物性物理学

わっふる。

2021 年 7 月 14 日

$2N$ 個のイオンを $i = 1, 2, \ldots, 2N$ とラベルする．
i 番目のイオンのポテンシャルは，イオンからの距離 R の関数として

$$U_i(R) = 2\frac{Aq}{R^n} - \sum_{j=1, i\neq j}^{2N} \frac{q^2}{(-1)^j R} \tag{1}$$

である．斥力ポテンシャルは最近接のものしか寄与しないとしている．
平衡点 R_0 では Eq.(1) の R に関する微分係数がゼロであるので，

$$\frac{\mathrm{d}U_i(R_0)}{\mathrm{d}R} = -2n\frac{Aq}{R^{n+1}} + \sum_{j=1, i\neq j}^{2N} \frac{q^2}{(-1)^j R^2} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{A}{R^n} = \frac{R}{2n} \sum_{i=1, i\neq j}^{2N} \frac{q}{(-1)^j R^2} \tag{3}$$

を満たすので，Eq.(3) を Eq.(1) の第一項に代入して

$$U_i(R_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1, i\neq j}^{2N} \frac{q^2}{(-1)^j R_0} - \sum_{i=1, i\neq j}^{2N} \frac{q^2}{(-1)^j R_0} \tag{4}$$

$$= -\frac{q^2}{R_0}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{i=1, i\neq j}^{2N} \frac{1}{(-1)^j} \tag{5}$$

となる．ところが，この一次元格子が無限につながっているとすると，[i.] 展開

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots, \tag{6}$$

$$\log(1+1) = \log 2 = \sum_{i=1, i\neq j}^{\infty} \frac{1}{(-1)^j} \tag{7}$$

より，

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{\infty} \frac{1}{(-1)^j} = \log 2 \tag{8}$$

故，

$$U_i(R_0) = -\frac{q^2}{R_0}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\log 2 \tag{9}$$

となる．鎖全体としてはこれが $2N$ 個あるので，[ii.]

$$U_{\mathrm{tot}} = NU_i(R_0) = -\frac{2Nq^2 \log 2}{R_0}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \tag{10}$$

を得る．

[i.] この仮定は問題文に書いていないが，無限に続く格子から $2N$ 個のイオンを切り出すと考えた．有限サイズ，特に N が小さいと違いが大きく出そうに思う．といっても，$N = 10$，すなわち粒子が 20 個くらいあればほとんど合うようである．

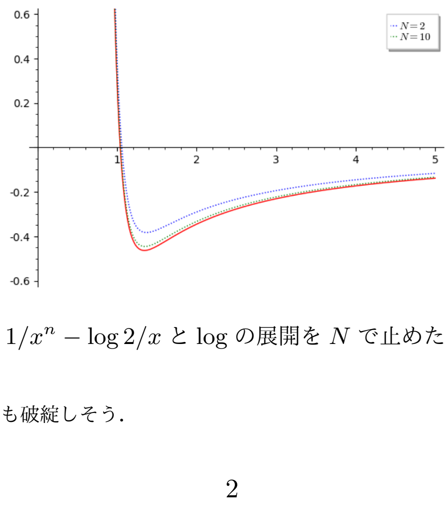

図 1　$y = 1/x^n - \log 2/x$ と log の展開を N で止めたものの比較．

[ii.] 無限に長い鎖を仮定しないと，これも破綻しそう．