場の理論ゼミ

Toshiya Tanaka

January 16, 2023

1 Introduction

- B4 の後期は [PS95] を研究室のゼミで読むことになったので，学びを記録しようと思います.
- 教科書中の式は PS. (number) のように記します.
- 教科書の公式ページはこちらです.

2 The Klien–Gordon Field

- p.14 で，$E = \sqrt{p^2 + m^2}$ の方で計算した propagator

$$U(t) = \frac{1}{2\pi^2 |\vec{x} - \vec{x}_0|} \int_0^\infty \mathrm{d}p \sin(p|\vec{x} - \vec{x}_0|) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\sqrt{p^2+m^2}} \tag{2.1}$$

を直接評価する方法は，本でも引用されているように，[GR80, p.491][i.] を見れば良い.

$$\int_0^\infty x \mathrm{e}^{-\beta\sqrt{\gamma^2+x^2}} \sin \beta x \, \mathrm{d}x = \frac{b\beta\gamma^2}{\beta^2 + b^2} K_2(\gamma\sqrt{\beta^2 + b^2}) \tag{2.2}$$

という式があり，この収束する積分の指数の肩を虚数倍ひねる，いわゆる解析接続をしていると解釈できる．元の積分は p が無限で発散し，虚数の指数関数は振動するので，被積分関数を見ると発散してしまうことがわかる.[ii.]
- PS. (2.31) で $\delta(0)$ の無限大をむしすることについて，
  - GR を考えるときは無視できない.
  - SUSY を入れると出ない.
- PS. (2.33) の計算は奇関数が対称区間の積分で消えることを考える．素直に代入して，

$$\vec{P} = -\int \mathrm{d}^3x \, \pi(\vec{x}) \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \tag{2.3}$$

$$= -\int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3} \left(\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \right) (a_p - a^\dagger_{-p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}} (\mathrm{i}\vec{p}') \frac{1}{\sqrt{2\omega_{p'}}} (a_{p'} + a^\dagger_{-p'}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \tag{2.4}$$

となり，

$$\int \frac{\mathrm{d}^3x}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}} = \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{p}') \tag{2.5}$$

を使うと，

$$\vec{P} = -\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} (-\vec{p}) \frac{1}{2} (a_p - a^\dagger_{-p})(a_{-p} + a^\dagger_p) \tag{2.6}$$

となる．今，$(a_p a_{-p} - a^\dagger_{-p} a_{-p} + a_p a^\dagger_p + a_{-p} a^\dagger_p)$ となるが，p と $-p$ が交互に入っているものは奇関数になり，消える.

$$\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \vec{p}(a_p a_{-p} + a^\dagger_{-p} a_p) = 0. \tag{2.7}$$

すると，添字の運動量は，符号が一致したものしか残らず，全空間の積分なので符号を変えて，全て $+p$ で計算する

i. この本はネット上でも見れるが，1200 ページくらいあり，とても重いので注意.
ii. この一連の議論は d 氏に教えていただいた.

テクニックが使える．これより，

$$\vec{P} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\vec{p}\frac{1}{2}\left(a_p a_p^\dagger - a_{-p}^\dagger a_{-p}\right) \tag{2.8}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\vec{p}\left(a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2}\left[a_p, a_p^\dagger\right]\right) \tag{2.9}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\vec{p}a_p^\dagger a_p \tag{2.10}$$

となる．最後の $\left[a_p, a_p^\dagger\right] = \delta(0)$ は偶関数と思うと消える．

- PS. (2.40) は三次元空間の $\mathrm{d}^3p/(2E_p)$ で measure を入れたものだが，$\mathbb{R}^{1,3}$ に埋め込むと $p^0 > 0$ の方の双曲超平面上の積分と思える．
- PS. (2.41), PS. (2.42) から，$\phi(x)\left|0\right\rangle_{\mathrm{QFT}} \sim \left|\vec{x}\right\rangle_{\mathrm{QM}}$，$\left\langle 0\middle|\phi(x)\middle|p\right\rangle_{\mathrm{QFT}} \sim \left\langle x\middle|p\right\rangle_{\mathrm{QM}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}$ と対応がつく．
- section 2.4 では今まで，時間に依存しない Schödinger 描像でやっていたものを，Heisenberg 描像に移す．やりかたは，QM と同じように $\mathcal{O}_{\mathrm{Heisenberg}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathcal{O}_{\mathrm{Schrödinger}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$ とする．
- 生成消滅演算子の Heisenberg 描像は $\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}Ht/n!$ と $H^n a_p = a_p(H - E_p)$ など[iii]を用いて，$a_p\mathrm{e}^{-iE_pt}$ などになり，場の演算子も綺麗にまとまる．
- PS. (2.51) の最後の評価は，鞍点ではないが，振動の遅いところが積分に最も寄与すると思うと，$E = m$ の値を採用すると考える．
- branch cut をまわる積分 PS. (2.52) の計算の仕方は physics SE. 285126 の回答がわかりやすい．まず，複素関数で平方根をナイーブに考えてしまうと，$\sqrt{\mathrm{i}}$ などと書いたときに，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ でも $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}$ でも二乗したら i になるので，$\mathrm{i} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}, \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/4}$ となってしまい写像としてよくない．このようなときに $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{5i\pi/2} \mapsto \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/4}$ と考える．一般に，複素数の変革 θ が $\theta \in [0, 2\pi)$ と $\theta \in [2\pi, 4\pi)$ で区別し，複素平面二枚を定義域と思うという手法を考える．この拡張した定義域を Riemann 面という．
このとき，$\theta\colon 2\pi - \epsilon \to 2\pi + \epsilon$ は連続的につながっていて，この二枚をつないでくっつけるところを branch cut という．
PS. (2.52) の積分は，実軸上の積分路を連続変形することにより，branch cut に沿う積分に変換するという方針で行う．このとき注意すべきことは，積分路は常に一枚目にあり，branch cut の両辺では定義域の偏角が 2π ずれており，したがって．符号が違う値が出てくることである．
具体的に積分は次のようにして行う．まず，球座標に変数変換して，積分する．

$$D(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}k \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, k^2 \sin\theta \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}\cos\theta}}{(2\pi^3)2\sqrt{k^2+m^2}} \tag{2.11}$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}k\, \frac{k}{\sqrt{k^2+m^2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right) \tag{2.12}$$

$$= \frac{-\mathrm{i}}{8\pi^2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k\, \frac{k}{x\sqrt{k^2+m^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{2.13}$$

$$= \frac{-1}{8\pi^2 x}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{k^2+m^2}}. \tag{2.14}$$

