

**定理 1.15** 有限集合  $A$  と  $B$  について，次の式が成り立つ。

$$(1) \quad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$(2) \quad |A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

$$(3) \quad |A \cup B| \geq |A| + |B|$$

$$(4) \quad |A \cap B| \leq \min\{|A|, |B|\}$$

$$\left( \min\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \leq b \text{ の時} \\ b, & a > b \text{ の時} \end{cases} \right)$$

$$(5) \quad |A - B| = |A| - |A \cap B|$$

**【証明】**

$$(1): \quad |A - B| + |A \cap B| + |B - A| = |A \cup B|,$$

$$|A - B| + |A \cap B| = |A|, \quad |B - A| + |A \cap B| = |B|,$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

$$(2): \quad |A \oplus B| = |A \cup B| - |A \cap B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

$$(3): \quad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \geq |A| + |B|$$

$$(4): \quad |A \cap B| \leq |A| \text{ かつ } |A \cap B| \leq |B| \text{ より, } |A \cap B| \leq \min\{|A|, |B|\} \text{ である.}$$

$$(5): \quad |A - B| + |A \cap B| = |A| \text{ かつ } |B - A| + |A \cap B| = |B| \text{ より,}$$

$$|A - B| = |A| - |A \cap B|, \quad |B - A| = |B| - |A \cap B| \text{ が成り立つ.}$$