場の理論ゼミ

Toshiya Tanaka

November 7, 2022

1 Introduction

- B4 の後期は [PS95] を研究室のゼミで読むことになったので，学びを記録しようと思います．
- 教科書中の式は PS. (number) のように記します．
- 教科書の公式ページはこちらです．

2 The Klien–Gordon Field

- p.14 で，$E=\sqrt{p^2+m^2}$ の方で計算した propagator

$$U(t)=\frac{1}{2\pi^2|\vec{x}-\vec{x}_0|}\int_0^\infty \mathrm{d}p\,\sin(p|\vec{x}-\vec{x}_0|)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\sqrt{p^2+m^2}} \tag{2.1}$$

  を直接評価する方法は，本でも引用されているように，[GR80, p.491][i] を見れば良い．

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\beta\sqrt{\gamma^2+x^2}}\sin\beta x\,\mathrm{d}x=\frac{b\beta\gamma^2}{\beta^2+b^2}K_2(\gamma\sqrt{\beta^2+b^2}) \tag{2.2}$$

  という式があり，この収束する積分の指数の肩を虚数倍ひねる，いわゆる解析接続をしていると解釈できる．元の積分は p が無限で発散し，虚数の指数関数は振動するので，被積分関数を見ると発散してしまうことがわかる．[ii]
- PS. (2.31) で $\delta(0)$ の無限大をむしすることについて，
  - GR を考えるときは無視できない．
  - SUSY を入れると出ない．
- PS. (2.33) の計算は奇関数が対称区間の積分で消えることを考える．素直に代入して，

$$\vec{P}=-\int \mathrm{d}^3x\,\pi(\vec{x})\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \tag{2.3}$$

$$=-\int \mathrm{d}^3x\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3}\left(\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega_p}{2}}\right)(a_p-a_{-p}^\dagger)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}}(\mathrm{i}\vec{p}')\frac{1}{\sqrt{2\omega_{p'}}}(a_{p'}+a_{-p'}^\dagger)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}}\right) \tag{2.4}$$

  となり，

$$\int\frac{\mathrm{d}^3x}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}}=\delta^{(3)}(\vec{p}+\vec{p}') \tag{2.5}$$

  を使うと，

$$\vec{P}=-\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}(-\vec{p})\frac{1}{2}(a_p-a_{-p}^\dagger)(a_{-p}+a_p^\dagger) \tag{2.6}$$

  となる．今，$(a_pa_{-p}-a_{-p}^\dagger a_{-p}+a_pa_p^\dagger+a_{-p}a_p^\dagger)$ となるが，p と $-p$ が交互に入っているものは奇関数になり，消える．

$$\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\vec{p}(a_pa_{-p}+a_{-p}^\dagger a_p)=0. \tag{2.7}$$

  すると，添字の運動量は，符号が一致したものしか残らず，全空間の積分なので符号を変えて，全て $+p$ で計算する

[i] この本はネット上でも見れるが，1200 ページくらいあり，とても重いので注意．
[ii] この一連の議論は d 氏に教えていただいた．

テクニックが使える．これより，

$$\vec{P} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\vec{p}\frac{1}{2}\left(a_p a_p^\dagger - a_{-p}^\dagger a_{-p}\right) \tag{2.8}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\vec{p}\left(a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2}\left[a_p, a_p^\dagger\right]\right) \tag{2.9}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\vec{p}a_p^\dagger a_p \tag{2.10}$$