これより，積分

$$I := \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{k^2+m^2}} \tag{2.15}$$

を計算すればよい．
被積分関数の pole は $k = \pm\mathrm{i}m$ にあり，$\sqrt{k^2+m^2} = \sqrt{k+\mathrm{i}m}\sqrt{k-\mathrm{i}m}$ なので，branch cut は $(-\infty, -\mathrm{i}m]$, $[\mathrm{i}m, \infty)$ に取れば良い．
ここで，積分路を Cauchy の積分定理を用いて，次のように変形する．

$$I = \int_{\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}m} \mathrm{d}k\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{-\sqrt{k^2+m^2}} + \int_{\mathrm{i}m}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}k\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{k^2+m^2}} = 2\int_{\mathrm{i}m}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}k\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{k^2+m^2}} \tag{2.16}$$

となる．これにより，$k = \mathrm{i}(y+m)$ と変数変換すれば

$$I = 2\int_0^\infty \mathrm{d}y\, \frac{\mathrm{e}^{-(m+y)x}}{\sqrt{(y+m)^2 - m^2}} \tag{2.17}$$

[iii] 生成消滅のこのような関係式は，片方について調べると，もう片方はエルミート共役を取れば直ちに成り立つことを確認できる．

となる．さらに，$y+m=u$，$u=\cosh\eta$ と変数変換することで，

$$I = 2\int_1^\infty \mathrm{d}u\, \frac{\mathrm{e}^{-mux}}{\sqrt{u^2-1}} \tag{2.18}$$
$$= 2\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\, \mathrm{e}^{-mx\cosh\eta} \tag{2.19}$$

となる．propagator に戻ると，

$$D(x) = \frac{-1}{4\pi^2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\, \mathrm{e}^{-mx\cosh\eta} \tag{2.20}$$
$$= \frac{-1}{4\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\, (-m\cosh\eta)\mathrm{e}^{-mx\cosh\eta} \tag{2.21}$$

となり，$\sinh\eta = s$ とおくことで，

$$D(x) = \frac{m}{4\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-mx\sqrt{1+s^2}} \tag{2.22}$$
$$\simeq \frac{m}{4\pi^2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{mx}}\mathrm{e}^{-mx} \tag{2.23}$$
$$= \frac{m^2}{4\pi^2}\sqrt{\frac{\pi}{2(mx)^3}}\mathrm{e}^{-mx} \tag{2.24}$$

となる．

- PS. (2.56) では step function[iv.] や delta function の微分を考える必要がある．これらは積分をされたときの振る舞いにより，定義するのがうまい方法なので，次のように考えることができる．

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, f(x)\frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x} = [f(x)\theta(x)]_{-\infty}^\infty - \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\theta(x) \tag{2.25}$$
$$= f(\infty) - \int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \tag{2.26}$$
$$= f(\infty) - f(\infty) + f(0) \tag{2.27}$$
$$= f(0) \tag{2.28}$$
$$= \int_{-\infty}^\infty f(x)\delta(x) \tag{2.29}$$

により，$\mathrm{d}\theta(x)/\mathrm{d}x = \delta(x)$，

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, f(x)\frac{\mathrm{d}\delta(x)}{\mathrm{d}x} = [f(x)\delta(x)]_{-\infty}^\infty - \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\delta(x) \tag{2.30}$$
$$= \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\left(-\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\delta(x)\right) \tag{2.31}$$

により，$f(x)\,\mathrm{d}\delta(x)/\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x\,\delta(x)$ となる．

- PS. (2.56) の微分は x に関しておこなっている．また，$\delta(x^0-y^0)$ があるので，積分したら同時刻になると思い，$\mathrm{CCR}[\phi(x),\pi(x)] = i\delta^{(4)}(x-y)$ を使っている．
- また，$(\partial^2+m^2)\langle 0|[\phi(x),\phi(y)]|0\rangle = 0$ は Klein–Gordon 方程式からゼロになる．
- propagator の pole の避け方は経路をいじって避けるというよりは，pole 自身を $i\epsilon$ でずらして，$\epsilon\to 0$ の極限をとると思うのが良い[v.]．
- p.33 の最後は $p^2=m^2$ はそのような粒子が実際に観測されるということだけで，一連の議論には使っていないと思う．

3 The Dirac Field

- PS. (3.2) の不変性の書き方が，分かりづらく感じる．Lorentz 変換 Λ により，位置は $x\mapsto x'=\Lambda x$ と変換し，場は $\phi(x)\mapsto\phi'(x')$ と変換するが，座標は動かさず，場を動かすという立場を取っていて，変換後も変換前と同じ x を使うと思うと，$x'=x$ と起き直して，もとの x は $\Lambda^{-1}x$ になるので，$\phi'(x)=\phi(\Lambda^{-1}x)$ という書き方をしている．

[iv.] 自分が知っている定義は，$\theta(0)=1/2$ とするものだが，$\theta(0)=0$ とする定義もあるらしいが，どこかで綻びはないのか．

[v.] 経路をずらした場合は，どのように避けても値は pole を上下にずらした場合の平均で同じ値になると思う．こちらの記事が参考になる．

- 微分に関しては，$y \coloneqq \Lambda^{-1}x$ と思うと，

$$\partial_\mu \phi'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\phi(y) \tag{3.1}$$
$$= \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\phi(y) \tag{3.2}$$
$$= \Lambda^\mu_\nu \partial_\mu \phi(\Lambda^{-1}x) \tag{3.3}$$

