

SUSYQM

Toshiya Tanaka

December 8, 2022

Contents

1	SUSY in QM	1
1.1	円周上の自由粒子	1
1.2	超対称性の基本性質	2
2	$\mathcal{N} = 2$ 超対称代数	3
2.1	一般性質	3
2.2	S^1 上自由粒子での具体例	4
3	Witten model	4
4	Exactly solvable model	7
4.1	超対称関係からの視点	7
4.2	形状不変性	9

1 SUSY in QM

Definition 1.1 (最小超対称関係)

3 種類の Hermitian operator H : Hamiltonian, Q : Supercharge, $(-1)^F$: ???があって

$$H = Q^2 \quad (1.1)$$

$$Q(-1)^F = -(-1)^F Q, \quad \text{or} \quad \{Q, (-1)^F\} = 0 \quad (1.2)$$

$$((-1)^F)^2 = 1 \quad (1.3)$$

を満たす関係を最小超対称関係という。

超対称性がある系には、必ずこの関係がある。

実は、簡単な量子力学系にもこの構造が隠れている。

1.1 円周上の自由粒子

半径 R の円周上の自由粒子を考える。定義域を $-\pi R \leq x \leq \pi R$ とし、周期的境界条件 $\psi(x + 2\pi R) = \psi(x)$ を入れる。Hamiltonian は $H = -1/(2m) d/dx$ であるので、Schrödinger 方程式を解くと、固有関数として、次の固有関数を得る。

$$\phi_{n,+}(x) = N_{n,+} \cos\left(\frac{n}{R}x\right) \quad (1.4)$$

$$\phi_{n,-}(x) = N_{n,-} \sin\left(\frac{n}{R}x\right). \quad (1.5)$$

これらの固有エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2mR^2} n^2 \quad (1.6)$$

で、各固有空間は 2 次元あることがわかる。Hamiltonian を“因数分解”して supercharge を得る。 $H = (-i/(\sqrt{2m}) d/dx)^2$ より、 $Q := -i/(\sqrt{2m}) d/dx = p/\sqrt{2m}$ とする。

また、parity \mathcal{P} は $(-1)^F$ の働きをする。

よって、この系には、最小超対称関係を満たす演算子たちが存在することがわかる。これらは Hermitian であることも確かめられるⁱ。

ⁱ. A が Hermitian とは、今定まっている内積 $\langle \psi, \phi \rangle = \int dx (\psi(x))^* \phi(x)$ に対して、 $\langle A\psi, \phi \rangle = \langle \psi, A\phi \rangle$ が成り立つことである。

今、周期的境界条件で考えたが、ひねった境界条件 $\psi(x + 2\pi R) = e^{i\theta} \psi(x)$ を入れると面白い^{ii.}。 θ の連続変形でスペクトラムの構造は連続的に変化する^{iii.}、 $\theta = n\pi$ のところでは SUSY の構造が現れるが、その他のところでは現れない。 実際計算すると、固有エネルギーと固有状態は

$$\psi_n = N_n e^{i(n+\theta/(2\pi))x/R} \quad (1.7)$$

$$E_n = \frac{1}{2mR^2} \left(n + \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \quad (1.8)$$

となる。

$\theta \neq n\pi$ で SUSY が壊れているのは、parity が上手くいっていないからである。境界条件を考えると、 $\psi(x + 2\pi R) = e^{i\theta} \psi(x)$ だが³、 $x' = -x - 2\pi R$ とおくと、 $\psi(x' + 2\pi R) = e^{-i\theta} \psi(x')$ となってしまう、 $\theta \neq n\pi$ では parity で境界条件が³不変でないで、同じ系の中で対応が作れない。

1.2 超対称性の基本性質

SUSY がある系は最小超対称関係

- $H = Q^2$
- $\{Q, (-1)^F\} = 0$
- $((-1)^F)^2 = 1$

が必ずある。

この関係から、 $[H, Q] = 0$ 、 $[H, (-1)^F]$ がなりたつので、 H と $(-1)^F$ の同時固有状態 $|E, \lambda\rangle$ をとることができる。
 $((-1)^F)^2 = 1$ なので、 $\lambda = \pm 1$ である。

以下の4つの性質が成り立つ。

Property 1

エネルギー固有値が非負。 $E \geq 0$ 。

次の式変形からわかる^{iv.}。

$$E = \langle E, \lambda | H | E, \lambda \rangle \quad (1.9)$$

$$= \langle E, \lambda | Q^2 | E, \lambda \rangle \quad (1.10)$$

$$= \|Q | E, \lambda \rangle\|^2 \quad (1.11)$$

$$\geq 0. \quad (1.12)$$

□

Property 2

正エネルギー状態は、 $(-1)^F$ の固有値が ± 1 の固有状態 $|E, \pm\rangle$ で対を成し、エネルギー固有値は縮退する。

まず、 $E > 0$ として、 $|E, +\rangle$ を考える。 $(-1)^F Q |E, +\rangle = -Q (-1)^F |E, +\rangle = -Q |E, +\rangle$ なので、 $Q |E, +\rangle \propto |E, -\rangle$ 。
 $|E, -\rangle$ についても同様にして、 $Q |E, -\rangle \propto |E, +\rangle$ である。

