

# 場の理論ゼミ

Toshiya Tanaka

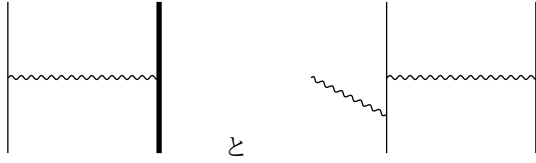
July 4, 2023

## はじめに

- M1 の前期の授業で Peskin–Schröder の場の理論の本 [PS95] を読むことになったので、学びを記録したいと思います。
- 教科書中の式は (PS. 式番号) のように記します。
- 教科書の公式ページは[こちら](#)です。
- 5 章までは富山大学理論物理学研究室でやったゼミのまとめが[こちら](#)にあります。

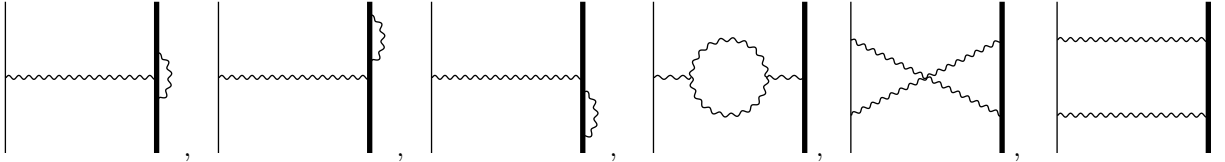
## 6 Radiative Corrections: Introduction

- このセクションは、書いてあるとおりに計算すればたくさん発散が出てきて死ぬセクションらしい。
- bremsstrahlung で出てくる photon は低エネルギー過ぎて観測できないので、実験上は



は区別できないのだが、計算上はすべての process を取り込む必要がある。massless の粒子がいると、このようにいくらで低エネルギーのものをとりこんで、エネルギー・スペクトラムは  $m_e$  から上は連続的になる。

- (PS. 6.1) 以外に heavy particle を含む loop diagram が次の 6 種類ある。loop diagram とは、外線の運動量を決めても内線の運動量が unique に決まらない diagram であることに注意。



- (PS. Fig. 7.2) などは massless photon がいないと仮定して、スペクトラムを書いている。このときは図にあるように  $2m_e$  から状態が連続的に分布する。状態があると、相関関数の Fourier 変換が pole を持つらしく、連続 spectrum だと大体 pole が連続的に分布すると思えば、そこに branch cut が走ることになる。

### 6.1 Soft Bremsstrahlung

- (PS. 6.4) では  $m_e$  を改めて  $\epsilon$  とおいている。
- (PS. 6.5) の計算で  $1/k^2$  の pole を両方下に下げる遅延条件を設定することは、今  $t = 0$  で瞬間的に加速されることを考えているので、それ以前に放射の場はなくて、その後には存在するという境界条件を課していることと思える<sup>i</sup>。  
 $t > 0$  の場合でも放射が起こるのか、と混乱したが、そうではなくて  $t = 0$  の瞬間に放射が起こったものが  $t > 0$  でも残っていると思うと教えてもらった。
- (PS. 6.5) の  $k^0$  についての積分を行う際に、複素関数として、上 (下) 半平面に積分路を追加してそれがゼロに飛ぶことを使うが、 $e^{ikz} = e^{ikR \cos \theta - kR \sin \theta}$  をゼロに飛ばしたときに  $\theta \sim 0$  の範囲で本当に収束するのかという質問がでた。これは、一般論としては [Jordan の補題](#) というのがあって、その証明を追えばよいのだが、収束することは次のように言える。

<sup>i</sup> 今、微分方程式を Fourier 変換したものを考えており、このような pole をずらす操作は適切な境界条件を与えていると思える。

まず、積分について  $f(z)$  を  $M/R^k$ , ( $k > 0$ ) 程度で抑えられる関数<sup>ii</sup>として、

$$\int dz f(z) e^{ikz} = \int_0^\pi d\theta i R e^{i\theta} f(R e^{i\theta}) e^{ikR \cos \theta - kR \sin \theta} \quad (6.1)$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} d\theta i R e^{i\theta} f(R e^{i\theta}) e^{ikR \cos \theta - kR \sin \theta} \quad (6.2)$$

$$(6.3)$$

とできる。  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$  については  $\theta \rightarrow \pi - \theta$  としてまとめた。

$0 \leq \theta \leq \pi/2$  においては  $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$  が成り立つので、

$$\left| \int_0^{\pi/2} d\theta i R e^{i\theta} f(R e^{i\theta}) e^{ikR \cos \theta - kR \sin \theta} \right| \leq \int_0^{\pi/2} d\theta R |f(R e^{i\theta})| e^{-kR \sin \theta} \quad (6.4)$$

$$\leq \frac{M}{R^k} \int_0^{\pi/2} d\theta e^{-kR 2\theta/\pi} \quad (6.5)$$

$$= \frac{M}{R^k} \frac{\pi}{2kR} (1 - e^{-kR}) \quad (6.6)$$

$$\leq \frac{\pi}{2kR^k} M \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (6.7)$$

