Example 1
調和振動子 $W(x) := m\omega x^2/2$ とすると

$$H_\pm = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \mp \frac{\hbar\omega}{2} \tag{1}$$

となり，調和振動子を $\pm\hbar\omega/2$ ずつずらしたかたちの Hamiltonian になって，これらが超対称パートナーになっている．

定義どおり，計算すると，

$$A = \frac{-\mathrm{i}m\omega}{\sqrt{2m}}\left(x - \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\right) = -\mathrm{i}\sqrt{\hbar\omega}\ a \tag{2}$$

になっている．ここで a は通常の消滅演算子になっていて，$a = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(x + \hbar/(m\omega)\ \mathrm{d}/\mathrm{d}x)$ である．

Hamiltonian は

$$H = \begin{pmatrix} \hbar\omega a^\dagger a & 0 \\ 0 & \hbar\omega a a^\dagger \end{pmatrix} \tag{3}$$

である．エネルギー固有値は $E_{n,+} = n\hbar\omega,\ (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}),\ E_{n,-} = n\hbar\omega,\ (n \in \mathbb{Z}_{>0})$ であり，ゼロエネルギー状態は H_+ の方に存在する．ゼロエネルギー状態は $a\psi_{0,+}(x) = 0$ の解であり，$\psi_{0,+}(x) = N_{0,+}\mathrm{e}^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$ である．

$H_- a\psi_{n,+}(x) = \hbar\omega(aa^{dag}a)\psi_{n,+}(x) = aH_+\psi_{n,+}(x) = n\hbar\omega a\psi_{n,+}(x)$ であることから，a は H_+ の固有状態を H_- の固有状態に移すことがわかる．$a^\dagger$ についても同様．

Example 2
自由粒子と Rosen–Morse ポテンシャル $W'(x) = \hbar\tanh(x)$ と選ぶと

$$V_+(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(1 - \frac{2}{\cosh^2(x)}\right) \tag{4}$$

$$V_-(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \tag{5}$$

となる．V_+ の方を Rosen–Morse ポテンシャルといい，V_- は定数ずれた自由粒子である．

Example 3
δ 関数ポテンシャル $W'(x) = \alpha\hbar(\Theta(x) - \Theta(-x))$ で与えると，$V_\pm(x) = \hbar^2/(2m)(\alpha^2 \mp 2\alpha\delta(x))$ となる．

Example 4
Coulomb もどき $W'(x) = me^2/(\hbar l) - \hbar l/x,\ (x > 0)$ で与えると，

$$V_\pm(x) = -\frac{e^2}{x} + \frac{\hbar^2 l(l \mp 1)}{x^2} + \frac{me^2}{2\hbar^2 l^2} \tag{6}$$

となる[i.]．軌道角運動量が l のものと $l-1$ のものがパートナーになっていると思える．

Example 5
Dirichlet and Neumann boundary condition $-1 \leq x \leq 1$ に制限した有限系を考える．$V_\pm(x) = 0$ として，境界条件を $\psi'_{E,+}(-1) = \psi'_{E,+}(1) = 0$ と $\psi_{E,-}(-1) = \psi_{E,-}(1) = 0$ と入れた二つの系を考える．前者を Neunamm, 後者を Dirichlet 境界条件という．$A = -\mathrm{i}\hbar/\sqrt{2m}\ \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ なので，これらは両者を移し合う．

このように，境界条件を変えた系を移し合うケースもある[ii.]．

Example 6
無限に深い井戸型ポテンシャル $W'(x) = \hbar\tan(x),\ (-\pi/2 \leq x \leq \pi/2)$ とすると，$V_+(x) = -\hbar^2/(2m),\ V_-(x) = \hbar^2/(2m)(2/\cos^2(x) - 1)$ となる．後者を Pöschl–Teller ポテンシャルという．

超対称パートナーは同じエネルギースペクトラムがあるが，ポテンシャルの形を見ただけでその対応を読み取るのは困難である．例として，自由粒子と Rosen–Morse，井戸型と Pöschl–Teller を図示してみた (Fig. 1, 2)．非自明な対応が SUSY を通して理解できることがわかる．

1 Exactly solvable model

Definition 7 (Exactly solvable)
Exactly solvable とは，量子力学系のエネルギー固有値と固有関数がすべてわかることを指す．

---

i. 若干違うが，水素の動径方向に似ている．
ii. 境界条件の SUSY による対応は arXiv:0812.4659 に詳しい．

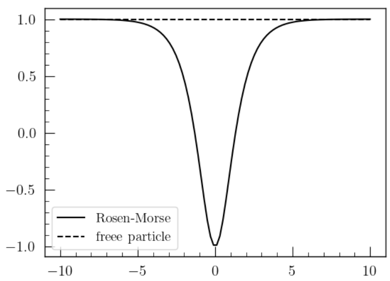

Fig. 1　自由粒子と Rosen–Morse ポテンシャルの比較.

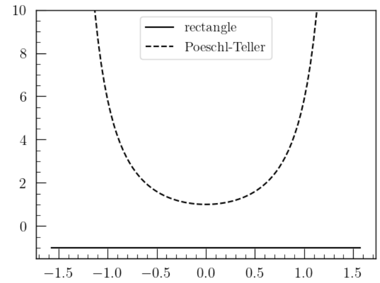

Fig. 2　井戸型ポテンシャルと Pöschl–Teller ポテンシャルの比較.