また、比例定数は

$$\|Q |E, +\rangle\|^2 = \langle E, + | Q^\dagger Q |E, +\rangle \quad (1.13)$$

$$= \langle E, + | H |E, +\rangle \quad (1.14)$$

$$= E \quad (1.15)$$

となるので^{v.}、

$$Q |E, \pm\rangle = \sqrt{E} |E, \mp\rangle \quad (1.16)$$

と決まる^{vi.}。

このとき、 $|E, \pm\rangle$ は Q を通じて対を成しており、supermultiplet を成すという。この状況を模式的に $|E, +\rangle \xleftrightarrow{Q} |E, -\rangle$ と書く。 □

Property 3

ゼロエネルギー状態^{vii.} は必ずしも縮退しない。ゼロエネルギー状態が存在するならば、 $Q |E = 0\rangle = 0$ を満たす。

ii. Aharanov-Bohm のように、磁場を使うと、実際に作ることができる。

iii. spectral flow という。

iv. Q が Hermitian であることは本質的である。

v. phase は実にとると

vi. Q は H を“因数分解”して作ったことを思い出すと、大きさは \sqrt{E} になると思える。

vii. SUSY の文脈でこのような状態を BPS state という。

Eq. (1.16) に $E = 0$ を代入すると直ちにわかる. $E \neq 0$ のときとは異なり, Q を通じた supermultiplet をなさない. この状況を $|E = 0, +\rangle \xrightarrow{Q} 0 \xleftarrow{Q} |E = 0, -\rangle$ と書く. \square

ゼロエネルギー状態が $Q|E = 0, \pm\rangle$ を満たすことは, ゼロエネルギー状態は 1 階の微分方程式の解であることを意味する.

Property 4

Witten index $\Delta_W := \mathcal{N}_{E=0}^+ - \mathcal{N}_{E=0}^-$ は topological invariant.

ここで, $\mathcal{N}_{E=0}^\pm$ は $(-1)^F$ の固有値が ± 1 の固有状態の数である.

topological invariant とは, 理論のパラメータの連続変形で不変な量という意味で用いる. S^1 上の自由粒子の例では m や R を大きくとると, $n \neq 0$ に置いても $E_n \rightarrow 0$ となるが, もともと non zero であるものは対で存在するので, ゼロエネルギー状態の数の差は変わらない. \square

2 $\mathcal{N} = 2$ 超対称代数

2.1 一般性質

Definition 2.1 (実 supercharge と $\mathcal{N} = 2$ ^{viii.} 超対称代数)

最小超対称関係を満たす三つのエルミート演算子 $H, Q, (-1)^F$ から, エルミート演算子^{ix.} $Q_1 := Q, Q_2 := -iQ(-1)^F$ を定める. H, Q_1, Q_2 は,

$$\{Q_i, Q_j\} = 2H\delta_{ij} \quad (2.1)$$

$$[H, Q_i] = 0 \quad (2.2)$$

の関係を満たす.

これは, 最小超対称関係と等価だが, $(-1)^F$ を加えて議論することが多い. $(-1)^F$ は余分な演算子なので, 束縛関係 $iQ_1Q_2 = H(-1)^F$ で結ばれる^{x.}.

Definition 2.2 (複素 supercharge と $\mathcal{N} = 2$ 超対称代数)

$\mathcal{Q} := (Q_1 + iQ_2)/\sqrt{2}$ を定める. このとき, \mathcal{Q}, H は

$$\{\mathcal{Q}^\dagger, \mathcal{Q}\} = 2H \quad (2.3)$$

$$\{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}\} = \{\mathcal{Q}^\dagger, \mathcal{Q}^\dagger\} = 0 \quad (2.4)$$

$$[H, \mathcal{Q}] = [H, \mathcal{Q}^\dagger] = 0 \quad (2.5)$$

の関係を満たす.

Eq. (2.4) は $\mathcal{Q}^2 = (\mathcal{Q}^\dagger)^2 = 0$ と書け, 2 乗してゼロになるこの性質を nilpotency という^{xi.}.

複素の場合も, $\mathcal{N} = 2$ 超対称代数に $(-1)^F$ を加え考えることが便利である. この場合の束縛関係は $(\mathcal{Q}^\dagger \mathcal{Q} - \mathcal{Q} \mathcal{Q}^\dagger)/2 = H(-1)^F$ である. 左辺を実 supercharge で計算すれば, iQ_1Q_2 になり, 実の場合の束縛を使うと導ける.

複素 supercharge で基本性質を見る.

Property 1

$E \geq 0$.

