d と ∂ のおはなし。

わっふる。

2020 年 9 月 24 日

ABSTRACT

双対性[*1]は現代の数学や物理で重要な概念です．双対性とはある「概念」があれば，たいして別の「co 概念」が存在し，それらの対応のことを言います[*2]．たとえば，（私は全く知らないですが）AdS/CFT 対応と Anti de Sitter 時空の物理と共形場理論が対応があることであったり，Kramers Wannier 双対性は物性物理で高温相と低温相に対応があったりということがあるそうです．双対性のなにが嬉しいのかといいますと，全く違う理論に双対性があると片方で成り立つ事柄があれば，それに対応してもう片方の理論でもそれに対応して成り立つことがあります．そうすると，わからないことが半分になったり，片方で伝統的に用いられていたテクニックを応用できたりして，多方面から物事を見れるというわけです．最近では素粒子理論と物性理論でもこういうことがおきていると聞くので，とても面白そうですね．

私はそのようなことに興味を持っていますが，もちろん前述したような高度なことをするには前提知識が足りなさすぎるので，これの真似っこをできないかなと思っていました．以前から ∂ という記号が境界作用素という意味でつかわれることをを聞いたことがありましたが，なぜこの記号が使われるのか疑問でしたが，この夏休みに勉強して外微分作用素 d と境界作用素 ∂ に双対性があることを知りました．まだまだ勉強中ではありますが，面白かったので今回はこのことについてお話ししようかと思います．

目次

[*1] 物理の重要な概念の中に相対性 (relativity) と双対性 (duality) というものがある．これらは通常の音読みでは区別できず不便なので，音で区別できるように前者をそうたいせい，後者をそうついせいと読み音で区別する．

[*2] 圏論的に言えば，二つの圏の間に関手があって，この関手のことを双対性という．（のか $\cdots$）

今回のお話は厳密な証明はせず，お気持ち重視で行いたいと思っています．最後に参考文献を記しますので，詳しく知りたいよという方はそちらを参考にしてください．勉強して何か分かったことがあれば教えてくださいね．

1　線形代数からの例

この pdf では線形空間は有限次元で $\mathbb{R}$ 上のものとする．[*3]

1.1　双対空間

V を線形空間とする．V から $\mathbb{R}$ への線形写像 f を線形形式や線形汎関数という．

$$\begin{array}{cccc} f: & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \cup & & \cup \\ & \boldsymbol{v} & \longmapsto & f(\boldsymbol{v}) \end{array} \tag{1.1}$$

Fact. V の基底[*4]を $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ と取ったとき，$f_i \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ の値を取る線形形式の組 $\langle f_1, f_2, \cdots, f_n \rangle$ を選ぶと任意の線形形式はこれの線形結合で書ける．ゆえに，線形形式全体の集合は線形空間をなし，これを V の双対空間といい V^* と書く．

つまり，V から $\mathbb{R}$ への線形「写像」が「ベクトル」として見ることができる．このことから双対空間の元を双対ベクトルや covector ということもある．さらに次のことが言える．

Fact. 双対空間の双対空間はもとの線形空間である．

$$V^{**} = V \tag{1.2}$$

すなわち以下の図式が成り立つ．

$$\begin{array}{cccc} V \ni \boldsymbol{v}: & V^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \cup & & \cup \\ & f & \longmapsto & \boldsymbol{v}(f) \end{array} \tag{1.3}$$

ベクトルがあって，それを実数体に移す線形写像として covector を導入したが，結局，実数体への線形写像はベクトルでもあるし，元のベクトルも線形写像でもある，この意味で vector と covector は対等な関係にあり，これらの pairing が実数となるという見方ができる．すなわち

$$\langle f, \boldsymbol{v} \rangle \coloneqq f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}(f) \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

1.2　双対のおもしろい例：pullback

線形代数では，ある線形空間から別の線形空間への構造を保つ写像[*5]である線形写像について考えることが大きなテーマです．では，双対を取った世界では線形写像はどのように表れるでしょうか．