  となり，右辺は x で微分したものに，$\Lambda^{-1}x$ を代入していると思える．例えば，$f(x) = x + x^2$ という関数があって，$f(ax) = (ax) + (ax)^2$ の微分は，$\mathrm{d}f/\mathrm{d}x = x + 2x$ に $\mathrm{d}(ax)/\mathrm{d}x = a$ をかけて，ax を代入したものであると思える．
- Maxwell 理論の Lagrangian $\mathcal{L}_{\mathrm{Maxwell}} = -(F_{\mu\nu})^2$ から Euler–Lagrange 方程式を計算して，Maxwell 方程式を導出する際は，場の微分で微分するときに注意が必要である．特に，二乗のまま計算するとややこしいので，$(F_{\mu\nu})^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ であることと，$\partial(\partial_\rho A_\sigma)/\partial(\partial_\mu A_\nu) = \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma$ や $\partial(\partial^\rho A^\sigma)/\partial(\partial_\mu A_\nu) = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}$ に注意して，計算する．
- PS. (3.16) が PS. (3.17) の交換関係を満たすことを確認するとき，$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ などを使うと簡単に計算できる．例えば，$[x^\mu\partial^\nu, x^\rho\partial^\sigma]$ の項は $[x^\mu\partial^\nu, x^\rho\partial^\sigma] = x^\mu x^\rho[\partial^\nu, \partial^\sigma] + x^\mu[\partial^\nu, x^\rho]\partial^\sigma + x^\rho[x^\mu, \partial^\sigma]\partial_\nu + [x^\mu, x^\rho]\partial^\sigma\partial^\nu$ とすると，微分同士，x 同士は可換なので消えて，$[\partial^\mu, x^\nu] = g^{\mu\nu}$ から，すぐにわかる．
- PS. (3.17) の定義は，他の本だと片方 $g_{\mu\nu}$ になっているが，これは足を片方上げた状態であるので consistent．これにより，α, β などは単なる行列の足ではなく，Lorentz ベクトルの足なので，PS. (3.20), PS. (3.21) を計算するときは，足の上下に応じて，空間成分ならマイナスをかけないといけない．
- PS. (3.17) の Lorentz 代数の交換関係は，複雑だが，$g^{\mu\nu}$ と $J^{\mu\nu}$ の和で作ること，一項目は $[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}]$ の添字の縮約が ν と ρ の真ん中で組まれて $g^{\nu\rho}$ になり，係数が i であることを覚えると，$J^{\mu\nu}$ が反対称であることから，残りの三項の符号と添字は決まる．
- PS. (3.23) で $S^{\mu\nu} \coloneqq \mathrm{i}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/4$ が Lorentz 代数を満たすことをチェックするには，上の Gamma 行列の反交換関係の形に持ち込み，Gamma の数を減らすしかない．交換関係から反交換関係を作る式 $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$, $[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$ を使う[vi.]．
- 4 次元時空の gamma 行列は 4×4 が最小であることの説明は [Sak14, pp.92-94] に書かれている[vii.]．
- PS. p41, 最後から二行目の faithful な表現とは，表現が単射であること．
- PS. (3.28) の Klein–Gordon 方程式が Lorentz 共変である説明で，「internal space の変換だから，微分はスルーする」という説明は，微分はスピノルの添字を持っていないので今考えているスピノルの変換には関係ないということで，通常のベクトルとしての変換はする．添字が潰れているので，結果的にキャンセルする．
- PS. p42 の二つ目の式，$[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = (J^{\rho\sigma})^\mu_\nu$ は微小 Lorentz 変換で gammma 行列がベクトルの変換をすることがわかるが，PS. (3.29) の有限 Lorentz 変換でも成り立つことは，そんなに自明でないと思う．[viii.]
  BCH formula の親戚 $\mathrm{e}^A B \mathrm{e}^{-A} = B + [A, B] + [A, [A, B]]/2! + \cdots$ を使うと示すことができる．$[S^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] = -(J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\gamma^\mu$, $[\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}, [\omega_{\tau\upsilon}S^{\tau\upsilon}, \gamma^\mu]] = (-1)^2\omega_{\rho\sigma}\omega_{\tau\upsilon}(J^{\tau\upsilon})^\mu{}_\nu(J^{\rho\sigma})^\nu{}_\delta\gamma^\delta = ((-\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma})^2)^\mu{}_\nu\gamma^\nu$ となることから，

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}/2}\gamma^\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\tau\sigma}S^{\tau\sigma}/2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma})^n}{n!}\right)^\mu{}_\nu \gamma^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu \tag{3.4}$$

  となり，無限小の合成により有限の変換が成り立っていることがわかる．
- PS. p42 の三つ目の式は $(1 + \mathrm{i}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}/2)\gamma^\mu(1 - \mathrm{i}\omega_{\tau\upsilon}S^{\tau\upsilon}/2)$ のように縮約の文字を変えるべきだが，結局展開した $\mathrm{i}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\gamma^\mu - \mathrm{i}\gamma^\mu\omega_{\tau\upsilon}S^{\tau\upsilon}$ は $\omega_{\mu\nu}$ がただの数なのでくくって和をとると思うと同じ添字で良くなる．
- PS. (3.48) の行列の指数関数は，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

  であることから，冪展開して偶数冪と奇数冪に分けると cosh と sinh の定義になることを使う．
- rapidity を用いた Lorentz 変換の表式で，rapidity が加法的[ix.]なことは合成して，双曲線関数の加法定理を使えばわかる．
- PS. (3.47) で $\sqrt{m}$ の factor をつけた理由が PS. (3.53) の後の文章に書かれているが，あまりしっくり来ない．現時点での理解は，factor がないと思うと，全ての式に $1/\sqrt{m}$ がつくので，特に PS. (3.53) を見ると $m \to 0$ で発散する．大きく boost して光速に近づけるということは，そこで $m \to 0$ をとって massless particle に一致してほしいので，ここを上手く残すために必要であるということだと思っている．
- PS. (3.49) で行列の平方根 $\sqrt{p^\mu\sigma_\mu p^\nu\bar{\sigma}_\nu}$ とまとめる必要があるが，これは $p^\mu\sigma_\mu = p^\mu\bar{\sigma}_\mu = m^2$ で可換なので，同時対角化出来るのでやって良い操作である．そうでない場合，出来ないと思う．
- PS. subsection 3.3 は途中で導出がたくさんあって全体像がわかりにくいので，やっていることを簡潔にまとめる．
  1. Dirac 方程式の解を正エネルギー (正振動数) に限定して，$\psi(x) = u(p)e^{-ipx}$ の形で探す．
  2. 一般の場合では難しいので，静止系でまず考え，それを boost して一般の運動量を持った状態に移す．
  3. normalization の条件を考える．

