

レーザー光の回折

わっふる。

2021 年 7 月 14 日

1 目的

Fraunhofer 回折を可視光領域で確認する．結晶構造を X 線で調べる際も，同様の回折が起こるので，その原理を理解する．

2 理論

まず，縦 $2a$ ，横 $2b$ の長方形孔による回折を考える．長方形孔の中心を原点とし，長方形孔からスクリーンまでの距離は Z とする．長方形孔中の点 $P(x, y)$ から出た光が，スクリーン上の点 $Q(X, Y)$ に結像することを考える．また，原点から Q までの距離を R ， P から Q までの距離を r とし， $r \ll R$ である．図 1.

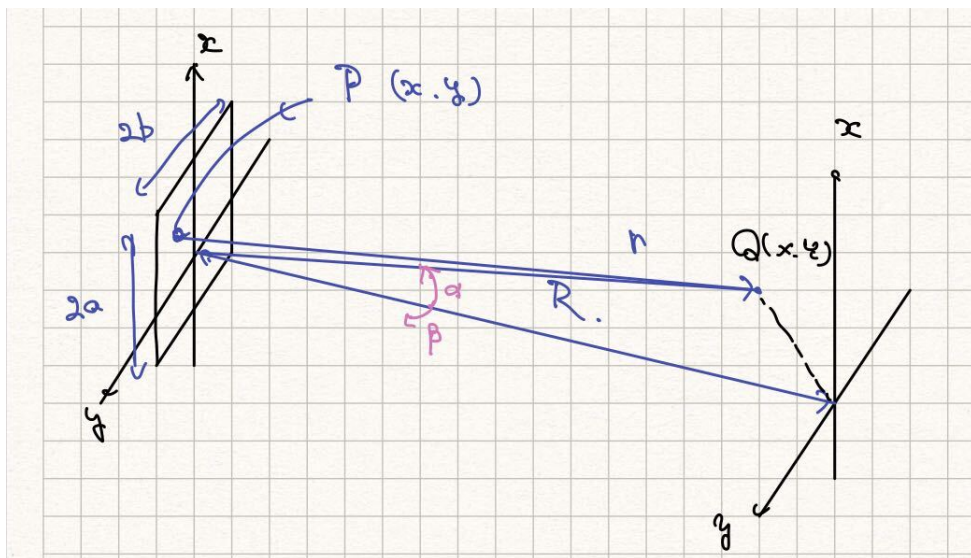


図 1 光学系のセットアップ.

光は球面波として，各点からの寄与は適当な振幅 g ，振動数 ω として

$$\frac{g}{r} \exp(i(kr - \omega t)) \quad (2.1)$$

として距離 r と時間 t の関数として書ける．

2.1 一つの長方形孔からの回折

$r = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2}$, $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ であるが, $r \ll R$ より,

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 - 2(xX + yY) + x^2 + y^2} \quad (2.2)$$

$$= R \sqrt{1 - 2 \frac{xX + yY}{R^2} + \frac{x^2 + y^2}{R^2}} \quad (2.3)$$

$$\simeq R \left(1 - \frac{xX + yY}{R^2} \right) \quad (2.4)$$

と一次までで近似できる. スクリーン上の点 Q への結像 $\Psi(X, Y, t)$ は長方形孔内の各点からの寄与を積分すればよいので,

$$\Psi(X, Y, t) = \frac{g}{R} \exp(i(kr - \omega t)) \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy \exp\left(-ik \left(\frac{xX + yY}{R} \right)\right) \quad (2.5)$$