[*3] お気持ちパートは敬体になりがちです．この pdf はお気持ち重視で書くので，それにともない敬体が増えがちです．

[*4] [2] には基底は順序の入っていない集合で，順序を入れるときは枠と呼んでいるが，この pdf では基底といったときは順序も含めることにする．

[*5] 一般には準同型写像．

v, W を線形空間とし，V^*, W^* はその双対空間である．

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, dotted, "A"] \arrow[dr, "V^* \ni f"'] & W \arrow[d, "g \in W^*"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}
\tag{1.5}
$$

この間の線形写像 $A : V \to W$ が定まると，図式 (1.5) を可換にするように $f = A \circ g$ と定まる．これは双対空間 W^* から V^* への写像[*6]と考えられる．

$$
\begin{array}{cccc}
A^* : & W^* & \longrightarrow & V^* \\
& \cup & & \cup \\
& g & \longmapsto & A^*(g) \coloneqq A \circ g
\end{array}
\tag{1.6}
$$

比べてみると以下のようになる．

$$
V \xrightarrow{A} W \qquad \overset{*}{\leftrightsquigarrow} \qquad V^* \xleftarrow{A^*} W^*
\tag{1.7}
$$

このように，双対の世界では元の世界と逆向きの矢印が生えます．A^* を pullback とか引き戻しなどと言ったりします．

1.3 おまけ：圏論からの視点

このように，矢印をお絵かきすることで対応関係が分かることがとても面白いと思いました．面白いことは大体偉い人がやっているもので，こういう対応関係をみる圏論という数学があるそうです．圏論の言葉ではこう書かれるんだなぁとほーんと思ってもらえればと思います．

U, V, W を線形空間とする．$A : V \to W,\ B : U \to V$ を線形写像とし，その合成を考える．これとその双対空間での構造は以下の図式のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "B"] \arrow[dr, "AB"'] & V \arrow[d, "A"] \\
& W
\end{tikzcd}
\quad
\begin{array}{c} \overset{*}{\rightsquigarrow} \\[2em] \overset{*}{\rightsquigarrow} \end{array}
\quad
\begin{tikzcd}
U^* & V^* \arrow[l, "B^*"'] \\
& W^* \arrow[ul, "B^* A^*"] \arrow[u, "A^*"']
\end{tikzcd}
\tag{1.8}
$$

双対を取る $*$ という対応は線形空間の圏とその双対空間の圏の反変関手である．

反変関手はおおざっぱに矢印が反対向きになっているよねということです．

2 微分幾何での d と ∂

さて，ここからはさらにお気持ちベースになりそうです．

可微分多様体を考えます．といっても，知らない人にはわからないですが，多様体とは空間を高次元に一般化したと考えてください．可微分多様体とはその中でもなめらかなものだと思ってください．

2.1 tangent space

通常，$\mathbb{R}^n$ 上での微分は，曲線 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ があれば，

$$
\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}
\tag{2.1}
$$

[*6] 線形写像である．

tangent space は線形空間となって，その基底は

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right\rangle \tag{2.2}$$

である．

2.2 cotangent space

tangent space が線形空間であるから，双対空間を定めることができる．双対基底を

$$\left\langle \mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \cdots, \mathrm{d}x^n \right\rangle \tag{2.3}$$

と書く．

なぜ，ここで d と書く理由は次を見れば分かる．任意の $\mathrm{d}f \in TM, \omega \in T^*M$ に対して，

$$\langle \mathrm{d}f, \omega \rangle = a_1 \frac{\partial f}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + a_2 \frac{\partial f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \ldots + a_n \frac{\partial f}{\partial x^n}\mathrm{d}x^n \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

