1　$\mathcal{N}=2$ 超対称代数

1.1　一般性質

Definition 1.1 (実 supercharge と $\mathcal{N}=2$[*1]超対称代数)
最小超対称関係を満たす三つのエルミート演算子 H, Q, $(-1)^F$ から，エルミート演算子[*2]$Q_1 \coloneqq Q$, $Q_2 \coloneqq -\mathrm{i}Q(-1)^F$ を定める．H, Q_1, Q_2 は，

$$\{Q_i, Q_j\} = 2H\delta_{ij} \tag{1}$$
$$[H, Q_i] = 0 \tag{2}$$

の関係を満たす．

　これは，最小超対称関係と等価だが，$(-1)^F$ を加えて議論することが多い．$(-1)^F$ は余分な演算子なので，束縛関係 $\mathrm{i}Q_1Q_2 = H(-1)^F$ で結ばれる[*3]．

Definition 1.2 (複素 supercharge と $\mathcal{N}=2$ 超対称代数)
$\mathcal{Q} \coloneqq (Q_1 + \mathrm{i}Q_2)/\sqrt{2}$ を定める．このとき，$\mathcal{Q}$, H は

$$\left\{\mathcal{Q}^\dagger, \mathcal{Q}\right\} = 2H \tag{3}$$
$$\{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}\} = \left\{\mathcal{Q}^\dagger, \mathcal{Q}^\dagger\right\} = 0 \tag{4}$$
$$[H, \mathcal{Q}] = \left[H, \mathcal{Q}^\dagger\right] = 0 \tag{5}$$

の関係を満たす．

　Eq. (4) は $\mathcal{Q}^2 = (\mathcal{Q}^\dagger)^2 = 0$ と書け，2 乗してゼロになるこの性質を nilpotency という[*4]．
　複素の場合も，$\mathcal{N}=2$ 超対称代数に $(-1)^F$ を加え考えることが便利である．この場合の束縛関係は $\left(\mathcal{Q}^\dagger\mathcal{Q} - \mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger\right)/2 = H(-1)^F$ である．左辺を実 supercharge で計算すれば，iQ_1Q_2 になり，実の場合の束縛を使うと導ける．
　cpx supercharge で基本性質を見る．

Property 1
$E \geq 0$.

Property 2
$E > 0$ なら次の supermultiplet の構造がある．

$$0 \xleftarrow[\mathcal{Q}]{} |E, -\rangle \underset{\mathcal{Q}}{\overset{\mathcal{Q}^\dagger}{\longleftrightarrow}} |E, +\rangle \xrightarrow{\mathcal{Q}^\dagger} 0 \tag{6}$$

Property 3
$E = 0$ なら，$\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^\dagger$ で消える．

$$0 \xleftarrow[\mathcal{Q}]{} |E = 0\rangle \xrightarrow{\mathcal{Q}^\dagger} 0 \tag{7}$$

Property 4
Witten index がトポロジカルな量．

　Witten index については全く同じ．

1.2　S^1 上自由粒子での具体例

以下では，上で見た $\mathcal{N}=2$ 超対称代数を，具体的に S^1 上の自由粒子の例について見る．
　前回，この系は $H \coloneqq -1/(2m)\,\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$, $Q \coloneqq -\mathrm{i}/(2m)\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$, $(-1)^F \coloneqq \mathcal{P}$ が最小超対称関係を満たすことを見たが，もう少し具体的に見る．
　この系では，周期的境界条件から，エネルギーは $E_n = n^2/(2mR^2)$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で対応する固有状態は二つあり，

$$\psi_{n,+}(x) = N_{n,+}\cos(nx/R) \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{8}$$
$$\psi_{n,-}(x) = N_{n,-}\sin(nx/R) \quad n \in \mathbb{Z}_{> 0} \tag{9}$$

であるが，これは，Q が一階微分演算子であり，sin と cos が入れ替わることを考えると，Q を通して移り合う．

[*1] $\mathcal{N}$ は supercharge の数である．ところが，実 (エルミート) で数える流儀と複素で数える流儀があり，文献を比較する際は確認する必要がある．今は実で数えている．
[*2] エルミートという意味で，実 supercharge という．
[*3] $(-1)^F$ という余分な演算子が現れたとき，H をかければ最小限の Q_1, Q_2 のみで書けるということ．
[*4] nilpotency は場の理論の Glassmann 数の対称性である BRS 対称性による保存料である BRS charge, de Rham coholomogy などでも重要な働きをするそう．実際 SUSYQM で微分幾何をやるという話もある．

また，規格化定数の phase を $N_{n,-} = \mathrm{i}N_{n,+} =: \mathrm{i}N_n$ ととると，

$$Q\psi_{n,+} = \sqrt{n^2/(2mR^2)}\mathrm{i}N_n \sin(nx/R) \tag{10}$$
$$= \sqrt{E_n}\psi_{n,-} \tag{11}$$

と規格化定数も含めて，一般の結果が再現できる．

次に，複素 supercharge を用いて考える．以下では，具体的な微分などは考えず，H と $\mathcal{Q}$ と $\mathcal{P}$ の代数的性質を用いて考察する．

今，$\mathcal{P}_\pm := (1 \pm \mathcal{P})/2$ を定めると，複素 supercharge は $\mathcal{Q} = (Q + \mathrm{i}(-\mathrm{i}Q\mathcal{P}))/\sqrt{2} = \sqrt{2}Q/\mathcal{P}_+$, $\mathcal{Q}^\dagger = \sqrt{2}Q\mathcal{P}_-$ となる．

Theorem 1.3
$\mathcal{P}_+, \mathcal{P}_-$ はそれぞれ関数 $f(x)$ の偶関数成分，奇関数成分を取り出す演算子である．

$f(x) = (f(x) + f(-x))/2 + (f(x) - f(-x))/2$ と書き直したとき，第一項は偶関数であり，第二項は奇関数である．これらを偶関数成分，奇関数成分と呼ぶ．

$\mathcal{P}_\pm(f(x)) = (f(x) \pm f(-x))/2$ は実際に成り立つ． □

Theorem 1.4
$\mathcal{P}_\pm$ は射影演算子である．すなわち，次の性質を満たす．

- $(\mathcal{P}_\pm)^2 = \mathcal{P}_\pm$
- $\mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_- = 1$
- $\mathcal{P}_+\mathcal{P}_- = 0$

これを用いて，Eq. (6) のスペクトラムは理解できる．

- $\psi_{n,+}$ は偶関数なので，$\mathcal{Q}^\dagger \sim \mathcal{P}_-$ で消える．
- $\psi_{n,-}$ は奇関数なので，$\mathcal{Q} \sim \mathcal{P}_+$ で消える．
- $\psi_{n,+}$ は偶関数なので，$\mathcal{Q} \sim Q$ で奇関数に移る．
- $\psi_{n,-}$ は奇関数なので，$\mathcal{Q}^\dagger \sim Q$ で偶関数に移る．

また， Eq. (7) のスペクトラムは次のように理解できる．

- ground state は定数関数なので，微分で消える．
- 偶関数でもあるので，$\mathcal{P}_-$ でも消える．