Property 2

$E > 0$ なら次の supermultiplet の構造がある.

$$0 \xleftarrow{\mathcal{Q}} |E, -\rangle \xrightarrow{\mathcal{Q}^\dagger} |E, +\rangle \xrightarrow{\mathcal{Q}^\dagger} 0 \quad (2.6)$$

Property 3

$E = 0$ なら, $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ で消える.

$$0 \xleftarrow{\mathcal{Q}} |E = 0\rangle \xrightarrow{\mathcal{Q}^\dagger} 0 \quad (2.7)$$

Property 4

Witten index がトポロジカルな量.

Witten index については全く同じ.

^{viii.} \mathcal{N} は supercharge の数である. ところが, 実 (エルミート) で数える流儀と複素で数える流儀があり, 文献を比較する際は確認する必要がある. 今は実で数えている.

^{ix.} エルミートという意味で, 実 supercharge という.

^{x.} $(-1)^F$ という余分な演算子が現れたとき, H をかければ最小限の Q_1, Q_2 のみで書けるということ.

^{xi.} nilpotency は場の理論の Grassmann 数の対称性である BRS 対称性による保存量である BRS charge, de Rham cohomology などでも重要な働きをするそう. 実際 SUSYQM で微分幾何をやるという話もある.

2.2 S^1 上自由粒子での具体例

以下では、上で見た $\mathcal{N} = 2$ 超対称代数を、具体的に S^1 上の自由粒子の例について見る。

前回、この系は $H := -1/(2m) d^2/dx^2$, $Q := -i/(2m) d/dx$, $(-1)^F := \mathcal{P}$ が最小超対称関係を満たすことを見たが、もう少し具体的に見る。

この系では、周期的境界条件から、エネルギーは $E_n = n^2/(2mR^2)$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で対応する固有状態は二つあり、

$$\psi_{n,+}(x) = N_{n,+} \cos(nx/R) \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (2.8)$$

$$\psi_{n,-}(x) = N_{n,-} \sin(nx/R) \quad n \in \mathbb{Z}_{> 0} \quad (2.9)$$

であるが、これは、 Q が一階微分演算子であり、 \sin と \cos が入れ替わることを考えると、 Q を通して移り合う。

また、規格化定数の phase を $N_{n,-} = iN_{n,+} =: iN_n$ ととると、

$$Q\psi_{n,+} = \sqrt{n^2/(2mR^2)} iN_n \sin(nx/R) \quad (2.10)$$

$$= \sqrt{E_n} \psi_{n,-} \quad (2.11)$$

と規格化定数も含めて、一般の結果が再現できる。

次に、複素 supercharge を用いて考える。以下では、具体的な微分などは考えず、 H と Q と \mathcal{P} の代数的性質を用いて考察する。

今、 $\mathcal{P}_{\pm} := (1 \pm \mathcal{P})/2$ を定めると、複素 supercharge は $\mathcal{Q} = (Q + i(-iQ\mathcal{P}))/\sqrt{2} = \sqrt{2}Q/\mathcal{P}_+$, $\mathcal{Q}^\dagger = \sqrt{2}Q\mathcal{P}_-$ となる。

Theorem 2.3

\mathcal{P}_+ , \mathcal{P}_- はそれぞれ関数 $f(x)$ の偶関数成分、奇関数成分を取り出す演算子である。

$f(x) = (f(x) + f(-x))/2 + (f(x) - f(-x))/2$ と書き直したとき、第一項は偶関数であり、第二項は奇関数である。これらを偶関数成分、奇関数成分と呼ぶ。

$\mathcal{P}_{\pm}(f(x)) = (f(x) \pm f(-x))/2$ は実際に成り立つ。 □

Theorem 2.4

\mathcal{P}_{\pm} は射影演算子である。すなわち、次の性質を満たす。

- $(\mathcal{P}_{\pm})^2 = \mathcal{P}_{\pm}$
- $\mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_- = 1$
- $\mathcal{P}_+\mathcal{P}_- = 0$

これを用いて、Eq. (2.6) のスペクトラムは理解できる。

- $\psi_{n,+}$ は偶関数なので、 $\mathcal{Q}^\dagger \sim \mathcal{P}_-$ で消える。
- $\psi_{n,-}$ は奇関数なので、 $\mathcal{Q} \sim \mathcal{P}_+$ で消える。
- $\psi_{n,+}$ は偶関数なので、 $\mathcal{Q} \sim Q$ で奇関数に移る。
- $\psi_{n,-}$ は奇関数なので、 $\mathcal{Q}^\dagger \sim Q$ で偶関数に移る。

また、Eq. (2.7) のスペクトラムは次のように理解できる。

- ground state は定数関数なので、微分で消える。
- 偶関数でもあるので、 \mathcal{P}_- でも消える。

3 Witten model

Definition 3.1 (Witten model)

Hamiltonian を 2 成分で

$$H = \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

の形で与える量子力学系を Witten model や $\mathcal{N} = 2$ 超対称量子力学 ($\mathcal{N} = 2$ SUSYQM) という。量子力学なので、具体的に A は

$$A := \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(-i\hbar \frac{d^2}{dx^2} - iW'(x) \right) \quad (3.2)$$

