

# Lie algebra for physics

わっふる。

2021 年 6 月 4 日

# はじめに

## このノートについて

2021 年度前期に、先生のご厚意で素粒子理論研究室の M1 ゼミに参加させていただいてきます。その復習や備忘録としてノートにまとめておこうと思います。ゼミで読んでいるのは [\[Geo\]](#) です。

## 注意

復習，備忘録用のノートということで，個人の趣味嗜好，および勉強したときの感想がかなり反映されると思います。また，typo があつたりめんどくさくなってタイプしなかったりが多々あると思うので，書いてあることを鵜呑みにしないでください，行間を埋めることと，正しいかどうか判断することは読者への演習問題とします。<sup>i</sup>

また，本文はできるだけ簡潔に書き，脚注は個人的な感想や思想の強い主張を述べるのに多く使う気がします。<sup>ii</sup>

感想や間違いなどあれば，教えていただけると幸いです。物理の目線で勉強していますが，数学的にちゃんというところだよといったことも興味はあるので，そういったご指摘もうれしいです。

---

<sup>i</sup> これ，便利ですね。

<sup>ii</sup> ので，あまり読まなくてよい。こんなかんじで使います。

# 目次

第 1 章	有限群	3
1.1	Group theory minimum . . . . .	3
第 2 章	Lie 群, Lie 代数の一般論	4
2.1	ゆるふわ定義たち . . . . .	4
2.2	Lie 代数 . . . . .	5
2.3	随伴表現 . . . . .	7
2.4	部分代数と部分群 . . . . .	10
第 3 章	$SU(2)$	11
3.1	角運動量代数 . . . . .	11
3.2	角運動量の合成と既約分解 . . . . .	14
3.3	テンソル演算子 . . . . .	16
Appendix A	指数関数	23
参考文献		24

# 第 1 章

## 有限群

### 1.1 Groop theory minimum

#### Definition 1.1.1 (群)

集合  $G$  に演算  $\circ: G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto g \circ h$  が定まり、次を満たすとき、組  $(G, \circ)$  を群であるという。

1.  $\forall g_1, g_2, g_3 \in G; (g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$  (結合則)
2.  $\forall g \in G, \exists e \in G; e \circ g = g \circ e = g$  (単位元<sup>i</sup>の存在)
3.  $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G; g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$  (逆元<sup>ii</sup>の存在)

#### Definition 1.1.2 (群の表現)

$G$  を群、 $V$  を  $\mathbb{K}$  上  $n$  次元線形空間、 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$  を  $n$  次  $\mathbb{K}$  正則行列 (i.e.,  $V$  上の線形変換) とする。このとき、次を満たす写像  $D: G \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$  と線形空間の組  $(V, D)$  を群  $G$  の表現という。

1.  $D(e) = 1$
2.  $D(g)D(h) = D(gh)$ <sup>iii</sup>

表現のはたらく線形空間の次元を表現の次元という。

#### Example 1.1.3

$D(g) = 1$  for all  $g \in G$  は表現である。こういうのを自明な表現という。読者への演習問題とする。

---

<sup>i</sup> 本来は一意性をいう必要がある。

<sup>ii</sup> これも、一意性を言う必要があり、その後  $g^{-1}$  という記号を充てるべきである。

<sup>iii</sup> このような性質を持つ写像を homomorphism といい、hom. と略すこともある。

## 第 2 章

# Lie 群, Lie 代数の一般論

この章では, Lie 代数の一般論を扱う. [Geo] の二章を参考にしますが, 正直分かっていないことが多いので, 具体例を読み進めていくなかで分かったことなどは後で追加することにする.<sup>i</sup>

## 2.1 ゆるふわ定義たち

物理では, 変換に対する対称性と保存量が重要であるが, 変換の合成は変換になることから, 群をなすことが分かる. 例えば, 結晶格子などでは離散的な回転や並進に対して対称性があったり, 空間自体の対称性として, 連続的な対称性があったりする. とくに, Lie 代数はこの連続的な変換及び対称性を議論するのに有効な手法である. さらに, 群構造だけでなく変換がどれだけ似ているかといういわゆる「近さ」も定まっており,  $C^\infty$  くらいのいい性質が欲しいのが人情だ.<sup>ii</sup>

### Definition 2.1.1 (Lie 群)

群であり, 多様体であり, かつ微分構造も入っているものを Lie 群という.  $G$  を Lie 群として,  $g \in G$  は連続パラメータで  $g(\alpha)$  といった具合にパラメトライズされる.

変換全体の集合が Lie 群である.

### Example 2.1.2

三次元回転のなす群  $SO(3) := \{O \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid O^t O = {}^t O O = 1, \det O = 1\}$  は Lie 群である.

### Definition 2.1.3

パラメータ空間がコンパクトのとき, コンパクト Lie 群という.

### Example 2.1.4

重要な対称性として回転に対する対称性というのがあるが, ある軸周りの回転は  $\theta \in [0, 2\pi]$  でパラメトライズできる. これはコンパクト Lie 群.

### Example 2.1.5

相対論は Lorentz 変換に対する対称性を持っているが, Lorentz 変換のなす Lorentz 群は non compact.

Lie 群の表現を考える. 今,  $g(\alpha) = e \in G$  とし, 表現を考えると  $D(g(\alpha))$  もおなじく  $\alpha$  でパラメトライズされているので, 簡単に  $D(\alpha)$  と書くことにする.

---

<sup>i</sup> もちろん, どの章も適宜改定するが, この章についてはとくに納得できていないことが多い.

<sup>ii</sup> 物理屋情?

物理でよくやるのが、微小変換を考えるということである。すなわち、単位元近傍の接空間を考える。これを Lie 代数という。Lie 群  $G$  に対応する Lie 代数をフラクツールで  $\mathfrak{g}$  と書くことがおおい。

微小パラメータ  $d\alpha$  に対し、

$$D(d\alpha) = 1 + i d\alpha_a X_a; \quad X_a := -i \frac{\partial D(0)}{\partial \alpha_a} \quad (2.1.1)$$

とかける。これは、単位元近傍の構造だが、これを複数回かけることで Lie 群, i.e., 対象操作全体, の表現に

$$D(\alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{i d\alpha_a X_a}{N} \right)^N = e^{i\alpha_a X_a} \quad (2.1.2)$$

と拡張できる<sup>iii</sup>。

### Remark 2.1.6

Lie 群の全ての元が (2.1.2) により Lie 代数の指数関数で表されるというのはさすがに言いすぎである。

[Ig-Kw] によると

- Lie 群が連結ならば、このような拡大が可能。
- Lie 群が単連結ならばこのような拡大が unique

らしい。<sup>iv</sup>

## 2.2 Lie 代数

$G$  を Lie 群とする。任意の  $U(\lambda) \in G, \lambda \in \mathbb{R}$  が  $U(\lambda) = e^{i\lambda\alpha_a X_a}$  のとき、おなじ Lie 代数の指数で、スカラー倍の仕方が違うものの間の演算は

$$U(\lambda_1)U(\lambda_2) = U(\lambda_1 + \lambda_2) \quad (2.2.1)$$

となる。ところが、一般の違う Lie 群の元の間での演算、とくに Lie 代数が違う場合、 $e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b}$  は単純に指数部分の和とすればよいわけではない<sup>v</sup>。しかし、 $G$  は群なので  $e^{i\alpha_a X_a}, e^{i\beta_b X_b} \in G$  は

$$e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} = e^{i\delta_a X_a} \in G \quad (2.2.2)$$

