場の理論ゼミ

Toshiya Tanaka

October 22, 2022

1 Introduction

- B4 の後期は [PS95] を研究室のゼミで読むことになったので，学びを記録しようと思います．
- 教科書中の式は PS (number) のように記します．

2 The Klien–Gordon Field

- p.14 で，$E = \sqrt{p^2 + m^2}$ の方で計算した propagator

$$U(t) = \frac{1}{2\pi^2 |\vec{x} - \vec{x}_0|} \int_0^\infty \mathrm{d}p \sin(p|\vec{x} - \vec{x}_0|) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\sqrt{p^2+m^2}} \tag{2.1}$$

を直接評価する方法は，本でも引用されているように，[GR80, p.491][i] を見れば良い．

$$\int_0^\infty x \mathrm{e}^{-\beta\sqrt{\gamma^2+x^2}} \sin\beta x \, \mathrm{d}x = \frac{b\beta\gamma^2}{\beta^2 + b^2} K_2(\gamma\sqrt{\beta^2 + b^2}) \tag{2.2}$$

という式があり，この収束する積分の指数の肩を虚数倍ひねる，いわゆる解析接続をしていると解釈できる．元の積分は p が無限で発散し，虚数の指数関数は振動するので，被積分関数を見ると発散してしまうことがわかる．[ii]

- PS (2.31) で $\delta(0)$ の無限大をむしすることについて，
  - GR を考えるときは無視できない．
  - SUSY を入れると出ない．
- PS (2.33) の計算は奇関数が対称区間の積分で消えることを考える．素直に代入して，

$$\vec{P} = -\int \mathrm{d}^3x \, \pi(\vec{x}) \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \tag{2.3}$$

$$= -\int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3} \left(\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \right) (a_p - a_{-p}^\dagger) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}} (\mathrm{i}\vec{p}') \frac{1}{\sqrt{2\omega_{p'}}} (a_{p'} + a_{-p'}^\dagger) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \tag{2.4}$$

となり，

$$\int \frac{\mathrm{d}^3x}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}} = \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{p}') \tag{2.5}$$

を使うと，

$$\vec{P} = -\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} (-\vec{p}) \frac{1}{2} (a_p - a_{-p}^\dagger)(a_{-p} + a_p^\dagger) \tag{2.6}$$

となる．今，$(a_p a_{-p} - a_{-p}^\dagger a_{-p} + a_p a_p^\dagger + a_{-p} a_p^\dagger)$ となるが，p と $-p$ が交互に入っているものは奇関数になり，消える．

$$\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} (a_p a_{-p} + a_{-p}^\dagger a_p) = 0. \tag{2.7}$$

すると，添字の運動量は，符号が一致したものしか残らず，全空間の積分なので符号を変えて，全て $+p$ で計算する

---

i. この本はネット上でも見れるが，1200 ページくらいあり，とても重いので注意．

ii. この一連の議論は d 氏に教えていただいた．

テクニックが使える．これより，

$$\vec{P} = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \vec{p} \frac{1}{2} \Big(a_p a_p^\dagger - a_{-p}^\dagger a_{-p} \Big) \tag{2.8}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \vec{p} \bigg(a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2} \big[a_p, a_p^\dagger \big] \bigg) \tag{2.9}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \vec{p} a_p^\dagger a_p \tag{2.10}$$

となる．最後の $\big[a_p, a_p^\dagger\big]) = \delta(0)$ は偶関数と思うと消える．

- PS (2.40) は三次元空間の $\mathrm{d}^3 p/(2E_p)$ で measure を入れたものだが，$\mathbb{R}^{1,3}$ に埋め込むと $p^0 > 0$ の方の双曲超平面上の積分と思える．
- PS (2.41), PS (2.42) から，$\phi(x) \left|0\right\rangle_{\mathrm{QFT}} \sim \left|\vec{x}\right\rangle_{\mathrm{QM}}$，$\langle 0|\phi(x)|p\rangle_{\mathrm{QFT}} \sim \langle x|p\rangle_{\mathrm{QM}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}$ と対応がつく．
- section 2.4 では今まで，時間に依存しない Schödinger 描像でやっていたものを，Heisenberg 描像に移す．やりかたは，QM と同じように $\mathcal{O}_{\text{Heisenberg}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} \mathcal{O}_{\text{Schrödinger}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$ とする．
- 生成消滅演算子の Heisenberg 描像は $\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}Ht}{n!}$ と $H^n a_p = a_p (H - E_p)$ など[iii.]を用いて，$a_p \mathrm{e}^{-iE_p t}$ などになり，場の演算子も綺麗にまとまる．
- PS (2.51) の最後の評価は，鞍点ではないが，振動の遅いところが積分に最も寄与すると思うと，$E = m$ の値を採用すると考える．

References

[GR80] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, New York, 1980.

[PS95] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.

iii. 生成消滅のこのような関係式は，片方について調べると，もう片方はエルミート共役を取れば直ちに成り立つことを確認できる．