となる. また, R と Z 軸の成す角について, x 方向を α , y 方向を β とすると,

$$\alpha \simeq \sin \alpha = \frac{X}{R} \quad (2.6)$$

$$\beta \simeq \sin \beta = \frac{Y}{R} \quad (2.7)$$

と書けるので,

$$\Psi(X, Y, t) \simeq \frac{g}{R} \exp(i(kR - \omega t)) \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy \exp(-ik(\alpha x + \beta y)) \quad (2.8)$$

$$= \frac{g}{R} \exp(i(kR - \omega t)) \left(\frac{i}{k\alpha} (\exp(-i\alpha a) - \exp(i\alpha a)) \right) \left(\frac{i}{k\beta} (\exp(-i\beta b) - \exp(i\beta b)) \right) \quad (2.9)$$

$$= \frac{g}{R} \exp(i(kR - \omega t)) \frac{i \cdot 2i(-\sin k\alpha a)}{k\alpha} \frac{i \cdot 2i(-\sin k\beta b)}{k\beta} \quad (2.10)$$

$$= (2a)(2b)C(t) \frac{\sin k\alpha a}{k\alpha} \frac{\sin k\beta b}{k\beta}, \quad \left(C(t) := \frac{g}{R} \exp(i(kR - \omega t)) \right) \quad (2.11)$$

となる. 回折強度 J は $|\Psi|^2$ なので,

$$J = 16a^2b^2 \left(\frac{\sin k\alpha a}{k\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin k\beta b}{k\beta} \right)^2 \quad (2.12)$$

となる. J がもっとも大きいのは, $\alpha, \beta \rightarrow 0$, i.e., $X, Y \rightarrow 0$ で $J \rightarrow 16a^2b^2$ となる. また, 零点は周期的に現れて, $\sin k\alpha a = 0$, $\sin k\beta b = 0$ のとき, i.e.,

$$\alpha = n\lambda/2a, \quad \beta = m\lambda/2b, \quad (n, m \in \mathbb{Z}) \quad (2.13)$$

のときである. Eq.(2.11) で書かれる回折を Fraunhofer 回折という. 図 2.

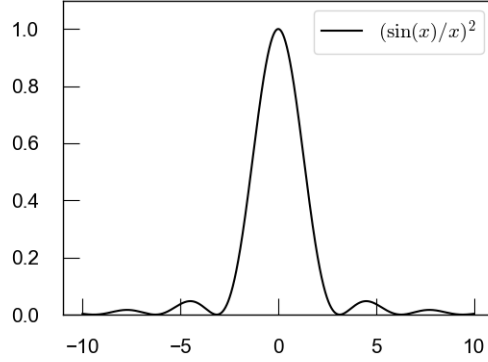


図2 Fraunhofer 回折.

2.2 直線上に配置した長方形孔による回折

一辺の長さが $2a$, もう一辺が $2b$ の長方形孔が, 直線上に周期 d で N 個配置していることを考える. $j = 0, 1, \dots, N-1$ でラベルすると, $j = 0$ の長方形孔の x 座標 x に対し, j 番目の長方形孔の座標は $x + jd$ が対応する. 故にスクリーン上の点 $Q(X, Y)$ での結像は, 各長方形孔からの寄与 Eq.(2.8) の和で

$$\Psi(X, Y, t) = \sum_{j=0}^{N-1} \left(C(t) \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy \exp(-ik(\alpha(x + jd) + \beta y)) \right) \quad (2.14)$$

$$= C(t) \sum_{j=0}^{N-1} \exp(-ikx_j) \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy \exp(-ik(\alpha x + \beta y)) \quad (2.15)$$

となる. 和は等比級数になっていて,

$$\sum_{j=0}^{N-1} \exp(-ikx_j) = \frac{1 - \exp(-ikNd\alpha)}{1 - \exp(-ikd\alpha)} \quad (2.16)$$

である. 先のためにこの絶対値の二乗を計算しておくとして,

$$\left| \sum_{j=0}^{N-1} \exp(-ikx_j) \right|^2 = \frac{1 - \exp(-ikNd\alpha)}{1 - \exp(-ikd\alpha)} \frac{1 - \exp(ikNd\alpha)}{1 - \exp(ikd\alpha)} \quad (2.17)$$

$$= \frac{1 - \exp(-ikNd\alpha) - \exp(ikNd\alpha) + 1}{1 - \exp(-ikd\alpha) - \exp(ikd\alpha) + 1} \quad (2.18)$$

$$= \frac{\sin^2(kNd\alpha/2)}{\sin^2(kd\alpha/2)} \quad (2.19)$$

である. 結局回折強度 I_{1d} は

$$I_{1d} = J \frac{\sin^2(kNd\alpha/2)}{\sin^2(kd\alpha/2)} \quad (2.20)$$

となる. ただし, J は Eq.(2.12) のものである. 適当な値でプロットしたのが, 図3である.