と何らかの  $G$  の元になる。

ここから、Lie 代数の満たすべき関係が導かれる。

### Theorem 2.2.1

群  $G$  の Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の元  $X_a, X_b$  に対し、

$$[X_a, X_b] = i f_{abc} X_c \in \mathfrak{g} \quad (2.2.3)$$

が成り立つ。 $f_{abc}$  は構造定数という。<sup>vi</sup>

<sup>iii</sup> 量子力学で、時間発展を  $e^{iHt}$ , 回転を  $e^{iJ\theta}$  で指定するのは、これである。

<sup>iv</sup> それでもかなり強い主張に思えるが。

<sup>v</sup> この性質は、Lie 代数に特に非可換でないことによる。非可換でないものに対し指数法則が成り立たないことは robust である。行列の指数関数の積を参照。

<sup>vi</sup> 普通、この bracket 積で閉じていることで Lie 代数が定義される気がするが、このノートでは Lie 群の接空間として定義して、これを導いたつもりになっている。

Derivation. Eq.(2.2.2) を  $\log$  をとって展開し計算する.<sup>viiiviii</sup>

$$\log(1 + e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} - 1) = i\delta_a X_a \quad (2.2.4)$$

計算の都合上, 左辺で 1 を足し引きしている.  $K := e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} - 1$  とし,  $\log(1 + K)$  の展開<sup>ix</sup>をする.

一方,  $K$  について,

$$K = e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} - 1 \quad (2.2.5)$$

$$= \left(1 + i\alpha_a X_a - \frac{(\alpha_a X_a)^2}{2} - \dots\right) \left(1 + i\beta_b X_b - \frac{(\beta_b X_b)^2}{2} - \dots\right) - 1 \quad (2.2.6)$$

$$= i\alpha_a X_a + i\beta_b X_b - \frac{1}{2}((\alpha_a X_a)^2 + (\beta_b X_b)^2 + 2\alpha_a X_a \beta_b X_b) + \dots \quad (2.2.7)$$

を得て, ここから  $K^2$  を計算して Eq.(2.2.4) に代入する.

タイプするのがめんどくなったので計算は読者への演習問題とする.<sup>x</sup>

結果

$$\begin{aligned} i\delta_a X_a &= i\alpha_a X_a + i\beta_a X_a - \frac{1}{2}[\alpha_a X_a, \beta_b X_b] \\ &\quad - \frac{i}{12}[\alpha_a X_a, [\alpha_a X_a, \beta_b X_b]] + \frac{i}{12}[\beta_b X_b, [\alpha_a X_a, \beta_b X_b]] + \dots \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

となる.<sup>xixii</sup>

特に,  $\alpha, \beta$  の二次まで見ると

$$[\alpha_a X_a, \beta_b X_b] = 2i(\alpha_c + \beta_c - \delta_c)X_c =: i\gamma_c X_c, \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad (2.2.9)$$

となる.<sup>xiii</sup>さらに,

$$\alpha_a \beta_b [X_a, X_b] = i\gamma_c X_c \quad (2.2.10)$$

で任意の  $\alpha_a, \beta_b$  について成り立つので, 定数  $f_{abc}$  があって,  $\gamma_c = \alpha_a \beta_b f_{abc}$ .

かくして, 主張が成り立つ. □

### Remark 2.2.2

構造定数は, Lie 群の演算と微分構造から決定された. ゆえに, Lie 群から Lie 代数には構成上自然な全射がある.<sup>xiv</sup>

構造定数は Lie 代数の構造を決める. 構造定数に関するいくつかの性質をまとめる.

<sup>vii</sup>  $\log$  をとる操作など, well-defined かわからないが, いい性質を仮定しているので形式的に計算してもよいとしておこう.

<sup>viii</sup> そもそもこれを定義とできるので, 導出が気に食わなかったらさっさと目を通すだけでよい気もする.

<sup>ix</sup>  $\log(1 + K) = K - K^2/2 + K^3/3 + \mathcal{O}(K^4)$

<sup>x</sup> まあ, 備忘のためにも計算の方針を書いておくと,  $K$  の展開は最終的に必要な次数まで行い,  $\log(1 + K)$  の展開に代入する際に次数ごとにまとめてやればよい.

<sup>xi</sup> ここで右辺第二項で subscript が  $a$  になっているのは typo ではない. 次元の数だけ和を取るという意味の添え字なので, どの文字を使ってもよいのである. しかし,  $\alpha_a X_a \beta_b X_b$  のように積の形で同時に出てくるところでは区別する必要があった.

<sup>xii</sup> BCH formula というものがある.

<sup>xiii</sup> ここで左辺の subscript が  $c$  になっているのも typo ではない. のちの議論で左辺と右辺の関係を調べるため, 独立に和を取っておくべきだからである.

<sup>xiv</sup> が単射性は言えない. 群としては違っても, 代数としては同じということはある. e.g.,  $SU(2)$  と  $SO(3)$  は違うが  $\mathfrak{su}(2)$  と  $\mathfrak{so}(3)$  は同じである.

### Theorem 2.2.3

$$f_{abc} = -f_{bac} \quad (2.2.11)$$

Derivation.  $[X_a, X_b] = -[X_b, X_a]$  なので

$$[X_a, X_b] = if_{abc}X_c \quad (2.2.12)$$

$$= -[X_b, X_a] = -if_{bac}X_c \quad (2.2.13)$$

□

### Theorem 2.2.4

Lie 代数  $\mathfrak{g}$  にユニタリ表現が存在すれば、構造定数  $f_{abc}$  は実数である。

Derivation. 群の表現がユニタリならば、代数は Hermitian なので

$$[X_a, X_b]^\dagger = (if_{abc}X_c)^\dagger \quad (2.2.14)$$

$$= -if_{abc}^*X_c. \quad (2.2.15)$$

一方,

$$[X_a, X_b]^\dagger = (X_aX_b - X_bX_a)^\dagger \quad (2.2.16)$$

$$= [X_b, X_a] \quad (2.2.17)$$

$$= if_{bac}X_c \quad (2.2.18)$$

$$= -if_{abc}X_c \quad (2.2.19)$$

なので、二式を比較して  $f_{abc} = f_{abc}^*$  故、構造定数は実数。 □

物理としてユニタリ表現に興味があるので、今後構造定数は実数とする<sup>xv</sup>。

### Theorem 2.2.5 (Jacobi identity)

$$[X_a, [X_b, X_c]] + \text{cyclic term} = 0 \quad (2.2.20)$$

Derivation. やるだけ。 □

### Remark 2.2.6

Jacobi identity はかなり robust なものらしい。具体的に積が定義できなくても意味を成すという記述があったが不明である。

## 2.3 随伴表現

### Definition 2.3.1 (随伴表現 (adjoint representation))

$f_{abc} \in \mathbb{R}$  を Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の構造定数とする。これにより定義される行列

$$(T_a)_{bc} := -if_{abc} \quad (2.3.1)$$

---

<sup>xv</sup> 予定である。



は Lie 代数の表現

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c \quad (2.3.2)$$

をなす。これを随伴表現という。<sup>xvixvii</sup>

実際、Eq.(2.3.2) を満たすことを見る。

$X_a, X_b, X_c \in \mathfrak{g}$  に対し、

$$[X_a, [X_b, X_c]] = [X_a, if_{bcd}X_d] \quad (2.3.3)$$

$$= -f_{bcd}f_{ade}X_e \quad (2.3.4)$$

である。 $X_d, X_e \in \mathfrak{g}$ .  $a, b, c$  を cyclic に回して、Jacobi identity は

$$f_{bcd}f_{ade} + f_{cad}f_{bde} + f_{abd}f_{cde} = 0 \quad (2.3.5)$$

となる。すると、随伴表現の定義より

$$(T_a T_b)_{ce} = (T_a)_{cd}(T_b)_{de} = -f_{acd}f_{bde} \quad (2.3.6)$$

なので、Jacobi identity は

$$-(T_b)_{cd}(T_a)_{de} + (T_a)_{cd}(T_b)_{de} - if_{abd}(T_d)_{ce} \quad (2.3.7)$$

