場の理論ゼミ

Toshiya Tanaka

October 31, 2022

1 Introduction

- B4 の後期は [PS95] を研究室のゼミで読むことになったので，学びを記録しようと思います．
- 教科書中の式は PS (number) のように記します．
- 教科書の公式ページはこちらです．

2 The Klien–Gordon Field

- p.14 で，$E = \sqrt{p^2 + m^2}$ の方で計算した propagator

$$U(t) = \frac{1}{2\pi^2 |\vec{x} - \vec{x}_0|} \int_0^\infty \mathrm{d}p \sin(p|\vec{x} - \vec{x}_0|) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\sqrt{p^2+m^2}} \tag{2.1}$$

を直接評価する方法は，本でも引用されているように，[GR80, p.491][i.] を見れば良い．

$$\int_0^\infty x \mathrm{e}^{-\beta\sqrt{\gamma^2+x^2}} \sin \beta x \, \mathrm{d}x = \frac{b\beta\gamma^2}{\beta^2 + b^2} K_2(\gamma\sqrt{\beta^2 + b^2}) \tag{2.2}$$

という式があり，この収束する積分の指数の肩を虚数倍ひねる，いわゆる解析接続をしていると解釈できる．元の積分は p が無限で発散し，虚数の指数関数は振動するので，被積分関数を見ると発散してしまうことがわかる．[ii.]
- PS (2.31) で $\delta(0)$ の無限大をむしすることについて，
  - GR を考えるときは無視できない．
  - SUSY を入れると出ない．
- PS (2.33) の計算は奇関数が対称区間の積分で消えることを考える．素直に代入して，

$$\begin{aligned} \vec{P} &= -\int \mathrm{d}^3x \, \pi(\vec{x}) \vec{\nabla} \phi(\vec{x}) & (2.3) \\ &= -\int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3} \left(\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \right) (a_p - a_{-p}^\dagger) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}} (\mathrm{i}\vec{p}\,') \frac{1}{\sqrt{2\omega_{p'}}} (a_{p'} + a_{-p'}^\dagger) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) & (2.4) \end{aligned}$$

となり，

$$\int \frac{\mathrm{d}^3x}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{p}+\vec{p}\,')\cdot\vec{x}} = \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{p}\,') \tag{2.5}$$

を使うと，

$$\vec{P} = -\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} (-\vec{p}) \frac{1}{2} (a_p - a_{-p}^\dagger)(a_{-p} + a_p^\dagger) \tag{2.6}$$

となる．今，$(a_p a_{-p} - a_{-p}^\dagger a_{-p} + a_p a_p^\dagger + a_{-p} a_p^\dagger)$ となるが，p と $-p$ が交互に入っているものは奇関数になり，消える．

$$\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} (a_p a_{-p} + a_{-p}^\dagger a_p) = 0. \tag{2.7}$$

すると，添字の運動量は，符号が一致したものしか残らず，全空間の積分なので符号を変えて，全て $+p$ で計算する

[i.] この本はネット上でも見れるが，1200 ページくらいあり，とても重いので注意．
[ii.] この一連の議論は d 氏に教えていただいた．

テクニックが使える．これより，

$$\vec{P} = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\vec{p}\frac{1}{2}\Big(a_p a_p^\dagger - a_{-p}^\dagger a_{-p}\Big) \tag{2.8}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\vec{p}\left(a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2}\left[a_p, a_p^\dagger\right]\right) \tag{2.9}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\vec{p}a_p^\dagger a_p \tag{2.10}$$