となる．最後の $\left[a_p, a_p^\dagger\right]) = \delta(0)$ は偶関数と思うと消える．

- PS. (2.40) は三次元空間の $\mathrm{d}^3p/(2E_p)$ で measure を入れたものだが，$\mathbb{R}^{1,3}$ に埋め込むと $p^0 > 0$ の方の双曲超平面上の積分と思える．
- PS. (2.41), PS. (2.42) から，$\phi(x)\left|0\right>_{\mathrm{QFT}} \sim \left|\vec{x}\right>_{\mathrm{QM}}$，$\left<0\middle|\phi(x)\middle|p\right>_{\mathrm{QFT}} \sim \left<x\middle|p\right>_{\mathrm{QM}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}$ と対応がつく．
- section 2.4 では今まで，時間に依存しない Schödinger 描像でやっていたものを，Heisenberg 描像に移す．やりかたは，QM と同じように $\mathcal{O}_{\text{Heisenberg}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathcal{O}_{\text{Schrödinger}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$ とする．
- 生成消滅演算子の Heisenberg 描像は $\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}Ht}{n!}$ と $H^n a_p = a_p(H - E_p)$ など[iii.] を用いて，$a_p\mathrm{e}^{-iE_pt}$ などになり，場の演算子も綺麗にまとまる．
- PS. (2.51) の最後の評価は，鞍点ではないが，振動の遅いところが積分に最も寄与すると思うと，$E = m$ の値を採用すると考える．
- branch cut をまわる積分 PS. (2.52) の計算の仕方は physics SE. 285126 の回答がわかりやすい．まず，複素関数で平方根をナイーブに考えてしまうと，$\sqrt{\mathrm{i}}$ などと書いたときに，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ でも $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}$ でも二乗したら i になるので，$\mathrm{i} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}, \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/4}$ となってしまい写像としてよくない．このようなときに $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/2} \mapsto \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/4}$ と考える．一般に，複素数の変革 θ が $\theta \in [0, 2\pi)$ と $\theta \in [2\pi, 4\pi)$ で区別し，複素平面二枚を定義域と思うという手法を考える．この拡張した定義域を Riemann 面という．
  このとき，$\theta\colon 2\pi - \epsilon \to 2\pi + \epsilon$ は連続的につながっていて，この二枚をつないでくっつけるところを branch cut という．
  PS. (2.52) の積分は，実軸上の積分路を連続変形することにより，branch cut に沿う積分に変換するという方針で行う．このとき注意すべきことは，積分路は常に一枚目にあり，branch cut の両辺では定義域の偏角が 2π ずれており，したがって．符号が違う値が出てくることである．
  具体的に積分は次のようにして行う．まず，球座標に変数変換して，積分する．

$$D(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}k \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, k^2 \sin\theta \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}\cos\theta}}{(2\pi^3)2\sqrt{k^2+m^2}} \tag{2.11}$$
$$= \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}k\, \frac{k}{\sqrt{k^2+m^2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right) \tag{2.12}$$
$$= \frac{-\mathrm{i}}{8\pi^2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k\, \frac{k}{x\sqrt{k^2+m^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{2.13}$$
$$= \frac{-1}{8\pi^2 x}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{k^2+m^2}}. \tag{2.14}$$

これより，積分

$$I := \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{k^2+m^2}} \tag{2.15}$$

を計算すればよい．
被積分関数の pole は $k = \pm\mathrm{i}m$ にあり，$\sqrt{k^2+m^2} = \sqrt{k+\mathrm{i}m}\sqrt{k-\mathrm{i}m}$ なので，branch cut は $(-\infty, -\mathrm{i}m]$, $[\mathrm{i}m, \infty)$ に取れば良い．
ここで，積分路を Cauchy の積分定理を用いて，次のように変形する．

$$I = \int_{\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}m} \mathrm{d}k\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{-\sqrt{k^2+m^2}} + \int_{\mathrm{i}m}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}k\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{k^2+m^2}} = 2\int_{\mathrm{i}m}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}k\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{k^2+m^2}} \tag{2.16}$$

となる．これにより，$k = \mathrm{i}(y+m)$ と変数変換すれば

$$I = 2\int_0^\infty \mathrm{d}y\, \frac{\mathrm{e}^{-(m+y)x}}{\sqrt{(y+m)^2 - m^2}} \tag{2.17}$$

[iii.] 生成消滅のこのような関係式は，片方について調べると，もう片方はエルミート共役を取れば直ちに成り立つことを確認できる．

となる．さらに，$y+m=u$，$u=\cosh\eta$ と変数変換することで，

$$I = 2\int_1^\infty \mathrm{d}u \, \frac{\mathrm{e}^{-mux}}{\sqrt{u^2-1}} \tag{2.18}$$
$$= 2\int_0^\infty \mathrm{d}\eta \, \mathrm{e}^{-mx\cosh\eta} \tag{2.19}$$