となる。すなわち

$$[T_a, T_b] = if_{abd}T_d = if_{abc}T_c \quad (2.3.8)$$

となる。

□

### Remark 2.3.2

随伴表現について

- 随伴表現の次元は、構成上 Lie 代数の次元に等しい。
- $f_{abc} \in \mathbb{R}$  より、 $(T_a)_{bc}$  は純虚である。

### Definition 2.3.3

内積  $\langle \bullet, \bullet \rangle: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\text{Tr}(X_a, X_b)$  で定める。<sup>xviii</sup>

今、適当に内積を定義したが、適当な線形変換を施し、随伴表現を扱いやすい形に変えることを考える。

まず、trace による内積は線形変換  $X_a \mapsto X'_a = L_{ab}X_b$  の下でどのように移るか見る。ブラケット積は

$$[X'_a, X'_b] = [L_{ad}X_d, L_{be}X_e] \quad (2.3.9)$$

$$= iL_{ad}L_{be}f_{deg}L_{gh}^{-1}L_{hc}X_c \quad (2.3.10)$$

$$= iL_{ad}L_{be}f_{def}L_{gc}^{-1}X'_c \quad (2.3.11)$$

<sup>xvi</sup> 随伴表現の良いところは、構造定数のみで決まるところである。構造定数は代数の交換関係で与えられ、交換関係は分かっているという状況はよくあるので、それだけから表現が一つ構成できるのが嬉しい。具体的に  $\mathfrak{su}(2)$  では  $\text{spin } 1$  表現が構成できる。

<sup>xvii</sup> 数学の本、e.g., [Kb-Os], では別の定義をしているようだ。ただ、物理的には上の注釈で述べたような嬉しさがあるので、この定義は良いのではないかと考えている。

<sup>xviii</sup> [Geo] には実対称行列と書いているが、内積なので数に値を取るはずである。添え字に関して並べると行列になるが、成分そのものは実数である。このあたりの記述は数学のものとは違い、「線形空間をベクトル空間にする」などという記述もあり同じものではないと思った。

と変換する。また、構造定数は

$$f_{abc} \mapsto f'_{abc} = L_{ad} L_{be} f_{deg} L_{gc}^{-1} \quad (2.3.12)$$

と変わり、随伴表現は成分で書くと

$$(T_a)_{bc} \mapsto (T_a)'_{bc} = L_{ad} L_{be} (T_d)_{eg} L_{gc}^{-1} \quad (2.3.13)$$

行列で書くと

$$T_a \mapsto T'_a = L_{ad} L(T_d) L^{-1} \quad (2.3.14)$$

と変換する。よって、trace は

$$\text{Tr}(T_a T_b) \mapsto \text{Tr}(T'_a T'_b) = L_{ac} L_{bd} \text{Tr}(T_c T_d) \quad (2.3.15)$$

と変換する。この線形変換を適当にとることで、

$$\text{Tr}(T_a T_b) = k^a \delta_{ab} \quad (\text{no sum.}) \quad (2.3.16)$$

が成り立つ。<sup>xix</sup>ただし、右辺で添え字  $a$  について和を取らないことに注意。<sup>xx</sup>また、線形変換でスケールを適当に調節することで、 $k^a$  の絶対値を例えば 1 にすることが出来る。ただし、符号を変えることはできない。

#### Fact 2.3.4

すべての  $k^a$  が正であるとき、コンパクト Lie 代数である。<sup>xxi</sup>特に言及しない限り、 $k^a > 0$ 、すなわちコンパクト Lie 代数であることとする。

随伴表現は

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \lambda \delta_{ab}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.3.17)$$

にとるのが通常である。<sup>xxii</sup>それは、次が言えるからである。

#### Claim 2.3.5 (構造定数の完全反対称性)

Eq.(2.3.17) が成り立つ基底において、構造定数は完全反対称である。

Derivation.

$$\text{Tr}([T_a, T_b] T_c) = \text{Tr}(i f_{abd} T_d T_c) \quad (2.3.18)$$

$$= i f_{abd} \lambda \delta_{dc} \quad (2.3.19)$$

$$= i f_{abc} \lambda \quad (2.3.20)$$

より、

$$f_{abc} = -\frac{i}{\lambda} \text{Tr}([T_a, T_b] T_c) \quad (2.3.21)$$

となる。Trace にかんして、

$$\text{Tr}([T_a, T_b] T_c) = \text{Tr}([T_b, T_c] T_a) \quad (2.3.22)$$

なので、 $f_{abc} = f_{bca}$  である。これと、前二つの添え字の反対称性から、完全反対称性がいえる。  $\square$

<sup>xix</sup>  $\text{Tr}(T_a T_b)$  の添え字に関して並べて作った行列は実対称行列（内積なので、そもそも trace の性質より）なので、直交行列により対角化したと考えられる。

<sup>xx</sup> Einstein convention が敗れる稀有な（？）例である。

<sup>xxi</sup> [Geo] ではこれをコンパクト Lie 代数の定義にしているが、Def.2.1.3 で定義したものと同じである。

<sup>xxii</sup> この  $\lambda$  は 1 に取れるが、例えば  $\mathfrak{su}(2)$  などでは構成上  $1/\sqrt{2}$  にとるなどするので、このように設定している。

## 2.4 部分代数と部分群

### Definition 2.4.1

Lie 群  $G$  とその部分群  $H$  があって、それぞれの Lie 代数を  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  とする.

$$\forall X \in \mathfrak{h}, \forall Y \in \mathfrak{g}; [X, Y] \in \mathfrak{h} \quad (2.4.1)$$

のとき,  $\mathfrak{h}$  を  $\mathfrak{g}$  の不変部分代数という.

### Claim 2.4.2

$H \ni h = e^{iX}, X \in \mathfrak{h}, G \ni g = e^{iY}, Y \in \mathfrak{g}$  で  $\mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{g}$  の部分代数とする. このとき,  $g^{-1}hg =: e^{iX'} \in H$ .

Derivation.

$$e^{iX'} = e^{-iY} e^{iX} e^{iY} \quad (2.4.2)$$

$$= X - i[Y, X] - \frac{1}{2}[Y, [Y, X]] + \cdots \quad (2.4.3)$$

で  $[Y, X] \in \mathfrak{h}$  なので,  $e^{iX'} \in H$ . すなわち  $H$  は  $G$  の不変部分代数.

### Example 2.4.3

任意の Lie 代数  $\mathfrak{g}$  に対し,  $\mathfrak{g}$  自身および  $\{0\}$  は不変部分代数である. これを自明な不変部分代数という.

