) $\neg Q$ (3)$Q \to P$
(4)$P \vee Q$ (5)$P \leftrightarrow Q$

【3】 省略

【4】 (1)

P	$P \wedge T$
F	F
T	T

(2)

P	$P \wedge F$
F	F
T	F

(3)

P	$P \vee T$
F	T
T	T

(4)

P	$P \vee F$
F	F
T	T

(5)

P	$P \to T$
F	T
T	T

(6)

P	$P \to F$
F	T
T	F

(7)

P	$T \to P$
F	F
T	T

(8)

P	$F \to P$
F	T
T	T

(9)

P	$P \leftrightarrow T$
F	F
T	T

(10)

P	$P \leftrightarrow F$
F	T
T	F

【5】 (1)

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
F	T	T
T	F	T

(2)

P	$P \to P$
F	T
T	T

(3)

P	$P \leftrightarrow P$
F	T
T	T

【6】 (1)

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
F	T	F
T	F	F

(2)

P	$\neg P$	$P \leftrightarrow \neg P$
F	T	F
T	F	F

【7】

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$(\neg Q) \to (\neg P)$
F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F
T	T	T	F	F	T

【8】

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$
F	F	T	T
F	T	T	F
T	F	F	T
T	T	T	T

3.3

【1】 正しいものは (1)

【2】 (1) P

(2) $P, Q, \neg P, \neg\neg P$

(3) $P, Q, R,\ \neg R, P \leftrightarrow \neg R, Q \wedge (P \leftrightarrow \neg R)$

(4) $P, \neg P$

(5) $P, Q, \neg P, \neg Q, P \vee \neg Q, \neg P \rightarrow Q$

(6) $P, Q, R, S, Q \wedge R, P \vee Q \wedge R, Q \wedge R \vee S$

(7) P, Q

(8)$P, Q, \neg P, \neg Q, P \wedge Q, \neg P \wedge \neg Q$

【3】 (1)T (2)T (3)T (4)F
(5)F (6)T (7)F (8)F

【4】 32 通り.

A	B	C	D	E
F	F	F	F	F
F	F	F	F	T
F	F	F	T	F
F	F	F	T	T
F	F	T	F	F
F	F	T	F	T
F	F	T	T	F
F	F	T	T	T
F	T	F	F	F
F	T	F	F	T
F	T	F	T	F
F	T	F	T	T
F	T	T	F	F
F	T	T	F	T
F	T	T	T	F
F	T	T	T	T

A	B	C	D	E
T	F	F	F	F
T	F	F	F	T
T	F	F	T	F
T	F	F	T	T
T	F	T	F	F
T	F	T	F	T
T	F	T	T	F
T	F	T	T	T
T	T	F	F	F
T	T	F	F	T
T	T	F	T	F
T	T	F	T	T
T	T	T	F	F
T	T	T	F	T
T	T	T	T	F
T	T	T	T	T

【5】 変数 A, B, C にそれぞれ以下を割り当てる.

(1) F, T, T (2) T, T, T (3) F, F
(4) T, T, T (5) T, T, T (6) T, F, F
(7) F, F, T (8) F, F, F

【6】 (1)

A	B	$A \leftrightarrow \neg B$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

(2)

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
F	F	F	T	T
F	T	F	T	T
T	F	F	F	F
T	T	T	F	T

(続)

$(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
T
T
T
T

(3)

A	B	C	$A \wedge B \wedge C$
F	F	F	F
F	F	T	F
F	T	F	F
F	T	T	F
T	F	F	F
T	F	T	F
T	T	F	F
T	T	T	T

(4)

A	B	C	$A \vee B$	$A \vee C$
F	F	F	F	F
F	F	T	F	T
F	T	F	T	F
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	F	T	T	T
T	T	F	T	T
T	T	T	T	T

(続)

$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
F
F
F
T
T
T
T
T

(5)

A	B	C	$A \vee B \vee C$	$A \vee B \vee \neg C$
F	F	F	F	T
F	F	T	T	F
F	T	F	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	F	T	T	T
T	T	F	T	T
T	T	T	T	T

(続)

$A \vee \neg B$	$(A \vee B \vee C)$ $\wedge(A \vee B \vee \neg C)$ $\wedge(A \vee \neg B) \wedge \neg A$
T	F
T	F
F	F
F	F
T	F
T	F
T	F
T	F

【7】 (1)

P	Q	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$
F	F	T	T
F	T	F	F
T	F	F	F
T	T	F	F

(2)

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$
F	F	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	F
T	T	F	T	T	T
T	T	T	T	T	T

(続)

$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
F	F
F	F
F	F
F	F
F	F
T	T
F	T
T	T

(3)

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$
F	F	F	T	T
F	T	F	T	T
T	F	F	T	T
T	T	T	F	F

(4)

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$
F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F
F	T	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T
T	F	T	F	T	T
T	T	F	F	T	T
T	T	T	T	T	T

(続)

$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
F	F
T	F
F	F
T	T
T	T
T	T
T	T
T	T

(5)

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \wedge Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
F	F	T	F	T
F	T	F	F	F
T	F	F	F	F
T	T	T	T	F

(続)

$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
T
F
F
T

(6)

P	Q	R	$Q \rightarrow R$	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
F	F	F	T	T
F	F	T	T	T
F	T	F	F	T
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	F	T	T	T
T	T	F	F	F
T	T	T	T	T

(続)

$P \to R$	$Q \to (P \to R)$
T	T
T	T
T	T
T	T
F	T
T	T
F	F
T	T

(7)

P	Q	$P \wedge \neg P$	$P \wedge \neg P \to Q$
F	F	F	T
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	F	T

(8)

P	Q	R	$P \to Q$	$(P \to Q) \to R$
F	F	F	T	F
F	F	T	T	T
F	T	F	T	F
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	F	T	F	T
T	T	F	T	F
T	T	T	T	T

(続)

$\neg P \to R$	$Q \to R$	$(\neg P \to R)$ $\wedge (Q \to R)$
F	T	F
T	T	T
F	F	F
T	T	T
T	T	T
T	T	T
T	F	F
T	T	T

【8】 (1) $\neg\neg\neg P \Leftrightarrow \neg(\neg\neg P) \Leftrightarrow \neg P$

(2) $$\begin{aligned} & P \wedge (\neg\neg Q \vee R) \Leftrightarrow P \wedge (Q \vee R) \\ \Leftrightarrow\ & (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \end{aligned}$$

(3) $P \vee Q \vee P \Leftrightarrow (P \vee P) \vee Q \Leftrightarrow P \vee Q$

(4) $$\begin{aligned} & P \vee (Q \wedge (Q \vee \neg R)) \Leftrightarrow P \vee (Q) \\ \Leftrightarrow\ & P \vee Q \end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned} & \neg(\neg P \wedge \neg\neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge Q) \\ \Leftrightarrow\ & \neg\neg P \vee \neg Q \Leftrightarrow P \vee \neg Q \end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned} & P \vee \neg Q \vee \neg P \Leftrightarrow P \vee \neg P \vee Q \\ \Leftrightarrow\ & T \vee Q \Leftrightarrow T \end{aligned}$$

3.4

【1】 (1) どちらでもない (2) 恒真
(3) 恒偽 (4) 恒真
(5) 恒偽

【2】 2 つの論理式 A, B に対して，$A \Leftrightarrow T$ かつ $B \Leftrightarrow F$ ならば，$A \wedge B \Leftrightarrow T \wedge F \Leftrightarrow F$ であり，また $A \vee B \Leftrightarrow T \vee F \Leftrightarrow T$ である．

