How to push the contour upward?

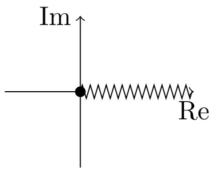
Toshiya Tanaka

September 25, 2022

1 branch cut の見つけ方

複素関数で，$z^{1/2}$ や $\log z$ などを考えるとき，これらは多価関数になってしまうことがある．このような場合，定義域に複素平面を n 枚取ってきて，適切に張り合わせたものを採用する方法をとる．

この定義域を Riemann 面といい，張り合わせる線を branch cut という．例えば，$z^{1/2}$ の場合，複素平面を二枚持ってきて，phase が $0 \to 2\pi$ のときを一枚目に担当させ，2π を超えると二枚目にゆき，$2\pi \to 4\pi$ を二枚目の複素平面が担当し，4π を超えると一枚目に戻るようにすればよい．このとき，branch cut は Eq. (1) のように入る．



(1)

また，$(z-a)^{1/2}$ の場合は，(a, ∞) に branch cut が入ると思えば良い．

2 本題

計算したいものは，space like な自由場のプロパゲータ

$$D(x) = -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\sqrt{|\vec{k}|^2+m^2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{2}$$

である．

まず，球座標に変数変換して，積分する．

$$\begin{aligned}
D(x) &= -\mathrm{i}\int_0^\infty \mathrm{d}k \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, k^2 \sin\theta \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}\cos\theta}}{(2\pi^3)2\sqrt{k^2+m^2}} && (3)\\
&= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}k\, \frac{k}{\sqrt{k^2+m^2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right) && (4)\\
&= \frac{-1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k\, \frac{k}{x\sqrt{k^2+m^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} && (5)\\
&= \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2 x}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{k^2+m^2}}. && (6)
\end{aligned}$$

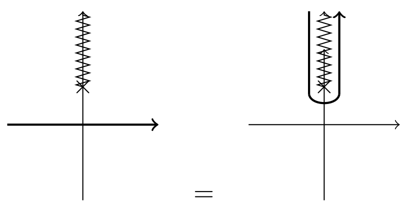
これより，積分

$$I := \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{k^2+m^2}} \tag{7}$$

を計算すればよい．

被積分関数の pole は $k = \pm\mathrm{i}m$ にあり，$\sqrt{k^2+m^2} = \sqrt{k+\mathrm{i}m}\sqrt{k-\mathrm{i}m}$ なので，branch cut は $(-\infty, -\mathrm{i}m]$, $[\mathrm{i}m, \infty)$ に取れば良い．

ここで，積分路を Cauchy の積分定理を用いて，次のように変形する．



(8)

この操作は “push the contour upward” などと書かれる．注意すべきは，$k\colon \mathrm{i}\infty \to \mathrm{i}m$ の経路と $k\colon \mathrm{i}m \to \mathrm{i}\infty$ は同じ複素平面にあるので，定義域の phase は 2π ずれていることである．このため，被積分関数の符号が二つの経路で反転するので，

$$I = \int_{\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}m} \mathrm{d}k \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{-\sqrt{k^2+m^2}} + \int_{\mathrm{i}m}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}k \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{k^2+m^2}} = 2\int_{\mathrm{i}m}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}k \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{k^2+m^2}} \tag{9}$$

となる．これにより，$k = \mathrm{i}(y+m)$ と変数変換すれば

$$I = 2\int_0^\infty \mathrm{d}y \, \frac{\mathrm{e}^{-(m+y)x}}{\sqrt{(y+m)^2 - m^2}} \tag{10}$$

となる．さらに，$y + m = u$，$u = \cosh\eta$ と変数変換することで，

$$I = 2\int_1^\infty \mathrm{d}u \, \frac{\mathrm{e}^{-mux}}{\sqrt{u^2-1}} \tag{11}$$

$$= 2\int_0^\infty \mathrm{d}\eta \, \mathrm{e}^{-mx\cosh\eta} \tag{12}$$

となる．propagator に戻ると，

$$D(x) = \frac{\mathrm{i}}{4\pi^2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \mathrm{d}\eta \, \mathrm{e}^{-mx\cosh\eta} \tag{13}$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{4\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\eta \, (-m\cosh\eta)\mathrm{e}^{-mx\cosh\eta} \tag{14}$$

となり，$\sinh\eta = s$ とおくことで，

$$D(x) = \frac{-\mathrm{i}m}{4\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}s \, \mathrm{e}^{-mx\sqrt{1+s^2}} \tag{15}$$

$$\simeq \frac{-\mathrm{i}m}{4\pi^2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{mx}}\mathrm{e}^{-mx} \tag{16}$$

$$= \frac{-\mathrm{i}m^2}{4\pi^2}\sqrt{\frac{\pi}{2(mx)^3}}\mathrm{e}^{-mx} \tag{17}$$

となり，空間方向には e^{-mx} 程度しか伝播しないことがわかる．