B4 セミナー

Toshiya Tanaka

2022 年 5 月 26 日

1 Introduction

- この文書では教科書の誤植や説明不足だと感じたことをまとめています．
- 公式の誤植リストはここにあります[*1]．ここにあるものも書きますが．公式文書を読むことをおすすめします．
- 「セミナーの準備の仕方について (河東泰之)」はゼミ準備の心構えとして有名な文書なので一読するとよいでしょう．特に

  > 黙って「何々である」とか，“It is easy to see...”，“We may assume that...”，“It is enough to show...” などと書いてあるのはすべて，なぜなのか徹底的に考えなくてはいけません．「本に書いてあるから」とか「先生がそう言うから」などの理由で，なんとなく分かったような気になるのは絶対にアウトです．そういうところは「なぜですか」と聞かれるに決まっているんですから，どうきかれてもすぐに答えられるように準備をしておく必要があります．

  ということは意識すべきです．
- この文書についても同じで，「この文書に書いてあるから」というのは根拠にはなりません．[*2]

2 Symmetries of Space-Time

2.1 Relativistic particle kinematics

2.2 Natural units

- SI と自然単位系の変換を実際に計算すること．
- Eq. (2.30) は冪が間違い．正しくは 10^{-23}．

2.3 A little theory of discrete groups

- 物理でよくいう「群論」は群の表現論である．群の演算を線形空間の行列で表現するときに，量子力学ではこの線形空間が状態空間 (Hilbert 空間) で行列が物理量である．
- 対称群 Π_3 の元が数学でよくある置換でないことに注意．Π_3 は元自身ではなく文字の場所にラベルをつけている．

2.4 A little theory of continuous groups

- 対称性と保存則の関係は [坂本 14, Chap.10, Sec.4] に詳しい．
- Lie 群は単位元近傍の微小変換を調べれば大体わかる．Lie 群の単位元近傍は線形空間になっていて，行列の交換子で閉じる．この構造を Lie 環という．物理で重要な例は $\mathfrak{su}(2)$ という Lie 環で，量子力学でよくやる各運動量演算子 $[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l$ がそれである．表現の次元は spin の大きさで勘定することがある．角運動量の大きさ j に対し，行列のサイズは $2j+1$ になるので，．$2j+1$ 次元表現を spin j 表現と言ったりする．例えば，1 次元表現は spin 0 表現

[*1] 数式が tex 記法でベタ打ちなのでつらい．MathJax 使ってほしかった．

[*2] 誤植を訂正しているはずが，さらに誤植だったということは大いにありえます．

で，2 次元表現は spin 1/2 表現で J_i は Pauli 行列たちである．このあたりの話は [Howa10, Chap.3], [猪木 94] あたりが詳しい．数学の本だと，線形代数と接続がよいものとして [池田 22] がある．

- Eq. (2.55) は BCH formula から示せると言われる．確かに左辺を計算して，BCH formula から Lie bracket の入れ子の和の指数関数でかけることがいえ，Lie bracket で閉じているものが Lie 環なので左辺は群の元なのだが，それが γ と同じということ言えないと思う．[*3]

2.5 Discrete space-time symmetries

- Eq. (2.71) の P がかかって $+$ を吐くか $-$ を吐くかは粒子や場の性質である．$-$ を吐くほうを擬スカラー/ベクトルなどという．

3 Relativistic Wave Equations

3.1 The Klein–Gordon equation

3.2 Fields and particles

3.3 Maxwell's equations

3.4 The Dirac equations

- Dirac 表現

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^i \\ -\gamma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

と Chiral 表現

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^i \\ -\gamma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