となる．propagator に戻ると，

$$D(x) = \frac{-1}{4\pi^2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \mathrm{d}\eta \, \mathrm{e}^{-mx\cosh\eta} \tag{2.20}$$
$$= \frac{-1}{4\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\eta \, (-m\cosh\eta)\mathrm{e}^{-mx\cosh\eta} \tag{2.21}$$

となり，$\sinh\eta = s$ とおくことで，

$$D(x) = \frac{m}{4\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}s \, \mathrm{e}^{-mx\sqrt{1+s^2}} \tag{2.22}$$
$$\simeq \frac{m}{4\pi^2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{mx}}\mathrm{e}^{-mx} \tag{2.23}$$
$$= \frac{m^2}{4\pi^2}\sqrt{\frac{\pi}{2(mx)^3}}\mathrm{e}^{-mx} \tag{2.24}$$

となり，空間方向には e^{-mx} 程度しか伝播しないことがわかる．

- PS. (2.56) では step function[iv.] や delta function の微分を考える必要がある．これらは積分をされたときの振る舞いにより，定義するのがうまい方法なので，次のように考えることができる．

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \, f(x)\frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x} = [f(x)\theta(x)]_{-\infty}^\infty - \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \, \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\theta(x) \tag{2.25}$$
$$= f(\infty) - \int_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \tag{2.26}$$
$$= f(\infty) - f(\infty) + f(0) \tag{2.27}$$
$$= f(0) \tag{2.28}$$
$$= \int_{-\infty}^\infty f(x)\delta(x) \tag{2.29}$$

により，$\mathrm{d}\theta(x)/\mathrm{d}x = \delta(x)$，

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \, f(x)\frac{\mathrm{d}\delta(x)}{\mathrm{d}x} = [f(x)\delta(x)]_{-\infty}^\infty - \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\delta(x) \tag{2.30}$$
$$= \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \left(-\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\delta(x)\right) \tag{2.31}$$

により，$f(x)\,\mathrm{d}\delta(x)/\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x\;\delta(x)$ となる．

- PS. (2.56) の微分は x に関しておこなっている．また，$\delta(x^0-y^0)$ があるので，積分したら同時刻になると思い，CCR$[\phi(x),\pi(x)] = i\delta^{(4)}(x-y)$ を使っている．
- また，$(\partial^2+m^2)\langle 0|[\phi(x),\phi(y)]|0\rangle = 0$ は Klein–Gordon 方程式からゼロになる．
- propagator の pole の避け方は経路をいじって避けるというよりは，pole 自身を $i\epsilon$ でずらして，$\epsilon\to 0$ の極限をとると思うのが良い[v.]．
- p.33 の最後は $p^2=m^2$ はそのような粒子が実際に観測されるということだけで，一連の議論には使っていないと思う．

3 The Dirac Field

- PS. (3.2) の不変性の書き方が，分かりづらく感じる．Lorentz 変換 Λ により，位置は $x\mapsto x'=\Lambda x$ と変換し，場は $\phi(x)\mapsto\phi'(x')$ と変換するが，座標は動かさず，場を動かすという立場を取っていて，変換後も変換前と同じ x を使うと思うと，$x'=x$ と起き直して，もとの x は $\Lambda^{-1}x$ になるので，$\phi'(x)=\phi(\Lambda^{-1}x)$ という書き方をしている．

---

iv. 自分が知っている定義は，$\theta(0)=1/2$ とするものだが，$\theta(0)=0$ とする定義もあるらしいが，どこかで綻びはないのか．

v. 経路をずらした場合は，どのように避けても値は pole を上下にずらした場合の平均で同じ値になると思う．こちらの記事が参考になる．

- 微分に関しては，$y \coloneqq \Lambda^{-1}x$ と思うと，

$$\partial_\mu \phi'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\phi(y) \tag{3.1}$$
$$= \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\phi(y) \tag{3.2}$$
$$= \Lambda^\mu_\nu \partial_\mu \phi(\Lambda^{-1}x) \tag{3.3}$$