となる。  $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$  の評価が肝である。

- p.178 の一番下の式から p.179 の最初の式で負号が消えているのは、  $p^\mu = (p^0, \vec{0})$  と設定したので、  $k^0 = \vec{k} \cdot \vec{p}/p^0 = 0$  だから、分母の  $k^2 = -|\vec{k}|^2$  の負号が出てくるからである。
- (PS. 6.10) の絶対値はベクトルの絶対値で、(PS. 6.8) で実数に設定しているので複素共役をとる必要はない。また、  $1/8$  の係数は、エネルギーの定義の  $1/2$  と  $\mathbb{R} \ni a = (z + z^*)/2$  と書くときの  $1/2$  の factor 2 つ分によりついている。
- (PS. 6.10) の  $\vec{B}$  側の評価で、形は  $\vec{E}$  のほうと同じだから、

$$\frac{1}{2} \int d^3x |\vec{B}(x)|^2 = \frac{1}{8} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left( \vec{B}(\vec{k}) \cdot \vec{B}(-\vec{k}) e^{-2ik^0 t} + 2\vec{B}(\vec{k}) \cdot \vec{B}^*(\vec{k}) + \vec{B}^*(\vec{k}) \cdot \vec{B}^*(-\vec{k}) e^{2ik^0 t} \right) \quad (6.8)$$

となる。ここで、ベクトル解析の式  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$  をつかい、  $\vec{B} = \hat{k} \times \vec{E}$  であることと  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$  を考慮すると  $\vec{B}(\vec{k}) \cdot \vec{B}(-\vec{k}) = -\vec{E}(\vec{k}) \cdot \vec{E}(-\vec{k})$  などとなり、  $e^{\pm ik^0 t}$  の項は足すと消える。

- 偏光ベクトル  $\epsilon^\mu$  は四元ベクトルだが、ゲージ対称性で一成分、zero norm の unphysical state を消すために一成分消えるので、独立なものは二つ。
- (PS. 6.13) で  $\sum \epsilon_\mu \epsilon_\nu^*$  を  $-g_{\mu\nu}$  に置き換えてよいのは、  $k_\mu (p'^\mu / (k \cdot p') - p^\mu / (k \cdot p)) = 0$  がなりたつ。(PS. 5.79) あたりの議論を追うとまず、  $k^{\mu*} = (k, 0, 0, k)$ ,  $\epsilon^1 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $\epsilon^2 = (0, 0, 1, 0)$  をとり、  $k_\mu f^\mu = 0$  が成り立っている。  $k$  の取り方から、  $k f^0 - k f^3 = 0$  がわかり、  $\sum \epsilon_\mu \epsilon_\nu f^\mu f^{\nu*} = |f^1|^2 + |f^2|^2 = |f^1|^2 + |f^2|^2 + |f^3|^2 - |f^0|^2 = g_{\mu\nu} f^\mu f^{\nu*}$  となるので、この置き換えをしてよいことがわかる。(逆に、この種の条件がない場合は置き換えができない。)
- p.181 最後に積分の下端を設定するところの  $\vec{v}$  などは high energy を考えているので  $|\vec{v}| \sim 1$  であることに今後注意すべき。例えば、(PS. 6.15) で日積分関数の分母で  $\hat{k} \cdot \vec{v}$  となっている部分が、しれっと  $\vec{v} \cdot \vec{v}'$  と変わっているのはこの条件を使っていると思う。また、この下端の設定は任意性があり、今考えているのは放射が軸にほぼ平行な  $\cos \theta \sim 1$  あたりからの寄与が dominant であるからである。  
この設定に物理的解釈をつけようと思うと、後ろに放射することはないだろうとおもい、方向転換する角度で cutoff するという説明を教えてもらった。
- (PS. 6.17) の  $\approx 2 \log(p \cdot p' / ((E^2 - |\vec{p}|)/2))$  への変形は、分母の  $E^2(E - |\vec{p}|) \simeq (E + |\vec{p}|)/2(E - |\vec{p}|)$  と考えるとよい。また、直接しらべるとこの途中式を経ず、最後の形にもっていくこともできるらしい。
- (PS. 6.17) の最後は等号だが近似を使っている。  $(p' - p)^2 = (p')^2 + p^2 - 2p \cdot p'$  だが、相対論極限で  $p^2 = E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2 \sim 0$  なので、前二項を無視している。
- (PS. 6.22) で amplitude を分離させているが、  $\delta(p - p' - k)$  をどう分けたのか。  $\mathcal{M}_0$  には  $\delta(p - p')$  となるが、  $\mathcal{O}(k)$  くらいの違いは無視すると思う。
- (PS. 6.25) の積分の上端は、運動量保存から electron の運動量の差  $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$  までと考える。
- total の結果は classical の場合は粒子数で、こちらは発散しても個数が無限大であることそんなにかかしくないが、quantum の場合は確率なので、発散することは大問題である。
- (PS. 6.26) を計算するために、photon に小さい mass  $\mu$  を入れるのは、

$$\int_\mu^{|\vec{q}|} dk \frac{1}{k} \mathcal{I}(\vec{v}, \vec{v}') \quad (6.9)$$