となる．最後の $\left[a_p, a_p^\dagger\right]) = \delta(0)$ は偶関数と思うと消える．

- PS (2.40) は三次元空間の $\mathrm{d}^3 p/(2E_p)$ で measure を入れたものだが，$\mathbb{R}^{1,3}$ に埋め込むと $p^0 > 0$ の方の双曲超平面上の積分と思える．
- PS (2.41), PS (2.42) から，$\phi(x)\left|0\right\rangle_{\mathrm{QFT}} \sim \left|\vec{x}\right\rangle_{\mathrm{QM}}$，$\langle 0|\phi(x)|p\rangle_{\mathrm{QFT}} \sim \langle x|p\rangle_{\mathrm{QM}} = \mathrm{e}^{ipx}$ と対応がつく．
- section 2.4 では今まで，時間に依存しない Schödinger 描像でやっていたものを，Heisenberg 描像に移す．やりかたは，QM と同じように $\mathcal{O}_{\text{Heisenberg}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathcal{O}_{\text{Schrödinger}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$ とする．
- 生成消滅演算子の Heisenberg 描像は $\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}Ht}{n!}$ と $H^n a_p = a_p(H - E_p)$ など[iii.]を用いて，$a_p \mathrm{e}^{-iE_p t}$ などになり，場の演算子も綺麗にまとまる．
- PS (2.51) の最後の評価は，鞍点ではないが，振動の遅いところが積分に最も寄与すると思うと，$E = m$ の値を採用すると考える．
- branch cut をまわる積分 PS (2.52) の計算の仕方は physics SE. 285126 の回答がわかりやすい．まず，複素関数で平方根をナイーブに考えてしまうと，$\sqrt{\mathrm{i}}$ などと書いたときに，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ でも $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}$ でも二乗したら i になるので，$\mathrm{i} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}, \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/4}$ となってしまい写像としてよくない．このようなときに $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/2} \mapsto \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/4}$ と考える．一般に，複素数の変革 θ が $\theta \in [0, 2\pi)$ と $\theta \in [2\pi, 4\pi)$ で区別し，複素平面二枚を定義域と思うという手法を考える．この拡張した定義域を Riemann 面という．
  このとき，θ: $2\pi - \epsilon \to 2\pi + \epsilon$ は連続的につながっていて，この二枚をつないでくっつけるところを branch cut という．
  PS (2.52) の積分は，実軸上の積分路を連続変形することにより，branch cut に沿う積分に変換するという方針で行う．このとき注意すべきことは，積分路は常に一枚目にあり，branch cut の両辺では定義域の偏角が 2π ずれており，したがって．符号が違う値が出てくることである．
  具体的に積分は次のようにして行う．まず，球座標に変数変換して，積分する．

$$D(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}k \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, k^2 \sin\theta \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}\cos\theta}}{(2\pi^3)2\sqrt{k^2+m^2}} \tag{2.11}$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}k\, \frac{k}{\sqrt{k^2+m^2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right) \tag{2.12}$$

$$= \frac{-\mathrm{i}}{8\pi^2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k\, \frac{k}{x\sqrt{k^2+m^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{2.13}$$

$$= \frac{-1}{8\pi^2 x}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{k^2+m^2}}. \tag{2.14}$$

これより，積分

$$I := \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{k^2+m^2}} \tag{2.15}$$

を計算すればよい．
被積分関数の pole は $k = \pm\mathrm{i}m$ にあり，$\sqrt{k^2+m^2} = \sqrt{k+\mathrm{i}m}\sqrt{k-\mathrm{i}m}$ なので，branch cut は $(-\infty, -\mathrm{i}m]$, $[\mathrm{i}m, \infty)$ に取れば良い．
ここで，積分路を Cauchy の積分定理を用いて，次のように変形する．

$$I = \int_{\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}m} \mathrm{d}k\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{-\sqrt{k^2+m^2}} + \int_{\mathrm{i}m}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}k\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{k^2+m^2}} = 2\int_{\mathrm{i}m}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}k\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{k^2+m^2}} \tag{2.16}$$

となる．これにより，$k = \mathrm{i}(y+m)$ と変数変換すれば

$$I = 2\int_0^\infty \mathrm{d}y\, \frac{\mathrm{e}^{-(m+y)x}}{\sqrt{(y+m)^2 - m^2}} \tag{2.17}$$

iii. 生成消滅のこのような関係式は，片方について調べると，もう片方はエルミート共役を取れば直ちに成り立つことを確認できる．

となる．さらに，$y+m=u$，$u=\cosh\eta$ と変数変換することで，

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int_1^\infty \mathrm{d}u\,\frac{\mathrm{e}^{-mux}}{\sqrt{u^2-1}} &(2.18)\\
&= 2\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\,\mathrm{e}^{-mx\cosh\eta} &(2.19)
\end{aligned}
$$

となる．propagator に戻ると，

$$
\begin{aligned}
D(x) &= \frac{-1}{4\pi^2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\,\mathrm{e}^{-mx\cosh\eta} &(2.20)\\
&= \frac{-1}{4\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\,(-m\cosh\eta)\mathrm{e}^{-mx\cosh\eta} &(2.21)
\end{aligned}
$$

となり，$\sinh\eta=s$ とおくことで，

$$
\begin{aligned}
D(x) &= \frac{m}{4\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{-mx\sqrt{1+s^2}} &(2.22)\\
&\simeq \frac{m}{4\pi^2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{mx}}\mathrm{e}^{-mx} &(2.23)\\
&= \frac{m^2}{4\pi^2}\sqrt{\frac{\pi}{2(mx)^3}}\mathrm{e}^{-mx} &(2.24)
\end{aligned}
$$

となり，空間方向には e^{-mx} 程度しか伝播しないことがわかる．

- PS (2.56) では step function[iv.] や delta function の微分を考える必要がある．これらは積分をされたときの振る舞いにより，定義するのがうまい方法なので，次のように考えることができる．

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\,f(x)\frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x} &= [f(x)\theta(x)]_{-\infty}^\infty - \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\theta(x) &(2.25)\\
&= f(\infty) - \int_0^\infty \mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} &(2.26)\\
&= f(\infty) - f(\infty) + f(0) &(2.27)\\
&= f(0) &(2.28)\\
&= \int_{-\infty}^\infty f(x)\delta(x) &(2.29)
\end{aligned}
$$