---

vi. 私は後者の式をしばらく符号違いで覚えていた．

vii. 2×2 がダメであることは，Pauli 行列に付け足すことができないとの説明があるが，それで十分なのか気になる．

viii. 教科書には有限変換の無限小の形になっている，と記述があるので，無限小からつくることは要求されていないとして，逃げるということもできる．

ix. 研究室で借りている本には，additive を添加物と訳していたが，文脈と合わなさすぎる．訳は加法的である．

4. 二成分 spinor の基底を書いて，直交を確かめる．
5. 考えていなかった負の振動数解 $\psi(x) = v(p)\mathrm{e}^{+ipx}$ を考える．
6. やりかたは全く同じだが，Dirac 方程式に代入したときに $-(\gamma^\mu p_\mu)v(p_0) = 0$ となるので，$v(p_0) = (\eta, -\eta)^\top$ と符号違いに取らなければいけないところだけが違う．
7. u と v も直交していることを確かめる．

- massless な場合の u と v の直交で $\vec{p}$ の符号を入れ替えることは，$p^\mu\sigma_\mu$ を $p^\mu\bar{\sigma}_\mu$ に変えることと同じである．
- γ^5 の定義 PS. (3.68) について，$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ の添字の上下を考慮する必要がある．
  - $\epsilon^{0123} = 1$ で $\epsilon_{0123} = -1$ であるので，0, 1, 2, 3 を μ, ν, ρ, σ に反対称で入れ替えるためには $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ をかける
  - 4 つの添字を全て下ろす際は，3 つ空間成分があるので $-$ が出る
  - $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -4!$

  以上に注意して，PS. (3.68) の最右辺が定義に等しいことは $-\mathrm{i}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma/4! = -\mathrm{i}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(-\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma})\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3/4! = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ により示せる．
- $\gamma^{\mu\nu\rho\sigma}$ は独立成分が $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ だけなので，これにより $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ と書くとわかりやすい[x]．
  同様に，$\gamma^{\mu\nu\rho}$ は独立成分が $\gamma^0\gamma^1\gamma^2$, $\gamma^0\gamma^1\gamma^3$, $\gamma^0\gamma^2\gamma^3$, $\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ なので，ϵ の添字の 0, 1, 2, 3 を標準の位置に戻して $\epsilon^{0\mu\nu\rho}\gamma^1\gamma^2\gamma^3 + \epsilon^{\mu1\rho\sigma}\gamma^0\gamma^2\gamma^3 + \epsilon^{\mu\nu2\sigma}\gamma^0\gamma^1\gamma^3 + \epsilon^{\mu\nu\rho3}\gamma^0\gamma^1\gamma^2$ と書くとよくわかる．
- p.61 の角運動量が真空にかかると 0 であることの理由として，一つは，真空の回転等に対する不変であることから，微小変換である角運動量でゼロになる ([Sak14, p.323])．
  もう一つは，具体的な角運動量の表式から出すには，正規順序 (normal ordering) というものが必要 SE.715072．大体，$aa^\dagger$ を $a^\dagger a$ に直すときに，$\delta(0)$ が出るが，これを無視しましょうということ[xi]．
- PS. (3.120) の中辺はすこし気持ち悪く思う．行列で割っているので．ちゃんとやるなら，$\mathrm{i}(\not{p}+m) = (p^2-m^2)\tilde{S}_\mathrm{R}(p)$ として，$\tilde{S}_\mathrm{R}(p) = \mathrm{i}(\not{p}+m)/(p^2-m^2)$ とするほうがよいか．
- Lorentz 群の 4 つの連結成分は，$\mathbb{R}^{1,3}$ での parity $P = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ と time reversal $T = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ を考えると，det と ${\Lambda_0}^0$ の符号がそれぞれ違う．回転と boost からなる Lorentz 変換はこれらを保つので，これらにより区別できる．
- p.65 の parity の phase の説明で物理量が二度やると元に戻る性質から $\eta_a^2 = \eta_b^2 = \pm 1$ とあるが，物理量は $\psi^\dagger\psi$ などの積分でなると思うと，phase は $\eta^*\eta = |\eta|^2$ の形で出てくると思うし，phase なので絶対値 1 なので 1 しかありえないということになる[xii]．この部分はとくに以後の議論にかかわらないし，重要なのは正粒子と反粒子で parity が違うという議論なので，それは後でするから問題がない．
- p.68 の Time reversal の議論は今まで z 方向の spin の固有状態で議論していたのを，一般の方向の spin の固有状態で議論する．極座標で方向ベクトル $\vec{n} = (\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)^\top$ を取って，一般方向の spin は

$$\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

  となるので，書いてある $\xi(\uparrow) = (\cos(\theta/2), \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin(\theta/2))^\top$, $\xi(\downarrow) = (-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin(\theta/2), \cos(\theta/2))^\top$ が $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$ の固有ベクトルであることを実際に確かめればよいのだが，次のように構成できる．
  一つの方法は，$\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ の固有値問題を直接解く．もう一つは，z 方向の固有ベクトル $\xi^1 = (1,0)^\top$, $\xi^2 = (0,1)^\top$ を回転させて $\vec{n}$ の方向に合わせる．例えば，ξ^1 に関してはまず y 軸周りに θ 回転させて，z 方向に ϕ 回転させると良い．ξ は spinor なので，

$$\begin{aligned}
\xi(\uparrow) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi\sigma^3/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\sigma^2/2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} && (3.7)\\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi/2} & 0 \\ 0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} && (3.8)\\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi/2}\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin(\theta/2) \end{pmatrix} && (3.9)
\end{aligned}$$

