

「量子と古典の物理と幾何」研究会 @オンライン

保存量の一般化

関数から微分形式へ

谷村省吾

名古屋大学情報学研究科

2022 年 4 月 28, 29 日

微分方程式で定められる力学系

- 力学変数

$$\vec{x}: \mathbb{R} \ni t \mapsto \vec{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

- ベクトル場

$$\vec{V}: \mathbb{R}^n \ni \vec{x} \mapsto \vec{V}(\vec{x}) = (V^1(\vec{x}), V^2(\vec{x}), \dots, V^n(\vec{x})) \in \mathbb{R}^n$$

- 運動方程式

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{V}(\vec{x}(t))$$

- 初期値問題の解 (flow)

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \vec{F}(\vec{x}(0), t) \\ &= \phi_t(\vec{x}(0))\end{aligned}$$

- 関数 (物理量, observable) $A: \mathbb{R}^n \ni x \mapsto A(x) \in \mathbb{R}$
- A の時間変化

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} A(x(t)) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial A}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \\
 &= \sum_i \frac{\partial A}{\partial x^i} V^i \\
 &= \vec{V} \cdot \text{grad } A \\
 &= \langle dA, \vec{V} \rangle \\
 &= i_V dA
 \end{aligned}$$

- 保存量 $\frac{dA}{dt} = 0$

- 保存量 A があると，解軌道は保存量の定値面に限定される．
- A の値 c の等値集合 $A^{-1}(c) = \{\vec{x} \mid A(\vec{x}) = c\}$
- 独立な保存量 A_1, A_2, \dots, A_k があれば，解軌道の存在領域を $(n - k)$ 次元に下げられる．
- $k = n - 1$ 個の保存量が見つければ 1 次元的な解軌道が決まる． 超可積分

- M : n 次元多様体, $x \in M$
- \vec{V} : M 上のベクトル場
- 運動方程式

$$\frac{dx}{dt} = \vec{V}(x)$$

- 解としてのフロー $x(t) = \phi_t(x(0))$
- ω : M 上の p -form
- $\phi_t^* \omega$: ϕ_t による ω の pullback
- Lie 微分 (ベクトル場 \vec{V}) に沿った ω の時間変化)

$$\left. \frac{d}{dt} \phi_t^* \omega \right|_{t=0} =: \mathcal{L}_V \omega$$

Example 1

1-form $\omega = \omega_i dx^i$, $\vec{V} = V^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ であれば,

$$\mathcal{L}_{\vec{V}}\omega = V^k \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} dx^i + \omega_k \frac{\partial V^k}{\partial x^i} dx^i$$

- $\mathcal{L}_{\vec{V}}\omega = 0$ を満たす ω のこと

$$\mathcal{L}_{\vec{V}}\omega = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi_t^*\omega = \omega$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbf{C}(t)} \omega = \int_{\phi_t \mathbf{C}(0)} \omega = \int_{\mathbf{C}(0)} \phi_t^* \omega = \int_{\mathbf{C}(0)} \omega$$

- $\mathbf{C}(t)$ はこの意味で保存量
- 特に $p = 0$ の場合が, $A(x(t)) = A(x(0))$

- p -form ω が $\text{closed}(\text{d}\omega = 0)$ かつ $\mathcal{L}_{\vec{v}}\omega = \text{d}\alpha$ なる $(p-1)$ -form α が存在.
- この場合, $\phi_t^*\omega - \omega = \text{d}\beta$ なる $(p-1)$ -form β が存在.

$$\begin{aligned}\int_{C(t)} \omega &= \int_{\phi_t C(0)} \omega \\ &= \int_{C(0)} \phi_t^* \omega \\ &= \int_{C(0)} (\omega + \text{d}\beta) \\ &= \int_{C(0)} \omega + \int_{\partial C(0)} \beta \\ &= \int_{C(0)} + 0.\end{aligned}$$

保存微分形式

$$\mathcal{L}_{\vec{V}}\omega = 0, \phi_t^*\omega = \omega$$

積分保存量, 保存積分

$$\int_{C(t)} \omega = \int_{C(0)} \omega$$

特に **0-form** A の場合 $A(x(t)) = A(x(0))$

- 一本の解軌道に関する保存量ではなく, 無数の解軌道族に対する保存量になっている.
- ただ, このような保存量があったからといって解軌道の絞り込み・決定に役立つか?
- レベルセットみたいなものはないか?
- cotangent bundle にはあると言えるか?

Hamilton 力学系の場合

- M : $2n$ 次元 manifold
- ω : symplectic-form
 M 上での 2-form で $d\omega = 0$ non degenerate
- $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ Hamiltonian
- \vec{V}_H : Hamilton vector field

$$\vec{V}_H = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

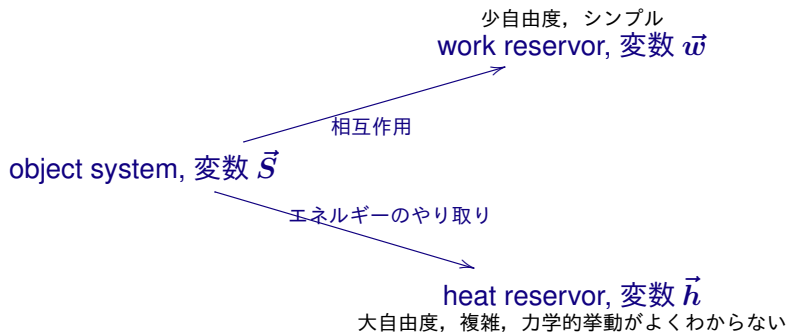
symplectic form ω 由来の保存量 $Q = \int_C \omega \wedge \cdots \wedge \omega$

Q のよいところ.

- Hamiltonian が explicit に time-dependent $H(q, p, \lambda(t))$ であっても保存量であり続けること.
- 外場や制御変数 $\lambda(t)$ を時間変化させるシステムといえば,

熱力学系 (熱機関) だ！

純粋力学の立場から見た熱力学



1. symplectic form 以外の保存微分形式を持つ力学系