### Definition 2.4.4

非自明な不変部分代数を持たない Lie 代数を simple であるという.

### Claim 2.4.5

Eq.(2.3.17) が成り立つもとで, simple Lie algebra の随伴表現は既約である.

Derivation. 既約でないとし, 非自明な不変部分空間があるとする. このとき, 随伴表現の subset でこの空間の基底がとれて,  $T_r, (r = 1, \dots, K)$  が非自明不変部分空間を張るとする. 残りの随伴表現を  $T_x, (x = K + 1, \dots, N)$  とする. 行列の言葉でいえば, これはブロック対角なので,  $(T_a)_{xr} = -if_{axr} = 0$  故,  $[T_a, T_r] = if_{arb}T_b$  は  $a, b$  が  $1, \dots, K$  のときノンゼロ, そうでないときゼロになってしまうので,  $[T_a, T_r] = if_{arb}T_b, (b = 1, \dots, K)$  と不変部分空間の元の線形結合で書ける. すなわち, 部分代数になっていて simple であることに反する.

### Remark 2.4.6

Lie 代数の全ての元と交換する不変部分代数を Abelian 不変代数という.  $\mathfrak{u}(1)$  因子がそれである. このとき Eq.(2.3.17) において  $k^a = 0$  の場合に相当する. このとき, 構造定数は Abelian 不変代数に関する情報を与えない.

### Definition 2.4.7

Abelian 不変代数を持たない Lie 代数を semisimple Lie algebra という.

以降 semisimple なもののみを考える.

## 第 3 章

# SU(2)

### 3.1 角運動量代数

量子力学における角運動量の交換関係

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3.1.1)$$

は Lie 代数  $\mathfrak{su}(2)$  の表現である<sup>i</sup>. 今, 状態空間  $\mathcal{H}$  は  $n(< \infty)$  次元だとして, 慣習上  $J_3$  の固有値  $m$  と  $j := \max\{m\}$  をもつ基底  $|j, m\rangle$  をとる.<sup>ii</sup>  $m$  を weight,  $j$  を highest weight ということもある.

#### Definition 3.1.1

ladder operator を

$$J^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1 \pm iJ_2) \quad (3.1.2)$$

と定義する. 通常の量子力学と違い,  $1/\sqrt{2}$  がかかっていることに注意.

#### Theorem 3.1.2 (ladder operator の諸性質)

ladder operator は次を満たす.

1.  $[J_3, J^\pm] = \pm J^\pm$
2.  $[J^+, J^-] = J_3$
3.  $J_3$  の固有値を上げ下げする.

$$J_3 J^\pm |j, m\rangle = (m \pm 1) J^\pm |j, m\rangle \quad (3.1.3)$$

4.  $J^+ |j, j\rangle = 0$
5.  $(J^+)^\dagger = J^-, (J^-)^\dagger = J^+$

Derivation. がんばれ. □

Eq.(3.1.3) は  $J^\pm |j, m\rangle$  が  $J_3$  の固有値  $m \pm 1$  に対する固有状態, すなわち  $|j, m\rangle$  である<sup>iii</sup>ということである. ここで, highest weight 状態  $|j, j\rangle$  に ladder operator を作用させることを考える. 以下の構成は以後の議論でもたびたび出てくるので重要である.

---

<sup>i</sup> 虚数単位の  $i$  と添え字の  $i$  が紛らわしいが, 添え字でない  $i$  は虚数単位と認識してほしい. 本当は  $\mathbf{i}$  などと区別するとよいのだろうが.

<sup>ii</sup> [Geo] では  $|j, m, \alpha\rangle$  など角運動量以外の固有値にも依存する可能性を考え, それによらないことまで議論している.

<sup>iii</sup> 正確に言えば, 比例する.

上で述べたことより,  $N_j$  があって,  $J^- |j, j\rangle = N_j |j, j-1\rangle$  である. また,  $N'_j$  があって,  $J^+ |j, j-1\rangle = N'_j |j, j\rangle$  である.

**Claim 3.1.3**

$$N_j = N'_j = \sqrt{j} \quad (3.1.4)$$

Derivation.  $|j, j-1\rangle$  が規格化されていることから,

$$\|(J^- |j, j\rangle)\| = \|N_j |j, j\rangle\| = |N_j|. \quad (3.1.5)$$

一方,

$$\|(J^- |j, j\rangle)\| = \langle j, j | J^+ J^- |j, j\rangle \quad (3.1.6)$$

$$= \langle j, j | ([J^+, J^-] + J^- J^+) |j, j\rangle \quad (3.1.7)$$

$$= \langle j, j | J_3 |j, j\rangle \quad (3.1.8)$$

$$= j \quad (3.1.9)$$

となる. ここで, 第二項は  $|j, j\rangle$  に  $J^+$  を作用させているので, ゼロになる. Eq.(3.1.5),(3.1.9) より,

$$|N_j| = \sqrt{j} \quad (3.1.10)$$

と決まる. また, これより,

$$J^+ |j, j-1\rangle = J^+ \left( \frac{1}{\sqrt{j}} J^- |j, j\rangle \right) \quad (3.1.11)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{j}} ([J^+, J^-] + J^- J^+) |j, j\rangle \quad (3.1.12)$$

$$= \sqrt{j} |j, j\rangle \quad (3.1.13)$$

となり,

$$J^+ |j, j-1\rangle = N_j |j, j\rangle \quad (3.1.14)$$

となる. □

さらに  $J^-$  により, weight を下げると,  $J^- |j, j-k\rangle = N_{j-k} |j, j-k-1\rangle$  のとき,

$$\|J^- |j, j-k\rangle\| = |N_{j-k}|^2 = \langle j, j-k | J^+ J^- |j, j-k\rangle \quad (3.1.15)$$

$$= j-k + N_{j-k+1}^2 \quad (3.1.16)$$

となり,

$$\begin{array}{rcl} N_j^2 & & = j \\ N_{j-1}^2 - N_j^2 & = & j-1 \\ & \vdots & \\ N_{j-k}^2 - N_{j-k+1}^2 & = & j-k \\ \hline N_{j-k}^2 & = & (2j-k)(k+1)/2 \end{array}$$

を得る．また別の書き方で， $j - k = m$  において

$$N_m = \frac{1}{2}(j - m + 1)(j + m) \quad (3.1.17)$$

$$= \frac{1}{2}(j(j + 1) - m(m - 1)) \quad (3.1.18)$$

となる．<sup>iv</sup> また，有限次元性より， $J^- |j, j - l\rangle = 0$  なる  $l \in \mathbb{Z}$  が必要で， $N_{j-l} = 0$  の条件から， $j = l/2$  が示される．<sup>v</sup>

行列要素としては

$$\langle j, m' | J_3 | j, m \rangle = m \delta_{m', m} \quad (3.1.19)$$

$$\langle j, m' | J^+ | j, m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{j(j + 1) - m(m + 1)} \delta_{m', m+1} \quad (3.1.20)$$

$$\langle j, m' | J^- | j, m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{j(j + 1) - m(m - 1)} \delta_{m', m-1} \quad (3.1.21)$$

である．<sup>vi</sup>  $J^\pm$  から  $J_1, J_2$  が分かるので， $\mathbf{J}$  の表現が分かったということになる． $\mathfrak{su}(2)$  の spin  $j$  表現である．