と書け、 $W(x)$ は superpotential^{xii} という。また、

$$H_+ = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2m} (W'(x))^2 - \frac{\hbar}{2m} W''(x) \quad (3.3)$$

$$H_- = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2m} (W'(x))^2 + \frac{\hbar}{2m} W''(x) \quad (3.4)$$

^{xii}. $W'(x)$ のことを superpotential という流儀もあって、実際 Witten の原論文はそうだが、 $W(x)$ のほうがふさわしいらしい。

である。これに伴い、波動関数は二成分考える必要があり、 $\Psi(x) = (\psi_+(x), \psi_-(x))^T$ と書く。

Witten model は定義した H に加え、

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad (-1)^F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

を定めると、これらは最小超対称関係を満たす。

これから定義に従って計算すると、実 supercharge は

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & iA^\dagger \\ -iA & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

複素 supercharge は

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2}A & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}A\sigma_- \quad (3.7)$$

$$\mathcal{Q}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}A^\dagger\sigma_+ \quad (3.8)$$

となる。 σ_\pm は冪零行列なので、複素 supercharge の冪零性はここから自然にわかる。

エネルギーの縮退の構造に関して、今までどおり、 H と $(-1)^F$ の同時固有状態を考える。 $(-1)^F = \sigma_3$ の形から、固有状態は $(\psi_+(x), 0)^T$, $(0, \psi_-(x))^T$ であり、 $H\Psi_E(x) = E\Psi_E(x)$ は

$$A^\dagger A\psi_{E,+}(x) = E\psi_{E,+}(x) \quad (3.9)$$

$$AA^\dagger\psi_{E,-}(x) = E\psi_{E,-}(x) \quad (3.10)$$

を解けば良いことになる。

Theorem 3.2

ここで、 $E > 0$ の場合

$$A\psi_{E,+}(x) = \sqrt{E}\psi_{E,-}(x), \quad (3.11)$$

$$A^\dagger\psi_{E,-}(x) = \sqrt{E}\psi_{E,+}(x) \quad (3.12)$$

の超対称関係がある。

今、Eq. (3.11) の一つの解 $\psi_{E,+}(x)$ を取って、 $A\psi_{E,+}(x)$ を考えると、 $AA^\dagger(A\psi_{E,+})(x) = EA\psi_{E,+}(x)$ より Eq. (3.12) の解になる。規格化は $\|A\psi_{E,+}\|^2 = \langle \psi_{E,+}, A^\dagger A\psi_{E,+} \rangle = E$ なので $A\psi_{E,+}(x) = \sqrt{E}\psi_{E,-}(x)$ である。もうひとつも同様。□

Witten model は二成分で考えているが、別個の 2 つの量子力学系 $H_+ = A^\dagger A$, $H_- = AA^\dagger$ を二つ取ってきたと思うと、その間に A と A^\dagger を通して対応がついたことになる。 H_+ と H_- を超対称パートナー Hamiltonian という。

Witten model のゼロエネルギー状態を調べると、Witten index に幾何的解釈をつけることができる。ゼロエネルギー状態は他とは異なり、一階の微分方程式の解になっている。 $A\psi_{0,+}(x) = 0$, $A^\dagger\psi_{0,-}(x) = 0$ だが、微分を明らかに書くと、

$$\frac{-i\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{\hbar} W'(x) \right) \psi_{0,+}(x) = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{-i\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{d}{dx} - \frac{1}{\hbar} W'(x) \right) \psi_{0,-}(x) = 0 \quad (3.14)$$

なので、簡単に解けて、

$$\psi_{0,+}(x) = N_{0,+} e^{-W(x)/\hbar} \quad (3.15)$$

$$\psi_{0,-}(x) = N_{0,-} e^{W(x)/\hbar} \quad (3.16)$$

となる。 $N_{0,\pm}$ は適当な規格化定数である。ただし、量子力学としては、この解であり規格化可能なものだけが取りうる状態なので規格化可能性を調べる必要がある。

便宜上、superpotential が p 次多項式で $W(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_px^p$, $a_p \neq 0$ で与えられるとする。規格化可能性を考えると、ゼロエネルギー状態はあるとしたら superpotential の最高次が偶数次の場合で、符号が正なら $(-1)^F$ の固有値が $+1$ の方に存在し、負なら -1 の方に存在することになる。3.

Witten index は

$$\Delta_W = \begin{cases} +1, & a_p > 0, p: \text{even} \\ -1, & a_p < 0, p: \text{even} \\ 0, & p: \text{odd} \end{cases} \quad (3.17)$$

Table 1 ✓ の入っている場合が規格化可能.

