**定理 2.21** $f$ を代数系$<A, *>$から$<B, \blacktriangle>$への準同型写像とする。
(1) $<A, *>$が半群であるとき，$<f(A), \blacktriangle>$も半群である。
(2) $<A, *>$がモノイドであるとき，$<f(A), \blacktriangle>$もモノイドである。
(3) $<A, *>$が群であるとき，$<f(A), \blacktriangle>$も群である。

【証明】

(1)： $f(A)$の任意の要素$f(a)$と$f(b)$に対して，$a \in A$かつ$b \in A$である。
$<A, *>$が半群であるから，$*$が$A$上の閉じた演算である。すなわち，$a * b \in A$である。よって，$f(a * b) \in f(A)$である。$f$が$<A, *>$から$<B, \blacktriangle>$への準同型写像であるから，$f(a) \blacktriangle f(b) = f(a * b) \in f(A)$である。ゆえに，$\blacktriangle$は$f(A)$上の閉じた演算である。
一方，$*$は結合的な演算であるから，$f(A)$の任意の要素$f(a)$と$f(b)$と$f(c)$に対して，
$$\begin{aligned}(f(a) \blacktriangle f(b)) \blacktriangle f(c) &= f(a * b) \blacktriangle f(c) \\ &= f((a * b) * c) \\ &= f(a * (b * c)) \\ &= f(a) \blacktriangle f(b * c) \\ &= f(a) \blacktriangle (f(b) \blacktriangle f(c))\end{aligned}$$
ゆえに，$\blacktriangle$は$f(A)$上の結合的な演算である。
よって，$<f(A), \blacktriangle>$も半群である。

(2)： $e$をモノイド$<A, *>$の単位元とする。$f(A)$の任意の要素$f(a)$に対して，$f(e) \blacktriangle f(a) = f(e * a) = f(a)$，$f(a) \blacktriangle f(e) = f(a * e) = f(a)$である。ゆえに，$f(e)$は$<f(A), \blacktriangle>$の単位元である。
よって，$<f(A), \blacktriangle>$もモノイドである。

(3)： $f(A)$の任意の要素$f(a)$に対して，$a^{-1}$を群$<A, *>$の要素$a$の逆元とする。よって，$f(a) \blacktriangle f(a^{-1}) = f(a * a^{-1}) = f(e)$と
$f(a^{-1}) \blacktriangle f(a) = f(a^{-1} * a) = f(e)$が成り立つ。
ゆえに，$f(a^{-1})$は$f(a)$の逆元である。

(1)と(2)と(3)により，$<f(A), \blacktriangle>$も群である。