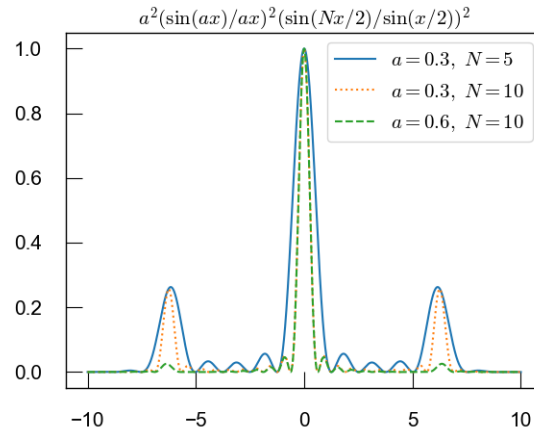


図3 直線状に配置した長方形孔による回折強度．強度は $x = 0$ の値で割ってある．

2.3 二次元正方格子に配置した長方形孔による回折．

x 方向には d_x 間隔で N 個， y 方向には d_y 間隔で M 個の長方形孔が並んでいる場合，Eq.(2.14) で，さらに y 方向についても $k = 0, 1, \dots, M$ の和を取って，同様の議論により回折強度 I_{2d} は

$$I_{2d} = J \frac{\sin^2(kNd_x\alpha/2)}{\sin^2(kd_x\alpha/2)} \frac{\sin^2(kMd_y\beta/2)}{\sin^2(kd_y\beta/2)} \quad (2.21)$$

となる．図4に density plot した．実際の回折像もこのように見えるはずである．

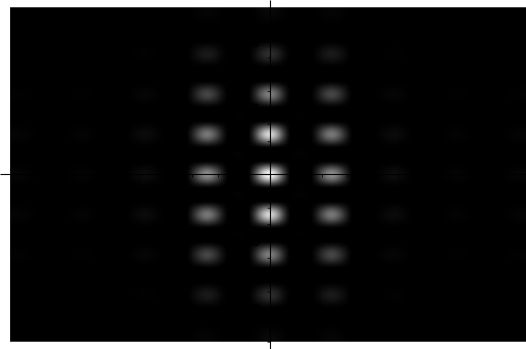


図4 二次元正方格子に配置した長方形孔による回折像の density plot．色が明るいほど強度が強い．

3 実験

光源は波長 633nm の He-Ne レーザーを用い，コンデンサーレンズでピンホールに集光し，一番強い光を絞り，コリメータレンズにより平面波をつくる．これをスリットを通し，スクリーンに映った回折像をデジタルカメラで撮影し，コンピュータに取り込む．画像処理には ImageJ を用いる．

3.1 スリット-スクリーン間の距離の測定

中心の最も強い部分を $m = 0$ とし, 左の主極大を順に $m = -1, -2, \dots$, 右の主極大を $m = 1, 2, \dots$ と番号を付ける. これを指数という. 指数が分かれば Eq.(2.13) から, 指数の座標 s_m として

$$s_m = \frac{\lambda R}{d} m \quad (3.1)$$

が分かり, スクリーンとスリットの距離が分かる. スリットは $d = 0.5\text{mm}$ のものを使う. 指数と主極大の位置をプロットして, Eq.(3.1) の傾きから R を求める. また, 図 2 のような干渉が起こっていることを確かめる.

3.2 直線上に配置した長方形孔による回折

以後の実験では Sec.3.1 で求める R を用いる. Eq.(3.1) から格子の間隔 d を見積もる. 実験で使用するスリットは順に

1. $0.5 * 3$, 1mm 間隔
2. $0.4 * 3$, 1mm 間隔
3. $0.5 * 3$, 2mm 間隔

のものである.