### 3.1.1 具体例

抽象的な話ではよくわからないので，具体的にやってみる．

$j = 1/2$  のとき， $J_3$  の行列は

$$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| J_3 \right| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle = \pm \frac{1}{2}, \quad (3.1.22)$$

$$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| J_3 \right| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \left| J_3 \right| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = 0. \quad (3.1.23)$$

より，

$$J_3^{1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_3 \quad (3.1.24)$$

ここで， $\sigma_3$  は Pauli 行列の三つ目．

他に， $J^+$  については

$$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| J^+ \right| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \left| J^+ \right| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \left| J^+ \right| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = 0, \quad (3.1.25)$$

$$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| J^+ \right| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - \left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} + 1 \right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.1.26)$$

<sup>iv</sup> この規格化定数は Eq.(3.1.17) で書かれることが若干多い気がするが，Eq.(3.1.18) で覚えてしまったので，こっちで書く．

<sup>v</sup>  $l$  が偶数の時 boson，奇数の時 fermion という．

<sup>vi</sup> 一般的な注意であるが，explicit に行列を書くとき，weight の大きい順に左上から配置しなければならない．具体的に，すぐ後でやる  $J_3$  の spin  $1/2$  表現の行列要素は  $(J_3^{1/2})_{1/2, 1/2} = (J_3^{1/2})_{-1/2, -1/2} = \pm 1/2, (J_3^{1/2})_{-1/2, 1/2} = (J_3^{1/2})_{1/2, -1/2} = 0$  は  $1/2, 1/2$  成分が左上で，

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

とするのが慣習であり，

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

とはしないということ．通常のとおり，小さい順に並べるのではないことに注意．highest weight から下げて構成するので， $J^-$  を下げる回数でラベルしていると考えると通常の行列と同じである．

故,

$$J^{1/2+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.27)$$

となる. めんどくさいからタイプしないが,

$$J^{1/2-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.28)$$

であり,

$$J_1^{1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_1, \quad (3.1.29)$$

$$J_2^{1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_2 \quad (3.1.30)$$

である. 他の spin に関しても explicit に行列を書き下すとよくわかる.

## 3.2 角運動量の合成と既約分解

今,  $|j_1, m_1\rangle$  たちで張られる状態空間  $\mathcal{H}_1$ ,  $|j_2, m_2\rangle$  たちで張られる状態空間  $\mathcal{H}_2$  があって, この合成系を考える. 合成系は量子力学の基本法則から  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  で与えられ,  $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$  たちが張る  $(2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1)$  次元空間である.

$|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \in \mathcal{H}$  に対し,

$$J_3^{1\otimes 2} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = (J_3^1 |j_1, m_1\rangle) \otimes |j_2, m_2\rangle + |j_1, m_1\rangle \otimes (J_3^2 |j_2, m_2\rangle) \quad (3.2.1)$$

$$= (m_1 + m_2) |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \quad (3.2.2)$$

ゆえ, 合成系の  $J_3^{1\otimes 2}$  の固有値は部分系の固有値の和になる. また, highest weight は各部分系の highest weight の和で, 各部分系の highest weight の uniqueness より合成系の highest weight も unique である. 合成系の highest weight による構成を見る. highest weight  $J := j_1 + j_2$  と  $J_3^{1\otimes 2}$  の固有値  $M$  によりラベルされる状態  $|J, M\rangle \in \mathcal{H}$  とする.

**Claim 3.2.1** (合成系の既約分解)

Highest weight がそれぞれ  $j_1, j_2$  の系の合成系  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{j=j_1} \otimes \mathcal{H}^{j=j_2}$  の状態空間について

$$\mathcal{H}^{j=j_1} \otimes \mathcal{H}^{j=j_2} = \bigoplus_{k=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathcal{H}^{j=k} \quad (3.2.3)$$

なる既約分解がある.

Derivation. Highest weight から考えて, 取りうる  $J_3^{1\otimes 2}$  の固有値は重複を許して

$$\begin{array}{ccccccc} j_1 + j_2 & j_1 - 1 + j_2 & \cdots & -j_1 + j_2 \\ & \ddots & & \\ j_1 + j_2 - 1 & & & \\ \vdots & & & \\ j_1 - j_2 & j_1 - 1 - j_2 & & -j_1 - j_2 \end{array} \quad (3.2.4)$$

である。重複を許すのは、固有値の数と固有空間の次元を一致させるためである。<sup>vii</sup>これを並べ替える<sup>viii</sup>と

$$\begin{array}{ccccccc} j_1 + j_2 & j_1 + j_2 - 1 & & \cdots & & -j_1 - j_2 + 1 & -j_1 - j_2 \\ & j_1 + j_2 - 1 & & \cdots & & -j_1 - j_2 + 1 & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & j_1 - j_2 & \cdots & & -j_1 + j_2 & & \end{array} \quad (3.2.5)$$

となり、一番上が highest weight  $j_1 + j_2$  の既約表現  $\mathcal{H}^{j=j_1+j_2}$  である。その直交補空間  $(\mathcal{H}^{j=j_1+j_2})^\perp$  では highest weight が  $j_1 + j_2 - 1$ 。このようにして、もとの  $\mathcal{H}$  をつくすことで、主張の分解を得る。□

まあ、一般論ではわかりにくいので、具体的にやってみる。

### Example 3.2.2

$j_1 = 1/2, j_2 = 1$  のときの合成系の既約分解を考える。Highest weight は  $1/2 + 1 = 3/2$ 。合成系で見ると、 $|3/2, 3/2\rangle \in \mathcal{H}$  があって、ladder operator で  $J_3$  の固有値を下げると、

$$J^- \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \left( \frac{3}{2} + 1 \right) - \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{3}{2} - 1 \right)} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad (3.2.6)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad (3.2.7)$$

となる<sup>ix</sup>。一方、部分系の tensor  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  としてみると、

$$(J^{1\otimes 2})^- \left( \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes |1, 1\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes |1, 1\rangle + \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes |1, 0\rangle \quad (3.2.8)$$

となり、二つより

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes |1, 1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes |1, 0\rangle \quad (3.2.9)$$

とわかる。きちんと normalize されていることにも注意。

さて、さらに ladder operator で下げると既約表現が求まる。結果だけ書くと

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes |1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes |1, -1\rangle, \quad (3.2.10)$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes |1, -1\rangle \quad (3.2.11)$$

である。

これで、一つ既約表現が作れたが、よくよく考えると合成系は  $(2 \cdot 1/2 + 1) \times (2 \cdot 1 + 1) = 6$  次元だが、既約表現は  $j = 3/2, 1/2, -1/2, -3/2$  の 4 次元しかない。そもそも Eq.(3.2.9), (3.2.10) で二つの ONB の線形結合で一つしかベクトルを指定していないので、もう一次元ずつとれるはずである。すなわち、今構成した既約表現の直交補空間はそれらと直交するベクトル、たとえば

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes |1, 1\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes |1, 0\rangle, \quad (3.2.12)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes |1, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes |1, -1\rangle \quad (3.2.13)$$