  とできる．
- pp.70,71 で charge conjugation で転置を取って場の順番を変えるとき，量子論なので $\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(x)\} = \delta^{(3)}(x)\delta_{ac}\gamma^0_{cb}$ の無限大の項が出るはずである．これはスカラーの場合はそこそこちゃんと言える [Kug89, p53]．スカラーの変換は

$$\begin{aligned}
C\bar{\psi}\psi C &= (-\mathrm{i}\gamma^0\gamma^2\psi)^\top(-\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2)^\top && (3.10)\\
&= -\gamma^0_{ab}\gamma^2_{bc}\psi_c\bar{\psi}_d\gamma^0_{de}\gamma^2_{ea} && (3.11)\\
&= \bar{\psi}_d\gamma^2_{de}\gamma^2_{ea}\gamma^0_{ab}\gamma^2_{bc}\psi_c - \delta^{(3)}(0)\delta_{cf}\gamma^0_{fd}\gamma^0_{de}\gamma^2_{ea}\gamma^0_{ab}\gamma^2_{bc} && (3.12)\\
&= \bar{\psi}\psi - \delta^{(3)}(0)\,\mathrm{Tr}\left(\gamma^0\gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^2\right) && (3.13)
\end{aligned}$$

  となる．ここで，最後のトレースはゼロだから，ゼロになると思う．擬スカラーも同様にできるが，ベクトルのときは少しテクニカルに，もともと場を反対称化しておくなどの処方があるらしい．

---

x. わかりにくいと言われたけど．

xi. ゼミで質問すると，軌道角運動量については運動量と同様に奇関数性からゼロになる．問題は spin だが，こちらはエネルギーと同様に，spin の基準が $\delta(0)$ に解釈するという．

xii. この Tweet で教えてもらった．

- p.71 の最後に free Dirac Lagrangian が C, P, T それぞれに関して不変であると書いてあるが，kinetic term が表を見ただけではすぐにはわからない．T に関しては，反線形であることを使えば，i が入っているので複素共役で余分なマイナスがでるので合う．
  C に関してそのままやろうとすると，部分積分して全微分項を落とせばマイナスが出て合うように思うが，ちゃんとやると転置で順序を入れ替えるときに，場と場の微分の入れ替えが発生するが，これが反交換するかがわからない[xiii.]．

4 Interacting Fields and Feynman Diagrams

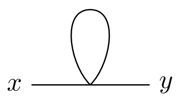
- section 4.1 は今後の方針が書かれている．今まで考えていたのは，相互作用のない自由場だったが，相互作用のある場が現実である．
  Lagrangian を書き下すルールの一つにくりこみ可能性があり，次元解析だけで，ある程度形が限定される．また，理論の対称性などを考慮するとさらに限定できる．そうして Lagrangian が書かれたとして，どのように物理量を計算するのか．厳密に解ける模型はほぼないので，自由場からの摂動で解く．その方法を見つけるのが，以後の話である．
- pp.94, 95 の最後で $p^0 \propto (1+\mathrm{i}\varepsilon)$ にとるのは，Feynman propagator の pole の避け方を思うと，多少納得できる．もとの T: $-\infty(1-\mathrm{i}\varepsilon) \to \infty(1-\mathrm{i}\varepsilon)$ で積分を行うことを考えると，振動項を無視して，

$$\int_{-\infty(1-\mathrm{i}\varepsilon)}^{\infty(1-\mathrm{i}\varepsilon)} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0 t} \sim -\mathrm{e}^{p^0\varepsilon\infty} \to -\infty \tag{4.1}$$

  が発散する．ここで，$p^0 \propto (1+\mathrm{i}\varepsilon)$ とすると，$(1-\mathrm{i}\varepsilon)(1+\mathrm{i}\varepsilon) = 1+\varepsilon^2 \in \mathbb{R}$ になり，発散しなくなると思う．
- p.96 の $(2\pi)^4\delta^{(4)}(0) = 2TV$ は

$$\delta^{(4)}(p) = \int \frac{\mathrm{d}^4 x}{(2\pi)^4} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \tag{4.2}$$

  の Fourier 変換を使うと，PS. (4.49) の形になり，t 積分の $2T$ と x 積分の V で無限大の $\delta^{(4)}(0)$ を有限の $2TV$ の $T, V \to \infty$ 極限と解釈する．
- Feynman rule で Symmetry factor で割るのは，同じものは一度だけ数えるためである．この思想は統計力学の等重率の原理に似ていて，全ての状態 (diagram) を同じ重みで数えるためである．積分する 4 つの $\phi(z)$ の入れ替えによる 4! や摂動の n 次の項で内点を入れ替える $n!$ を考慮したとして，diagram の対称性に関してダブリがでる場合がある．例えば，次の場合[xiv.]，z 同士で縮約をとる次の項はダブル上のルールだけだとダブルカウントしてしまう．



$$= -\mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4 z\, D(x-z)D(z-y)D(z_1-z_2) - \mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4 z\, D(x-z)D(z-y)D(z_2-z_1) \tag{4.3}$$

  わかりやすさのために，まず区別して z_1 と z_2 としたが，これらは同じもので，重み 1 で足さなければいけないので，Symmetry factor 2 で割る必要がある．
- 他にも，統計力学っぽいところがあって，例えば，PS. (4.52) の和と積を入れ替える一連の計算は分配関数を計算するときによく使うテクニックである．
- PS. (4.55) の一つ前の式の右辺

$$\langle\Omega|\mathcal{T}(\phi(x)\phi(y))|\Omega\rangle \lim_{T\to\infty(1-\mathrm{i}\varepsilon)} (|\langle 0|\Omega\rangle|^2 e^{-\mathrm{i}E_0 2T}) \tag{4.4}$$

