可解な量子力学系があったとき，ground state から $W'(x)$ を構成し，超対称パートナーとして可解系を見つけること，さらに一般化して，パラメータ $\mathcal{E}$ として $H = A^\dagger A + \mathcal{E}$ に対する超対称パートナーを見つけ，可解な量子力学系のファミリーを作る方法を見た．

前者の構成法に対する具体例を見る．

Example 1
ポテンシャルを

$$V_{(1)}(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}, & (0 < x < L) \\ \infty, & (x > 0,\ L < x) \end{cases} \tag{1}$$

で与える．Ground state は $\psi_{0,+}(x) = \sqrt{2/L}\sin(\pi x/L)$ であり，第 n 励起状態は $\psi_{n,+}(x) = \sqrt{2/L}\sin((n+1)\pi x/L)$ でエネルギーは $E_n = n(n+2)\pi^2\hbar^2/(2mL^2)$ である．

今，基底状態を用いて，$W'_{(1)}(x) = -\hbar\psi'_0(x)/\psi_0(x) = -\pi\hbar/L\cot(\pi x/L)$ と定めると，ポテンシャルは

$$V_{(1)}(x) = -\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \tag{2}$$

$$V_{(2)}(x) = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left(\frac{2}{\sin^2(\pi x/L)} - 1\right) \tag{3}$$

となり，これは Witten model のところで見たものと同じである．

これら二つのポテンシャルからなる系のエネルギーは超対称性から同じスペクトラムになり，二つ目の系の固有状態は既知である $\psi_{n,(1)}(x)$ を用いて，$\psi_{n,(2)}(x) = A\psi_{n,(1)}(x)$ で与えられる．ここで，A は intertwiner で

$$A = \frac{-\mathrm{i}\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\hbar}W'(x)\right) = \frac{-\mathrm{i}\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\pi}{L}\cot\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right) \tag{4}$$

である．具体的に幾つか計算し，$H_{(2)}$ の固有状態になっていて，固有値は $H_{(1)}$ に等しいことが確認できる．

0.1 形状不変性

SUSY では，片方の系が exactly solvable であるとき，各エネルギー固有値，固有状態にパートナーを対応付けて exactly solvable にすることが出来た．つまり，この手法は片方の系が exactly solvable でないと使えないが，形状不変性 (Shape invariance: SI) と組み合わせることで，zero energy state さえわかっていれば二つの系が exactly solvable であることが言える．

Definition 2 (Shape invariance)
系のパラメータ a を明示し，超対称パートナー Hamiltonian $H_\pm(a)$ があったとする．これらに形状不変性があるとは

$$H_-(a) = H_+(a_1) + \varepsilon(a_1), \quad a_1 = f(a) \tag{5}$$

なる関係があることをいう．

言葉でいうと，パラメータを f で変換して，定数 $\varepsilon(a_1)$ の違いでパートナーに一致するときに，形状不変性があるという．

Example 3
定義域 $-\pi/2 < x < \pi/2$ で superpotential を $W(x;a) = \hbar a\log(\cos x)$ で与える．このとき，ポテンシャルは

$$V_\pm(x;a) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{a(a\mp 1)}{\cos^2 x} - a^2\right) \tag{6}$$

で，これは，$a \mapsto a+1$ とすると $V_-(x;a) = V_+(x;a+1) + (a+1)^2 - a^2$ となる．つまり，$a_1 = a+1$, $\varepsilon(a_1) = a_1^2 - (a_1-1)^2$ の形状不変性がある．

この状況は，up to 定数シフトで $H_-(a)$ と $H_+(a+1)$ が同じ Hamiltonian で，eigenstate は $\psi_{n,+}(x;a) = \psi_{n,+}(x;a+1)$, $(n \geq 0)$ であり，eigenenergy は $E_{n+1,-}(a) = E_{n,+}(a+1) + \varepsilon(a+1)$ である．$H_+(a+1)$ の groundstate $(n=0)$ と $H_-(a)$ の groundstate $(n=1)$ が対応するので，label がずれている．

これで，$H_\pm(a)$ の全ての eigenstate 及び eigenenergy がわかることになる．まず，形状不変性から $\psi_{1,-}(x;a) = \psi_{0,+}(x;a+1) \propto \cos^{a+1}(x)$ となり，SUSY の intertwiner を用いて，$\psi_{1,+}(x;a) = A^\dagger(a)\psi_{1,-}(x;a)$ となる．更に形状不変性を使うと $\psi_{2,-}(x;a) = \psi_{1,+}(x;a+1) = A^\dagger(a+1)\cos^{a+1}(x)$ と順次求めることができる．

energy に関しても，SUSY より $E_{n,+}(a) = E_{n,-}$ があるので，$E_{1,-}(a) = E_{0,+}(a+1) + \hbar^2((a+1)^2 - a^2)/(2m) = \hbar^2((a+1)^2-a^2)/(2m) = E_{1,+}(a)$ で，$E_{2,+}(a) = E_{1,+}(a+1) + \hbar^2((a+1)^2-a^2)/(2m) = \hbar^2((a+2)^2-a^2)/(2m) = E_{2,+}(a)$ などと求められる． □

同様の手法で一般論を作れる．

Theorem 4
$H_+(a)$ の eigenenergy と eigenstate は $\psi_{0,+}(x;a)$ から次のようにして作れる．

$$\psi_{n,+}(x;a) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{E_k(a_{n-k})}} A^\dagger(a)A^\dagger(a_1)\cdots A^\dagger(a_{n-1})\psi_{0,+}(x;a) \tag{7}$$

$$E_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(a_k) \tag{8}$$

ここで，$a_n \coloneqq f(a_{n-1}$，$a_0 \coloneqq a)$ で $n \geq 0$ である．

Example 5 (調和振動子)

$$H_\pm(\omega) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \mp \frac{\hbar\omega}{2} \tag{9}$$

で，ゼロエネルギー解は $\psi_{0,+}(x;\omega) = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}\mathrm{e}^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$ である．形状不変性は $H_-(\omega) = H_+(\omega)+\hbar\omega$ で，$\varepsilon(\omega) = \hbar\omega$ である．

これより，エネルギー固有値は $E_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n}\varepsilon(\omega) = n\hbar\omega$ で，固有状態は Hermite 多項式

$$H_n(q) = (-1)^n\mathrm{e}^{q^2/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} - q\right)^n\mathrm{e}^{-q^2/2} \tag{10}$$

を使って，

$$\psi_{n,+}(x;\omega) = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{E_k}}(A^\dagger)^n\psi_{0,+}(x;\omega) \tag{11}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\hbar\omega)^n}}\left(\frac{-\mathrm{i}\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)\right)^n\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\mathrm{e}^{-m\omega x^2/2\hbar} \tag{12}$$

$$= \frac{2^n\mathrm{i}^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\mathrm{e}^{-m\omega x^2/2\hbar}H_n(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x) \tag{13}$$

となる．