定理 4.15 G を n 個の頂点を持つ単純グラフとする。G の任意の2頂点 u と v に対して，$\deg(u)+\deg(v)\ge n-1$ であるとき，G にハミルトン道が存在する。

【証明】

(1) まず, 任意の頂点 u と v に対して $\deg(u)+\deg(v)\ge n-1$ が成立するには G が連結でなければならないことを示す。単純グラフ G が連結でないと仮定すると，少なくとも二つの連結成分が含まれる。これらを G_1 , G_2 とし，それぞれの頂点数を n_1 ，n_2 とする。ここで，$n\ge n_1+n_2$ である。G_1 の任意の頂点 u に対して $\deg(u)\le n_1-1$ ，及び G_2 の任意の頂点 v に対して $\deg(v)\le n_2-1$ である。よって，$\deg(u)+\deg(v)\le n_1-1+n_2-1\le n-2$ であり，$\deg(u)+\deg(v)\ge n-1$ が成立しないので, 定理の条件を満たすには G は連結グラフでなければならない。

(2) $P=(v_1,v_2,...,v_p)$ を G の最大数の頂点を含む初等道とすると，必ず $p=n$ である。すなわち，P がハミルトン道である。これを背理法で示す。

$p<n$ であるならば，ある P の頂点 v_i が P 以外の頂点 u に隣接している（$1\le i\le p$）。P が G の最大数の頂点を含む初等道であるので，v_1 と v_p に隣接している頂点はすべて P に含まれる。$S=\{v_{a1},v_{a2},...,v_{am}\}$ を v_1 に隣接している頂点の集合とし（ここで，$2=a1<a2<...<am\le p$），$T=\{v_{a1-1},v_{a2-1},...,v_{am-1}\}$ とすると，T の m 個の頂点も道 P に含まれる。v_p が T のいずれとも隣接していなければ，$\deg(v_p)\le(p-1)-m$ になる。よって，$\deg(v_1)+\deg(v_p)\le m+(p-1)-m=p-1<n-1$ である。これは条件に矛盾する。ゆえに，v_p は T のある頂点 v_{aj-1} に隣接している。すると，初等道 P の p 個の頂点は初等閉路 $C=(v_1,v_{aj},...,v_{p-1},v_p,v_{aj-1},...,v_2,v_1)$ を構成している(下図参照)。つまり，P に含まれる頂点のどれから始めても C に沿って長さ p の初等道を作ることができる。P（同ときに C）以外の頂点 u に隣接している頂点 v_i が C に含まれるので，u から v_i への辺と v_i から始まる C に沿った長さ p の初等道からなる長さ $p+1$ の初等道が存在することになる。これは P が最大数の頂点を含む初等道であることに矛盾する。ゆえに，$p=n$，すなわち，G の最大数の頂点を含む初等道は，G のすべての頂点を含むので G にはハミルトン道が存在する。