  について，$\langle\Omega|\mathcal{T}(\phi(x)\phi(y))|\Omega\rangle$ は外点につながっている diagram の和で，$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_0 2T}$ は真空泡と議論があるが，忘れ去られている $|\langle 0|\Omega\rangle|^2$ は PS. (4.55) の比例に吸収させると思う．
- PS. (4.58) は今まで浸かっていた “disconnected” というワードは外点に disconnected の意味で使われていたが，このように二つに別れてしまう diagram のことも disconnected というので，注意が必要であることをいう．前者は以前の議論で，分母分子でキャンセルするので correlation function に寄与しないのに対し，後者は correlation function に寄与するという違いがある．
- PS. (4.64) は，不安定状態を考えているので，$p^0 \neq E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2+m^2}$ であることに注意して，

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2-m^2+\mathrm{i}m\Gamma} &= \frac{1}{(p^0)^2-E_{\vec{p}}^2+\mathrm{i}m\Gamma} && (4.5)\\ &\sim \frac{1}{2E_{\vec{p}}(p^0-E_{\vec{p}})+\mathrm{i}m\Gamma} && (4.6)\\ &= \frac{1}{2E_{\vec{p}}(p^0-E_{\vec{p}}+\mathrm{i}m\Gamma/(2E_{\vec{p}}))} && (4.7) \end{aligned}$$

xiii. いろいろ聞いたが，結局解決していない．現時点で納得している説明としては，Lagrangian なので場はそもそも古典変数であり，今まで議論していたのは量子場であった．Dirac 場の古典論は場を Grassmann 数として扱い，Grassmann 数の Grassmann 偶の空間座標による微分は Grassmann 奇なので，場と場の微分は反交換する．古典場に関しての C 変換を調べる必要はあるが，量子場と同様に $\mathrm{i}\gamma^0\gamma^2$ をかけることで C 変換を実現するので，上の議論が成り立つ．Dirac 場の古典論は [Kug89, Chap.1] に詳しい．

xiv. tikz-feynhand の練習も兼ねて書いてみた．

となる．Eq. (4.6) では p^0 が $E_{\vec{p}}$ に近いとしている．

- Peskin の in, out state は相互作用場で $T \to \pm\infty$ にしたと定義されているが，他の本 [Kug89], [Sak20] では $T \to \pm\infty$ で自由場と一致しているとして，定めているので，in, out 場の定義が違うので，注意が必要である．あとで，相互作用場での $|\vec{p}\rangle$ を自由場での $|\vec{p}\rangle_0$ で表す操作をするが，そちらが通常の in, out 場の定義である．
- PS. (4.68) の impact parameter による phase のずれだが，通常の平行移動とおもうと，指数の方はプラスで出るように思う．しかし，$k_{\mathcal{B}}$ の全空間で積分しているし，これは先の計算でデルタ関数として現れるだけなので，あまり議論に影響はしない．
- PS. (4.70) の S-matrix の定義は，二行目から見るのがわかりやすくて，同じ時間 $t=0$ で $|\vec{k}_{\mathcal{A}}\vec{k}_{\mathcal{B}}\rangle$ と $\langle\vec{p}_1\vec{p}_2\cdots|$ があって，$|\vec{k}_{\mathcal{A}}\vec{k}_{\mathcal{B}}\rangle$ を H で $-T$ 時間発展させたのが in state で $\langle\vec{p}_1\vec{p}_2\cdots|$ を T 時間発展させたのが out state である．
- S-matrix を考えれば良いのだが，常に存在する自明な項があるので，この本ではそれを除いて考える．常に出てくる項とは
  1. $\mathsf{S} = 1 + i\mathsf{T}$ [xv.] と分けたときの，1
  2. 運動量保存の $(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_f p_f)$[xvi.]

  である．これらを除いたものが invariant matrix element $\mathcal{M}$ である．
- PS. (4.74) は運動量状態 $\prod_f 1/\sqrt{2E_f}\,|\vec{p}_1\cdots\rangle$ への amplitude を求めている．なぜ，PS. (4.68) の $\phi_f(\vec{p}_f)$ などがないのかと悩んだが，これは波束を Fourier 変換したときの展開係数なので単なる一つのモードを考えている今は当然必要ない．また，$1/\sqrt{2E_f}$ は Lorentz 不変な normalization のための factor で，求めたいのは確率なので，二乗すると，必要な式を得る．
- PS. (4.76) の dσ を求める計算は，まず $\bar{k}_i$ の 6 つの積分をまず計算することで，bar のついている変数がデルタ関数で潰れることを確認する．

  まず，ここでは implicit にビーム方向に z 軸をとって，impact parameter 方向の二次元を $\perp$ と取っている．ここで，$\bar{k}_{\mathcal{B}}^{\perp}$ 積分で $\bar{k}_{\mathcal{B}}^{\perp} = k_{\mathcal{B}}^{\perp}$ を得て，これと，前のデルタ関数の結果を先取りすることで，$\bar{k}_{\mathcal{A}}^{\perp} = \sum_f p_f^{\perp} - k_{\mathcal{B}}^{\perp} = k_{\mathcal{A}}$ となる．

  z 成分は PS. (4.77) の計算が必要だが，ここで使っているデルタ関数の公式は

$$\delta(f(x)) = \sum_{\text{zeros}} \frac{1}{|f'(x)|}\delta(x - x_0) \tag{4.8}$$

  と全ての零点を拾わなければならないが，ここでは和がない．デルタ関数のなかにある $\bar{k}_{\mathcal{A}}^z$ についての関数の零点は，一般に 2 つあることが予期されるので正確にはこれではいけないはずである．

  これは次のように解釈できる．今の状況は運動量が狭い範囲にある波束を考えているので，その範囲は零点を一つしか拾わないように設定されていると思う．実際，次の計算でそのような近似を使うので，そこまでは和の状況で残しておき，そこでひとつだけ零点を拾うという議論のほうが筋は良い気がする．

