

# B4 セミナー

Toshiya Tanaka

2022 年 5 月 20 日

## 1 Introduction

- この文書では教科書の誤植や説明不足だと感じたことをまとめています.
- 公式の誤植リストは[ここ](#)にあります<sup>\*1</sup>. ここにあるものも書きますが, 公式文書を読むことをおすすめします.
- 「[セミナーの準備の仕方について \(河東泰之\)](#)」はゼミ準備の心構えとして有名な文書なので一読するとよいでしょう. 特に

黙って「何々である」とか, “It is easy to see...”, “We may assume that...”, “It is enough to show...”などと書いてあるのはすべて, なぜなのか徹底的に考えなくてははいけません. 「本に書いてあるから」とか「先生がそう言うから」などの理由で, なんとなく分かったような気になるのは絶対にアウトです. そういうところは「なぜですか」と聞かれるに決まっているんですから, どうきかれてもすぐに答えられるように準備をしておく必要があります.

ということは意識すべきです.

- この文書についても同じで, 「この文書に書いてあるから」というのは根拠にはなりません.<sup>\*2</sup>

## 2 Symmetries of Space-Time

### 2.1 Relativistic particle kinematics

### 2.2 Natural units

- SI と自然単位系の変換を実際に計算すること.
- Eq. (2.30) は冪が間違い. 正しくは  $10^{-23}$ .

### 2.3 A little theory of discrete groups

- 物理でよくいう「群論」は群の表現論である. 群の演算を線形空間の行列で表現するときに, 量子力学ではこの線形空間が状態空間 (Hilbert 空間) で行列が物理量である.
- 対称群  $\Pi_3$  の元が数学でよくある置換でないことに注意.  $\Pi_3$  は元自身ではなく文字の場所にラベルをつけている.

### 2.4 A little theory of continuous groups

- 対称性と保存則の関係は [\[坂本 14, Chap.10, Sec.4\]](#) に詳しい.
- Lie 群は単位元近傍の微小変換を調べれば大体わかる. Lie 群の単位元近傍は線形空間になっていて, 行列の交換子で閉じる. この構造を Lie 環という. 物理で重要な例は  $\mathfrak{su}(2)$  という Lie 環で, 量子力学でよくやる各運動量演算子  $[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l$  がそれである. 表現の次元は spin の大きさに勘定することがある. 角運動量の大きさ  $j$  に対し, 行列のサイズは  $2j+1$  になるので,  $2j+1$  次元表現を spin  $j$  表現と言ったりする. 例えば, 1 次元表現は spin 0 表現

---

<sup>\*1</sup> 数式が tex 記法でベタ打ちなのでつらい. MathJax 使ってほしかった.

<sup>\*2</sup> 誤植を訂正しているはずが, さらに誤植だったということは大いにあります.

で、2次元表現は spin 1/2 表現で  $J_i$  は Pauli 行列たちである。このあたりの話は [Howa10, Chap.3], [猪木 94] あたりが詳しい。数学の本だと、線形代数と接続がよいものとして [池田 22] がある。

## 2.5 Discrete space-time symmetries

- Eq. (2.71) の  $P$  がかって + を吐くか - を吐くかは粒子や場の性質である。- を吐くほうを擬スカラー/ベクトルなどという。

## 3 Relativistic Wave Equations

### 3.1 The Klein–Gordon equation

### 3.2 Fields and particles

### 3.3 Maxwell's equations

### 3.4 The Dirac equations

- Dirac 表現

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^i \\ -\gamma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

と Chiral 表現

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^i \\ -\gamma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

の間のユニタリ変換は

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

ととり、 $U^\dagger \gamma^\mu U$  で Dirac 表現に移る。他の流儀で chiral 表現を

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

ととる本もある [坂本 14] がこの場合は Unitary 行列を

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

ととればよい。こちらのほうが最初に思いつく対角化だと思う。

### 3.5 Relativistic normalization of states

- 公式 (3.82)  $\delta(g(x)) = \delta(x)/|dg/dx|$  について。  $\delta$  関数は

$$\int dx \delta(x) = 1, \quad (6)$$

$$\int dx f(x) \delta(x-a) = f(a) \quad (7)$$

を満たすなにか<sup>\*3</sup>とすることが大事。積分すれば  $\delta$  の引数がゼロになるところの関数の値だけを返す。今、 $y = g(x)$  とおくと、 $dy = g'(x) dx$  の関係で変数変換して、

$$1 = \int dy \delta(y) = \int dx g'(x) \delta(g(x)) \quad (8)$$

---

<sup>\*3</sup> 超関数

となる。公式はこの被積分関数を比較した場合を言っている。<sup>\*4</sup>

- 上の注で述べたとおり，単調関数なら問題にならないのだが，そうでない場合を示すことも求められる。

今， $g(x)$  の零点を  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) とする。これに対して， $g$  が微分可能ならば各  $i$  にたいして区間  $[\alpha_i - \varepsilon_i, \alpha_i + \varepsilon_i]$  に他の零点を含まないように  $\varepsilon_i$  を選ぶ。任意の (性質のよい) 関数  $f$  をとり，積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x) \quad (9)$$