【3】 (1) $$\begin{aligned} & (A \wedge \neg B) \vee \neg(A \wedge \neg B) \\ \Leftrightarrow\ & (A \wedge \neg B) \vee \neg A \vee B \\ \Leftrightarrow\ & ((A \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee B \\ \Leftrightarrow\ & (T \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee B \\ \Leftrightarrow\ & \neg A \vee \neg B \vee B \Leftrightarrow T \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} & ((A \wedge \neg B) \wedge Q) \to ((A \wedge \neg B) \wedge Q) \\ \Leftrightarrow\ & \neg(A \wedge \neg B \wedge Q) \vee (A \wedge \neg B \wedge Q) \\ \Leftrightarrow\ & \neg A \vee B \vee \neg Q \vee (A \wedge \neg B \wedge Q) \\ \Leftrightarrow\ & \neg A \vee B \vee ((A \vee \neg Q) \\ & \wedge(\neg B \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \vee Q)) \\ \Leftrightarrow\ & \neg A \vee B \vee ((A \vee \neg Q) \\ & \wedge(\neg B \vee \neg Q) \wedge T) \\ \Leftrightarrow\ & \neg A \vee B \vee ((A \vee \neg Q) \wedge (\neg B \vee \neg Q)) \\ \Leftrightarrow\ & \neg A \vee ((A \vee B \vee \neg Q) \\ & \wedge(B \vee \neg B \vee \neg Q)) \\ \Leftrightarrow\ & \neg A \vee ((A \vee B \vee \neg Q) \wedge T) \\ \Leftrightarrow\ & \neg A \vee A \vee B \vee \neg Q \Leftrightarrow T \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} & (A \wedge \neg B) \wedge Q \vee \neg(A \wedge \neg B) \vee \neg Q \\ \Leftrightarrow\ & (A \wedge \neg B \wedge Q) \vee \neg A \vee B \vee \neg Q \\ \Leftrightarrow\ & ((A \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee \neg B) \\ & \wedge(\neg A \vee Q)) \vee B \vee \neg Q \\ \Leftrightarrow\ & (T \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee Q)) \\ & \vee B \vee \neg Q \\ \Leftrightarrow\ & ((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee Q)) \vee B \vee \neg Q \\ \Leftrightarrow\ & ((\neg A \vee \neg B \vee B) \wedge (\neg A \vee Q \vee B)) \\ & \vee \neg Q \\ \Leftrightarrow\ & ((T \wedge (\neg A \vee Q \vee B)) \vee \neg Q \\ \Leftrightarrow\ & \neg A \vee Q \vee B \vee \neg Q \Leftrightarrow T \end{aligned}$$

(4)
$$
\begin{aligned}
& (A \wedge \neg B) \rightarrow (A \wedge \neg B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg A \vee B \vee (A \wedge \neg B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg A \vee ((A \vee B) \wedge (B \vee \neg B)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg A \vee ((A \vee B) \wedge T) \\
\Leftrightarrow\ & \neg A \vee A \vee B \Leftrightarrow T
\end{aligned}
$$

(5)
$$
\begin{aligned}
& ((A \wedge \neg B) \vee Q) \wedge ((A \wedge \neg B) \\
& \vee \neg Q) \vee \neg(A \wedge \neg B) \\
\Leftrightarrow\ & ((A \vee Q) \wedge (\neg B \vee Q) \wedge (A \vee \neg Q) \\
& \wedge(\neg B \vee \neg Q)) \vee (\neg A \vee B) \\
\Leftrightarrow\ & ((A \vee (Q \wedge \neg Q)) \\
& \wedge(\neg B \vee (Q \wedge \neg Q))) \vee \neg A \vee B \\
\Leftrightarrow\ & ((A \vee F) \wedge (\neg B \vee F)) \vee \neg A \vee B \\
\Leftrightarrow\ & (A \wedge \neg B) \vee \neg A \vee B \\
\Leftrightarrow\ & ((A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A)) \vee B \\
\Leftrightarrow\ & (T \wedge (\neg B \vee \neg A)) \vee B \\
\Leftrightarrow\ & \neg B \vee \neg A \vee B \Leftrightarrow T
\end{aligned}
$$

【4】 (1) $P \leftrightarrow P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow P \Leftrightarrow T$

(2)
$$
\begin{aligned}
& (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \leftrightarrow P \\
\Leftrightarrow\ & (P \vee (Q \wedge \neg Q)) \leftrightarrow P \\
\Leftrightarrow\ & P \vee F \leftrightarrow P \Leftrightarrow P \leftrightarrow P \Leftrightarrow T
\end{aligned}
$$

(3)
$$
\begin{aligned}
& (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \leftrightarrow Q \\
\Leftrightarrow\ & (P \vee \neg P) \wedge Q \leftrightarrow Q \\
\Leftrightarrow\ & T \wedge Q \leftrightarrow Q \Leftrightarrow Q \leftrightarrow Q \Leftrightarrow T
\end{aligned}
$$

(4)
$$
\begin{aligned}
& \neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg(P \wedge Q) \rightarrow \neg P \vee \neg Q) \\
& \wedge(\neg P \vee \neg Q \rightarrow \neg(P \wedge Q)) \\
\Leftrightarrow\ & ((P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)) \\
& \wedge(\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(P \wedge Q)) \\
\Leftrightarrow\ & ((P \wedge Q) \vee (\neg(P \wedge Q)) \\
& \wedge((P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge Q))) \\
\Leftrightarrow\ & T \wedge T \Leftrightarrow T
\end{aligned}
$$

(5)
$$
\begin{aligned}
& (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \\
& \leftrightarrow P \rightarrow (Q \wedge R) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \\
& \leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge R) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee (Q \wedge R)) \\
& \leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge R)) \\
\Leftrightarrow\ & T
\end{aligned}
$$

【5】 逆：(3)，裏：(5)，対偶：(2)

【6】 逆：(4)，裏：(4)，対偶：(1)

【7】 (1) $\neg Q \rightarrow P$

(2) $Q \rightarrow \neg P$

(3) $R \rightarrow P \wedge Q$

(4) $\neg Q \vee R \rightarrow P$

(5) $Q \vee \neg R \rightarrow \neg(P \wedge Q)$

【8】 (1)
$$
\begin{aligned}
& \neg((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg R)) \\
& \rightarrow P \wedge (Q \rightarrow R) \\
\Leftrightarrow\ & ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)) \\
& \vee(P \wedge (\neg Q \vee R)) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee (Q \wedge \neg R)) \\
& \vee(P \wedge \neg(Q \wedge \neg R)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(P \wedge \neg(Q \wedge \neg R)) \\
& \vee(P \wedge \neg(Q \wedge \neg R)) \\
\Leftrightarrow\ & T
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
& (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \\
& \rightarrow (P \rightarrow (Q \wedge R)) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \\
& \rightarrow \neg P \vee (Q \wedge R) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee (Q \wedge R) \rightarrow \neg P \vee (Q \wedge R) \\
\Leftrightarrow\ & T
\end{aligned}
$$

(3)
$$
\begin{aligned}
& (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \\
& \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R)) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee (\neg Q \vee R)) \\
& \rightarrow (\neg Q \vee (\neg P \vee R)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg P \vee \neg Q \vee R) \\
& \vee(\neg P \vee \neg Q \vee R) \\
\Leftrightarrow\ & T
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{array}{ll}
& ((P \to Q) \to R) \\
& \to (\neg P \to R) \wedge (Q \to R) \\
\Leftrightarrow & (\neg(\neg P \vee Q) \vee R) \to (P \vee R) \\
& \wedge(\neg Q \vee R) \\
\Leftrightarrow & (P \wedge \neg Q) \vee R \to (P \wedge \neg Q) \vee R \Leftrightarrow T
\end{array}
$$

(5)

$$
\begin{array}{ll}
& (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \to P \\
\Leftrightarrow & P \vee (Q \wedge \neg Q) \to P \Leftrightarrow P \vee F \to P \\
\Leftrightarrow & P \to P \Leftrightarrow T
\end{array}
$$

3.5

【1】 (1)

P	$P\overline{\vee}P$
F	F
T	F

(2)

P	Q	$P\overline{\vee}Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$
F	F	F	F	F
F	T	T	F	T
T	F	T	T	F
T	T	F	F	F

(続)

$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
F
T
T
F

(3)

P	$T\overline{\vee}P$	$\neg P$
F	T	T
T	F	F

(4)

P	Q	R	$P\overline{\vee}Q$	$(P\overline{\vee}Q)\overline{\vee}R$	$Q\overline{\vee}R$
F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T
F	T	T	T	F	F
T	F	F	T	T	F
T	F	T	T	F	T
T	T	F	F	F	T
T	T	T	F	T	F

(続)

$P\overline{\vee}(Q\overline{\vee}R)$
F
T
T
F
T
F
F
T

(5)

P	Q	$P\overline{\vee}Q$	$\neg(P \leftrightarrow Q)$
F	F	F	F
F	T	T	T
T	F	T	T
T	T	F	F

(6)

P	$F\overline{\vee}P$
F	F
T	T

【2】 (1)