  今の積分は $\delta(\bar{E}_{\mathcal{A}} + \bar{E}_{\mathcal{B}} - \sum_f E_f)$ で $\bar{k}_{\mathcal{A}}^z = \sum_f p_f^z - \bar{k}_{\mathcal{B}}^z$ となっているものを計算していて，

$$\sqrt{(k_{\mathcal{A}}^{\perp})^2 + (\bar{k}_{\mathcal{A}}^z)^2 + m_{\mathcal{A}}^2} + \sqrt{(k_{\mathcal{B}}^{\perp})^2 + (\sum_f p_f^z - \bar{k}_{\mathcal{A}}^z)^2 + m_{\mathcal{B}}^2} \tag{4.9}$$

$$= \sum_f E_f = E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}} \tag{4.10}$$

$$= \sqrt{(k_{\mathcal{A}}^{\perp})^2 + (k_{\mathcal{A}}^z)^2 + m_{\mathcal{A}}^2} + \sqrt{(k_{\mathcal{B}}^{\perp})^2 + (\sum_f p_f^z - k_{\mathcal{A}}^z)^2 + m_{\mathcal{B}}^2} \tag{4.11}$$

  であるので，$\bar{k}_{\mathcal{A}}^z = k_{\mathcal{A}^z}$ となり，$\bar{k}_{\mathcal{B}}^z = \sum_f p_f^z - k_{\mathcal{A}}^z = k_{\mathcal{B}}^z$ となる．これで，$\vec{\bar{k}}_i^z = \vec{k}_i^z$ が言えるので，エネルギーについても $\bar{E}_i = E_i$ となり，PS. (4.78) のように二乗でまとめることができる．
- $k/E = v$ の書き換えは，静止系から Lorentz 変換したことを考えると

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ k \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

  なので，$k/E = \beta = v$ となる．
- PS. (4.82) でもデルタ関数の公式を使って，$\delta(E_{\text{CM}} - E_1 - E_2) = (p_1/E_1 + p_1/E_2)^{-1}\delta(p - p_0)$ としているが，これも真面目に考えるとおかしくて，p_1 積分は $0 \to \infty$ で零点を計算をするとプラスマイナスの組ででてくるので複数拾うことはないにしろ，$E_{\text{CM}} < m_1 + m_2$ だと解を持たないのでゼロになる．零点をしらべるより，デルタ関数を変数変換して調べたほうがわかりやすくて [Sch14]，$x := \sqrt{p_1^2 + m_1^2} + \sqrt{p_1^2 + m_2^2} - E_{\text{CM}}$ すると，

$$\int_{m_1 + m_2 - E_{\text{CM}}}^{\infty} \delta(x) \tag{4.13}$$

  となるが，これは $m_1 + m_2 > E_{\text{CM}}$ だと 0 を拾わない．

  しかし，これは物理的に考えると total energy が mass より小さかったら，そのような散乱は起こらず興味のない結果になってしまうので，これが満たされているのは当然とも思える．

---

xv. S を scattering matrix，T を transfer matrix と言う．日本語ではそれぞれ散乱行列と転送行列であり，その S と T であるとゼミでボケようと思ったが，それまでに炎上したので自粛した．余裕のある人はこのネタを供養してください．

xvi. out state の添字に f を使っているのは，final state の f だと思う．

- PS. (4.102) の 1/2 の factor は loop の symmetry factor で割っている．
- Fermion の一粒子状態を $|\vec{p}, s\rangle$ と書いただけでは $(a^s_{\vec{p}})^\dagger |0\rangle$ の fermion か $(b^s_{\vec{p}}) |0\rangle$ の antifermion か区別がつかない．これで良いのかと聞いたところ，そもそも実用的にはまず diagram を直接書いて計算するので，この記法を使った縮約の式に戻ることは殆ど無いそうである[xvii.]．ここは，教育的配慮と認識して，上手く解釈するのが吉．
- PS. (4.115) で

$$\langle \vec{p}', \vec{k}' | \bar{\psi}_x \psi_x \phi_x \bar{\psi}_y \psi_y \phi_y | \vec{p}, \vec{k} \rangle \tag{4.14}$$

の縮約で，$\bar{\psi}$ が入れ替わっている箇所があるように思うが，p. 119 で説明があるように $\langle \vec{p}', \vec{k}' | = \langle 0 | a_{\vec{k}'} a_{\vec{p}'}$ と外れるので，この計算はあっている．また，spinor の順番が $\bar{u}u\bar{u}u$ になっているのは当然で，u は 4 成分あるので，この順番でないと 1 成分に縮約できない．
- PS. (4.130) の $\partial^2 A_\mu = 0$ のゲージのとり方を Lorentz gauge と書いてあるが，Lorenz である[xviii.]．
- Chapter 4.8 の力の働き方が引力か斥力かという話は，[Zee03] の一章にも経路積分形式で書かれている．
- PS. (4.132) は

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i} g_{\mu\nu}}{q^2 + \mathrm{i}\epsilon} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q(x-y)} = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} (\mathrm{i} g_{\mu\nu}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \int \frac{\mathrm{d}q^0}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q^0(x^0-y^0)}}{(q^0)^2 - |\vec{q}|^2 + \mathrm{i}\epsilon} \tag{4.15}$$

として，後ろの計算を留数積分でする．

$$I = \int \mathrm{d}z \, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx}}{z^2 - z_0^2 + \mathrm{i}\epsilon} \tag{4.16}$$

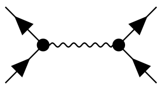
は $z = \pm\sqrt{z_0^2 - \mathrm{i}\epsilon}$ に simple pole があり，下半平面で積分路を閉じると収束するので，$z = \sqrt{z_0^2 - \mathrm{i}\epsilon} \sim |z_0|$ の方の pole を拾って，

$$I = -2\pi\mathrm{i} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx}}{2z} \tag{4.17}$$

