1 SUSY in QM

Definition 1.1 (最小超対称関係)
3 種類の Hermitian operator H: Hamiltonian, Q: Supercharge, $(-1)^F$: ???があって

$$H = Q^2 \tag{1}$$
$$Q(-1)^F = -(-1)^F Q, \quad \text{or} \quad \{Q, (-1)^F\} = 0 \tag{2}$$
$$\left((-1)^F\right)^2 = 1 \tag{3}$$

を満たす関係を最小超対称関係という．
超対称性がある系には，必ずこの関係がある．

実は，簡単な量子力学系にもこの構造が隠れている．

1.1 円周上の自由粒子

半径 R の円周上の自由粒子を考える．定義域を $-\pi R \leq x \leq \pi R$ とし，周期的境界条件 $\psi(x + 2\pi R) = \psi(x)$ を入れる．Hamiltonian は $H = -1/(2m)\ \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ であるので，Schrödinger 方程式を解くと，固有関数として，次の固有関数を得る．

$$\phi_{n,+}(x) = N_{n,+} \cos\left(\frac{n}{R}x\right) \tag{4}$$
$$\phi_{n,-}(x) = N_{n,-} \sin\left(\frac{n}{R}x\right). \tag{5}$$

これらの固有エネルギーは，

$$E = \frac{1}{2mR^2} n^2 \tag{6}$$

で, 各固有空間は 2 次元あることがわかる．Hamiltonian を "因数分解" して supercharge を得る．$H = (-\mathrm{i}/(\sqrt{2m})\ \mathrm{d}/\mathrm{d}x)^2$ より，$Q := -\mathrm{i}/(\sqrt{2m})\ \mathrm{d}/\mathrm{d}x = p/\sqrt{2m}$ とする．
また，parity $\mathcal{P}$ は $(-1)^F$ の働きをする．
よって，この系には，最小超対称関係を満たす演算子たちが存在することがわかる．これらは Hermitian であることも確かめられる[*1]．
今，周期的境界条件で考えたが，ひねった境界条件 $\psi(x + 2\pi R) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\psi(x)$ を入れると面白い[*2]．θ の連続変形でスペクトラムの構造は連続的に変化し[*3]，$\theta = n\pi$ のところでは SUSY の構造が現れるが，その他のところでは現れない．実際計算すると，固有エネルギーと固有状態は

$$\psi_n = N_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+\theta/(2\pi))x/R} \tag{7}$$
$$E_n = \frac{1}{2mR^2}\left(n + \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 \tag{8}$$

となる．
$\theta \neq n\pi$ で SUSY が壊れているのは，parity が上手くいっていないからである．境界条件を考えると，$\psi(x + 2\pi R) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\psi(x)$ だが，$x' = -x - 2\pi R$ とおくと，$\psi(x' + 2\pi R) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\psi(x')$ となってしまい，$\theta \neq n\pi$ では parity で境界条件が不変でないので，同じ系の中で対応が作れない．

1.2 超対称性の基本性質

SUSY がある系は最小超対称関係

- $H = Q^2$
- $\left\{Q, (-1)^F\right\} = 0$
- $\left((-1)^F\right) = 1$

が必ずある．
この関係から，$[H, Q] = 0$, $[H, (-1)^F]$ がなりたつので，H と $(-1)^F$ の同時固有状態 $|E, \lambda\rangle$ をとることができる．$\left((-1)^F\right)^2 = 1$ なので，$\lambda = \pm 1$ である．
以下の 4 つの性質が成り立つ．

Property 1
エネルギー固有値が非負．$E \geq 0$.

[*1] A が Hermitian とは，今定まっている内積 $\langle\psi, \phi\rangle = \int \mathrm{d}x\,(\psi(x))^*\phi(x)$ に対して，$\langle A\psi, \phi\rangle = \langle\psi, A\phi\rangle$ が成り立つことである．
[*2] Aharanov–Bohm のように，磁場を使うと，実際に作ることができる．
[*3] spectral flow という．

次の式変形からわかる*4.

$$
\begin{aligned}
E &= \langle E,\lambda|H|E,\lambda\rangle && (9)\\
&= \langle E,\lambda|Q^2|E,\lambda\rangle && (10)\\
&= \|Q\,|E,\lambda\rangle\,\| && (11)\\
&\geq 0. && (12)
\end{aligned}
$$

□

Property 2
正エネルギー状態は，$(-1)^F$ の固有値が ± 1 の固有状態 $|E,\pm\rangle$ で対を成し，エネルギー固有値は縮退する．

まず，$E>0$ として，$|E,+\rangle$ を考える．$(-1)^F Q\,|E,+\rangle = -Q(-1)^F\,|E,+\rangle = -Q\,|E,+\rangle$ なので，$Q\,|E,+\rangle \propto |E,-\rangle$. $|E,-\rangle$ についても同様にして，$Q\,|E,-\rangle \propto |E,+\rangle$ である．

また，比例定数は

$$
\begin{aligned}
\|Q\,|E,+\rangle\,\|^2 &= \langle E,+|Q^\dagger Q|E,+\rangle && (13)\\
&= \langle E,+|H|E,+\rangle && (14)\\
&= E && (15)
\end{aligned}
$$

となるので*5,

$$
Q\,|E,\pm\rangle = \sqrt{E}\,|E,\mp\rangle \qquad (16)
$$

と決まる*6.

このとき，$|E,\pm\rangle$ は Q を通じて対を成しており，supermultiplet を成すという．この状況を模式的に $|E,+\rangle \xleftrightarrow{Q} |E,-\rangle$ と書く． □

Property 3
ゼロエネルギー状態*7は必ずしも縮退しない．ゼロエネルギー状態が存在するならば，$Q\,|E=0\rangle = 0$ を満たす．

Eq. (16) に $E=0$ を代入すると直ちにわかる．$E\neq 0$ のときとは異なり，Q を通じた supermultiplet をなさない．この状況を $|E=0,+\rangle \xrightarrow{Q} 0 \xleftarrow{Q} |E=0,-\rangle$ と書く． □

ゼロエネルギー状態が $Q\,|E=0,\pm\rangle$ を満たすことは，ゼロエネルギー状態は 1 階の微分方程式の解であることを意味する．

Property 4
Witten index $\Delta_{\mathrm{W}} \coloneqq \mathcal{N}^+_{E=0} - \mathcal{N}^-_{E=0}$ は topological invariant.
ここで，$\mathcal{N}^\pm_{E=0}$ は $(-1)^F$ の固有値が ± 1 の固有状態の数である．

topological invariant とは，理論のパラメータの連続変形で不変な量という意味で用いる．S^1 上の自由粒子の例では m や R を大きくとると，$n\neq 0$ に置いても $E_n\to 0$ となるが，もともと non zero であるものは対で存在するので，ゼロエネルギー状態の数の差は変わらない． □

---

*4 Q が Hermitian であることは本質的である．
*5 phase は実にとると
*6 Q は H を “因数分解” して作ったことを思い出すと，大きさは $\sqrt{E}$ になると思える．
*7 SUSY の文脈でこのような状態を BPS state という．