P	$P \overline{\to} P$
F	F
T	F

(2)

$$
\begin{array}{ll}
& (P \overline{\to} Q) \overline{\to} R \\
\Leftrightarrow & \neg(P \to Q) \overline{\to} R \\
\Leftrightarrow & \neg(\neg(P \to Q) \to R) \\
\Leftrightarrow & \neg(\neg(\neg P \vee Q) \to R) \\
\Leftrightarrow & \neg((\neg P \vee Q) \vee R) \\
\Leftrightarrow & P \wedge \neg Q \wedge \neg R
\end{array}
$$

(3)

P	$P \overline{\to} \neg P$
F	F
T	T

(4)

$$
\begin{array}{ll}
& (P \overline{\to} Q) \wedge (P \overline{\to} R) \\
\Leftrightarrow & \neg(P \to Q) \wedge \neg(P \to R) \\
\Leftrightarrow & \neg((P \to Q) \vee (P \to R)) \\
\Leftrightarrow & \neg((\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R)) \\
\Leftrightarrow & \neg(P \to (Q \vee R)) \\
\Leftrightarrow & P \overline{\to} (Q \vee R)
\end{array}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
& (P \mathrel{\overline{\rightarrow}} Q) \vee (P \mathrel{\overline{\rightarrow}} R) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(P \rightarrow Q) \vee \neg(P \rightarrow R) \\
\Leftrightarrow\ & \neg((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg P \vee (Q \wedge R)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(P \rightarrow (Q \wedge R)) \\
\Leftrightarrow\ & P \mathrel{\overline{\rightarrow}} (Q \wedge R)
\end{aligned}
$$

【3】 (1)

P	$\neg P$	$P \uparrow P$
F	T	T
T	F	F

(2)

P	Q	R	$P \uparrow Q$	$(P \uparrow Q) \uparrow R$	$P \wedge Q$	$R \rightarrow (P \wedge Q)$
F	F	F	T	T	F	T
F	F	T	T	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T
F	T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F	T
T	F	T	T	F	F	F
T	T	F	F	T	T	T
T	T	T	F	T	T	T

(続)

(3)

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$P \uparrow Q$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	T	T
T	T	F	F

(4)

P	Q	$P \uparrow Q$	$(P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$	$P \wedge Q$
F	F	T	F	F
F	T	T	F	F
T	F	T	F	F
T	T	F	T	T

(5)

P	$\neg P$	$P \uparrow \neg P$
F	T	T
T	F	T

(6)

P	Q	$P \uparrow P$	$Q \uparrow Q$	$(P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)$	$P \vee Q$
F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T
T	T	F	F	T	T

(続)

【4】 (1)

P	$\neg P$	$P \downarrow \neg P$
F	T	F
T	F	F

(2)

P	Q	$P \downarrow Q$	$(P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$	$P \vee Q$
F	F	T	F	F
F	T	F	T	T
T	F	F	T	T
T	T	F	T	T

(3)

P	$\neg P$	$P \downarrow P$
F	T	T
T	F	F

(4)

P	Q	$P \downarrow P$	$Q \downarrow Q$	$(P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)$	$P \wedge Q$
F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
T	T	F	F	T	T

(続)

(5)

P	Q	$P \downarrow Q$	$\neg(P \vee Q)$
F	F	T	T
F	T	F	F
T	F	F	F
T	T	F	F

(6)

P	Q	R	$P \downarrow Q$	$(P \downarrow Q) \downarrow R$	$P \vee Q$
F	F	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T
T	F	T	F	F	T
T	T	F	F	T	T
T	T	T	F	F	T

(続)

$\neg(P \vee Q \to R)$
F
F
T
F
T
F
T
F

【5】 (1)

P	Q	R	$Q \uparrow R$	$P \uparrow (Q \uparrow R)$	$Q \wedge R$
F	F	F	T	T	F
F	F	T	T	T	F
F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F
T	F	T	T	F	F
T	T	F	T	F	F
T	T	T	F	T	T

(続)

$P \to (Q \wedge R)$
T
T
T
T
F
F
F
T

(2)

P	Q	R	$Q \downarrow R$	$P \downarrow (Q \downarrow R)$	$Q \vee R$
F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F
T	F	T	F	F	T
T	T	F	F	F	T
T	T	T	F	F	T

(続)

$\neg(Q \vee R \to P)$
F
T
T
T
F
F
F
F

(3)

P	Q	$P \overline{\vee} Q$	$Q \overline{\vee} P$
F	F	F	F
F	T	T	T
T	F	T	T
T	T	F	F

(4)

P	Q	R	$Q \overline{\vee} R$	$P \wedge (Q \overline{\vee} R)$	$P \wedge Q$
F	F	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
T	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	F
T	T	F	T	T	T
T	T	T	F	F	T

(続)

$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \overline{\vee} (P \wedge R)$
F	F
F	F
F	F
F	F
F	F
T	T
F	T
T	F

【6】 (1) 例題 3.12 より $\{\neg, \wedge\}$ が最小演算子組なので，$\wedge$ を $\{\neg, \vee\}$ で表現できることを示せばよい．$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$ であるから $\{\neg, \vee\}$ も任意の論理式が表現できる．

(2) $\neg P \Leftrightarrow P \to F$ なので，$\neg$ を $\to$ で表現できる．また $P \vee Q \Leftrightarrow \neg P \to Q$ なので $\vee$ も $\to$ で表現できる．(1) より $\{\neg, \vee\}$ で任意の論理式を表現できるので，$\{\to\}$ でも任意の論理式を表現できる．

(3) (2) より $\{\to\}$ が最小演算子組なので，$\to$ を $\uparrow$ で表現できることを示せばよい．$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow P \uparrow \neg Q \Leftrightarrow P \uparrow (Q \uparrow Q)$ であるから，$\{\uparrow\}$ も任意の論理式が表現できる．

(4) (2) より $\{\to\}$ が最小演算子組なので，$\to$ を $\downarrow$ で表現できることを示せばよい．$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow (\neg P \downarrow Q) \downarrow (\neg P \downarrow Q) \Leftrightarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)$ であるから，$\{\downarrow\}$ も任意の論理式が表現できる．

(5) $T \overline{\to} P \Leftrightarrow \neg P$ であるから，$\neg$ を $\overline{\to}$ で表現でき，また $P \to Q \Leftrightarrow \neg(P \overline{\to} Q)$ であるから，$\to$ を $\overline{\to}$ で表現できる．$\{\to\}$ で任意の論理式が表現できるので，$\{\overline{\to}\}$ でも任意の論理式が表現できる．

【7】 $\{\overline{\vee}, \wedge\}$

【8】 $\{\leftrightarrow, \wedge\}$

3.6

【1】 正しいのは (1)(4)．(2) の正しい双対は $P \wedge (Q \vee R)$．(3) の正しい双対は $\neg(P \vee \neg Q)$．

【2】 (1) $(P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee F)$

(2)$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee \neg P$

(3)$\neg(P \vee (\neg Q \wedge \neg R))$

(4)$(F \vee \neg(T \wedge P)) \wedge (\neg Q \vee \neg T)$

【3】 (1) $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$

(2) $P \vee \neg Q$

(3)$\neg(\neg(P \vee Q) \wedge R)$

(4) $\neg((P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)) \wedge R$

(5) $\neg(\neg(\neg P \wedge Q) \wedge R)$

(6) $(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \wedge Q)) \wedge ((P \vee Q) \vee (P \wedge Q))$

【4】 (1) $(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee \neg Q$

(2) $(\neg P \wedge \neg S) \vee (\neg Q \wedge \neg S) \vee (R \wedge \neg S)$

(3) $(P \wedge Q) \vee \neg R \vee \neg S$

(4) $(P \wedge \neg R \wedge \neg S) \vee (Q \wedge \neg R \wedge \neg S)$

【5】 (1) $$P \wedge \neg Q \Leftrightarrow m_{10} \Leftrightarrow \Sigma 2$$

(2)
$$\begin{aligned} & (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \\ & \vee(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \\ & \vee(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \\ \Leftrightarrow\ & m_{111} \vee m_{110} \vee m_{101} \vee m_{011} \\ & \vee m_{001} \\ \Leftrightarrow\ & \Sigma 1, 3, 5, 6, 7 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} & (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \\ & \vee(P \wedge \neg Q \vee \neg R) \\ & \vee(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \\ \Leftrightarrow\ & m_{001} \vee m_{101} \vee m_{100} \vee m_{000} \\ \Leftrightarrow\ & \Sigma 0, 1, 4, 5 \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} & (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \\ & \vee(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \\ & \vee(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \\ \Leftrightarrow\ & m_{011} \vee m_{010} \vee m_{001} \vee m_{000} \\ \Leftrightarrow\ & \Sigma 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

