一般相対論ゼミ

Toshiya Tanaka

June 5, 2023

Abstract

M1 の授業で Wald の “General Relativity” をゼミで読むので，その記録をします．

1 Introduction

- 特殊相対論の慣性系は重力のない系に定義される．たとえば，重力の効果によって潮汐力などが働くと，慣性系が定義できない状況が考えられる．問題なく定義できる慣性系を局所慣性系といい，どの程度の広さ慣性系を張れるかという特徴的な長さは曲率によってさだまる．
- 物理の理論は，状態・方程式・解釈からなる．

	状態	方程式	解釈
古典力学	$\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$	$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$	$\vec{x}$, $\vec{v}$ は粒子の位置および速度．
電磁気学	$\vec{E},\ \vec{B} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	Maxwell equation	電磁場
量子力学	$\lvert\psi\rangle \in \mathcal{H}$	Schrödinger equation	確率解釈
一般相対論	$g_{\mu\nu}$	$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$	物質が空間の形状を定める．

2 Manifolds and Tensor Fields

2.1 Manifolds

- wald は多様体の定義を近傍系から定めている．近傍とは位相空間 $M, \mathcal{O}$ として $p \in M$ を含む $O \in \mathcal{O}$ のことである．通常，多様体は位相空間であることを用いて定義するが，近傍により開集合系を定めると位相空間になるので良いのだと思う．
- 多様体の位相的性質としてハウスドルフかつパラコンパクトであることを課している．ハウスドルフ性は通常課すのでよいとして，パラコンパクトであることは多様体上の積分を定義するときに 1 の分割が常に存在することを保証するらしいがよくわからない．
- S^2 が多様体であることの例では，座標変換をたとえ $(1,+)$ から $(2,+)$ の変換では $f_2^+ \circ (f_1^-)^{-1}(x_1, x_2) = (\sqrt{1-(x^1)^2-(x^2)^2}, x^2)$ と定めれば微分可能であることがわかる．
- 大体この辺の多様体論でやっていることは，多様体 M 上の解析学をチャート ψ で $\mathbb{R}^n$ 上の解析学を持って定義している．例えば，M 上の C^∞ 級関数 f とは，$f \circ \psi^{-1}$ が C^∞ 級であることにより定義するなど．

2.2 Vectors

- M 上の定数関数 $h(p) = c$ を接ベクトル v で移したものがゼロになることは，$v(h^2)$ に Leibniz 則と線形性を使うとわかるが，線形性を使う $v(h^2) = v(ch) = ch(v)$ は関数として $h^2 = ch$ と考えると良い．等しいのは，任意の $p \in M$ に対して二つの関数が同じ値を返すからである．
- (Wald. 2.2.4) の x^μ は $x^\mu \colon \mathbb{R}^n \ni x = (x^1, x^2, \ldots, x^\mu, \ldots, x^n) \mapsto x^\mu \in \mathbb{R}$ のことである．

2.3 Tensors; the Metric Tensor

- V と V^* は同型だが，この同型は基底を指定して初めて決まるのに対し，V^{**} との同型は人為的に基底を定めなくても, $v \in V$ に対し $V^{**} \ni v \colon V^* \ni w^* \to w^*(v) \in \mathbb{R}$ が自動的に定まるので，数学的自然さの度合いが違う．このような同型は canonical な同型といい，他と区別される．
- metric の正の数と負の数は基底のとり方によらないという主張は，線形代数の Sylvester の慣性法則を参照．
- metric g が symmetric で non degenerate である理由は，よく知っている (Minkowski) 内積[i] の意味での metric と compatible にするためである．特に non degenerate だと移した先で $g(x, v) = g(x', v)$ と同じならば，$g(x, v) -$

[i] 通常の内積は更に positive definite であることが追加される．

$g(x', v) = g(x - x', v) = 0$ となり，non degenerate 性から $x - x' = 0$ となるので $g(\bullet, v)$ が単射であることがわかる．これにより，内積と双対ベクトルとの一対一対応があることが言える[ii]．
- metric $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ だが，$g\colon V \ni v \mapsto g(\bullet, v) \in V^*$ と見ることも出来て，これはまさしく添字の上げ下げである．

2.4 The Abstract Index Notation

- 座標を決めて，成分で書く方法 $T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l}$ ではなく，Abstract index notation では座標は固定せず，添字はその slot が双対空間か通常のベクトル空間のどちらに作用するかを表す．

3 CURVATURE

3.1 Derivative Operators and Parallel Transport

- Christoffel symbol は変換性の観点からはテンソルでない．(Wald. 3.1.15) で左辺はテンソルの変換をするが，右辺の Christoffel symbol は $\Gamma^b{}_{ac} t^c$ 全体としてテンソルの変換をする．$\nabla'_a t'^b = \partial'_a t'^b + \Gamma'^b{}_{ac} t'^c$ と書いたとき，$\Gamma'^b{}_{ac} \neq \partial'_a x^d \partial_e x'^b \partial'_c x^f \Gamma^e{}_{df}$ ということ．
- Theorem 3.1.1 について，uniqueness は次のように言える．今，二つの共変微分 $\tilde{\nabla}_a$, $\tilde{\nabla}'_a$ をとったとして，(Wald. 3.1.28) の方法で $C^c{}_{ab}$, $C'^c{}_{ab}$ をそれぞれに対しつくると，

$$0 = \nabla_a g_{bc} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} - C^d{}_{ab} g_{dc} - C^d{}_{ac} g_{bd} \tag{3.1}$$

$$0 = \nabla'_a g_{bc} = \tilde{\nabla}'_a g_{bc} - C'^d{}_{ab} g_{dc} - C'^d{}_{ac} g_{bd} \tag{3.2}$$

が成り立つ．ここで，∇_a, ∇'_a が等しいことは，次のようにして言える．
∇_a, ∇'_a は共変微分なので，$\nabla_a g_{bc} = \nabla'_a g_b c - D^d{}_{ab} g_{dc} - D^d{}_{ac} g_{bd}$ の差があるが，これはゼロであるので，$D^d{}_{ab} g_{dc} - D^d{}_{ac} g_{bd} = 0$ でないといけない．ところが，(Wald. 3.1.24) 以降の一連の議論を繰り返すと，(Wald. 3.1.28) に対応する部分より，$D^c{}_{ab} = 0$ となり，作った微分は最初の微分のとり方によらないことがわかる．

3.2 Curvature

3.3 Geodesics

3.4 Methods for Computing Curvature

[ii] 全射性は $\dim V = \dim V^*$ で単射であることから言える．