となり，右辺は x で微分したものに，$\Lambda^{-1}x$ を代入していると思える．例えば，$f(x) = x + x^2$ という関数があって，$f(ax) = (ax) + (ax)^2$ の微分は，$\mathrm{d}f/\mathrm{d}x = x + 2x$ に $\mathrm{d}(ax)/\mathrm{d}x = a$ をかけて，ax を代入したものであると思える．
- Maxwell 理論の Lagrangian$\mathcal{L}_{\mathrm{Maxwell}} = -(F_{\mu\nu})^2$ から Euler–Lagrange 方程式を計算して，Maxwell 方程式を導出する際は，場の微分で微分するときに注意が必要である．特に，二乗のまま計算するとややこしいので，$(F_{\mu\nu})^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ であることと，$\partial(\partial_\rho A_\sigma)/\partial(\partial_\mu A_\nu) = \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma$ や $\partial(\partial^\rho A^\sigma)/\partial(\partial_\mu A_\nu) = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}$ に注意して，計算する．
- PS. (3.16) が PS. (3.17) の交換関係を満たすことを確認するとき，$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ などを使うと簡単に計算できる．例えば，$[x^\mu\partial^\nu, x^\rho\partial^\sigma]$ の項は $[x^\mu\partial^\nu, x^\rho\partial^\sigma] = x^\mu x^\rho[\partial^\nu, \partial^\sigma] + x^\mu[\partial^\nu, x^\rho]\partial^\sigma + x^\rho[x^\mu, \partial^\sigma]\partial_\nu + [x^\mu, x^\rho]\partial^\sigma\partial^\nu$ とすると，微分同士，x 同士は可換なので消えて，$[\partial^\mu, x^\nu] = g^{\mu\nu}$ から，すぐにわかる．
- PS. (3.17) の定義は，他の本だと片方 $g_{\mu\nu}$ になっているが，これは足を片方上げた状態であるので consistent．これにより，α, β などは単なる行列の足ではなく，Lorentz ベクトルの足なので，PS. (3.20), PS. (3.21) を計算するときは，足の上下に応じて，空間成分ならマイナスをかけないといけない．
- PS. (3.17) の Lorentz 代数の交換関係は，複雑だが，$g^{\mu\nu}$ と $J^{\mu\nu}$ の和で作ること，一項目は $[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}]$ の添字の縮約が ν と ρ の真ん中で組まれて $g^{\nu\rho}$ になり，係数が i であることを覚えると，$J^{\mu\nu}$ が反対称であることから，残りの三項の符号と添字は決まる．
- PS. (3.23) で $S^{\mu\nu} \coloneqq \mathrm{i}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/4$ が Lorentz 代数を満たすことをチェックするには，上の Gamma 行列の反交換関係の形に持ち込み，Gamma の数を減らすしかない．交換関係から反交換関係を作る式 $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$, $[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$ を使う[vi.]．
- 4 次元時空の gamma 行列は 4×4 が最小であることの説明は [Sak14, pp.92-94] に書かれている[vii.]．
- PS. p41, 最後から二行目の faithful な表現とは，表現が単射であること．
- PS. (3.28) の Klein–Gordon 方程式が Lorentz 共変である説明で，「internal space の変換だから，微分はスルーする」という説明は，微分はスピノルの添字を持っていないので今考えているスピノルの変換には関係ないということで，通常のベクトルとしての変換はする．添字が潰れているので，結果的にキャンセルする．
- PS. p42 の二つ目の式，$[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = (J^{\rho\sigma})^\mu_\nu$ は微小 Lorentz 変換で gammma 行列がベクトルの変換をすることがわかるが，PS. (3.29) の有限 Lorentz 変換でも成り立つことは，そんなに自明でないと思う．[viii.]
BCH formula の親戚 $\mathrm{e}^A B \mathrm{e}^{-A} = B + [A, B] + [A, [A, B]]/2! + \cdots$ を使うと示すことができる．$[S^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] = -(J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\gamma^\mu$, $[\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}, [\omega_{\tau\upsilon}S^{\tau\upsilon}, \gamma^\mu]] = (-1)^2\omega_{\rho\sigma}\omega_{\tau\upsilon}(J^{\tau\upsilon})^\mu{}_\nu(J^{\rho\sigma})^\nu{}_\delta\gamma^\delta = ((-\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma})^2)^\mu{}_\nu\gamma\nu$ となることから，