【6】 (1)
$$\begin{aligned} & \Sigma 1, 3, 4, 7 \vee \Sigma 0, 1, 2, 5, 6 \\ \Leftrightarrow\ & m_{001} \vee m_{011} \vee m_{100} \vee m_{111} \\ & \vee m_{000} \vee m_{001} \vee m_{010} \vee m_{101} \\ & \vee m_{110} \\ \Leftrightarrow\ & \Sigma 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} & \neg(\Sigma 2, 4, 5) \\ \Leftrightarrow\ & \neg(m_{010} \vee m_{100} \vee m_{101}) \\ \Leftrightarrow\ & \neg m_{010} \wedge \neg m_{100} \wedge \neg m_{101} \\ \Leftrightarrow\ & M_{010} \vee M_{100} \vee M_{101} \\ \Leftrightarrow\ & \Pi 2, 4, 5 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} & \Pi 0, 2, 5, 6, 7 \wedge \Pi 1, 3, 4 \\ \Leftrightarrow\ & M_{000} \wedge M_{010} \wedge M_{101} \wedge M_{110} \\ & \wedge M_{111} \wedge M_{001} \wedge M_{011} \wedge M_{100} \\ \Leftrightarrow\ & \Pi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \end{aligned}$$

(4)
$$
\begin{aligned}
&\Sigma 0,1,2,3 \Leftrightarrow \neg\Pi 0,1,2,3\\
\Leftrightarrow\ & \neg(M_{000} \wedge M_{001} \wedge M_{010} \wedge M_{011})\\
\Leftrightarrow\ & \neg((P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R)\\
& \wedge(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \neg R))\\
\Leftrightarrow\ & \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)) \Leftrightarrow \neg P\\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)\\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)\\
& \wedge(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)\\
\Leftrightarrow\ & M_{100} \wedge M_{101} \wedge M_{110} \wedge M_{111}\\
\Leftrightarrow\ & \Pi 4,5,6,7
\end{aligned}
$$

【7】 (1)$\Sigma 1,2,4,6,7$ (2)$\Sigma 0,3,4,5$
(3)$\Sigma 1,2,4,5,6,7$ (4)$\Sigma 6,7$

【8】 (1)$\Pi 2,4,6,7$ (2)$\Pi 0,2,3,5$
(3)$\Pi 0,1,2,3,4,7$ (4)$\Pi 0,1,2,3,4,6$

3.7

【1】 (1) 有効ではない (2) 有効

【2】 A: せきが出る，B: 頭痛がする，C: 風邪をひいている，D: 体温が上がる，とする．問の推論を記号で表現する：

$$A \wedge B \to C, C \to D \vdash \neg D \wedge \neg A \to \neg B$$

【3】 (1)

1.	$\neg\neg P$	P
2.	P	1, T
3.	$P \to Q$	P
4.	Q	2,3,T

(2)

1.	P	P
2.	$P \to Q$	P
3.	Q	1,2,T
4.	$Q \to R$	P
5.	R	3,4,T

(3)

1.	$\neg(P \wedge \neg Q)$	P
2.	$\neg P \vee Q$	1,T
3.	$\neg P \to Q$	P
4.	$P \vee Q$	3,T
5.	$(\neg P \wedge P) \vee Q$	2,4,T
6.	Q	5,T

(4)

1.	Q	P
2.	$P \to \neg Q$	P
3.	$Q \to \neg P$	2,T
4.	$\neg P$	1,3,T

(5)

1.	$\neg R$	P
2.	$\neg R \to \neg Q$	P
3.	$\neg Q$	1,2,T
4.	$P \vee Q$	P
5.	P	3,4,T

(6)

1.	P	P
2.	$P \vee Q$	1,T
3.	$P \vee Q \to R$	P
4.	R	2,3, T

(7)

1.	P	P
2.	$P \to Q$	P
3.	Q	1,2,T
4.	$P \wedge Q \to R$	P
5.	$P \wedge Q$	1,3,T
6.	R	4,5,T

(8)

1.	$P \to Q \wedge R$	P
2.	$P \wedge Q$	P
3.	P	2,T
4.	$Q \wedge R$	1,3,T
5.	R	4,T
6.	$R \to S$	P
7.	S	5,6,T

(9)

1.	$P \to Q$	P
2.	$Q \to \neg R$	P
3.	$P \to \neg R$	1,2,T
4.	$(P \wedge Q) \to R$	P
5.	$\neg R \to \neg(P \wedge Q)$	4,T
6.	$P \to \neg(P \wedge Q)$	3,5,T
7.	$\neg P \vee \neg(P \wedge Q)$	6,T
8.	$\neg P \vee \neg P \vee \neg Q$	7,T
9.	$\neg P \vee \neg Q$	8,T
10.	$P \to \neg Q$	9,T

(10)

1.	$Q \to (\neg P \wedge R)$	P
2.	$\neg Q \vee (\neg P \wedge R)$	1,T
3.	$(\neg Q \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee R)$	2,T
4.	$\neg Q \vee R$	3,T
5.	$Q \to R$	

(11)

1.	$P \wedge S$	P
2.	P	1,T
3.	$P \vee R$	2,T
4.	$(P \wedge Q) \to \neg(P \vee R)$	P
5.	$(P \vee R) \to \neg(P \wedge Q)$	4,T
6.	$\neg(P \wedge Q)$	3,5,T
7.	$\neg P \vee \neg Q$	6,T
8.	$\neg Q$	2,7,T
9.	$(P \vee R) \to \neg Q$	8,T
10.	$\neg Q \to R$	P
11.	$(P \vee R) \to R$	9,10,T

(12)

1.	$(R \to P) \leftrightarrow (Q \to P)$	P
2.	$((R \to P) \to (Q \to P))$ $\wedge((Q \to P) \to (R \to P))$	1,T
3.	$(R \to P) \to (Q \to P)$	2,T
4.	$\neg(\neg R \vee P) \vee (\neg Q \vee R)$	3,T
5.	$(R \wedge \neg P) \vee \neg Q \vee R$	4,T
6.	$\neg Q \vee R$	5,T
7.	$P \to R$	P
8.	$\neg P \vee R$	7,T
9.	$(\neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee R)$	6,8,T
10.	$(\neg P \wedge \neg Q) \vee R$	9,T
11.	$\neg(P \vee Q) \vee R$	10,T
12.	$(P \vee Q) \to R$	11,T
13.	$(Q \to P) \to (R \to P)$	2,T
14.	$\neg(\neg Q \vee P) \vee (\neg R \vee P)$	13,T
15.	$(Q \wedge \neg P) \vee \neg R \vee P$	14,T
16.	$(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg P) \vee \neg R$	15,T
17.	$P \vee Q \vee \neg R$	16,T
18.	$R \to (P \vee Q)$	17,T
19.	$((P \vee Q) \to R) \wedge (R \to (P \vee Q))$	12, 18,T
20.	$R \leftrightarrow (P \vee Q)$	19,T

【4】 (1)

1.	$\neg Q$	CP
2.	$P \to Q$	P
3.	$\neg Q \to \neg P$	2,T
4.	$\neg P$	1,3,T
5.	$\neg\neg P$	P
6.	P	5,T
7.	F	4,6,T

(2)

1.	$\neg R$	CP
2.	$Q \to R$	P
3.	$\neg R \to \neg Q$	2,T
4.	$\neg Q$	1,3,T
5.	$P \to Q$	P
6.	$\neg Q \to \neg P$	5,T
7.	$\neg P$	4,6,T
8.	P	P
9.	F	7,8,T

(3)

1.	$\neg Q$	CP
2.	$\neg P \to Q$	P
3.	$\neg Q \to P$	2,T
4.	P	1,3,T
5.	$\neg(P \wedge \neg Q)$	P
6.	$\neg P \vee Q$	5,T
7.	Q	4,6,T
8.	F	1,7,T

(4)

1.	P	CP
2.	$P \to \neg Q$	P
3.	$\neg Q$	1,2,T
4.	Q	P
5.	F	3,4,T

(5)

1.	$\neg P$	CP
2.	$P \vee Q$	P
3.	Q	1,2,T
4.	$\neg R \to \neg Q$	P
5.	$Q \to R$	4,T
6.	R	3, 5,T
7.	$\neg R$	P
8.	F	6,7,T

(6)