	$W(\infty)$	$W(-\infty)$	$\psi_{0,+}$	$\psi_{0,-}$
$a_p > 0, p: \text{even}$	∞	∞	✓	×
$a_p > 0, p: \text{odd}$	∞	$-\infty$	×	×
$a_p < 0, p: \text{even}$	$-\infty$	∞	×	✓
$a_p < 0, p: \text{odd}$	$-\infty$	$-\infty$	×	×

だが、これは superpotential の (二回微分が正の極値の数) − (負の極値の数) に等しいことが知られている^{xiii}。感覚的には、superpotential を連続変形しても漸近的振る舞いを変えない限り、この数が変わらないこととして Witten index が topological 不変量であることが理解できる。

現象論にも Witten index は重要で、現状、SUSY は現実世界で観測されていないので、low energy では SUSY は破れていないといけない。

ground state $|\text{vac}\rangle$ として、 $Q|\text{vac}\rangle = Q^\dagger|\text{vac}\rangle = 0$ のとき SUSY は破れていない、そうでないとき SUSY は破れているという。エネルギーの言葉ではこれは ground energy $E_0 = 0$ のとき SUSY が破れている、そうでないとき SUSY が破れていないことになる。

Witten index の言葉では、 $\Delta_W \neq 0$ なら、かならずゼロエネルギー状態があるので、SUSY は破れていない。SUSY が破れているならば、 $\Delta_W = 0$ である。(逆は成り立たない。)

SUSY が破れている現象論模型を作るためには、 $\Delta_W = 0$ を満たすように作らなければいけない。

Example 3.3 (調和振動子)

$W(x) := m\omega x^2/2$ とすると

$$H_\pm = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \mp \frac{\hbar\omega}{2} \quad (3.18)$$

となり、調和振動子を $\pm\hbar\omega/2$ ずつずらしたかたちの Hamiltonian になって、これらが超対称パートナーになっている。

定義どおり、計算すると、

$$A = \frac{-im\omega}{\sqrt{2m}} \left(x - \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx} \right) = -i\sqrt{\hbar\omega} a \quad (3.19)$$

になっている。ここで a は通常の消滅演算子になっていて、 $a = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(x + \hbar/(m\omega) d/dx)$ である。

Hamiltonian は

$$H = \begin{pmatrix} \hbar\omega a^\dagger a & 0 \\ 0 & \hbar\omega a a^\dagger \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

である。エネルギー固有値は $E_{n,+} = n\hbar\omega$, ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), $E_{n,-} = n\hbar\omega$, ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$) であり、ゼロエネルギー状態は H_+ の方に存在する。ゼロエネルギー状態は $a\psi_{0,+}(x) = 0$ の解であり、 $\psi_{0,+}(x) = N_{0,+}e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$ である。

$H_- a\psi_{n,+}(x) = \hbar\omega(a a^{\text{dag}} a)\psi_{n,+}(x) = a H_+ \psi_{n,+}(x) = n\hbar\omega a\psi_{n,+}(x)$ であることから、 a は H_+ の固有状態を H_- の固有状態に移すことがわかる。 a^\dagger についても同様。

Example 3.4 (自由粒子と Rosen–Morse ポテンシャル)

$W'(x) = \hbar \tanh(x)$ と選ぶと

$$V_+(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(1 - \frac{2}{\cosh^2(x)} \right) \quad (3.21)$$

$$V_-(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \quad (3.22)$$

となる。 V_+ の方を Rosen–Morse ポテンシャルといい、 V_- は定数ずれた自由粒子である。

Example 3.5 (δ 関数ポテンシャル)

$W'(x) = \alpha\hbar(\Theta(x) - \Theta(-x))$ で与えると、 $V_\pm(x) = \hbar^2/(2m)(\alpha^2 \mp 2\alpha\delta(x))$ となる。

Example 3.6 (Coulomb もどき)

$W'(x) = me^2/(\hbar l) - \hbar l/x$, ($x > 0$) で与えると、

$$V_\pm(x) = -\frac{e^2}{x} + \frac{\hbar^2 l(l \mp 1)}{x^2} + \frac{me^2}{2\hbar^2 l^2} \quad (3.23)$$

となる^{xiv}。軌道角運動量が l のものと $l-1$ のものがパートナーになっていると思える。

Example 3.7 (Dirichlet and Neumann boundary condition)

$-1 \leq x \leq 1$ に制限した有限系を考える。 $V_\pm(x) = 0$ として、境界条件を $\psi'_{E,+}(-1) = \psi'_{E,+}(1) = 0$ と $\psi_{E,-}(-1) =$

^{xiii}. Witten1981 に書いてあるらしいが、見つけれなかった。

^{xiv}. 若干違うが、水素の軌道方向に似ている。

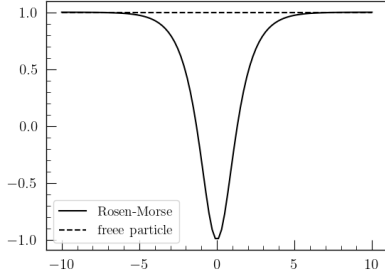


Fig. 1 自由粒子と Rosen-Morse ポテンシャルの比較.