これは $\mathbb{R}^n$ 上での全微分の式と同じである．

このように，可微分多様体では d と ∂ では線形空間の基底として双対関係があるのである．

3 homology と cohomology

∂ は境界作用素という意味があります．以前からなぜこの記号を使うのか気になっていましたが，双対性という観点からこれを説明したいと思います．

厳密には書きませんが，点，線分，三角形，四面体を n 次元に拡張したものを単体といい，それらを（うまく）組み合わせた多角形の一般化のようなものを単体的複体といいます．[*7] さらに，向きという概念を導入することで単体は「同じ向き」と「違う向き」という二つの同値類に分けることができます．[*8]

definition 1. $\sigma_{r,i}$ を $r \leq n$ 次元の向き付けられた単体，$K = \{\sigma_{r,i}\}$ を n 次元単体的複体とする．r 単体 $\sigma_{r,i}$ によって生成される自由加群

$$C_r(K) \coloneqq \left\{ \sum_{i \in I_r} c_i \sigma_{r,i} \middle| c_i \in \mathbb{Z} \right\} \tag{3.1}$$

を r 次元境界鎖群という．

群構造は $c, c' \in C_r(K)$ に対して

$$c + c' \coloneqq \sum_{i \in I_r} (c_i + c'_i)\sigma_{r,i} \tag{3.2}$$

とすると well-defined です．左辺は chain の演算で，右辺は通常の整数の足し算です．

Fact.

$$C_r(K) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{I_r \text{個の直和} = \text{整数 } I_r \text{ 個の組}} \tag{3.3}$$

次に境界作用素を定める．

[*7] **e.g.**p_0, p_1, p_2 を頂点にもち，それらと各辺および内部を持つ三角形は $K = \{p_0, p_1, p_2, \langle p_0 p_1 \rangle, \langle p_1 p_2 \rangle, \langle p_2 p_0 \rangle, \langle p_0 p_1 p_2 \rangle\}$

[*8] **e.g.**$(p_0 p_1)$ を点 p_0 から p_1 への有向線分と見たとき，$(p_1 p_0) \coloneqq -(p_0, p_1)$ とする．マイナスは逆の意．

definition 2. 境界作用素 ∂_r は写像 $C_r(K) \to C_{r-1}$ で

$$\partial_r \sigma_r \coloneqq \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (p_0 p_1 \ldots \hat{p_i} \ldots p_r) \tag{3.4}$$

と定義する．ここで，hat はその点を除くことを意味する．$r = 0$ のとき，$\partial_0 \sigma_0 = 0$ とする．

なぜ，このような定義をするかは省きますが，とにかく一つ低い次元への写像になっているので境界であろうことは納得してほしいです．

$$0 \to C_r(K) \xrightarrow{\partial_r} C_{r-1}(K) \xrightarrow{\partial_{r-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0 \tag{3.5}$$

という系列ができ，これを鎖複体という．

さて，いままでの議論は，単体的複体という特別なものについて行ってきましたが，次の二つのから tpological な量が定まります．

Fact. 境界作用素の Image と Kernel について考える．

$c \in C_r(K)$ が $\partial_r c = 0$ のとき，r 輪体といい，この全体を $Z_r(K)$ と書く．これは $C_r(K)$ の部分群である．

また，$d \in C_{r+1}$ が存在して，$c = \partial_{r+1} d$ のとき，c を r 境界輪体といい，この全体を $B_r(K)$ と書く．これは $C_r(K)$ の部分群である．

$C_r(K)$ の中でも，$Z_r(K)$ は境界がないもので $B_r(K)$ は何かの境界になっているもの，ということです．

Fact. 境界作用素の反対称性から，

$$\partial_r(\partial_{r+1} d) = 0 \tag{3.6}$$

が成り立つ．二回行うと零になるという性質を冪零性という．

これは，境界の境界はないということです．

このことから次のことが言えます．

theorem 1.

$$Z_r(K) \supset B_r(K) \tag{3.7}$$

definition 3. 定理より商群を考えることができ，実はこれが topological な量である．

$H_r(K) \coloneqq Z_r(K)/B_r(K)$ を homology 群という．

3.1 cohomology

がらっと話の方向性を変えて，微分形式の話をしましょう．

definition 4. differential r-form とは

$$\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r} \coloneqq \sum_{P \in S_r} \mathrm{sgn}(P) \mathrm{d}x^{\mu_{P(1)}} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{\mu_{P(r)}} \tag{3.8}$$