1.	$\neg R$	CP
2.	$P \vee Q \to R$	P
3.	$\neg R \to \neg(P \vee Q)$	2,T
4.	$\neg(P \vee Q)$	1,3,T
5.	$\neg P \wedge \neg Q$	4,T
6.	$\neg P$	5,T
7.	P	P
8.	F	6,7,T

(7)

1.	$\neg R$	CP
2.	$P \wedge Q \to R$	P
3.	$\neg R \to \neg(P \wedge Q)$	2,T
4.	$\neg(P \wedge Q)$	1,3,T
5.	$\neg P \vee \neg Q$	4,T
6.	P	P
7.	$\neg Q$	5,6,T
8.	$P \to Q$	P
9.	Q	6,8,T
10.	F	7,9,T

(8)

1.	$\neg S$	CP
2.	$R \to S$	P
3.	$\neg S \to \neg R$	2,T
4.	$\neg R$	1,3,T
5.	$\neg R \vee \neg Q$	4,T
6.	$P \to Q \wedge R$	P
7.	$\neg(Q \wedge R) \to \neg P$	6,T
8.	$\neg Q \vee \neg R \to \neg P$	7,T
9.	$\neg P$	5,8,T
10.	$P \wedge Q$	P
11.	P	10,T
12.	F	9,11,T

(9)

1.	P	CP
2.	$P \to Q$	P
3.	Q	1,2,T
4.	$Q \to \neg R$	P
5.	$\neg R$	3,4,T
6.	$(P \wedge Q) \to R$	P
7.	$\neg R \to \neg(P \wedge Q)$	
8.	$\neg(P \wedge Q)$	5,7,T
9.	$\neg P \vee \neg Q$	8,T
10.	$\neg Q$	1,9,T

(10)

1.	Q	CP
2.	$Q \to (\neg P \wedge R)$	P
3.	$\neg P \wedge R$	1,2,T
4.	R	3,T

(11)

1.	$P \vee R$	CP
2.	$(P \wedge Q) \to \neg(P \vee R)$	P
3.	$(P \vee R) \to \neg(P \wedge Q)$	2,T
4.	$\neg(P \wedge Q)$	1, 3,T
5.	$\neg P \vee \neg Q$	4,T
6.	$P \to \neg Q$	5,T
7.	$\neg Q \to R$	P
8.	$P \to R$	6,7,T
9.	$P \wedge S$	P
10.	P	9,T
11.	R	8,10,T

(12)

1.	$\neg(R \leftrightarrow P \vee Q)$	CP
2.	$\neg R \leftrightarrow P \vee Q$	1,T
3.	$\neg R \to P \vee Q$	2,T
4.	$P \vee Q \vee R$	3,T
5.	$(R \to P) \leftrightarrow (Q \to P)$	P
6.	$((R \to P) \to (Q \to P))$ $\wedge((Q \to P)$ $\to (R \to P))$	5,T
7.	$(R \to P) \to (Q \to P)$	6,T
8.	$\neg(\neg R \vee P) \vee (\neg Q \vee R)$	7,T
9.	$(R \wedge \neg P) \vee \neg Q \vee R$	8,T
10.	$\neg Q \vee R$	9,T
11.	$Q \to R$	10,T
12.	$P \to R$	P
13.	$(Q \to P) \to (R \to P)$	6,T
14.	$\neg(\neg Q \vee P) \vee (\neg R \vee P)$	13,T
15.	$(Q \wedge \neg P) \vee \neg R \vee P$	14,T
16.	$(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg P)$ $\vee \neg R$	15,T
17.	$P \vee Q \vee \neg R$	16,T
18.	$(P \vee Q \vee R)$ $\wedge(P \vee Q \vee \neg R)$	4,17,T
19.	$P \vee Q$	18,T
20.	R	11,12,19,T
21.	$(P \vee Q) \to \neg R$	2,T
22.	$\neg R$	19,21,T
23.	F	20,22,T

3.8

【1】 命題論理で表現できるもの：(2)(3)

【2】 (1) $Fish$(マグロ)

(2) $Live$(マグロ，海)

(3) $Live$(太郎君，東京)

(4) $\neg Fish$(太郎君)

(5) $\neg Fish$(イルカ) $\wedge Live$(イルカ，水中)

【3】 (1) $\forall x(P(x) \rightarrow R(x,w))$

(2) $\exists x(Q(x) \wedge R(x,w))$

(3) $\neg\forall x(R(x,w) \rightarrow P(x))$

(4) $\neg\forall x(Q(x) \rightarrow R(x,w))$

(5) $\neg\exists x(P(x) \wedge R(x,l))$

【4】 (1) 偶数 (2) 実数 (3)6 の倍数 (4) 実数 (5) 偶数と 3 の倍数の和集合

3.9

【1】 述語論理式は (1)(3)(5)

【2】 正しいもの (1)(2)(4)．(3)(5) は括弧の省略はできない．((5) は後述の適用範囲の収縮により $\exists x(\forall y Q(x,y) \vee P(x))$ と同値であるが，厳密にはこれは括弧の省略ではない)

【3】 (5)

【4】 (1) $\forall x \exists y \exists z P(x,y,z)$

(2) $\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y) \vee R(x,y)$

(3) 括弧の省略はできない

(4) $P(x) \wedge \neg(\forall x P(x) \vee \exists y Q(y))$

(5) $\neg(\forall x \neg P(x) \vee \neg\exists y Q(y))$

【5】 (1) $A(x)$: x は飛ぶ．$B(x)$: x は鳥である．$\exists x(B(x) \wedge \neg A(x))$

(2) $A(x)$: x がガソリン車を使う．$B(x)$: x が電気自動車を使う．C: 大気中に排出される二酸化炭素の量が減少する．$\forall x(\neg A(x) \wedge B(x)) \rightarrow C$

(3) $A(x)$: x は整数である．$B(x,y)$: y は x より大きい．

$\forall x(A(x) \rightarrow \exists y(A(y) \wedge B(x,y)))$

(4) $A(x)$: x は日曜日．$B(x)$: x は天気がよい日．C: 太郎君は買い物に出かける．$\forall x((A(x) \wedge B(x)) \rightarrow C)$

(5) $A(x)$: x は国産牛肉と輸入牛肉を見分ける方法である．$B(x)$: 素人が x を使える．$\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$

【6】 (1) 束縛変数 x $(\forall x)$ の適用範囲は (左側の) $P(x) \rightarrow Q(y)$．束縛変数 y $(\exists y)$ の適用範囲は (右側の)$P(x) \rightarrow Q(y)$．左側の $P(x) \rightarrow Q(y)$ に含まれる y と右側の $P(x) \rightarrow Q(y)$ に含まれる x は自由変数.

(2) 束縛変数 x $(\exists x)$ の適用範囲は $P(x) \wedge Q(y) \vee \forall y(P(y) \rightarrow Q(x))$． 束縛変数 y $(\forall y)$ の適用範囲は $P(y) \rightarrow Q(x)$．$Q(y)$ に含まれる y が自由変数.

(3) 束縛変数 x $(\forall x)$ の適用範囲は $P(x) \wedge Q(z) \rightarrow \neg\exists y \exists z(\neg P(y) \vee Q(z))$．束縛変数 y $(\exists y)$ の適用範囲は $\exists z(\neg P(y) \vee Q(z))$．束縛変数 z $(\exists z)$ の適用範囲は $\neg P(y) \vee Q(z)$．左側の $Q(z)$ に含まれる z は自由変数.

(4) 束縛変数 x $(\forall x)$ の適用範囲は $\exists y(P(x) \wedge Q(x,y))$．束縛変数 y $(\exists y)$ の適用範囲は $P(x) \wedge Q(x,y)$．束縛変数 z $(\exists z)$ の適用範囲は $\neg P(x) \vee Q(x,z)$．$\neg P(x) \vee Q(x,z)$ に含まれる 2 つの x は自由変数.

(5) 束縛変数 y $(\exists y)$ の適用範囲は $Q(x,y) \wedge \exists z P(z)$．束縛変数 z $(\exists z)$ の適用範囲は $P(z)$．束縛変数 x $(\exists x)$ の適用範囲は $\neg Q(x,y)$．$P(x)$ と左側の $Q(x,y)$ に含まれる 2 つの x と，右側の $Q(x,y)$ に含まれる y は自由変数.

【7】 存在しない.

