場の理論ゼミ

Toshiya Tanaka

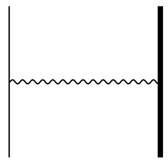
April 23, 2023

はじめに

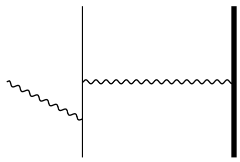
- M1 の前期の授業で Peskin–Schröder の場の理論の本 [PS95] を読むことになったので，学びを記録しようと思います．
- 教科書中の式は (PS. 式番号) のように記します．
- 教科書の公式ページはこちらです．
- 5 章までは富山大学理論物理学研究室でやったゼミのまとめがこちらにあります．

6 Radiative Corrections: Introduction

- このセクションは，書いてあるとおりに計算すればたくさん発散が出てきて死ぬセクションらしい．
- bremsstrahlung で出てくる photon は低エネルギー過ぎて観測できないので，実験上は



と



は区別できないのだが，計算上はすべての process を取り込む必要がある．massless の粒子がいると，このようにいくらで低エネルギーのものをとりこんで，エネルギースペクトラムは m_{e} から上は連続的になる．
- (PS. Fig. 7.2) などは massless photon がいないと仮定して，スペクトラムを書いている．このときは図にあるように $2m_{\mathrm{e}}$ から状態が連続的に分布する．状態があると，相関関数の Fourier 変換が pole を持つらしく，連続 spectrum だと大体 pole が連続的に分布すると思えば，そこに branch cut が走ることになる．

6.1 Soft Bremsstrahlung

- (PS. 6.4) では $m\epsilon$ を改めて ϵ とおいている．
- (PS. 6.5) の計算で $1/k^2$ の pole を両方下に下げる遅延条件を設定することは，今 $t=0$ で瞬間的に加速されることを考えているので，それ以前に放射の場はなくて，その後には存在するという境界条件を課していることと思える[i]．
$t>0$ の場合でも放射が起こるのか，と混乱したが，そうではなくて $t=0$ の瞬間に放射が起こったものが $t>0$ でも残っていると思うと教えてもらった．
- (PS. 6.5) の k^0 についての積分を行う際に，複素関数として，上 (下) 半平面に積分路を追加してそれがゼロに飛ぶことを使うが，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR\cos\theta-kR\sin\theta}$ をゼロに飛ばしたときに $\theta\sim 0$ の範囲で本当に収束するのかという質問がでた．これは，一般論としては Jordan の補題というのがあって，その証明を追えばよいのだが，収束することは次のように言える．
まず，積分について $f(z)$ を M/R^k, $(k>0)$ 程度で抑えられる関数[ii] として，

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}z\, f(z)e^{\mathrm{i}kz} &= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\, \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR\cos\theta-kR\sin\theta} && (6.1)\\
&= 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\, \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR\cos\theta-kR\sin\theta} && (6.2)\\
& && (6.3)
\end{aligned}
$$

とできる．$\pi/2\le\theta\le\pi$ については $\theta\to\pi-\theta$ としてまとめた．

[i] 今，微分方程式を Fourier 変換したものを考えており，このような pole をずらす操作は適切な境界条件を与えていると思える．
[ii] たとえば $1/(k^2+m^2)$ なら $k=3$ くらい，今の場合の $1/(k^4(k+m)(k-m))$ だと $k=5$ など．

$0 \leq \theta \leq \pi/2$ においては $\sin\theta \geq 2\theta/\pi$ が成り立つので，

$$\left|\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \, \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR\cos\theta - kR\sin\theta}\right| \leq \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \, R\big|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\big|\mathrm{e}^{-kR\sin\theta} \tag{6.4}$$

$$\leq \frac{M}{R^k}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \, \mathrm{e}^{-kR2\theta/\pi} \tag{6.5}$$

$$= \frac{M}{R^k}\frac{\pi}{2kR}(1-\mathrm{e}^{-kR}) \tag{6.6}$$

$$\leq \frac{\pi}{2kR^k}M \underset{R\to\infty}{\to} 0 \tag{6.7}$$

となる．$\sin\theta \geq 2\theta/\pi$ の評価が肝である．

- p.178 の一番下の式から p.179 の最初の式で負号が消えているのは，$p^\mu = (p^0, \vec{0})$ と設定したので，$k^0 = \vec{k}\cdot\vec{p}/p^0 = 0$ だから，分母の $k^2 = -|\vec{k}|^2$ の負号が出てくるからである．

References

[PS95] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.