3.3 二次元正方格子上に配置した長方形孔による回折

この実験でも同様に Eq.(3.1) により x, y 方向の格子の間隔 d_x, d_y を見積もる. 実験で使用するスリットは, 6, 7, 8 番である.

4 結果

ImageJ での回折強度を数値化したもの及び, 主極大の指数と位置の関係をプロットしたものを以下の表にまとめる. 後者については最小二乗法で線形回帰したものを点線で記した.

4.1 スリット-スクリーン間の距離の測定

スリット-スクリーン間の距離は

$$R = 66745\text{pixel} \quad (4.1)$$

となった.

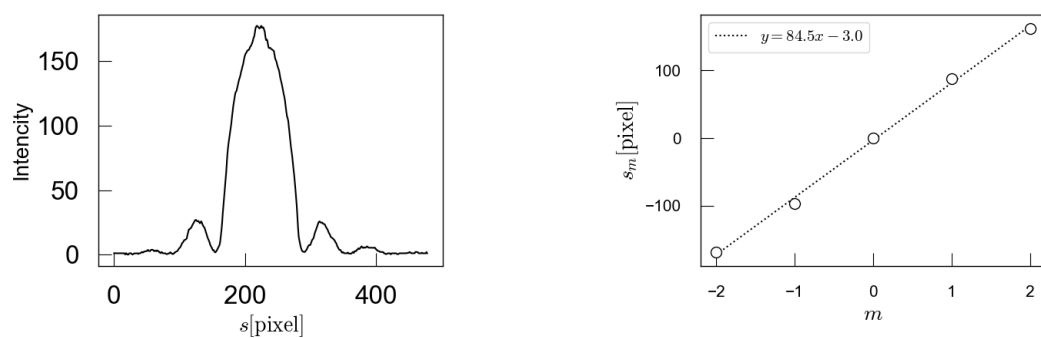


図5 回折像と主極大の指数 m とその位置 s_m . 使用したスリットは $d = 0.5[\text{mm}]$ のもの.

4.2 直線上に配置した長方形孔による回折

格子間隔は順に

1. 0.5×3 , 1mm 間隔について, 1.30mm
2. 0.4×3 , 1mm 間隔について, 1.20mm
3. 0.5×3 , 2mm 間隔について, 2.17mm

となった.

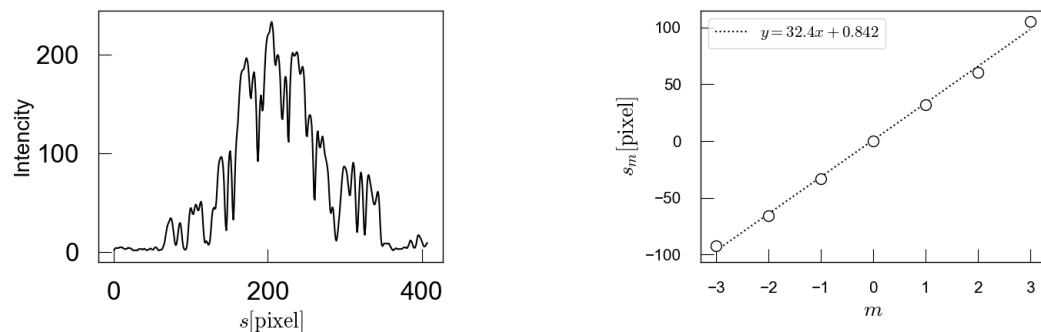


図6 0.5×3 , 1[mm] フィルムの回折像および主極大の指数 m とその位置 s_m .

