電気抵抗について

わっふる。

2021 年 7 月 30 日

Matthiessen 則より金属の電気抵抗 (率) は

$$\rho = \rho_{\text{impurities}} + \rho_{\text{phonon}} + \rho_{\text{electron}} \tag{1}$$

で与えられる．それぞれ，不純物や格子欠陥による周期性の乱れ，格子振動 (phonon)，他の電子からの寄与である．一般に，金属では第 2 項の格子振動からの寄与 ρ_{phonon} が大きな部分をしめることが知られている．これについて述べる．

簡単のため，1-d lattice で考える．座標を x, 格子点を $R_n, (0 \leq n \leq N)$，$0 = R_0 = R_N = L$ などとする．また，金属中での電子は自由粒子としてふるまうこととする．

まず，各イオンが格子点上に fix されているとした時の完全な周期場を

$$V(x) = \sum_{n=1}^{N} v(x - R_n) \tag{2}$$

とし，格子振動でそれぞれが u_n だけずれたとき

$$\tilde{V}(x) = \sum_{n=1}^{N} v(x - R_n - u_n) \tag{3}$$

となる．この差分は

$$\delta V(x) = -\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial v(x - R_n)}{\partial x} u_n \tag{4}$$

である．また，格子の振動を固有モードで展開し

$$u_n = \sum_{q \in \mathbb{Z}} Q_q e^{iqR_n} \tag{5}$$

と書くと，

$$\delta V(x) = -\sum_{n=1}^{N} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \frac{\partial v(x - R_n)}{\partial x} Q_q e^{iqR_n} \tag{6}$$

となる．今，自由粒子を仮定したので，波数 k の電子の波動関数は $\phi(x) \sim e^{ikx}$ で，このポテンシャル変化の下で電子が波数 k の状態から波数 k' の状態に移る遷移振幅は[i.]

$$\begin{aligned}
\langle k' | \delta V | k \rangle &= \frac{1}{L} \int_0^L \mathrm{d}x \phi^*_{k'}(x) \delta V(x) \phi_k(x) && (7) \\
&= -\frac{1}{L} \int_0^L \mathrm{d}x \sum_{n=1}^{N} \sum_{q \in \mathbb{Z}} e^{-ik'x} \frac{\partial v(x - R_n)}{\partial x} Q_q e^{iqR_n} e^{ikx} && (8) \\
&= -\sum_{q \in \mathbb{Z}} Q_q \sum_{n=1}^{N} e^{i\left(q - k' + k\right) R_n} \frac{1}{L} \int_0^L \mathrm{d}x' \frac{\partial v(x')}{\partial x'} e^{-i(k' - k)x'} && (9) \\
&= -v'_{k'} Q_q \delta_{q, k - k' + G_m} && (10)
\end{aligned}$$

i. 果たして $\delta V(x)$ が observable なのかは微妙に思うが．

となる．Eq.(9) では積分に対し $x \mapsto x' - R_n$ の置き換えをし，Eq.(10) で

$$v'_{k'} \coloneqq \frac{1}{L}\int_0^L \mathrm{d}x' \frac{\partial v(x')}{\partial x'} e^{-i(k'-k)x'} \tag{11}$$

とおいた．[ii.] また，$G_m \coloneqq 2\pi m/a, (m \in \mathbb{Z})$ は逆格子ベクトルである．

Eq.(10) の言わんとすることは，電子の波数が $k \to k'$ となるときは，波数 $q = k - k' + G_m$ の格子振動と相互作用をしてるということである．このとき，運動量及びエネルギーを[iii.] 授受しているということである．重要なのが，単に授受するだけでなく，逆格子ベクトル分だけ違ってもよいということである．図 1

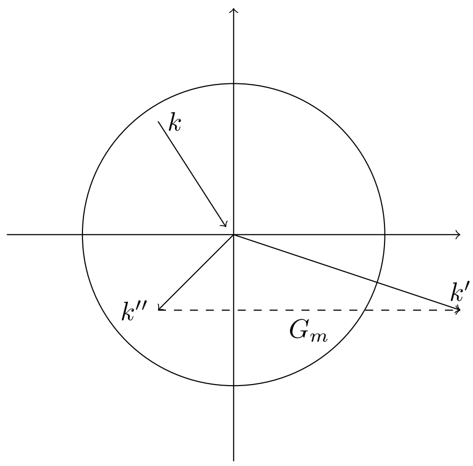

図 1　電子の格子振動による散乱のイメージ．見やすさのため多次元で書いている．このように単に k' になるだけでなく，逆格子ベクトル分だけずれた k'' への散乱も起こりうるということ．

図 1 の k'' への散乱のように，波数ベクトルが反転する散乱を umklapp 散乱という．このようにして，電流にあらがうような波数があらわれることが電気抵抗の原因であると考えられる．

他に，調べた事実を列挙すると，umklapp 散乱を起こし得る格子振動は低温で減少し，[Kit] によるとそれは $e^{(-\theta_U/T)}$ で減衰する．

また，電気抵抗の温度依存性の一般式としてとしては，Bloch-Grüneisen 関数

$$\rho_{\text{phonon}}(T) = \alpha F_{\text{BG}}\left(\frac{T}{T_D}\right) \tag{12}$$

$$= 4\alpha x^5 \int_0^{1/x} \mathrm{d}y \frac{y^5}{(e^y - 1)(1 - e^{-y})} \tag{13}$$

$$\approx \begin{cases} \alpha x & (x \to 0) \\ 480\alpha\zeta(5)x^5 & (x \to \infty) \end{cases} \tag{14}$$

がある．[井野][iv.]

参考文献

[近藤] 近藤康．　固体物理学講義ノート．https://www.phys.kindai.ac.jp/laboratory/kondo/

[Kit] Kittel. 宇野良清他訳．“キッテル固体物理学入門” 第 8 版. 丸善.

[井野] 井野明洋．　固体物理 I 講義ノート．　第 10 講スライド．https://home.hiroshima-u.ac.jp/ino/lecture/ [v.]

ii. 変数変換をした段階で積分区間も変わると思うが，一周期にわたる積分なのでどこを取ってもよしとする．

iii. 量子力学で考えると $\hbar\omega$ 単位で．

iv. 自分の覚書のために書いておくと，https://www.px.tsukuba.ac.jp/~onoda/cmp/node52.html に導出過程が載っていそうである．

v. [井野] に関してはノートとスライドがあるが，スライドのほうにのみ記述がある．