【8】 (1)
$$\begin{aligned} & \exists x(\forall y P(x,y)) \Leftrightarrow \exists x(\forall z P(x,z)) \\ \Leftrightarrow\ & \exists y(\forall z P(y,z)) \Leftrightarrow \exists y(\forall x P(y,x)) \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} & \forall x(\exists y(P(y) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall z R(z)) \\ \Leftrightarrow\ & \forall x(\exists w(P(w) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall z R(z)) \\ \Leftrightarrow\ & \forall x(\exists w(P(w) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall y R(y)) \\ \Leftrightarrow\ & \forall z(\exists w(P(w) \rightarrow Q(z)) \wedge \forall y R(y)) \\ \Leftrightarrow\ & \forall z(\exists w(P(w) \rightarrow Q(z)) \wedge \forall x R(x)) \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} & \forall x(\exists y(Q(x,y) \rightarrow \neg Q(y,z))) \\ \Leftrightarrow\ & \forall x(\exists u(Q(x,u) \rightarrow \neg Q(u,z))) \\ \Leftrightarrow\ & \forall y(\exists u(Q(y,u) \rightarrow \neg Q(u,z))) \\ \Leftrightarrow\ & \forall y(\exists x(Q(y,x) \rightarrow \neg Q(x,z))) \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} & \exists x(P(x)) \rightarrow (\exists y(Q(x,y)) \\ & \wedge \neg\exists z(Q(y,z))) \\ \Leftrightarrow\ & \exists y(P(y)) \rightarrow (\exists y(Q(x,y)) \\ & \wedge \neg\exists w(Q(y,w))) \\ \Leftrightarrow\ & \exists y(P(y)) \rightarrow (\exists z(Q(x,z)) \\ & \wedge \neg\exists w(Q(y,w))) \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}
& \forall x(P(x) \vee \exists y(Q(x,y) \\
& \wedge \forall z R(x,y,z))) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(P(x) \vee \exists w(Q(x,w) \\
& \wedge \forall z R(x,w,z))) \\
\Leftrightarrow\ & \forall y(P(y) \vee \exists w(Q(y,w) \\
& \wedge \forall z R(y,w,z)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall y(P(y) \vee \exists w(Q(y,w) \\
& \wedge \forall x R(y,w,x))) \\
\Leftrightarrow\ & \forall z(P(z) \vee \exists w(Q(z,w) \\
& \wedge \forall x R(z,w,x)))
\end{aligned}$$

3.10

【1】 (1) 恒偽．奇数の集合.
(2) 充足可．複素数の集合.
(3) 恒偽．複素数の集合.
(4) 恒偽．偶数の集合.
(5) 充足可．複素数の集合.

【2】 $\forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$ は常に成立するので，$\exists x P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$ が成立する条件を考えればよい．領域 D の要素が一個の時.

【3】 (1) 正しい.
(2) 拡張・収縮は，$\wedge, \vee$ にのみ使える.
(3) 右辺で $\forall x$ をつけるのは，B ではなく $P(x)$.
(4) 拡張・収縮において $\neg$ も一緒に位置を動かしてはいけない.
(5) 拡張・収縮において $\neg$ も一緒に位置を動かしてはいけない.

【4】 (1)
$$\begin{aligned}
& \forall x \neg P(x) \wedge \exists x P(x) \\
\Leftrightarrow\ & \neg\exists x P(x) \wedge \exists x P(x) \Leftrightarrow F
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
& \forall x P(x) \vee \exists x \neg P(x) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \vee \neg\forall x P(x) \Leftrightarrow T
\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}
& \forall x \neg P(x) \vee \exists x P(x) \\
\Leftrightarrow\ & \neg\exists x P(x) \vee \exists x P(x) \Leftrightarrow T
\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}
& \forall x P(x) \wedge \exists x \neg P(x) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \wedge \neg\forall x P(x) \Leftrightarrow F
\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}
& \neg(\forall x P(x) \to \exists x P(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg\forall x P(x) \vee \exists x P(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg\exists x(\neg P(x) \vee P(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg\exists x T \Leftrightarrow F
\end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned}
& \neg\forall x \neg P(x) \vee \neg\exists x P(x) \\
\Leftrightarrow\ & \neg\neg\exists x P(x) \vee \neg\exists x P(x) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x P(x) \vee \neg\exists x P(x) \Leftrightarrow T
\end{aligned}$$

【5】 (1)
$$\begin{aligned}
& \forall x(P(x) \to B) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(\neg P(x) \vee B) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \neg P(x) \vee B \\
\Leftrightarrow\ & \neg\exists x P(x) \vee B \\
\Leftrightarrow\ & \exists x P(x) \to B
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
& \neg\forall x(P(x) \to B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\forall x(\neg P(x) \vee B)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\forall x \neg P(x) \vee B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg\forall x \neg P(x) \wedge \neg B \\
\Leftrightarrow\ & \exists x P(x) \wedge \neg B
\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}
& \exists x(B \to P(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\neg B \vee P(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg B \vee \exists x P(x) \\
\Leftrightarrow\ & B \to \exists x P(x)
\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}
& \neg\exists x(B \to P(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg\exists x(\neg B \vee P(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg B \vee \exists x P(x)) \\
\Leftrightarrow\ & B \wedge \neg\exists x P(x)
\end{aligned}$$

【6】 (1)
$$\begin{aligned}
& B \overline{\bigtriangledown} \forall x P(x) \\
\Leftrightarrow\ & B \wedge \neg\forall x P(x) \vee \neg B \wedge \forall x P(x) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(B \wedge \neg P(x)) \vee \forall x(\neg B \wedge P(x)) \\
\Rightarrow\ & \exists x(B \wedge \neg P(x)) \vee \exists x(\neg B \wedge P(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(B \wedge \neg P(x) \vee \neg B \wedge P(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(B \overline{\bigtriangledown} P(x))
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
& \forall x(P(x) \overline{\rightarrow} B) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \neg (P(x) \rightarrow B) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \neg (\neg P(x) \vee B) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x (P(x) \wedge \neg B) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \wedge \neg B \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg \forall x P(x) \vee B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\forall x P(x) \rightarrow B) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \overline{\rightarrow} B
\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}
& \forall x(B \overline{\rightarrow} P(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \neg (B \rightarrow P(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \neg (\neg B \vee P(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x (B \wedge \neg P(x)) \\
\Leftrightarrow\ & B \wedge \forall x \neg P(x) \\
\Leftrightarrow\ & B \wedge \neg \exists x P(x) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg B \vee \exists x P(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(B \rightarrow \exists x P(x)) \\
\Leftrightarrow\ & B \overline{\rightarrow} \exists x P(x)
\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}
& \forall x P(x) \uparrow B \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\forall x P(x) \wedge B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg \forall x P(x) \vee \neg B \\
\Leftrightarrow\ & \exists x \neg P(x) \vee \neg B \\
\Leftrightarrow\ & \exists x (\neg P(x) \vee \neg B) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x \neg (P(x) \wedge B) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x (P(x) \uparrow B)
\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}
& \forall x P(x) \downarrow B \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\forall x P(x) \vee B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg \forall x P(x) \wedge \neg B \\
\Leftrightarrow\ & \exists x \neg P(x) \wedge \neg B \\
\Leftrightarrow\ & \exists x (\neg P(x) \wedge \neg B) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x \neg (P(x) \vee B) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x (P(x) \downarrow B)
\end{aligned}$$

【7】 (1)
$$\begin{aligned}
& \forall y \forall x P(x,y) \wedge \neg \exists y \forall x P(x,y) \\
\Leftrightarrow\ & \forall y \forall x P(x,y) \wedge \forall y \neg \forall x P(x,y) \\
\Leftrightarrow\ & \forall y (\forall x P(x,y) \wedge \neg \forall x P(x,y)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall y F \Leftrightarrow F
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
& \exists y \forall x P(x,y) \wedge \neg \forall x \exists y P(x,y) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s \forall x P(x,s) \wedge \exists t \forall y \neg P(t,y) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s \exists t (\forall x P(x,s) \wedge \forall y \neg P(t,y)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s \exists t (P(t,s) \wedge \neg P(t,s)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s \exists t F \Leftrightarrow F
\end{aligned}$$

(3)$\forall x \exists y P(x,y) \ \Rightarrow\ \exists x \exists y P(x,y) \ \Rightarrow\ \exists y \exists x P(x,y)$

(4)$\forall x \forall y \neg P(x,y) \Leftrightarrow \forall x \neg \exists y P(x,y) \Leftrightarrow \neg \exists x \exists y P(x,y)$

(5)$\exists x \exists y \neg P(x,y) \Leftrightarrow \exists x \neg \forall y P(x,y) \Leftrightarrow \neg \forall x \forall y P(x,y)$

【8】 $P(x,y)$: $x \leq y$. 領域 D は整数の集合.