Theorem 8
一次元量子力学系で ground state $\psi_0(x)$ と ground energy E_0 が与えられているとする．このとき，

$$W'(x) \coloneqq -\hbar\psi_0(x)/\psi_0(x) \tag{7}$$

$$A \coloneqq -\frac{\mathrm{i}\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{\hbar}W'(x)\right) \tag{8}$$

$$A^\dagger = -\frac{\mathrm{i}\hbar}{\sqrt{2m}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{\hbar}W'(x)\right) \tag{9}$$

とすると，Hamiltonian は $H = A^\dagger A + E_0$ となる．
　また，$A\psi_0(x) = 0$ を満たす．

　量子力学なので，Hamiltonian は $H = -\hbar^2/(2m)\,\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 + V(x)$ である．Ground state に関して，$H\psi_0(x) = E_0\psi_0(x)$ なので，

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)} + E_0 \tag{10}$$

である．部分積分をすると，$\hbar^2\psi_0''(x)/\psi_0(x) = -\hbar W''(x) + (W'(x))^2$ だから

$$V(x) = \frac{1}{2m}W'(x) - \frac{\hbar}{2m}W''(x) + E_0 \tag{11}$$

となる．よって，Eq. (8) のように A を設定すれば，$H = A^\dagger A + E_0$ となる．
　また，定義から計算すれば，$A\psi_0(x) = 0$ となる．□
　Theorem. 8 では $W'(x)$ を一つ与え，Eq. (11) の形の $V(x)$ を求めたが，この形のポテンシャルをつくる $W'(x)$ がわかれば，同様の手法で解を構成できる．次は，ポテンシャル

$$V_{(1)}(x) = \frac{1}{2m}(W'(x))^2 - \frac{\hbar}{2m}W''(x) \tag{12}$$

が与えられたとき，これを $W'(x)$ について解いて，他の可解量子力学系を構成する方法を考える．この非線形な微分方程式は Riccati 型として知られており，$\phi(x) \coloneqq \mathrm{e}^{-W(x)/\hbar}$ とおくことで，Schrödinger 型の微分方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\phi(x)}{\mathrm{d}x^2} + V_{(1)}(x)\phi(x) = \mathcal{E}_{(1)}\phi(x) \tag{13}$$

に線形化できる．ここで，$\mathcal{E}_{(1)}$ は $\mathcal{E}_{(1)} < E_0$ を満たす[iii.] ように取れるパラメータである[iv.]．

Theorem 9
今，Eq. (13) の特解を $\phi_\mathrm{S}(x)$ を用いて，一般解は

$$W'_{(1)}(x) = -\hbar\frac{\phi'_\mathrm{S}(x)}{\phi_\mathrm{S}(x)} - \frac{\hbar(\phi_\mathrm{S}(x)^{-2})}{c_{(1)} + \displaystyle\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}z\,(\phi_\mathrm{S}(z))^{-2}} \tag{14}$$

とかける．

iii. $A^\dagger A$ の形にする以上，固有値は必ず非負になる．最低エネルギーが E_0 にシフトしたので，この場合に非負という条件はこのようになる．
iv. パラメータはこの条件を満たしても，super@otential の素性が悪くなる (発散したりする) こともあるようである．そうならない範囲でパラメータは自由に取れる．

$\phi(x) \coloneqq \rho(x)\phi_{\mathrm{S}}(x)$ とする．Eq. (13) に代入すると，$\rho''(x)\phi_{\mathrm{S}}(x) + 2\rho'(x)\phi'_{\mathrm{S}}(x) = 0$ を満たすことがわかる．今，$\rho'(x)\phi_{\mathrm{S}}(x)$ でわって，

$$\frac{\rho''(x)}{\rho'(x)} + \frac{2\phi'_{\mathrm{S}}(x)}{\phi_{\mathrm{S}}(x)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigl(\log \rho'(x)(\phi_{\mathrm{S}}(x))^2\bigr) \tag{15}$$

なので，

$$\rho(x) = c_1 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}z\, c_0(\phi_{\mathrm{S}}(x))^{-2} \tag{16}$$

となる．c_0, c_1 は積分定数である．

定義をたどって，元に戻すと，

$$W'(x) = -\hbar\frac{\phi'_{\mathrm{S}}(x)}{\phi_{\mathrm{S}}(x)} - \frac{\hbar(\phi_{\mathrm{S}}(x))^{-2}}{c_1/c_0 + \int_{x_0}^{x}\mathrm{d}z\,(\phi_{\mathrm{S}}(z))^{-2}} \tag{17}$$

となり，$c_{(1)} = c_1/c_0$ と置くことで示せる． □

以上より求まった，$W'_{(1)}(x)$ を用いて，$A_{(1)}$ を定めることで Hamiltonian は $H_{(1)} = A^\dagger_{(1)}A_{(1)} + \mathcal{E}_{(1)}$ となり，エネルギースペクトラムが同じの超対称パートナーは $H_{(2)} = A_{(1)}A^\dagger_{(1)} + \mathcal{E}_{(1)}$ となる．$H_{(1)}$ が exactly solvable なら $H_{(2)}$ についても完全にわかったことになる．また，$H_{(2)}$ も量子力学の Hamiltonian なので，$H_{(2)} = A^\dagger_{(2)}A_{(2)} + \mathcal{E}_{(1)} + \mathcal{E}_{(1)}$ とできる．ここから $H_{(3)}$ が作れるなど，この操作を繰り返したくさんの可解量子力学系の family を作ることができる．