<sup>vii</sup> 右上から左下への線上に同じ weight のものが並んでいる。

<sup>viii</sup> 上と右から、外側から順番に取っていく。言葉で説明するのムズカシイ。

<sup>ix</sup> 計算を丁寧に書いたので、あとは結果のみ書く。練習問題。

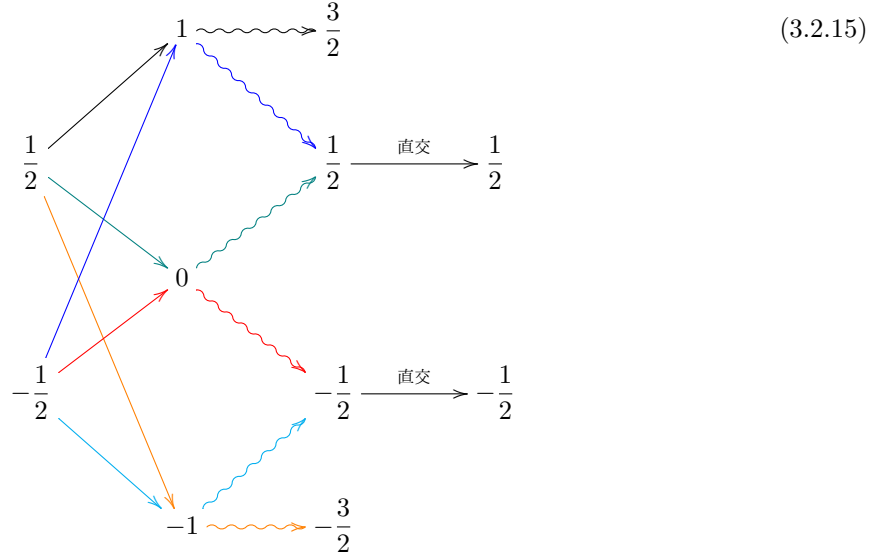


が張る．この空間は highest weight が  $1/2$  の既約表現になっている．よって

$$\mathcal{H}^{j=1/2} \otimes \mathcal{H}^{j=1} = \mathcal{H}^{3/2} \oplus \mathcal{H}^{1/2} \quad (3.2.14)$$

の既約分解が分かった．

結局、やっていることは



$$\mathcal{H}^{j=1/2} \quad \mathcal{H}^{j=1} \quad \mathcal{H}^{j=3/2} \quad \mathcal{H}^{j=1/2}$$

ということ．複数矢印が集まるところは、その分だけ直交する成分を取りだし縮退を解く．これが既約分解に相当する．  $\square$

### 3.3 テンソル演算子

**Definition 3.3.1** (テンソル演算子)

ある Lie 代数の元との交換関係で既約表現のように変換する演算子の組をテンソル演算子という．特に  $\mathfrak{su}(2)$  代数の spin  $s$  表現として変換するテンソル演算子とは、演算子  $O_l^s$ , ( $l = 1, 2, \dots, 2s + 1$ ) たちの組で  $[J_a, O_l^s] = O_m^s (J_a)_{ml}$  を満たすものを言う．

「既約表現のように変換」とは、演算子  $O_l^s$  が  $\mathbf{J}$  の作用<sup>x</sup>の下で  $|s, l\rangle$  と同じ変換則に従うということである<sup>xi</sup>．具体的には

$$[J_3, O_l^s] = l O_l^s, \quad (3.3.1)$$

$$[J^+, O_l^s] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{s(s+1) - l(l+1)} O_{l+1}^s, \quad (3.3.2)$$

$$[J^-, O_l^s] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{s(s+1) - (l-1)l} O_{l-1}^s \quad (3.3.3)$$

である．下二つにより  $J_1, J_2$  が作れるので、 $\mathbf{J}$  に対する変換則が分かったことになる．

<sup>x</sup> 作用、というのは数学的な定義があるが、ここでは自然言語としてとらえてほしい．物理の人はたぶんそのような使い方をしてる人は多そう．

<sup>xi</sup> ただし、演算子に対してはブラケット積に対しての作用、状態に対しては単に線形写像としての作用である．

後でやるが、状態  $O_l^s |j, m\rangle$  を考えて、 $J_a$  の作用による変換を見ると

$$J_a O_l^s |j, m\rangle = [J_a, O_l^s] |j, m\rangle + O_l^s J_a |j, m\rangle \quad (3.3.4)$$

である。右辺を見ると  $J_a$  が  $O_l^s$  と  $|j, m\rangle$  に別々に働いており、 $[J_a, O_l^s]$  が  $J_a |l, s\rangle$  と同様の変換するので、 $J_a O_l^s |j, m\rangle$  は  $|s, l\rangle \otimes |j, m\rangle$  とおなじ変換をする<sup>xii</sup>。

### Example 3.3.2 (位置演算子)

spinless な一粒子を考える。このとき、角運動量は軌道角運動量のみで、 $J_a = L_a := \epsilon_{abc} r_b p_c$  である。ここで  $r_a$  は位置演算子、 $p_a$  は運動量演算子である。

### Claim 3.3.3

位置演算子は角運動量代数の随伴表現として変換するので、テンソル演算子である。

*Derivation.*  $J_a$  と  $r_b$  の交換子積は

$$[J_a, r_b] = [\epsilon_{acd} r_c p_d, r_b] \quad (3.3.5)$$

$$= \epsilon_{acd} (r_c [p_d, r_b] + [r_c, r_b] p_d) \quad (3.3.6)$$

$$= -i\epsilon_{acb} r_c \quad (3.3.7)$$

である。ここで、角運動量代数の構造定数は  $\epsilon_{abc}$  だったので、随伴表現は  $(J_a^{\text{adj}})_{bc} := -i\epsilon_{abc}$  で定まる。ゆえに

$$[J_a, r_b] = r_c (J_a^{\text{adj}})_{cb} \quad (3.3.8)$$

を得る。 □

### Remark 3.3.4

$\mathfrak{su}(2)$  の場合、随伴表現は spin 1 の highest weight による既約表現と同値である。

上の例では、演算子は随伴表現に従うが、標準的なもの<sup>xiii</sup>に従うと扱いやすい。今、演算子の組  $\Omega_x, (x = 1, 2, \dots, 2s+1)$  があって、 $\Omega_x$  は spin  $s$  の標準的な表現と同値な表現  $D$  に従い変換するとする。<sup>xiv</sup> すなわち、 $[J_a, \Omega_x] = \Omega_y (J_a^D)_{yx}$  に対し、正則行列  $S$  が存在し、 $S J_a^D S^{-1} = J_a^s$ , matrix element で書くと  $(S)_{lx} (J_a^D)_{xy} (S^{-1})_{yl} = (J_a^s)_{ll'}$  ということ。今、 $O_l^s := \Omega_y (S^{-1})_{yl}$  と定めると、

$$[J_a, O_l^s] = [J_a, \Omega_y (S^{-1})_{yl}] \quad (3.3.9)$$

$$= \Omega_z (J_a^D)_{zy} (S^{-1})_{yl} \quad (3.3.10)$$

$$= \Omega_z (S^{-1})_{zl'} (S)_{l'l'} (J_a^D)_{z'y} (S^{-1})_{yl} \quad (3.3.11)$$

$$= O_l^s (J_a^s)_{l'l} \quad (3.3.12)$$

となり、spin  $s$  の状態と同様に変換するテンソル演算子を構成できた。

### Remark 3.3.5

特に、 $J_3^s$  が対角になるように取るのが標準で、

$$(J_3^s)_{l'l} = l\delta_{l'l} \quad (3.3.13)$$

である。故に、

$$[J_3, O_l^s] = l O_l^s \quad (3.3.14)$$

<sup>xii</sup> だからテンソル演算子というのだと思っている。

<sup>xiii</sup> ある Lie 代数の元が対角化されているなど。

<sup>xiv</sup> 先の例では  $D = J^{\text{adj}}, \Omega_x = r_a$  であった。

### Remark 3.3.6

上で構成した  $S$  は explicit に書き下す必要はない.  $\Omega_x$  の適当な線形結合を  $\Omega$  とすると,  $[J_3, \Omega] = \lambda\Omega, \lambda \in \mathbb{R}$  を見つけば, ladder operator で残りは構成できる.