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}/2}\gamma^\mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\tau\sigma}J^{\tau\sigma}/2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma})^n}{n!}\right)^\mu{}_\nu \gamma^\nu \tag{3.4}$$

となり，無限小の合成により有限の変換が成り立っていることがわかる．
- PS. p42 の三つ目の式は $(1 + \mathrm{i}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}/2)\gamma^\mu(1 - \mathrm{i}\omega_{\tau\upsilon}S^{\tau\upsilon}/2)$ のように縮約の文字を変えるべきだが，結局展開した $\mathrm{i}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\gamma^\mu - \mathrm{i}\gamma^\mu\omega_{\tau\upsilon}S^{\tau\upsilon}$ は $\omega_{\mu\nu}$ がただの数なのでくくって和をとると思うと同じ添字で良くなる．
- PS. (3.48) の行列の指数関数は，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

であることから，冪展開して偶数冪と奇数冪に分けると cosh と sinh の定義になることを使う．
- rapidity を用いた Lorentz 変換の表式で，rapidity が加法的[ix.]なことは合成して，双曲線関数の加法定理を使えばわかる．
- PS. (3.47) で $\sqrt{m}$ の factor をつけた理由が PS. (3.53) の後の文章に書かれているが，あまりしっくり来ない．現時点での理解は，factor がないと思うと，全ての式に $1/\sqrt{m}$ がつくので，特に PS. (3.53) を見ると $m \to 0$ で発散する．大きく boost して光速に近づけるということは，そこで $m \to 0$ をとって massless particle に一致してほしいので，ここを上手く残すために必要であるということだと思っている．
- PS. (3.49) で行列の平方根 $\sqrt{p^\mu\sigma_\mu p^\nu\bar{\sigma}_\nu}$ とまとめる必要があるが，これは $p^\mu\sigma_\mu = p^\mu\bar{\sigma}_\mu = m^2$ で可換なので，同時対角化出来るのでやって良い操作である．そうでない場合，出来ないと思う．
- PS. subsection 3.3 は途中で導出がたくさんあって全体像がわかりにくいので，やっていることを簡潔にまとめる．
    1. Dirac 方程式の解を正エネルギー (正振動数) に限定して，$\psi(x) = u(p)e^{-ipx}$ の形で探す．
    2. 一般の場合では難しいので，静止系でまず考え，それを boost して一般の運動量を持った状態に移す．
    3. normalization の条件を考える．

vi. 私は後者の式をしばらく符号違いで覚えていた．
vii. 2×2 がダメであることは，Pauli 行列に付け足すことができないとの説明があるが，それで十分なのか気になる．
viii. 教科書には有限変換の無限小の形になっている，と記述があるので，無限小からつくることは要求されていないとして，逃げるということもできる．
ix. 研究室で借りている本には，additive を添加物と訳していたが，文脈と合わなさすぎる．訳は加法的である．

4. 二成分 spinor の基底を書いて，直交を確かめる．
5. 考えていなかった負の振動数解を考える．
6. やりかたは全く同じだが，Dirac 方程式に代入したときに $-(\gamma^\mu p_\mu)v(p_0) = 0$ となるので，$v(p_0) = (\eta, -\eta)^\top$ と符号違いに取らなければいけないところだけが違う．
7. u と v も直交していることを確かめる．

- massless な場合の u と v の直交で $\vec{p}$ の符号を入れ替えることは，$p^\mu \sigma_\mu$ を $p^\mu \bar{\sigma}_\mu$ に変えることと同じである．

References

[GR80] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, New York, 1980.

[PS95] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.

[Sak14] M. Sakamoto, 場の量子論 : 不変性と自由場を中心にして, 量子力学選書 / 坂井典佑, 筒井泉監修, 裳華房, 2014.