3.11

【1】 冠頭標準形は (3). (1) は $\exists y$, (2) は $\forall z$, (4) は $\forall x \exists y$, (5) は $\exists y$ が式の最初に出現していない.

【2】 (i)$\forall z$ (ii)$\forall z$ (iii) $\forall x$ (iv) $\exists z$, (v)$(Q(x) \wedge \neg R(x,z))$ (vi) $\forall x$ (vii)$\exists y$ (viii) $\exists z$

【3】 冠頭積和標準形は (1)(2)(3)(5). (4) $\forall x \forall y \exists z$ の適用範囲が $P(x,y,z)$ だけ. (6) と (7) 積和形になっていない. (8) 式の一番先頭に $\neg$ がある.

【4】 冠頭和積標準形は (1)(2)(3)(5)(7). (4) $\forall x \forall y \exists z$ の適用範囲が $P(x,y,z)$ だけ. (6) 和積形になっていない. (8) 式の一番先頭に $\neg$ がある.

【5】 (1) 冠頭積和標準形かつ冠頭和積標準形: $\forall x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

(2) 冠頭積和標準形: $\exists x \forall y(\neg P(x) \vee (Q(x,y) \wedge P(y)))$ 冠頭和積標準形: $\exists x \forall y((\neg P(x) \vee Q(x,y)) \wedge (\neg P(x) \vee P(y)))$

(3) 冠頭積和標準形かつ冠頭和積標準形: $\forall x \exists y(\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee R(x,y))$

(4) 冠頭積和標準形かつ冠頭和積標準形: $\forall x \exists y \exists z(P(x) \vee Q(x) \vee \neg Q(y) \vee R(y,z))$

(5) 冠頭積和標準形かつ冠頭和積標準形: $\exists x \exists y \exists z(\neg P(x) \vee \neg Q(x,y) \vee R(x,y,z))$

3.12

【1】 (1) $\forall xQ(x) \wedge (\forall xQ(x) \to R(x)) \to R(x)$

$\Leftrightarrow \neg\forall xQ(x) \vee \forall xQ(x) \wedge \neg R(x) \vee R(x)$

$\Leftrightarrow \neg\forall xQ(x) \vee \neg R(x) \vee R(x) \Leftrightarrow T$

(2) $\forall xP(x) \wedge (P(a) \to Q(a)) \to Q(a)$

$\Leftrightarrow \neg\forall xP(x) \vee (P(a) \wedge \neg Q(a)) \vee Q(a)$

$\Leftrightarrow \neg P(a) \vee \neg Q(a) \vee Q(a) \Leftrightarrow T$

(3) $(\forall xP(x) \vee \exists yQ(y))$

$\wedge\neg\forall xP(x) \to \exists yQ(y)$

$\Leftrightarrow \neg(\forall xP(x) \vee \exists yQ(y))$

$\vee\forall xP(x) \vee \exists yQ(y)$

$\Leftrightarrow T$

(4) $(\forall xP(x) \to \exists yQ(y))$

$\wedge(\exists yQ(y) \to \forall zR(z))$

$\to (\forall xP(x) \to \forall zR(z))$

$\Leftrightarrow (\forall xP(x) \to \forall zR(z))$

$\to (\forall xP(x) \to \forall zR(z))$

$\Leftrightarrow T$

(5) $\neg(\exists xP(x) \vee \exists yQ(y))$

$\wedge(\neg Q(a) \to R(a)) \to R(a)$

$\Leftrightarrow \neg\exists xP(x) \wedge \neg\exists yQ(y)$

$\wedge(\neg Q(a) \to R(a)) \to R(a)$

$\Leftrightarrow \neg\exists xP(x) \wedge \forall y\neg Q(y)$

$\wedge(\neg Q(a) \to R(a)) \to R(a)$

$\Leftrightarrow \neg\exists xP(x) \wedge \neg Q(a)$

$\wedge(\neg Q(a) \to R(a)) \to R(a)$

$\Leftrightarrow \neg\exists xP(x) \wedge R(a) \to R(a)$

$\Leftrightarrow \exists xP(x) \vee \neg R(a) \vee R(a) \Leftrightarrow T$

【2】 (1)
1. $\forall xQ(x)$ P
2. $\forall xQ(x) \to R(x)$ P
3. $R(x)$ 1,2,T

(2)
1. $\forall xP(x) \vee \exists yQ(y)$ P
2. $\neg\forall xP(x)$ P
3. $\exists yQ(y)$ 1,2,T

(3)
1. $\forall xP(x) \to \exists yQ(y)$ P
2. $\exists yQ(y) \to \forall zR(z)$ P
3. $\forall xP(x) \to \forall zR(z)$ 1,2,T

(4)
1. $\forall xP(x)$ P
2. $\exists xP(x)$ 1,T
3. $\exists xP(x) \to \forall xQ(x)$ P
4. $\forall xQ(x)$ 2,3,T

(5)
1. $\neg\forall xP(x)$ P
2. $\exists x\neg P(x)$ 1,T
3. $\exists x\neg P(x) \to \forall xQ(x)$ P
4. $\forall xQ(x)$ 2,3,T

(6)
1. $\exists x(A \wedge P(x))$ P
2. $A \wedge \exists xP(x)$ 1,T
3. $\exists xP(x)$ 2,T
4. $\neg\exists xP(x) \vee \forall yQ(y)$ P
5. $\forall yQ(y)$ 3,4,T

(7)
1. $\neg(\exists xP(x) \vee \exists yQ(y))$ P
2. $\neg\exists xP(x) \wedge \neg\exists yQ(y)$ 1,T
3. $\neg\exists xP(x)$ 2,T
4. $\exists x(P(x) \vee R(x))$ P
5. $\exists xP(x) \vee \exists xR(x)$ 4,T
6. $\exists xR(x)$ 3,5,T

(8)
1. $\neg(\exists xP(x) \vee \exists yQ(y))$ P
2. $\neg\exists xP(x) \wedge \neg\exists yQ(y)$ 1,T
3. $\neg\exists yQ(y)$ 2,T
4. $\forall y\neg Q(y)$ 3,T
5. $\forall y\neg Q(y) \to \neg\exists zR(z)$ P
6. $\neg\exists zR(z)$ 4,5,T
7. $\forall z\neg R(z)$ 6,T

【3】 (1)
1. $\neg R(x)$ CP
2. $\forall xQ(x) \to R(x)$ P
3. $\neg R(x) \to \neg\forall xQ(x)$ 2,T
4. $\neg\forall xQ(x)$ 1,3,T
5. $\forall xQ(x)$ P
6. F 4,5,T

(2)
1. $\neg\exists yQ(y)$ CP
2. $\forall xP(x) \vee \exists yQ(y)$ P
3. $\forall xP(x)$ 1,2,T
4. $\neg\forall xP(x)$ P
5. F 3,4,T

(3)
1. $\forall xP(x)$ CP
2. $\forall xP(x) \to \exists yQ(y)$ P
3. $\exists yQ(y)$ 1,2,T
4. $\exists yQ(y) \to \forall zR(z)$ P
5. $\forall zR(z)$ 3,4,T

(4)

1.	$\neg\forall yQ(y)$	CP
2.	$\exists xP(x) \to \forall yQ(y)$	P
3.	$\neg\forall yQ(y) \to \neg\exists xP(x)$	2,T
4.	$\neg\exists xP(x)$	1,3,T
5.	$\forall xP(x)$	P
6.	$\exists xP(x)$	5,T
7.	F	4,6,T

(5)

1.	$\neg\forall xQ(x)$	CP
2.	$\exists x\neg P(x) \to \forall xQ(x)$	P
3.	$\neg\forall xQ(x) \to \neg\exists x\neg P(x)$	2,T
4.	$\neg\exists x\neg P(x)$	1,3,T
5.	$\forall xP(x)$	4,T
6.	$\neg\forall xP(x)$	P
7.	F	5,6,T

(6)

1.	$\neg\forall yQ(y)$	CP
2.	$\neg\exists xP(x) \vee \forall yQ(y)$	P
3.	$\neg\exists xP(x)$	1,2,T
4.	$\exists x(A \wedge P(x))$	P
5.	$A \wedge \exists xP(x)$	4,T
6.	$\exists xP(x)$	5,T
7.	F	3,6,T

