1 Witten model

Definition 1.1 (Witten model)
Hamiltonian を 2 成分で

$$H = \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} \tag{1}$$

の形で与える量子力学系を Witten model や $\mathcal{N}=2$ 超対称量子力学 ($\mathcal{N}=2$ SUSYQM) という．量子力学なので，具体的に A は

$$A \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \mathrm{i}W'(x)\right) \tag{2}$$

と書け，$W(x)$ は superpotential[*1]という．また，

$$H_+ = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2m}(W'(x))^2 - \frac{\hbar}{2m}W''(x) \tag{3}$$

$$H_- = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2m}(W'(x))^2 + \frac{\hbar}{2m}W''(x) \tag{4}$$

である．これに伴い，波動関数は二成分考える必要があり，$\Psi(x) = (\psi_+(x), \psi_-(x))^\top$ と書く．

Witten model は定義した H に加え，

$$Q \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad (-1)^F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

を定めると，これらは最小超対称関係を満たす．

これから定義に従って計算すると，実 supercharge は

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}A^\dagger \\ -\mathrm{i}A & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

複素 supercharge は

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2}A & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}A\sigma_- \tag{7}$$

$$\mathcal{Q}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}A^\dagger\sigma_+ \tag{8}$$

となる．$\sigma_\pm$ は冪零行列なので，複素 supercharge の冪零性はここから自然にわかる．

エネルギーの縮退の構造に関して，今までどおり，H と $(-1)^F$ の同時固有状態を考える．$(-1)^F = \sigma_3$ の形から，固有状態は $(\psi_+(x), 0)^\top$, $(0, \psi_-(x))^\top$ であり，$H\Psi_E(x) = E\Psi_E(x)$ は

$$A^\dagger A\psi_{E,+}(x) = E\psi_{E,+}(x) \tag{9}$$

$$AA^\dagger\psi_{E,-}(x) = E\psi_{E,-}(x) \tag{10}$$

を解けば良いことになる．

Theorem 1.2
ここで，$E>0$ の場合

$$A\psi_{E,+}(x) = \sqrt{E}\psi_{E,-}(x), \tag{11}$$

$$A^\dagger\psi_{E,-}(x) = \sqrt{E}\psi_{E,+} \tag{12}$$

の超対称関係がある．

今，Eq. (11) の一つの解 $\psi_{E,+}(x)$ を取って，$A\psi_{E,+}(x)$ を考えると，$AA^\dagger(A\psi_{E,+})(x) = EA\psi_{E,+}(x)$ より Eq. (12) の解になる．規格化は $\|A\psi_{E,+}\|^2 = \langle\psi_{E,+}, A^\dagger A\psi_{E,+}\rangle = E$ なので $A\psi_{E,+}(x) = \sqrt{E}\psi_{E,-}(x)$ である．もうひとつも同様．$\square$

Witten model は二成分で考えているが，別個の 2 つの量子力学系 $H_+ = A^\dagger A$, $H_- = AA^\dagger$ を二つ取ってきたと思うと，その間に A と $A^\dagger$ を通して対応がついたことになる．H_+ と H_- を超対称パートナー Hamiltonian という．

[*1] $W'(x)$ のことを superpotential という流儀もあって，実際 Witten の原論文はそうだが，$W(x)$ のほうがふさわしいらしい．

Witten model のゼロエネルギー状態を調べると，Witten index に幾何的解釈をつけることができる．ゼロエネルギー状態は他とは異なり，一階の微分方程式の解になっている．$A\psi_{0,+}(x) = 0$, $A^\dagger\psi_{E,-}(x) = 0$ だが，微分を明らかに書くと，

$$\frac{-\mathrm{i}\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\hbar}W'(x)\right)\psi_{0,+}(x) = 0 \tag{13}$$

$$\frac{-\mathrm{i}\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{\hbar}W'(x)\right)\psi_{0,-}(x) = 0 \tag{14}$$

なので，簡単に解けて，

$$\psi_{0,+}(x) = N_{0,+}\mathrm{e}^{-W(x)/\hbar} \tag{15}$$

$$\psi_{0,-}(x) = N_{0,-}\mathrm{e}^{W(x)/\hbar} \tag{16}$$

となる．$N_{0,\pm}$ は適当な規格化定数である．ただし，量子力学としては，この解であり規格化可能なものだけが取りうる状態なので規格化可能性を調べる必要がある．

便宜上，superpotential が p 次多項式で $W(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_px^p$, $a_p \neq 0$ で与えられるとする．規格化可能性を考えると，ゼロエネルギー状態はあるとしたら superpotential の最高次が偶数次の場合で，符号が正なら $(-1)^F$ の固有値が $+1$ の方に存在し，負なら -1 の方に存在することになる．1．

Table 1　✓ の入っている場合が規格化可能．

	$W(\infty)$	$W(-\infty)$	$\psi_{0,+}$	$\psi_{0,-}$
$a_p > 0$, p: even	∞	∞	✓	×
$a_p > 0$, p: odd	∞	$-\infty$	×	×
$a_p < 0$, p: even	$-\infty$	∞	×	✓
$a_p < 0$, p: odd	$-\infty$	$-\infty$	×	×

Witten index は

$$\Delta_{\mathrm{W}} = \begin{cases} +1, & a_p > 0, p: \text{ even} \\ -1, & a_p < 0, p: \text{ even} \\ 0, & p: \text{ odd} \end{cases} \tag{17}$$

だが，これは superpotential の (二回微分が正の極値の数) − (負の極値の数) に等しいことが知られている[*2]．感覚的には，superpotential を連続変形しても漸近的振る舞いを変えない限り，この数が変わらないこととして Witten index が topological 不変量であることが理解できる．

現象論にも Witten index は重要で，現状，SUSY は現実世界で観測されていないので，low energy では SUSY は破れていないといけない．

ground state $|\mathrm{vac}\rangle$ として，$\mathcal{Q}|\mathrm{vac}\rangle = \mathcal{Q}^\dagger|\mathrm{vac}\rangle = 0$ のとき SUSY は破れていない，そうでないとき SUSY は破れているという．エネルギーの言葉ではこれは ground energy $E_0 = 0$ のとき SUSY が破れている，そうでないとき SUSY が破れていないことになる．

Witten index の言葉では，$\Delta_{\mathrm{W}} \neq 0$ なら，かならずゼロエネルギー状態があるので，SUSY は破れていない．SUSY が破れているならば，$\Delta_{\mathrm{W}} = 0$ である．(逆は成り立たない．)

SUSY が破れている現象論模型を作るためには，$\Delta_{\mathrm{W}} = 0$ を満たすように作らなければいけない．

[*2] Witten1981 に書いてあるらしいが，見つけられなかった．