とすると計算してもよいし、

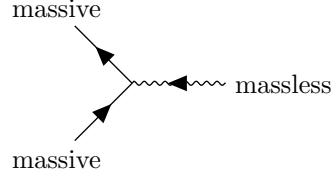
$$\int_0^{|\vec{q}|} dk \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \mathcal{I}(\vec{v}, \vec{v}') \quad (6.10)$$

ii. たとえば  $1/(k^2 + m^2)$  なら  $k = 3$  くらい、今の場合の  $1/(k^4(k+m)(k-m))$  だと  $k = 5$  など。

で  $\log 2$  くらいを捨てると思えば良い。

## 6.2 The Electron Vertex Function: Formal Structure

- photon に mass を持たせて良いのか、という問題は後の section で diagram を足し上げると  $\mu$  依存性が消えるらしい。
- (PS. 6.31) で  $C = 0$  を決定するのに  $q^2 \neq 0$  でないといけなが<sup>3</sup>、これは飛んでいる photon が off shell であることを意味する。この photon は on shell になり得なくて、これは (今、heavy particle を無視して書いているが、本来は) 内線だからである。また、



(6.11)

(ここには diagram が入る)

はエネルギー運動量保存からありえないことがわかる。

- p.187 の注釈に空間の添字の上げ下げによる符号に注意せよとあるが、(PS. 6.35) は  $A^i$  が上がっているなので、overall の符号が + になっている<sup>iii</sup>。
- p.187 の最後の式は (PS. 6.30) から  $\delta(p'^0 - p^0) = \delta(q^0)$  なので左辺の  $q_\nu$  は  $q^i$  にしてよい。
- p.188 の  $\tilde{B}^k(\vec{q}) = +i\epsilon^{ijk} q^i \tilde{A}_{cl}^j(\vec{q})$  である。なぜなら、

$$f(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) e^{-ikx} \quad (6.12)$$

の Fourier 変換の convention を取っていて、空間成分の係数は +i だからである。こうすると直前の  $i\mathcal{M}$  の符号があう。

## 6.3 The Electron Vertex Function: Evaluation

- (PS. 6.38) で vertex が  $e^2$ なのは、 $-ie\Gamma^\mu$  と一つ外に出して定義しているからである。
- Feynman parameter 積分はまず、

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \delta(x+y-1) \frac{1}{(xA+yB)^2} \quad (6.13)$$

は計算できる。これを  $B$  で微分することによって

$$\frac{1}{AB^n} = \int_0^1 \delta(x+y-1) \frac{ny^{n-1}}{(xA+yB)^{n+1}} \quad (6.14)$$

を得る。

(PS. 6.41) は帰納法で、

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} \cdots \frac{1}{A_{n+1}} = \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{(n-1)!}{(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n)^n} \frac{1}{A_{n+1}} \quad (6.15)$$

に Eq.(6.14) を用いると示せる。

- (PS. 6.42) で  $m_i$  は整数に制限しなくても成り立つと書いてある。この導出では整数解微分しているので階乗しか出ないが、(多少テクニカルだが、)  $\Gamma$  関数を使って示す方法があるので、整数以外にも使うことができる。
- $q^2 < 0$  はあとからも使う重要な性質で次のように示せる。

$$p \cdot q = p \cdot (p' - p) = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2} \sqrt{m^2 + |\vec{p}'|^2} - m^2 > 0. \quad (6.16)$$

- $d$  次元の極座標は  $d-1$  個の角度パラメータがあつて、1 個は 0 から  $2\pi$ 、残りの  $d-2$  個は 0 から  $\pi$  まで動くように取れる。これは、 $d-1$  次元球面は円周を変形しながら閉区間を動かす軌跡により作ることができる構成があることから理解できる。
- (PS. 6.55) は  $F_1(q^2 = 0)$  が発散してはいけないことからの修正である。
- Pauli-Villars では大きい  $\Lambda$  を 2 つ目のプロパゲーターにより小さい寄与を付け加えることで、紫外発散を消せる。赤外発散は一項目のプロパゲーター自体に小さい  $\mu$  を付け加えることで消す。
- 次元正則化では UV 発散は消せるが、IR は消せない。これは、次元を増やすと運動量が大きい所は発散が弱くなるが、ゼロは原点なので発散が緩やかにならないと思える。

<sup>iii</sup>. 同時に  $A_{(PS,cl)}$  の classical の添字が下がっているのは confusing である。

## 6.4 The Vertex Corrections: Infrared Divergence

- $F_1(q^2)$  の  $y, z$  の積分変数の変換は Jacobian を計算すると, 正しいことが確認できる.  $y = \sqrt{w^2}\xi, z = 1 - \sqrt{w^2}$  なので,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial w^2} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial w^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{w^2} & \frac{1}{2\sqrt{w^2}} \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{w^2}} \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

より, determinant の絶対値は  $1/2$  になる.

- (PS. 6.61) は, 上の計算過程で省略している  $\mu \rightarrow 0$  で発散しない  $1$  と  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  を復活させている.

## References

- [PS95] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.