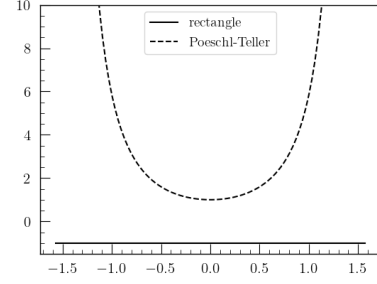


Fig. 2 井戸型ポテンシャルと Pöschl-Teller ポテンシャルの比較.

$\psi_{E,-}(1) = 0$ と入れた二つの系を考える．前者を Neumann, 後者を Dirichlet 境界条件という． $A = -i\hbar/\sqrt{2m} \, d/dx$ なので, これらは両者を移し合う．

このように, 境界条件を変えた系を移し合うケースもある^{xv}．

Example 3.8 (無限に深い井戸型ポテンシャル)

$W'(x) = \hbar \tan(x)$, $(-\pi/2 \leq x \leq \pi/2)$ とすると, $V_+(x) = -\hbar^2/(2m)$, $V_-(x) = \hbar^2/(2m)(2/\cos^2(x) - 1)$ となる．後者を Pöschl-Teller ポテンシャルという．

超対称パートナーは同じエネルギースペクトラムがあるが, ポテンシャルの形を見ただけでその対応を読み取るのは困難である．例として, 自由粒子と Rosen-Morse, 井戸型と Pöschl-Teller を図示してみた (Fig. 1, 2)．非自明な対応が SUSY を通して理解できることがわかる．

4 Exactly solvable model

4.1 超対称関係からの視点

Definition 4.1 (Exactly solvable)

Exactly solvable とは, 量子力学系のエネルギー固有値と固有関数がすべてわかることを指す．

Theorem 4.2

一次元量子力学系で ground state $\psi_0(x)$ と ground energy E_0 が与えられているとする．このとき,

$$W'(x) := -\hbar\psi_0(x)/\psi_0(x) \quad (4.1)$$

$$A := -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{\hbar} W'(x) \right) \quad (4.2)$$

$$A^\dagger := -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{d}{dx} - \frac{1}{\hbar} W'(x) \right) \quad (4.3)$$

とすると, Hamiltonian は $H = A^\dagger A + E_0$ となる．

また, $A\psi_0(x) = 0$ を満たす．

量子力学なので, Hamiltonian は $H = -\hbar^2/(2m) \, d^2/dx^2 + V(x)$ である．Ground state に関して, $H\psi_0(x) = E_0\psi_0(x)$ なので,

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)} + E_0 \quad (4.4)$$

である．部分積分をすると, $\hbar^2\psi_0''(x)/\psi_0(x) = -\hbar W''(x) + (W'(x))^2$ だから

$$V(x) = \frac{1}{2m} W'(x)^2 - \frac{\hbar}{2m} W''(x) + E_0 \quad (4.5)$$

となる．よって, Eq. (4.2) のように A を設定すれば, $H = A^\dagger A + E_0$ となる．

また, 定義から計算すれば, $A\psi_0(x) = 0$ となる． □

Theorem. 4.2 では $W'(x)$ を一つ与え, Eq. (4.5) の形の $V(x)$ を求めたが, この形のポテンシャルをつくる $W'(x)$ がわかれば, 同様の手法で解を構成できる．次は, ポテンシャル

$$V_{(1)}(x) = \frac{1}{2m} (W'(x))^2 - \frac{\hbar}{2m} W''(x) \quad (4.6)$$

^{xv} 境界条件の SUSY による対応は [arXiv:0812.4659](https://arxiv.org/abs/0812.4659) に詳しい．

が与えられたとき、これを $W'(x)$ について解いて、他の可解量子力学系を構成する方法を考える。この非線形な微分方程式は Riccati 型として知られており、 $\phi(x) := e^{-W(x)/\hbar}$ とおくことで、Schrödinger 型の微分方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + V_{(1)}(x)\phi(x) = \mathcal{E}_{(1)}\phi(x) \quad (4.7)$$

に線形化できる。ここで、 $\mathcal{E}_{(1)}$ は $\mathcal{E}_{(1)} < E_0$ を満たす^{xvi} ように取れるパラメータである^{xvii}。

Theorem 4.3

今、Eq. (4.7) の特解を $\phi_S(x)$ を用いて、一般解は

$$W'_{(1)}(x) = -\hbar \frac{\phi'_S(x)}{\phi_S(x)} - \frac{\hbar(\phi_S(x))^{-2}}{c_{(1)} + \int_{x_0}^x dz (\phi_S(z))^{-2}} \quad (4.8)$$

とかける。

$\phi(x) := \rho(x)\phi_S(x)$ とする。Eq. (4.7) に代入すると、 $\rho''(x)\phi_S(x) + 2\rho'(x)\phi'_S(x) = 0$ を満たすことがわかる。今、 $\rho'(x)\phi_S(x)$ でわって、

$$\frac{\rho''(x)}{\rho'(x)} + \frac{2\phi'_S(x)}{\phi_S(x)} = \frac{d}{dx} (\log \rho'(x)(\phi_S(x))^2) \quad (4.9)$$