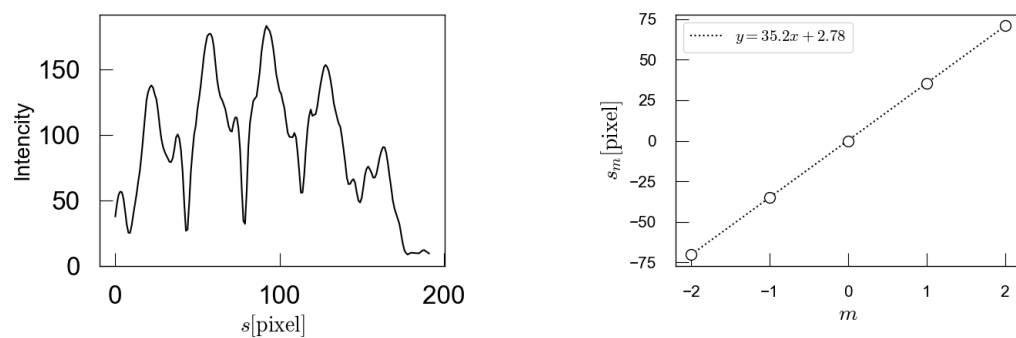


図7 0.4×3 , 1[mm] フィルムの回折像および主極大の指数 m とその位置 s_m .

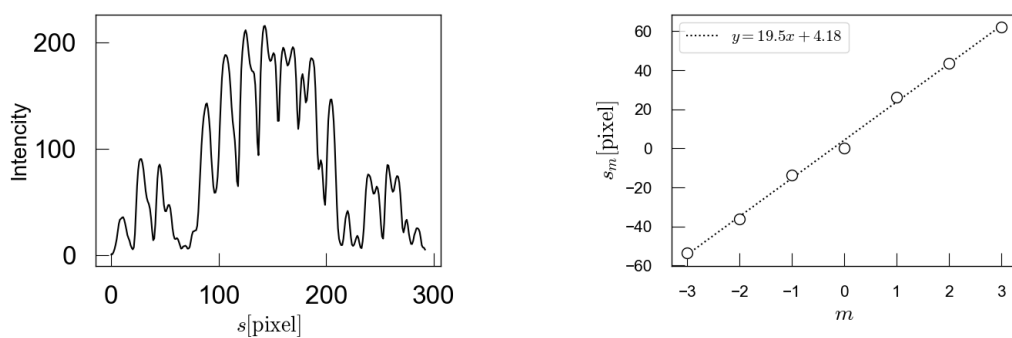


図8 0.5 × 3, 2[mm] フィルムの回折像および主極大の指数 m とその位置 s_m .

4.3 二次元正方格子に配置した長方形孔による回折

格子間隔は

1. 6 番について、縦が 0.494mm, 横が 0.398mm
2. 7 番について、縦が 0.492mm, 横が 0.572mm
3. 8 番について、縦が 0.461mm, 横が 0.451mm

となった.

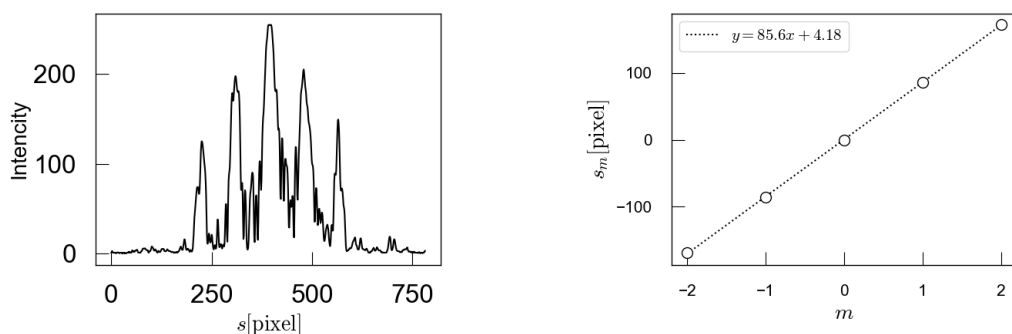


図9 6 番フィルムの縦の回折像および回折像の主極大の指数 m とその位置 s_m .