### Example 3.3.7 (位置演算子)

Example 3.3.2 より  $\mathbf{r}$  は spin 1 のテンソル演算子と分かった. 物理の議論から  $[J_3, r_3] = 0 = 0 \cdot r_3$  なので,  $R_0 = r_3$  と取れる. ここで,  $R$  の添え字はテンソル演算子  $O_l^s$  と書いたときの  $l$  の値であり,  $r$  の添え字は通常の位置演算子の  $x, y, z$  を 1, 2, 3 と振ったものに相当する.<sup>xv</sup>他の  $R_{\pm 1}$  は ladder operator で作れて,

$$[J^{\pm}, R_0] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \cdot 2 - 0 \cdot (\pm 1)} R_{\pm 1} \quad (3.3.15)$$

$$= \mp \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{2}} (r_1 \pm ir_2) \quad (3.3.16)$$

となる.

状態,  $O_l^s |j, m, \alpha\rangle$  は  $J_a$  に対して

$$J_a O_l^s |j, m, \alpha\rangle = [J_a, O_l^s] |j, m, \alpha\rangle + O_l^s J_a |j, m, \alpha\rangle \quad (3.3.17)$$

$$= O_l^s (J_a^s)_{ll} |j, m, \alpha\rangle + O_l^s (J_a^s)_{m'm} |j, m', \alpha\rangle \quad (3.3.18)$$

と変換する. 特に,  $J_3$  に対しては  $(J_3)_{ll} = l\delta_{ll}$  と対角なので,

$$J_3 O_l^s |j, m, \alpha\rangle = (l + m) O_l^s |j, m, \alpha\rangle \quad (3.3.19)$$

と固有値が足された形になる.

## 3.3.1 Wigner Eckart theorem

### Claim 3.3.8

Highest weight により構成すると,

$$\sum_{l=-s}^s O_l^s |j, M-l, \alpha\rangle \langle s, j; l, M-l | J, M\rangle = k_J |J, M\rangle \quad (3.3.20)$$

Derivation. まず, 二状態  $|s, l\rangle, |j, m\rangle$  と合成系の状態 highest weight  $J$ , weight  $M$  の状態  $|J, M\rangle$  を考える.  $M = l + m$  なので,

$$|J, M\rangle = \sum_{l=-s}^s |s, l\rangle \otimes |j, m\rangle \langle s, l | \otimes \langle j, m | J, M\rangle \quad (3.3.21)$$

$$= \sum_{l=-s}^s |s, l\rangle \otimes |j, M-l\rangle \langle s, j; l, M-l | J, M\rangle \quad (3.3.22)$$

となる.<sup>xvi</sup>

今, 各  $|s, l\rangle \otimes |j, m\rangle$  は highest weight  $|s, s\rangle \otimes |j, j\rangle$  に  $J^-$  をかけることで作れる.  $J^+ |J, J\rangle = 0$  なる状態に対し,  $O_l^s |j, m\rangle = k_J |s, l\rangle \otimes |j, m\rangle$  の差があるとして, spin  $J$  表現内では同じ辺観測なので同一の  $k_J \in \mathbb{R}$  に比例.<sup>xvii, xviii</sup>

<sup>xv</sup> [Geo] では  $r_0 = r_3$  と書かれていて, 混乱した. この notation も見にくいとは思いますが, これよりはましであろう.... よい notation があれば教えてください.

<sup>xvi</sup> これのやっていることは, weight を fix して, 既約分解した各空間に射影している.

<sup>xvii</sup> ここで, phase の任意性は, state に押し付けることにする.

<sup>xviii</sup>  $J^-$  は highest weight  $J$  を変えず  $M$  を変えることを思い出すと,  $M$  が変わっても定数が変わらないので, 定数は  $J$  のみに依存.

かくて,

$$k_J |J, M\rangle = \sum_{l=-s}^s |s, l\rangle \otimes |j, m\rangle \langle s, l| \otimes \langle j, m| J, M\rangle \quad (3.3.23)$$

$$= \sum_{l=-s}^s |s, l\rangle \otimes |j, m\rangle \langle s, j; l, M-l| J, M\rangle \quad (3.3.24)$$

を得る.  $\square$

**Claim 3.3.9**

逆に,  $O_l^s |j, m, \alpha\rangle$  も  $|J, l+m\rangle$  の線形結合で書けて,

$$O_l^s |j, m, \alpha\rangle = \sum_{J=|j-s|}^{j+s} \langle J, l+m | s, j; l, m\rangle k_J |J, l+m\rangle \quad (3.3.25)$$

となる.

Derivation. 合成系の  $J_3$  の固有値は部分系の  $J_3$  の固有値の和で fix されており, 各既約表現への射影を足すことで

$$O_l^s |j, m, \alpha\rangle = \sum_{J=|l-s|}^{l+s} |J, l+m\rangle \langle J, l+m | O_l^s |j, m, \alpha\rangle \quad (3.3.26)$$

$$= \sum_{J=|l-s|}^{l+s} \langle J, l+m | s, j; l, m\rangle k_J |J, l+m\rangle \quad (3.3.27)$$

を得る.  $\square$

係数  $\langle J, l+m | s, j; l, m\rangle$  は Clebsch Gordan 係数 (CG 係数) という.

状態空間の正規直交基底に  $|J, l+m, \beta\rangle$  と  $\beta$  依存性を持たせることを考える. このとき,

$$k_J |J, l+m\rangle \mapsto \sum_{\beta} k_{\alpha\beta} |J, l+m, \beta\rangle \quad (3.3.28)$$

とする.  $k_{\alpha\beta}$  は  $J_3$  の固有値  $l, m$  に依存しないので, ある  $l, m$  についてこの値が分かれば, spin  $J$  の既約表現内でのすべての係数が分かったことになる. もう一度, Eq.(3.3.26) に戻って,  $\beta$  依存性を explicit に書くと,

$$O_l^s |j, m, \alpha\rangle = \sum_{J=|j-s|}^{j+s} \sum_{\beta} |J, l+m, \beta\rangle \langle J, l+m, \beta | O_l^s |j, m, \alpha\rangle \quad (3.3.29)$$

$$= \sum_{J=|l-s|}^{l+s} \sum_{\beta} |J, l+m, \beta\rangle \langle J, l+m, \beta | k_{\alpha\beta} |s, j; l, m\rangle \quad (3.3.30)$$

を得る. ここで,  $k_{\alpha\beta} := \langle J, \beta | O_l^s |j, \alpha\rangle$  とかき, reduced matrix element という.

以上の議論, とくに Eq.(3.3.29), (3.3.30) の和の中から以下の定理を得る.

