Quamtum Mechanics

Toshiya Tanaka

2022 年 3 月 4 日

Abstract

量子力学では，self-adjoint operator が物理量に対応している．また，運動量や Hamiltonian といった物理量は空間並進や時間発展などの操作を与える unitary 作用素を与える．物理では，作用素の定義域を気にすることは少ないが，数学的には定義域が重要で，“定義できるところで定義する” ことが大切になる．定義域を直接議論することはむずかしいが，Stone の定理により one-parameter strongly continuous unitary group から定義域を含めた self-adjoint operator を構成することができる [Hal13].

なお，本稿の内容は spm22nd の特別講演で教わった．

1 Stone の定理

Definition 1.1 (one-parameter strongly continuous unitary group)
$\mathcal{H}$ 上の one-parameter strongly continuous unitary group とは，$t \in \mathbb{R}$ でパラメトライズされた unitary 作用素の族 $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ で，

- $U(0) = 1_{\mathcal{H}}$
- $U(s)U(t) = U(s+t)$
- 任意の $\psi \in \mathcal{H}$ に対し，$\| \lim_{t\to 0} U(t)\psi\| = \|\psi\|$

を満たすものをいう．

Theorem 1.2 (Stone's theorem)
$\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ を $\mathcal{H}$ 上の one-parameter strongly continuous unitary group とする．$\psi \in \mathcal{H}$ に対し，

$$\operatorname{Dom} A := \left\{\psi \in \mathcal{H} \mid \lim_{t\to 0} \frac{\|U(t)\psi - \psi\|}{it} = 0\right\}, \tag{1.1}$$

$$A\psi := \lim_{t\to 0} \frac{U(t)\psi - \psi}{it} \tag{1.2}$$

と定めると，組 $(A, \operatorname{Dom} A)$ は $\mathcal{H}$ 上 dense に定義された self-adjoint operator になる．

この形から，self-adjoint operator に対する one-parameter strongly continuous unitary group を $\left\{e^{itA}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ と書く．

2 位置

以下，$\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ として考える．

one-parameter strongly continuous unitary group を

$$\left(e^{itX}\psi\right)(x) := e^{itx}\psi(x) \tag{2.1}$$

と定める．これは one-parameter strongly continuous unitary group である．これにより

$$X\psi(x) \coloneqq \lim_{t\to 0} \frac{e^{itx}\psi(x) - \psi(x)}{it} \tag{2.2}$$

$$= \frac{\psi(x)}{i} \frac{\mathrm{d}e^{itx}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \tag{2.3}$$

$$= x\psi(x) \tag{2.4}$$

と定めた $X \sim x$ は self-adjoint operator である．

これが位置演算子である．

3 運動量

one-parameter strongly continuous unitary group を

$$\bigl(e^{itP}\psi(x)\bigr)(x) \coloneqq \psi(x + \hbar t) \tag{3.1}$$

と定める．これは one-parameter strongly continuous unitary group である．

これにより，

$$P\psi(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\psi(x+\hbar t) - \psi(x)}{it} \tag{3.2}$$

$$= -i\hbar \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x} \tag{3.3}$$

と定めた $P \sim -i\hbar\, \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ は運動量演算子である．

参考文献

[Hal13] B. C. Hall, *Quantum theory for mathematicians*, Graduate Texts in Mathematics, no. 267, Springer New York, 2013.