をいう．

ここで注意してほしいのは，これが反対称であるということです．

さらに，ここでのお話に重要な外微分作用素を導入します．

definition 5. 外微分作用素 d_r とは写像 $\Omega^r \to \Omega^{r+1}$ で，

$$
\begin{array}{rccc}
\mathrm{d}_r : & \Omega^r(M) & \longrightarrow & \Omega^{r+1}(M) \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& \omega = \dfrac{1}{r!}\omega_{\mu_1\mu_2\dots\mu_r}\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_r} & \longmapsto & \mathrm{d}_r\omega = \dfrac{1}{r!}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}\omega_{\mu_1\mu_2\dots\mu_r}\right)\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_r}
\end{array}
\tag{3.9}
$$

で定義する．

この反対称性から次のことが成り立つ．

theorem 2. 冪零

$$\mathrm{d}^2 = 0 \tag{3.10}$$

また，次の系列ができる．

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{\mathrm{d}_0} \Omega_1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}_1} \dots \xrightarrow{\mathrm{d}_{m-1}} \Omega^m(M) \xrightarrow{\mathrm{d}_m} 0 \tag{3.11}$$

これを de Rham 複体という．

さて，ここまで見れば反対称性，冪零性，系列と双対構造がみえませんか．

外微分作用素の Im と Ker 及び，その商群 $H^r(M)$ も考えることができる．$H^r(M)$ は de Rham cohomology といい，topological な量である．

もう少し双対性をあらわにしよう．$c \in C_r(M)$ と $\omega \in \Omega^r(M)$ を考える．内積を

$$
\begin{array}{ccc}
C_r(M)\times\Omega^r(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
(c,\omega) & \longmapsto & \displaystyle\int_C \omega
\end{array}
\tag{3.12}
$$

で定義する．

Fact. Stokes の定理

$$\int_{\partial\Omega}\omega = \int_C \mathrm{d}\omega \tag{3.13}$$

というものがある．

これはある多様体の積分は，その境界上の積分に等しいということです．

これは境界作用素と外微分作用素の双対性を表しており，

$$\langle c, \mathrm{d}\omega\rangle = \langle \partial c, \omega\rangle \tag{3.14}$$

ということです．まあ，この pdf の主題であった d と ∂ の双対性がなんとなくわかってもらえればうれしいです．

参考文献

[1] 中原幹夫　理論物理学のための幾何学とトポロジー　日本評論社

[2] 谷村省吾　幾何学から物理学へ　サイエンス社

[3] 谷村省吾　理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何　サイエンス社

[4] 松尾衛　相対論とゲージ場の古典論を噛み砕く　現代数学社

[5] 齋藤正彦　線型代数入門　東京大学出版会
[6] 斉藤毅　線形代数の世界　東京大学出版会
[7] 坪井俊　幾何学 I,II,III　東京大学出版会
[8] R.Bott L.W.Tu Differential forms in algebraic topology Springer

この pdf は [1]，[2] で得た知見を中心に書いています．したがって必然的にこれらの下位互換になりがちですので，興味を持たれた方はまずこの 2 冊を読まれることをお勧めします．[3] は [1] の内容と重なっている部分もあり，噛み砕いた形になっているので，これもわかりやすかもしれません．また，differential form のお気持ちは [4] もわかりやすいです．これらは物理屋さん向けの本です．

以下，それでも満足しないよという人向けに（ちゃんと読んだわけではありませんが）数学の本を紹介します．

私の線形代数の知識の大部分は [5] によるものです．第 4 章の演習問題に双対空間の話も載っています．双対空間等，advanced な線形代数に詳しいのは [6] です．

[7] は 3 冊シリーズですが，幾何学の本です．I が多様体，II がホモロジー，III が微分形式について書かれています．なんとありがたいことに，東大数理のページに講義動画（https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/video/index.html）があります．

de Rham cohomology に関しては [8] の最初のほうに書いてあるようです．Tu さんの本はわかりやすいらしい．