において， $x' = g(x)$  の変数変換を考える。このとき， $\varepsilon_i$  を区間  $[\alpha_i - \varepsilon, \alpha_i + \varepsilon]$  で微分係数  $dg/dx$  の符号が変わらないようにとると，積分区間は

$x$	$a \rightarrow b$
$x' (dg(\alpha_i)/dx > 0)$	$\alpha_i - \varepsilon_i \rightarrow \alpha_i + \varepsilon_i$
$x' (dg(\alpha_i)/dx < 0)$	$\alpha_i + \varepsilon_i \rightarrow \alpha_i - \varepsilon_i$

となる。

- この小節ではベクトルの添字とスピノルの添字を区別しなければならない。<sup>\*5</sup>Gamma 行列  $\gamma^\mu$  は  $4 \times 4$  行列で 4 つある。このとき， $\mu$  はベクトルの添字である。スピノル添字は  $a, b, \dots$  や  $\alpha, \beta, \dots$  あたりの文字をよく使う。通常の行列  $A$  を添字を explicit に  $A = (a_{ab})$  と書くことに倣うと  $\gamma^\mu = ((\gamma^\mu)_b^a)$  とかける。上付き下付きはあまり気にしなくて良いが，意味はある [九後 89, Chap.1], [坂本 14]。
- Dirac 方程式  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$  は四成分スピノルの方程式であることに注意せよ。とくに  $m$  の後ろには  $4 \times 4$  単位行列が省略されている。また，スピノル添字を explicit にかけるか？<sup>\*6</sup>

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)_\beta^\alpha \psi(x)^\beta = 0^\alpha \quad (10)$$

である。

### 3.6 Spin and statistics

## 4 The Hydrogen Atom and Positronium

### 4.1 The ideal hydrogen atom

- ゼミでは水素原子の Schödinger 方程式を解けることが求められる。エネルギー固有値が離散的で整数でラベル付けられるのはなぜか，など。

### 4.2 Fine structure and hyperfine structure

- Eq. (4.12) は Biot–Savart の法則を使えばよい。電子の静止系からみると，陽子は  $-\vec{v}$  で運動している。これを電流だと思って，また，線素  $d\vec{l} = -\vec{v} dt$  と時間  $t$  でパラメトライズすると

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(-e)(-\vec{v}) dt \times \vec{r}'}{(r')^3} \vec{r}' \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (11)$$

$$= -\vec{v} \times \frac{-e}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (12)$$

$$= -\vec{v} \times \vec{E} \quad (13)$$

となる。

<sup>\*4</sup>  $g'(x)$  がゼロになる場合はどうか？また， $g(x)$  がゼロになる点が複数存在した場合どうなるか。今考えている場合では単調関数なので，問題にならない。

<sup>\*5</sup> ベクトル添字には  $\mu, \nu, \dots$  あたりのギリシア文字，スピノル添字には  $\alpha, \beta, \dots$  あたりのギリシア文字や  $a, b, \dots$  あたりのアルファベットを使いたい気持ちがある。

<sup>\*6</sup> 正方行列  $A = (a_{\alpha\beta})$ ,  $B = (b_{\alpha\beta})$  の積  $AB$  を添字を用いて表すと  $(AB)_{\alpha\gamma} = A_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma}$  とかけることを思い出すと

- Exercise (4.3) では一般の方向への Lorentz 変換が必要になる．これは速度  $\vec{\beta}$  に平行な方向と直行する方向に位置ベクトルを分解して，平行な成分に関して Lorentz 変換を考えればよい．分解は Gram-Schmidt の要領で

$$\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp}, \quad (14)$$

$$\vec{x}_{\parallel} = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{|\vec{\beta}|^2} \vec{\beta} \quad (15)$$

$$\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel} \quad (16)$$

として，Lorentz 変換は

$$t' = \gamma(t + \beta \cdot \vec{x}) \quad (17)$$

$$\vec{x}' = \vec{x}_{\perp} + \gamma(\vec{x}_{\parallel} + \beta t) \quad (18)$$

となる．

### 4.3 Positronium

## References

- [Howa10] Howard Georgi, 九後汰一郎. 物理学におけるリー代数：アイソスピンから統一理論へ. 物理学叢書 / 小谷正雄 [ほか] 編, No. 107. 吉岡書店, 2010.
- [九後 89] 九後汰一郎. ゲージ場の量子論. 新物理学シリーズ / 山内恭彦監修, No. 23-24. 培風館, 1989.
- [坂本 14] 坂本真人. 場の量子論：不変性と自由場を中心にして. 量子力学選書 / 坂井典佑, 筒井泉監修. 裳華房, 2014.
- [池田 22] 池田岳. テンソル代数と表現論：線形代数統論 = Tensor algebra representation theory : a second course in linear algebra. 東京大学出版会, 2022.
- [猪木 94] 猪木慶治, 川合光. 量子力学. 講談社, 1994.