の間のユニタリ変換は

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

ととり，$U^\dagger \gamma^\mu U$ で Dirac 表現に移る．他の流儀で chiral 表現を

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

ととる本もある [坂本 14] がこの場合は Unitary 行列を

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

ととればよい．こちらのほうが最初に思いつく対角化だと思う．

3.5 Relaticistic narmalization of states

- 公式 (3.82) $\delta(g(x)) = \delta(x)/|\mathrm{d}g/\mathrm{d}x|$ について．δ 関数は

$$\int \mathrm{d}x\, \delta(x) = 1, \tag{6}$$

$$\int \mathrm{d}x\, f(x)\delta(x-a) = f(a) \tag{7}$$

[*3] それは定義でしょと言われてその時はそうかもしれないと思ってしまったが，やはり違うとおもう．勇気があればバトってください．

を満たすなにか[*4]と思うことが大事．積分すれば δ の引数がゼロになるところの関数の値だけを返す．今，$y = g(x)$ とおくと，$\mathrm{d}y = g'(x)\,\mathrm{d}x$ の関係で変数変換して，

$$1 = \int \mathrm{d}y\,\delta(x) = \int \mathrm{d}x\,g'(x)\delta(g(x)) \tag{8}$$

となる．公式はこの被積分関数を比較した場合を言っている．[*5]

- 上の注で述べたとおり，単調関数なら問題にならないのだが，そうでない場合を示すことも求められる．
  今，$g(x)$ の零点を α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とする．これに対して，g が微分可能ならば各 i にたいして区間 $[\alpha_i - \varepsilon_i, \alpha_i + \varepsilon_i]$ に他の零点を含まないように ε_i を選ぶ．任意の (性質のよい) 関数 f をとり，積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,f(x)\delta(x) \tag{9}$$

  において，$x' = g(x)$ の変数変換を考える．このとき，ε_i を区間 $[\alpha_i - \varepsilon, \alpha_i + \varepsilon]$ で微分係数 $\mathrm{d}g/\mathrm{d}x$ の符号が変わらないようにとると，積分区間は

x	$a \to b$
x' $(\mathrm{d}g(\alpha_i)/\mathrm{d}x > 0)$	$\alpha_i - \varepsilon_i \to \alpha_i + \varepsilon_i$
x' $(\mathrm{d}g(\alpha_i)/\mathrm{d}x < 0)$	$\alpha_i + \varepsilon_i \to \alpha_i - \varepsilon_i$

  となる．微分係数が負の場合は積分区間を入れ替えたときのマイナスがつく．まとめると，微分係数の絶対値をとって，

$$\delta(x) = \sum_i \left|\frac{\mathrm{d}g(\alpha_i)}{\mathrm{d}x}\right|\delta(g(x)) \tag{10}$$

  となり，求める式を得る．
- この小節ではベクトルの添字とスピノルの添字を区別しなければならない．[*6]Gamma 行列 γ^μ は 4×4 行列で 4 つある．このとき，μ はベクトルの添字である．スピノル添字は $a, b, \ldots$ や $\alpha, \beta, \ldots$ あたりの文字をよく使う．通常の行列 A を添字を explicit に $A = (a_{ab})$ と書くことに倣うと $\gamma^\mu = ((\gamma^\mu)^a_b)$ とかける．上付き下付きはあまり気にしなくて良いが，意味はある [九後 89, Chap.1], [坂本 14]．
- Dirac 方程式 $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$ は四成分スピノルの方程式であることに注意せよ．とくに m の後ろには 4×4 単位行列が省略されている．また，スピノル添字を explicit にかけるか？[*7]

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)^\alpha_\beta\psi(x)^\beta = 0^\alpha \tag{11}$$

  である．

3.6 Spin and statistics

4 The Hydrogen Atom and Positronium

4.1 The ideal hydrogen atom

- ゼミでは水素原子の Schödinger 方程式を解けることが求められる．エネルギー固有値が離散的で整数でラベル付けられるのはなぜか，など．細かいところは [猪木 94] など，標準的な量子力学の教科書を参照のこと．
- Bohr 半径 a_0 は水素原子の基底状態の電子がどれくらいの範囲に広がっているかを特徴づける量といえる．この良い指標として，位置の分散

$$\langle r^2\rangle := \int_0^\infty \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, r^2 \sin\theta R^*(r) r^2 R(r) \tag{12}$$

[*4] 超関数

[*5] $g'(x)$ がゼロになる場合はどうか？また，$g(x)$ がゼロになる点が複数存在した場合どうなるか．今考えている場合では単調関数なので，問題にならない．