なので、

$$\rho(x) = c_1 + \int_{x_0}^x dz c_0(\phi_S(z))^{-2} \quad (4.10)$$

となる。 c_0, c_1 は積分定数である。

定義をたどって、元に戻すと、

$$W'(x) = -\hbar \frac{\phi'_S(x)}{\phi_S(x)} - \frac{\hbar(\phi_S(x))^{-2}}{c_1/c_0 + \int_{x_0}^x dz (\phi_S(z))^{-2}} \quad (4.11)$$

となり、 $c_{(1)} = c_1/c_0$ と置くことで示せる。□

以上より求めた、 $W'_{(1)}(x)$ を用いて、 $A_{(1)}$ を定めることで Hamiltonian は $H_{(1)} = A_{(1)}^\dagger A_{(1)} + \mathcal{E}_{(1)}$ となり、エネルギースペクトラムが同じの超対称パートナーは $H_{(2)} = A_{(1)} A_{(1)}^\dagger + \mathcal{E}_{(1)}$ となる。 $H_{(1)}$ が exactly solvable なら $H_{(2)}$ についても完全にわかったことになる。また、 $H_{(2)}$ も量子力学の Hamiltonian なので、 $H_{(2)} = A_{(2)}^\dagger A_{(2)} + \mathcal{E}_{(1)} + \mathcal{E}_{(1)}$ とできる。ここから $H_{(3)}$ が作れるなど、この操作を繰り返したくさんの可解量子力学系の family を作ることができる。可解な量子力学系があったとき、ground state から $W'(x)$ を構成し、超対称パートナーとして可解系を見つけること、さらに一般化して、パラメータ \mathcal{E} として $H = A^\dagger A + \mathcal{E}$ に対する超対称パートナーを見つけ、可解な量子力学系のファミリーを作る方法を見た。

前者の構成法に対する具体例を見る。

Example 4.4

ポテンシャルを

$$V_{(1)}(x) = \begin{cases} -\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, & (0 < x < L) \\ \infty, & (x > 0, L < x) \end{cases} \quad (4.12)$$

で与える。Ground state は $\psi_{0,+}(x) = \sqrt{2/L} \sin(\pi x/L)$ であり、第 n 励起状態は $\psi_{n,+}(x) = \sqrt{2/L} \sin((n+1)\pi x/L)$ でエネルギーは $E_n = n(n+2)\pi^2 \hbar^2 / (2mL^2)$ である。

今、基底状態を用いて、 $W'_{(1)}(x) = -\hbar \psi'_0(x)/\psi_0(x) = -\pi \hbar / L \cot(\pi x/L)$ と定めると、ポテンシャルは

$$V_{(1)}(x) = -\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad (4.13)$$

$$V_{(2)}(x) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \left(\frac{2}{\sin^2(\pi x/L)} - 1 \right) \quad (4.14)$$

となり、これは Witten model のところで見えたものと同じである。

これら二つのポテンシャルからなる系のエネルギーは超対称性から同じスペクトラムになり、二つ目の系の固有状態は既知である $\psi_{n,(1)}(x)$ を用いて、 $\psi_{n,(2)}(x) = A\psi_{n,(1)}(x)$ で与えられる。ここで、 A は intertwiner で

$$A = \frac{-i\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{\hbar} W'(x) \right) = \frac{-i\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{d}{dx} - \frac{\pi}{L} \cot\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right) \quad (4.15)$$

である。具体的に幾つか計算し、 $H_{(2)}$ の固有状態になっていて、固有値は $H_{(1)}$ に等しいことが確認できる。

^{xvi} $A^\dagger A$ の形にする以上、固有値は必ず非負になる。最低エネルギーが E_0 にシフトしたので、この場合に非負という条件はこのようになる。

^{xvii} パラメータはこの条件を満たしても、superpotential の素性が悪くなる（発散したりする）こともあるようである。そうならない範囲でパラメータは自由に取れる。

4.2 形状不変性

SUSY では、片方の系が exactly solvable であるとき、各エネルギー固有値、固有状態にパートナーを対応付けて exactly solvable にすることが出来た。つまり、この手法は片方の系が exactly solvable でないと使えないが、形状不変性 (Shape invariance: SI) と組み合わせることで、zero energy state さえわかっているならば二つの系が exactly solvable であることが言える。

Definition 4.5 (Shape invariance)

系のパラメータ a を明示し、超対称パートナー Hamiltonian $H_{\pm}(a)$ があつたとする。これらに形状不変性があるとは

$$H_{-}(a) = H_{+}(a_1) + \varepsilon(a_1), \quad a_1 = f(a) \quad (4.16)$$

なる関係があることをいう。

言葉でいうと、パラメータを f で変換して、定数 $\varepsilon(a_1)$ の違いでパートナーに一致するときに、形状不変性があるという。

Example 4.6

定義域 $-\pi/2 < x < \pi/2$ で superpotential を $W(x; a) = \hbar a \log(\cos x)$ で与える。このとき、ポテンシャルは

$$V_{\pm}(x; a) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{a(a \mp 1)}{\cos^2 x} - a^2 \right) \quad (4.17)$$