(7)

1.	$\neg\exists xR(x)$	CP
2.	$\exists x(P(x) \vee R(x))$	P
3.	$\exists xP(x) \vee \exists xR(x)$	2,T
4.	$\exists xP(x)$	1,3,T
5.	$\neg(\exists xP(x) \vee \exists yQ(y))$	P
6.	$\neg\exists xP(x) \wedge \neg\exists yQ(y)$	5,T
7.	$\neg\exists xP(x)$	6,T
8.	F	4,7,T

(8)

1.	$\neg\forall z\neg R(z)$	CP
2.	$\exists z\neg\neg R(z)$	1,T
3.	$\exists zR(z)$	2,T
4.	$\forall y\neg Q(y) \to \neg\exists zR(z)$	P
5.	$\exists zR(z) \to \neg\forall y\neg Q(y)$	4,T
6.	$\neg\forall y\neg Q(y)$	3,5,T
7.	$\exists y\neg\neg Q(y)$	6,T
8.	$\exists yQ(y)$	7,T
9.	$\neg(\exists xP(x) \vee \exists yQ(y))$	P
10.	$\neg\exists xP(x) \wedge \neg\exists yQ(y)$	9,T
11.	$\neg\exists yQ(y)$	10,T
12.	F	8, 11,T

【4】 (1)

1.	$\forall xP(x)$	P
2.	$P(a)$	1,UI
3.	$P(a) \to Q(a)$	P
4.	$Q(a)$	2,3,T

(2)

1.	$\neg(\exists xP(x) \vee \exists yQ(y))$	P
2.	$\neg\exists xP(x) \wedge \neg\exists yQ(y)$	1,T
3.	$\neg\exists yQ(y)$	2,T
4.	$\forall y\neg Q(y)$	3,T
5.	$\neg Q(a)$	4,UI
6.	$\neg Q(a) \to R(a)$	P
7.	$R(a)$	5,6,T

(3)

1.	$\forall x\neg(P(x) \wedge Q(x))$	P
2.	$\neg(P(a) \wedge Q(a))$	1,UI
3.	$\neg P(a) \vee \neg Q(a)$	2,T
4.	$P(a)$	P
5.	$\neg Q(a)$	3,4,T

(4)

1.	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	P
2.	$P(a) \to Q(a)$	1,UI
3.	$\forall x(Q(x) \to R(x))$	P
4.	$Q(a) \to R(a)$	3,UI
5.	$P(a) \to R(a)$	2,4,T

(5)

1.	$\neg\exists x\neg(P(x) \wedge \neg Q(x))$	P
2.	$\forall x(P(x) \wedge \neg Q(x))$	1,T
3.	$P(a) \wedge \neg Q(a)$	2,UI
4.	$\neg Q(a)$	3,T
5.	$Q(a) \vee R(a)$	P
6.	$R(a)$	4,5,T

(6)

1.	$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$	P
2.	$P(a) \wedge Q(a)$	1,UI
3.	$P(a)$	2,T
4.	$\forall x(P(x) \to R(x))$	P
5.	$P(a) \to R(a)$	4,UI
6.	$R(a)$	3,5,T

(7)

1.	$\neg\exists x(P(x) \vee (Q(x) \wedge R(x)))$	P
2.	$\forall x\neg(P(x) \vee (Q(x) \wedge R(x)))$	1,T
3.	$\neg(P(a) \vee (Q(a) \wedge R(a)))$	2,UI
4.	$\neg P(a) \wedge \neg(Q(a) \wedge R(a))$	3,T
5.	$\neg(Q(a) \wedge R(a))$	4,T
6.	$\neg Q(a) \vee \neg R(a)$	5,T
7.	$Q(a)$	P
8.	$\neg R(a)$	6,7,T

【5】 (1)

1.	$P(a)$	P
2.	$P(b)$	P
3.	$\forall xP(x)$	1,2,UG
4.	$Q(a)$	P
5.	$Q(b)$	P
6.	$\forall xQ(x)$	4,5,UG
7.	$\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$	3,6,T
8.	$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$	7,T

(2)

1.	$\neg P(a) \vee Q(a)$	P
2.	$P(a) \rightarrow Q(a)$	1,T
3.	$\neg P(b) \vee Q(b)$	P
4.	$P(b) \rightarrow Q(b)$	3,T
5.	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	2,4,UG

(3)

1.	$P(a)$	P
2.	$P(b)$	P
3.	$\forall x P(x)$	1,2,UG
4.	$\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$	P
5.	$\forall x Q(x)$	3,4,T
6.	$Q(b)$	5,UI

(4)

1.	$\neg(P(a) \vee Q(a))$	P
2.	$\neg P(a) \wedge \neg Q(a)$	1,T
3.	$\neg P(a)$	2,T
4.	$\neg(P(b) \vee Q(b))$	P
5.	$\neg P(b) \wedge \neg Q(b)$	4,T
6.	$\neg P(b)$	5,T
7.	$\forall x \neg P(x)$	3,6,UG
8.	$\forall x \neg P(x) \rightarrow R(a)$	P
9.	$R(a)$	7,8,T

(5)

1.	$P(a) \rightarrow Q(a)$	P
2.	$P(b) \rightarrow Q(a)$	P
3.	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(a))$	1,2,UG
4.	$\forall x(\neg P(x) \vee Q(a))$	3,T
5.	$\forall x \neg P(x) \vee Q(a)$	4,T
6.	$\neg \exists x P(x) \vee Q(a)$	5,T
7.	$\exists x P(x) \rightarrow Q(a)$	6,T

【6】 (1)

1.	$\exists x P(x)$	P
2.	$P(a)$	1,EI
3.	$P(a) \rightarrow Q(a)$	P
4.	$Q(a)$	2,3,T

(2)

1.	$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	P
2.	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	1,T
3.	$P(a) \vee Q(a)$	2,EI
4.	$\neg P(a)$	P
5.	$Q(a)$	3,4,T

(3)

1.	$\neg \exists x \neg P(x)$	P
2.	$\forall x \neg\neg P(x)$	1,T
3.	$\forall x P(x)$	2,T
4.	$\exists x(\neg P(x) \vee Q(x))$	P
5.	$\neg P(a) \vee Q(a)$	4,EI
6.	$P(a)$	3,UI
7.	$Q(a)$	5,6,T

(4)

1.	$\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$	P
2.	$P(a) \rightarrow Q(a)$	1,EI
3.	$\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$	P
4.	$Q(a) \rightarrow R(a)$	3,UI
5.	$P(a) \rightarrow R(a)$	2,4,T

(5)

1.	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	P
2.	$P(a) \wedge Q(a)$	1,EI
3.	$P(a)$	2,T
4.	$P(a) \rightarrow \neg R(a)$	P
5.	$\neg R(a)$	3,4,T
6.	$Q(a)$	2,T
7.	$Q(a) \wedge \neg R(a)$	5,6,T
8.	$\neg(\neg Q(a) \vee R(a))$	7,T
9.	$\neg(Q(a) \rightarrow R(a))$	8,T

【7】 (1)

1.	$P(a)$	P
2.	$\exists x P(x)$	1,EG
3.	$\exists x P(x) \rightarrow Q(a)$	P
4.	$Q(a)$	2,3,T

(2)

1.	$P(a)$	P
2.	$Q(a)$	P
3.	$P(a) \wedge Q(a)$	1,2,T
4.	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	3,EG

(3)

1.	$P(a) \vee Q(a)$	P
2.	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	1,EG
3.	$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	2,T
4.	$\neg \exists x P(x)$	P
5.	$\exists x Q(x)$	3,4,T

(4)

1.	$P(a) \rightarrow Q(a)$	P
2.	$Q(a) \rightarrow R(a)$	P
3.	$P(a) \rightarrow R(a)$	1,2,T
4.	$\exists x(P(x) \rightarrow R(x))$	3,EG

(5)

1.	$\neg P(a)$	P
2.	$\exists x \neg P(x)$	1,EG
3.	$\neg \forall x P(x)$	2,T
4.	$\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$	P
5.	$\exists x Q(x)$	3,4,T
6.	$\exists x Q(x) \rightarrow (R(a) \vee S(a))$	P
7.	$(R(a) \vee S(a))$	5,6,T
8.	$\exists x(R(x) \vee S(x))$	7,EI
9.	$\exists x R(x) \vee \exists x S(x)$	8,T
10.	$\neg \exists x S(x) \rightarrow \exists x R(x)$	9,T