[*6] ベクトル添字には μ, ν, ... あたりのギリシア文字，スピノル添字には α, β, ... あたりのギリシア文字や a, b, ... あたりのアルファベットを使いたい気持ちがある．

[*7] 正方行列 $A = (a_{\alpha\beta})$, $B = (b_{\alpha\beta})$ の積 AB を添字を用いて表すと $(AB)_{\alpha\gamma} = A_{\alpha\beta}B_{\beta\gamma}$ とかけることを思い出すと

を考える．$R(r)$ は動径波動関数で Laguerre 微分方程式の解である．基底状態ではこれは $R(r) = Ce^{-r/a_0}$ である．ここで C は規格化定数．規格化も考えておくこと[*8]．Eq. (12) の値は $3a_0^2$ となり，その平方根は大体 a_0 である．
もう一つ，よくされる議論として位置の期待値でなく存在確率そのものを考える．球座標で積分すると Jacobian のなかの r^2 が出てきて，これを含めて[*9]存在確率 $p(r)$ を考えると，

$$p(r) \propto \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^2 R^*(r) R(r) \tag{13}$$

となる．波動関数および絶対値の二乗は原点で極大だが，これを考えると $r = a_0$ で極大であることがわかる．

- 上の 1 つ目の議論は $v/c \sim \alpha$ の導出でも使える．量子力学では速度というより，p/m を考えるべきで，$\sqrt{\langle p^2 \rangle}$ を計算すると $\sqrt{3}\alpha$ となって，$\alpha \sim 1/137$ なので，非相対論極限でよさそう，ということ．

4.2 Fine structure and hyperfine structure

- Eq. (4.12) は Biot–Savart の法則を使えばよい．電子の静止系からみると，陽子は $-\vec{v}$ で運動している．これを電流だと思って，また，線素 $\mathrm{d}\vec{l} = -\vec{v}\,\mathrm{d}t$ と時間 t でパラメトライズすると

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{(-e)(-\vec{v})\,\mathrm{d}t \times \vec{r}'}{(r')^3} \vec{r}' \delta(\vec{r} - \vec{r}') && (14)\\
&= -\vec{v} \times \frac{-e}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r} && (15)\\
&= -\vec{v} \times \vec{E} && (16)
\end{aligned}$$

となる．

- Exercise (4.3) では一般の方向への Lorentz 変換が必要になる．これは速度 $\vec{\beta}$ に平行な方向と直行する方向に位置ベクトルを分解して，平行な成分に関して Lorentz 変換を考えればよい．分解は Gram–Schmidt の要領で

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= \vec{x}_\parallel + \vec{x}_\perp, && (17)\\
\vec{x}_\parallel &= \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{|\vec{\beta}^2|} \vec{\beta} && (18)\\
\vec{x}_\perp &= \vec{x} - \vec{x}_\parallel && (19)
\end{aligned}$$

として，Lorentz 変換は

$$\begin{aligned}
t' &= \gamma(t + \beta \cdot \vec{x}) && (20)\\
\vec{x}' &= \vec{x}_\perp + \gamma(\vec{x}_\parallel + \beta t) && (21)
\end{aligned}$$

となる．

4.3 Positronium

References

[Howa10] Howard Georgi, 九後汰一郎. 物理学におけるリー代数 : アイソスピンから統一理論へ. 物理学叢書 / 小谷正雄 [ほか] 編, No. 107. 吉岡書店, 2010.

[九後 89] 九後汰一郎. ゲージ場の量子論. 新物理学シリーズ / 山内恭彦監修, No. 23-24. 培風館, 1989.

[坂本 14] 坂本眞人. 場の量子論 : 不変性と自由場を中心にして. 量子力学選書 / 坂井典佑, 筒井泉監修. 裳華房, 2014.

[池田 22] 池田岳. テンソル代数と表現論 : 線形代数続論 = Tensor algebra representation theory : a second course in linear algebra. 東京大学出版会, 2022.

[猪木 94] 猪木慶治, 川合光. 量子力学. 講談社, 1994.

[*8] 確か，πa_0^2 だった気がする．
[*9] 距離 r の一点ではなく，半径 r の球殻上の