

定理 1.21 R と S が A から B への関係であれば、次の式が成り立つ。

$$(1) (R \cup S)^c = R^c \cup S^c$$

$$(2) (R \cap S)^c = R^c \cap S^c$$

$$(3) (A \times B)^c = B \times A$$

$$(4) (\sim R)^c = \sim (R^c) , \text{ここに} , \sim R = A \times B - R$$

$$(5) (R - S)^c = R^c - S^c$$

【証明】

$$\begin{aligned} (1): (R \cup S)^c &= \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R \cup S \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R \text{ または } \langle y, x \rangle \in S \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R^c \text{ または } \langle x, y \rangle \in S^c \} \\ &= R^c \cup S^c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2): (R \cap S)^c &= \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R \cap S \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R, \langle y, x \rangle \in S \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R^c, \langle y, x \rangle \in S^c \} \\ &= R^c \cap S^c \end{aligned}$$

$$(3): (A \times B)^c = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in A \times B \} = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in B \times A \} = B \times A$$

$$\begin{aligned} (4): (\sim R)^c &= \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in \sim R \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \notin R \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \notin R^c \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in \sim (R^c) \} \\ &= \sim (R^c) \end{aligned}$$

$$(5): (R - S)^c = (R \cap \sim S)^c = R^c \cap (\sim S)^c = R^c \cap \sim (S^c) = R^c - S^c$$