により，$\mathrm{d}\theta(x)/\mathrm{d}x = \delta(x)$，

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\,f(x)\frac{\mathrm{d}\delta(x)}{\mathrm{d}x} &= [f(x)\delta(x)]_{-\infty}^\infty - \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\delta(x) &(2.30)\\
&= \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\left(-\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\delta(x)\right) &(2.31)
\end{aligned}
$$

により，$f(x)\,\mathrm{d}\delta(x)/\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x\,\delta(x)$ となる．

- PS (2.56) の微分は x に関しておこなっている．また，$\delta(x^0-y^0)$ があるので，積分したら同時刻になると思い，CCR$[\phi(x),\pi(x)] = i\delta^{(4)}(x-y)$ を使っている．
- また，$(\partial^2+m^2)\langle 0|[\phi(x),\phi(y)]|0\rangle = 0$ は Klein–Gordon 方程式からゼロになる．
- propagator の pole の避け方は経路をいじって避けるというよりは，pole 自身を $i\epsilon$ でずらして，$\epsilon\to 0$ の極限をとると思うのが良い[v.]．
- p.33 の最後は $p^2=m^2$ はそのような粒子が実際に観測されるということだけで，一連の議論には使っていないと思う．

3 The Dirac Field

- PS (3.2) の不変性の書き方が，分かりづらく感じる．Lorentz 変換 Λ により，位置は $x\mapsto x'=\Lambda x$ と変換し，場は $\phi(x)\mapsto\phi'(x')$ と変換するが，座標は動かさず，場を動かすという立場を取っていて，変換後も変換前と同じ x を使うと思うと，$x'=x$ と起き直して，もとの x は $\Lambda^{-1}x$ になるので，$\phi'(x)=\phi(\Lambda^{-1}x)$ という書き方をしている．

---

iv. 自分が知っている定義は，$\theta(0)=1/2$ とするものだが，$\theta(0)=0$ とする定義もあるらしいが，どこかで綻びはないのか．

v. 経路をずらした場合は，どのように避けても値は pole を上下にずらした場合の平均で同じ値になると思う．こちらの記事が参考になる．

- 微分に関しては，$y \coloneqq \Lambda^{-1}x$ と思うと，

$$\partial_\mu \phi'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\phi(y) \tag{3.1}$$

$$= \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\phi(y) \tag{3.2}$$

$$= \Lambda^\mu_\nu \partial_\mu \phi(\Lambda^{-1}x) \tag{3.3}$$

  となり，右辺は x で微分したものに，$\Lambda^{-1}x$ を代入していると思える．例えば，$f(x) = x + x^2$ という関数があって，$f(ax) = (ax) + (ax)^2$ の微分は，$\mathrm{d}f/\mathrm{d}x = x + 2x$ に $\mathrm{d}ax/\mathrm{d}x = a$ をかけて，ax を代入したものであると思える．
- Maxwell 理論の Lagrangian$\mathcal{L}_{\mathrm{Maxwell}} = -(F_{\mu\nu})^2$ から Euler–Lagrange 方程式を計算して，Maxwell 方程式を導出する際は，場の微分で微分するときに注意が必要である．特に，二乗のまま計算するとややこしいので，$(F_{\mu\nu})^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ であることと，$\partial(\partial_\rho A_\sigma)/\partial(\partial_\mu A_\nu) = \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma$ や $\partial(\partial^\rho A^\sigma)/\partial(\partial_\mu A_\nu) = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}$ に注意して，計算する．
- PS (3.16) が PS (3.17) の交換関係を満たすことを確認するとき，$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ などを使うと簡単に計算できる．例えば，$[x^\mu\partial^\nu, x^\rho\partial^\sigma]$ の項は $[x^\mu\partial^\nu, x^\rho\partial^\sigma] = x^\mu x^\rho[\partial^\nu, \partial^\sigma] + x^\mu[\partial^\nu, x^\rho]\partial^\sigma + x^\rho[x^\mu, \partial^\sigma]\partial_\nu + [x^\mu, x^\rho]\partial^\sigma\partial^\nu$ とすると，微分同士，x 同士は可換なので消えて，$[\partial^\mu, x^\nu] = g^{\mu\nu}$ から，すぐにわかる．
- PS (3.17) の定義は，他の本だと片方 $g_{\mu\nu}$ になっているが，これは足を片方上げた状態であるので consistent．これにより，α, β などは単なる行列の足ではなく，Lorentz ベクトルの足なので，PS (3.20), PS (3.21) を計算するときは，足の上下に応じて，空間成分ならマイナスをかけないといけない．

References

[GR80] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, New York, 1980.

[PS95] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.