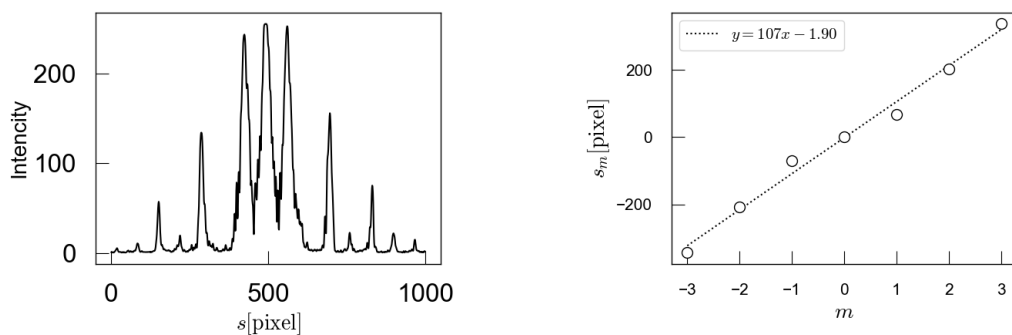


図10 6 番フィルムの横の回折像および回折像の主極大の指数 m とその位置 s_m .

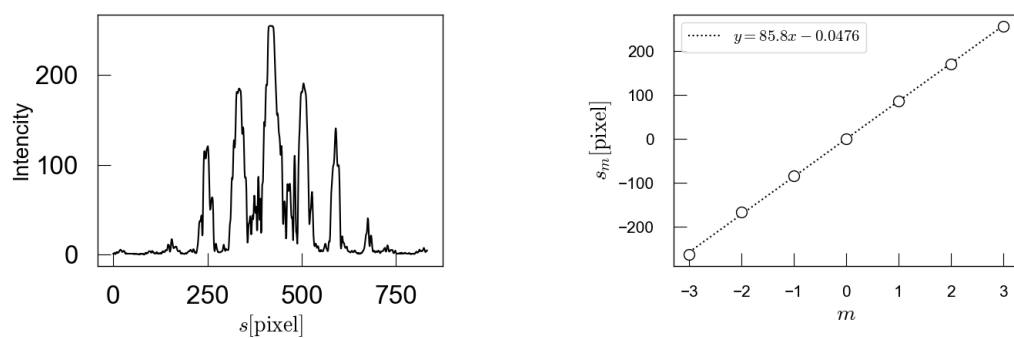


図 11 7 番フィルムの縦の回折像および回折像の主極大の指数 m とその位置 s_m .

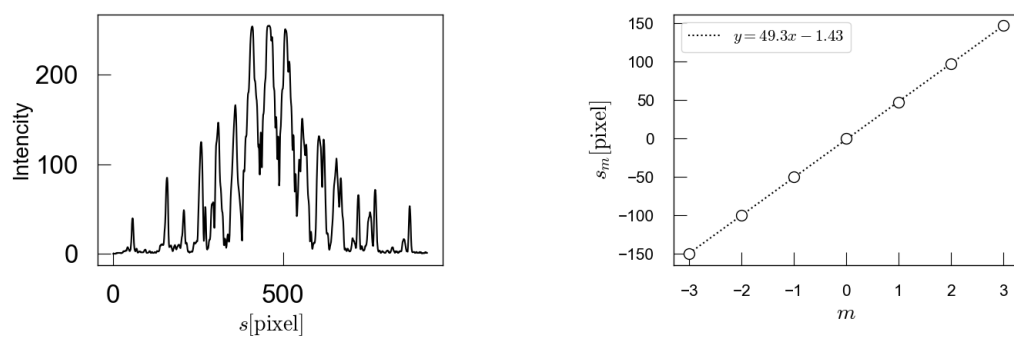


図 12 7 番フィルムの横の回折像および回折像の主極大の指数 m とその位置 s_m .