で、これは、 $a \mapsto a+1$ とすると $V_{-}(x; a) = V_{+}(x; a+1) + (a+1)^2 - a^2$ となる。つまり、 $a_1 = a+1$, $\varepsilon(a_1) = a_1^2 - (a_1-1)^2$ の形状不変性がある。

この状況は、up to 定数シフトで $H_{-}(a)$ と $H_{+}(a+1)$ が同じ Hamiltonian で、エネルギー固有状態は $\psi_{n,+}(x; a) = \psi_{n,+}(x; a+1)$, ($n \geq 0$) であり、エネルギー固有値は $E_{n+1,-}(a) = E_{n,+}(a+1) + \varepsilon(a+1)$ である。 $H_{+}(a+1)$ の groundstate ($n=0$) と $H_{-}(a)$ の groundstate ($n=1$) が対応するので、label がずれている。

これで、 $H_{\pm}(a)$ の全てのエネルギー固有状態及びエネルギー固有値がわかることになる。まず、形状不変性から $\psi_{1,-}(x; a) = \psi_{0,+}(x; a+1) \propto \cos^{a+1}(x)$ となり、SUSY の intertwiner を用いて、 $\psi_{1,+}(x; a) = A^{\dagger}(a)\psi_{1,-}(x; a)$ となる。更に形状不変性を使うと $\psi_{2,-}(x; a) = \psi_{1,+}(x; a+1) = A^{\dagger}(a+1)\cos^{a+1}(x)$ と順次求めることができる。

energy に関しても、SUSY より $E_{n,+}(a) = E_{n,-}$ があるので、 $E_{1,-}(a) = E_{0,+}(a+1) + \hbar^2((a+1)^2 - a^2)/(2m) = \hbar^2((a+1)^2 - a^2)/(2m) = E_{1,+}(a)$ で、 $E_{2,+}(a) = E_{1,+}(a+1) + \hbar^2((a+1)^2 - a^2)/(2m) = \hbar^2((a+2)^2 - a^2)/(2m) = E_{2,+}(a)$ などと求められる。□

同様の手法で一般論を作れる。

Theorem 4.7

$H_{+}(a)$ のエネルギー固有値とエネルギー固有状態は $\psi_{0,+}(x; a)$ から次のようにして作れる。

$$\psi_{n,+}(x; a) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{E_k(a_{n-k})}} A^{\dagger}(a) A^{\dagger}(a_1) \cdots A^{\dagger}(a_{n-1}) \psi_{0,+}(x; a) \quad (4.18)$$

$$E_n(a) = \sum_{k=1}^n \varepsilon(a_k) \quad (4.19)$$

ここで、 $a_n := f(a_{n-1})$, $a_0 := a$ で $n \geq 0$ である。

Example 4.8 (調和振動子)

$$H_{\pm}(\omega) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \mp \frac{\hbar \omega}{2} \quad (4.20)$$

で、ゼロエネルギー解は $\psi_{0,+}(x; \omega) = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4} e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$ である。形状不変性は $H_{-}(\omega) = H_{+}(\omega) + \hbar\omega$ で、 $\varepsilon(\omega) = \hbar\omega$ である。

これより、エネルギー固有値は $E_n(\omega) = \sum_{k=1}^n \varepsilon(\omega) = n\hbar\omega$ で、固有状態は Hermite 多項式

$$H_n(q) = (-1)^n e^{q^2/2} \left(\frac{d}{dq} - q \right)^n e^{-q^2/2} \quad (4.21)$$

を使って、

$$\psi_{n,+}(x; \omega) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{E_k}} (A^{\dagger})^n \psi_{0,+}(x; \omega) \quad (4.22)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\hbar\omega)^n}} \left(\frac{-i\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{d}{dx} - \frac{m\omega}{\hbar} x \right) \right)^n \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar} \quad (4.23)$$

$$= \frac{i^n}{2^n \sqrt{n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) \quad (4.24)$$

となる.

□

Example 4.9

superpotential を $W(x; a, b) = -\hbar \log(\cos^a x + \sin^b x)$ で与える. ポテンシャルは

$$V_{\pm}(x; a, b) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{a(a \mp 1)}{\cos^2 x} + \frac{b(b \mp 1)}{\sin^2 x} - (a + b)^2 \right) \quad (4.25)$$

であり, 形状不変性は $a_1 = a + 1, b_1 = b + 1$ で $\varepsilon(a_1, b_1) = 2\hbar^2(a_1 + b_1 - 1)/m$ となる.

□

超対称性と形状不変性を用いた可解な量子力学系については, [arXiv:hep-th/9405029](https://arxiv.org/abs/hep-th/9405029) が有名である.