**Theorem 3.3.10** (Wigner Eckart)

$$\langle J, m', \beta | O_l^s |j, m, \alpha\rangle = \delta_{m'm} \langle J, l+m | s, j; l, m\rangle k_{\alpha\beta} \quad (3.3.31)$$

$$= \delta_{m'l+m} \langle J, l+m | s, j; l, m\rangle \langle J, \beta | O_l^s |j, \alpha\rangle \quad (3.3.32)$$

代数から決まる CG 係数  $\langle J, l+m | s, j; l, m \rangle$  と、個々の演算子  $\langle J, \beta | O^s | j, \alpha \rangle$  に分けられるのが嬉しい。

**Example 3.3.11**

今、 $\langle 1/2, 1/2, \alpha | r_3 | 1/2, 1/2, \beta \rangle = A$  が与えられているとき、 $\langle 1/2, 1/2, \alpha | r_1 | 1/2, -1/2, \beta \rangle$  を求めたいとする。

$r_3 = R_0$  故、

$$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \alpha \left| R_0 \right| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \beta \right\rangle = A \quad (3.3.33)$$

というのが条件。

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-R_1 + R_{-1}) \quad (3.3.34)$$

なので、

$$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \alpha \left| r_1 \right| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \beta \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \alpha \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(-R_1 + R_{-1}) \right| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \beta \right\rangle \quad (3.3.35)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \alpha \left| R_1 \right| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \beta \right\rangle \quad (3.3.36)$$

ここで、 $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \alpha | T_{-1} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \beta \rangle$  の項は bra の  $J_3$  の固有値  $1/2$  と演算子プラス ket の  $-3/2$  で一致しないので消える。ここで、既約分解が使えて、highest weight を

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle := R_1 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \beta \right\rangle \quad (3.3.37)$$

と定め、これを  $J^-$  で下げる。この操作で、highest weight  $3/2$  の既約表現の  $1/2$  を得ることが出来る。

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} J^- \left( R_1 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \beta \right\rangle \right) \quad (3.3.38)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} \left( [J^-, R_1] \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \beta \right\rangle + R_1 J^- \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \beta \right\rangle \right) \quad (3.3.39)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} R_0 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \beta \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} R_0 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \beta \right\rangle \quad (3.3.40)$$

ところが、これは spin  $1/2$  の既約表現の  $1/2$  の状態とは直交する。

$$0 = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \alpha \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \right\rangle \quad (3.3.41)$$

$$= \sqrt{2} 3 \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \alpha \left| R_0 \right| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \beta \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \alpha \left| R_1 \right| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \beta \right\rangle. \quad (3.3.42)$$

故に、以上の結果を合わせて、

$$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \alpha \left| r_1 \right| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \beta \right\rangle = A \quad (3.3.43)$$

を得る。

**Remark 3.3.12**

spin 1 と  $1/2$  の角運動量の合成では highest weight state  $|3/2, 3/2\rangle$  から  $J^-$  を使って、highest weight  $3/2$  の既約表現をつくり、それに直交するものとして  $|1/2, 1/2\rangle$  を取り既約分解をした。ところが、テンソル

演算子の場合内積が分からないので全く同じようにはいかない。<sup>xix</sup>ただし、 $J^+ |1/2, 1/2\rangle = 0$  は成り立つので、これをもって調べることはできる。

具体的に、上の例では

$$\frac{1}{\sqrt{3}} R_0 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \alpha \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} R_1 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \alpha \right\rangle \quad (3.3.44)$$

が  $|1/2, 1/2\rangle$  である。<sup>xx</sup>実際これは  $J^+$  により消える。

### Remark 3.3.13

他の方法として、テンソル演算子のクラスに注目することもできる。

$J_a$  との交換関係の観点からは、 $J_a$  自身と  $r_a$  は同じ rank 1 のテンソル演算子<sup>xxi</sup>である。行列要素のパラメータは交換関係から決まるので、二者では比例するパラメータを持つことが分かり、

$$\left\langle \frac{1}{2}, m, \alpha \left| J_a \right| \frac{1}{2}, m', \beta \right\rangle = \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (\sigma)_{mm'} \quad (3.3.45)$$

故、

$$\left\langle \frac{1}{2}, m, \alpha \left| R_a \right| \frac{1}{2}, m', \beta \right\rangle \propto \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (\sigma)_{mm'} \quad (3.3.46)$$

が分かる。

## 3.3.2 テンソル演算子の構成

$D$  を可約表現とする。 $D$  に従って変換する演算子の組、 $\Omega_x; [J_a, \Omega_x] = \Omega_y (J_a^D)_{yx}$  があるとする。highest weight によりテンソル演算子の既約分解ができる。

まず、 $[J_3, O_{m,\alpha}] = m O_{m,\alpha}$  となる演算子  $O_{m,\alpha}$  を  $\Omega_x$  たちの線形結合で作り、ladder operator で固有値を上下させる。ところが、Remark 3.3.12 で述べたように、内積がわからないので既約分解の時に直交する状態をつくれな。与えられている交換関係から  $J^+$  を作用させてきえるものを探す。具体例は [Geo] 参照。<sup>xxii</sup>

## 3.3.3 テンソル演算子の積

spin  $s_1, s_2$  のテンソル演算子の積について、

$$[J_a, O_{m_1}^{s_1} O_{m_2}^{s_2}] = (J_a^{s_2})_{m_2' m_2} O_{m_1}^{s_1} O_{m_2'}^{s_2} + (J_a^{s_1})_{m_1' m_1} O_{m_1'}^{s_1} O_{m_2}^{s_2} \quad (3.3.47)$$

となるので、 $|s_1, m_1\rangle \otimes |s_2, m_2\rangle$  と同様の変換をする。

特に  $J_3$  については

$$[J_3, O_{m_1}^{s_1} O_{m_2}^{s_2}] = (m_1 + m_2) O_{m_1}^{s_1} O_{m_2}^{s_2} \quad (3.3.48)$$

と変換する。

<sup>xix</sup> Eq.(3.3.37) では  $R_1 |1/2, 1/2\rangle$  の大きさを 1 にとったことに注意。一つは大きさを演算子に押し付けることで決められるが、他の状態の大きさはこれにより相対的に変わり、それは演算子による。一般論での  $k_J$  がこれに相当し、 $J$  が highest のとき 1 に固定したが、そのほかは  $J$  に依存して変わるということである。

<sup>xx</sup> ただし、前述のとおり大きさが定まっていないので、大きさの不定性はある。

<sup>xxi</sup> 特にベクトル演算子ともいう。ベクトル演算子  $V_a$  は  $[J_a, V_b] = i\epsilon_{abc} V_c$  を満たす。

<sup>xxii</sup> [Geo] を見ると、たくさん交換関係が与えられているが、物理では演算子の交換関係はわかっているというのは自然な状況設定に思う。それから、テンソル演算子を構成する手法が本文で述べたことである。

**Remark 3.3.14**

$O_{m_1}^{s_1} O_{m_2}^{s_2}$  自体はテンソル演算子ではないが,  $\text{spin } s_1 + s_2, s_1 + s_2 - 1, \dots, |a_1 - s_2|$  に従うテンソル演算子の直和に分解できる.

## Appendix A

### 指数関数



## 参考文献

- [Geo] ジョージアイ “物理学におけるリー代数” 吉岡書店  
[Kb-Os] 小林俊行, 大島利雄 “リー群と表現論” 岩波書店  
[Ig-Kw] 猪木慶治, 川合光 “量子力学 I” 講談社  
[Tckw] 立川裕二 [量子力学 II の講義ノート](#)  
[Owd] 大和谷潔さん [Amazon カスタマーレビュー](#)