なので教科書の結果を得る．
- PS. (4.133) の計算を縮約に戻ってやると次のようになる．

$$\mathrm{i}\mathcal{M}(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + k - p' - k') \tag{4.18}$$

$$= \tag{4.19}$$



$$= \langle 0 | a_{k'} a_{p'} \left(-\mathrm{i}e \int \mathrm{d}^4 x \right) \bar{\psi}_x \gamma^\mu \psi_x A_\mu \left(-\mathrm{i}e \int \mathrm{d}^4 y \right) \bar{\psi}_y \gamma^\nu \psi_y A_\nu a^\dagger_p a^\dagger_k |0\rangle \tag{4.20}$$

$$= (-\mathrm{i}e)^2 \int \mathrm{d}^4 x \int \mathrm{d}^4 y \, \langle 0 | a_{k'} a_{p'} \bar{\psi}_x (-1) \bar{\psi}_y \gamma^\mu A_\mu \gamma^\nu \psi_y A_\nu (-1) \psi_x a^\dagger_p a^\dagger_k |0\rangle \tag{4.21}$$

$$= (-\mathrm{i}e)^2 \int \mathrm{d}^4 x \int \mathrm{d}^4 y \int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x} \gamma^\mu u(p) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \frac{-\mathrm{i} g_{\mu\nu}}{q^2 + \mathrm{i}\epsilon} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q(x-y)} \bar{u}(k') \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'y} \gamma^\nu u(k) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \tag{4.22}$$

$$= (-\mathrm{i}e)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \frac{-\mathrm{i} g_{\mu\nu}}{q^2 + \mathrm{i}\epsilon} \bar{u}(k') \gamma^\nu u(k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + q - p') (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - q - k') \tag{4.23}$$

$$= (-\mathrm{i}e)^2 \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \frac{-\mathrm{i} g_{\mu\nu}}{(p' - p)^2} \bar{u}(k') \gamma^\nu u(k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + k - p' - k') \tag{4.24}$$

となり，常に出てくる外線の運動量保存を省いたものが PS. (4.133) である[xix.]．

5 Elementary Process of Quantum Electrodynamics

- $\mathrm{i}\mathcal{M} = (\mathrm{i}e^2/q^2)\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')$ だが，cross section を求める際は $|\mathcal{M}|^2$ が必要で，$(\bar{v}\gamma^\mu u)^*$ が必要であるが，これは bar の notation が優れているポイントで，$(\gamma^0)^\top = \gamma^0$, $(\gamma^i)^\top = -\gamma^i$ であるので，$(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = \bar{u}\gamma^\mu v$ である．
- p.132 で spin の向きを指定せず平均をとる操作をするが，これは始状態の e^+, e^- に対してであり，終状態の μ^+, μ^- については和をとるので，1/2 の factor は s, s' についての和に関してかかり，PS. (5.4) では全体で 1/4 の factor がかかる．
- PS. (5.4) での tr はスピノル添字に関しての trace であることに注意．μ などはベクトルの添字なので trace には関係しない．

xvii. ただし，symmetry factor を調べるときは diagram だけだと探し漏れがあるので，その場合は縮約の式に戻って調べるという使い方をするそう．
xviii. 日本語だと前者をローレンツ，後者をローレンスと表記することが多いと思う．
xix. もっと丁寧にやるべきところは，gamma 行列と spinor の spinor 添字をちゃんと書いて，行列の積の順序がこれで良いか確かめることである．

- $\mathrm{tr}\left((\not{p}-m_{\mathrm{e}})\gamma^\mu(\not{p}+m_{\mathrm{e}}\gamma^\nu)\right)=4\big((p')^\mu p^\nu+(p')^\nu p^\mu-g^{\mu\nu}(p\cdot p'+m_{\mathrm{e}}^2)\big)$ は $\not{p}=\gamma^\mu p_\mu$ に注意して，Gamma 行列に対しての Trace の公式を使えば導ける．
- PS. (5.6) の等式はあとで使う．一番最後の $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}=-2(\delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma-\delta^\mu{}_\sigma\delta^\nu{}_\rho)$ から示す．
  まず，これはすでに α,β に関して和を取られているので，μ,ν が α,β と一致すると完全反対称性からゼロになる．つまり，$\mu\ (\nu)$ は ρ か σ と一致しなければならない．また，μ と ν, ρ と σ は反対称なので，反対称に組まなければいけない．これらから $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\propto\delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma-\delta^\mu{}_\sigma\delta^\nu{}_\rho$ である．
  比例定数 c は μ, ν, ρ, σ に適当な文字を入れて決定すればよい．$(\mu,\nu)=(\rho,\sigma)=(2,3)$ として，$\epsilon^{0123}\epsilon_{0123}+\epsilon^{1023}\epsilon_{1023}=-2$[xx.]．一方，$c(\delta^2{}_2\delta^3_3-\delta^2_3\delta^3_2)=a$ より $c=-2$ であるので，主張は示された．
- PS. (5.7) の等式は γ^μ の数 n が偶数のとき成り立つ．奇数ならば，PS. (5.5) の二番目の式からゼロになる．γ^5 が入った場合もなりたつと書いてあるが，γ^5 の個数は n にカウントしないと思う．また，γ^5 が入ったとき n が奇でもゼロになるとは言えない．例えば $n=4$ のとき $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ に比例する．

References

[GR80] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, New York, 1980.

[Kug89] T. Kugo, ゲージ場の量子論, 新物理学シリーズ / 山内恭彦監修, no. 23-24, 培風館, 1989.

[PS95] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.

[Sak14] M. Sakamoto, 場の量子論：不変性と自由場を中心にして, 量子力学選書 / 坂井典佑, 筒井泉監修, 裳華房, 2014.

[Sak20] ______, 場の量子論 *(ii)*：ファインマン・グラフとくりこみを中心にして, 量子力学選書 / 坂井典佑, 筒井泉監修, 裳華房, 2020.

[Sch14] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press, 3 2014.

[Zee03] A. Zee, *Quantum field theory in a nutshell*, 2003.

xx. $\epsilon^{0123}=1$ とする規約で，全ての添字を下ろすと，空間成分 1, 2, 3 を下ろすときに奇数回 -1 が出るので，$\epsilon_{0123}=-1$