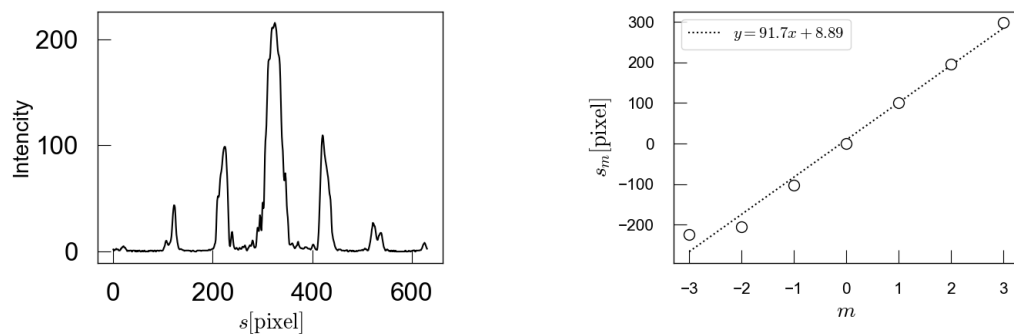


図 13 8 番フィルムの縦の回折像および回折像の主極大の指数 m とその位置 s_m .

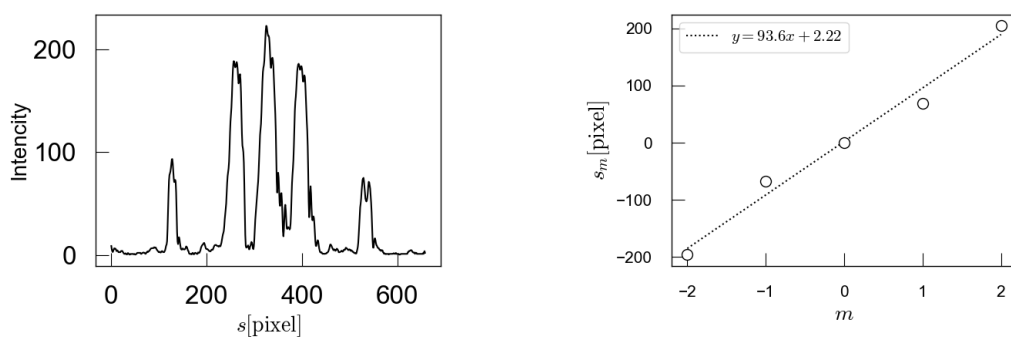


図 14 8 番フィルムの横の回折像および回折像の主極大の指数 m とその位置 s_m .

5 考察

理論に基づく計算結果と実際の結果がよく合っていることが確認できる。

Fraunhofer 回折は図 2 と図 5 より，一次元の配列では図 3 とその他の実験結果の図を見比べれば，一致が確認できる.ⁱ

2 次元の回折では，図 4 で予想した通りの回折が実際に起こっていることが撮影された．図 15 の実際の写真と見比べれば分かる．

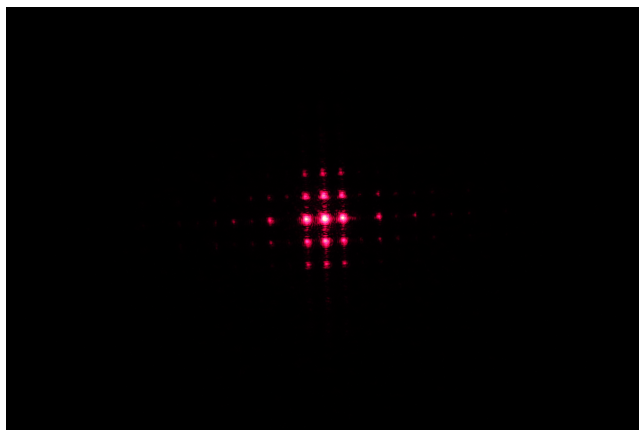


図 15 2 次元正方格子上に配置した長方形孔による回折像の実際の写真．代表として 6 番目のスリットの写真である．

参考文献

[Ksd] 櫛田孝司．“光物理学”．共立出版．

ⁱ. 本当は実際のデータを Eq.(2.20) で fit したかったが³上手くやる方法が分からなかった．