Toshiya Tanaka

2022 年 1 月 30 日

目次

1 Lorentz 変換

1.1 Lorentz 変換の性質

$(ct, x) \mapsto (ct', x')$ の変換で

$$x \mapsto x' = \gamma x + \beta\gamma ct \tag{1.1}$$

$$ct \mapsto ct' = \gamma ct + \beta\gamma ct \tag{1.2}$$

を Lorentz 変換という．これは Minkowski 空間での「長さ」

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{1.3}$$

を不変に保つ．この意味で，Lorentz 変換は Minkowski 空間における回転と解釈できる．

四次元で考えると，回転平面は ${}_4C_2 = 6$ つの回転平面がある．xy, yz, zx 平面では Euclid 空間の回転と同じで，時間を含んだ tx, ty, tz 平面での回転は特にブーストと呼ばれる．

tx 平面におけるブーストは

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

となる．$\gamma^2(1-\beta^2) = 1$ より $\gamma = \cosh w_1$，$-\gamma\beta = \sinh w_1$ とおき，四次元で書くと

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh w_1 & \sinh w_1 & 0 & 0 \\ \sinh w_1 & \cosh w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

となる．

xy 平面での回転は

$$
\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ 0 & \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.6}
$$

である．他の成分も同様にできる．行列を書くのは大変なので Einstein の規約を使う．

六つの変換行列はすべて行列式が 1 になる．これらの変換行列 Λ すべてが

$$
{}^t\Lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.7}
$$

を満たす．この全体を $\mathrm{SO}(3,1)$ という．

今，$|w_i|, |\theta_i| \ll 1$ の無限小変換を考える．このとき，変換行列は $\Gamma^\mu_\nu \simeq \delta^\mu_\nu + \epsilon^\mu_\nu$ と単位行列と無限小パラメータの和で書ける．パラメータの一次まででは積は順序によらず，任意の $\mathrm{SO}(3,1)$ 無限小変換は

$$
\delta^\mu_\nu + \epsilon^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + (\epsilon_{tx})^\mu_\nu + (\epsilon_{ty})^\mu_\nu + (\epsilon_{tz})^\mu_\nu + (\epsilon_{xy})^\mu_\nu + (\epsilon_{yz})^\mu_\nu + (\epsilon_{zx})^\mu_\nu \tag{1.8}
$$

と書ける．行列で書くと

$$
\epsilon^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_1 & 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ w_2 & \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ w_3 & -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.9}
$$

となり，添字を上げ下げすると

$$
\epsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -w_1 & -w_2 & -w_3 \\ w_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ w_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ w_3 & \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.10}
$$

である．これは反対称になる．

1.2 場の変換

通常の三次元回転でベクトル場 $\vec{A}(\vec{x})$ を考えると引数の座標変換と場そのものの変換が現れる．一般に変換 Λ に対して

$$
(A')(\Lambda\vec{x}) = \Lambda^i_j A^j(\vec{x}) \tag{1.11}
$$

と書ける．

場の量子論では場を量子化して粒子描像を得るが，どんな粒子が現れるかはどんな場の変換性があるかと言い換えられる．標準理論に現れる素粒子は場の変換性で区別できる．

スカラー場	Higgs			
ベクトル場	photon	gluon	$W^\pm$boson	Z boson
Dirac 場	quark	荷電 lepton	neutorino	

それぞれの場は次のように変換する．

- スカラー場
  一成分の場．Lorentz 変換の下で不変．

$$
\phi'(\Lambda x) = \phi(x) \tag{1.12}
$$

- ベクトル場
  四成分の場．x^μ と同じ変換をする．

$$
(A')^\mu(\Lambda x) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) \tag{1.13}
$$

1.3 量子力学における SU(2)

量子力学では，物理量 O は演算子の波動関数 ψ による期待値 $\langle \psi^\dagger, O\psi \rangle = \langle O \rangle$ で与えられる．
今，z 方向に spin 1/2 を持つ状態 $|\uparrow\rangle = {}^t(1,0)$ を考える．z 方向の spin 角運動量の期待値は

$$\langle \uparrow | \frac{1}{2}\sigma_3 | \uparrow \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

$$= \frac{1}{2} \tag{1.15}$$

となる．
ここで，状態 $|\uparrow\rangle$ に SU(2) 変換 $|\uparrow\rangle \mapsto e^{i\theta_2\sigma_2/2}|\uparrow\rangle$ を施す．

$$\langle \uparrow | e^{-i\theta_2\sigma_2/2} \frac{1}{2}\sigma_3 e^{i\theta_2\sigma_2/2} | \uparrow \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2/2 & \sin\theta_2/2 \\ \sin\theta_2/2 & -\cos\theta_2/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

$$= \frac{1}{2}\cos\theta_2 \tag{1.17}$$

これは z 方向に向いていた spin が xz 平面上で θ_2 回転したことを意味する．波動関数に SU(2) 変換を施すと，2 つ合わせて観測量としては SO(3) 変換が実現する．

1.4 四次元 Minkowski 空間の Lorentz 変換

四次元 Minkowski 空間の Lorentz 変換は回転三つとブースト三つからなる．四元ベクトル $x^\mu = (ct, x, y, z)$ のブースト変換を考える．

- 行列を使った方法
  tx 平面のブーストは 4×4 行列で

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh w_1 & \sinh w_1 & 0 & 0 \\ \sinh w_1 & \cosh w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

  これは長さを保っている．
- 複素行列を使った方法
  det が $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ になる行列をつくればよい．$x^\mu = (ct, x, y, z)$ に対して

$$\begin{pmatrix} ct + z & x - iy \\ x + iy & ct - z \end{pmatrix} = ct + x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 \tag{1.19}$$

  がそれである．エルミート性を崩さない変換を与えたいが，回転の場合から推測して $e^{w_1\sigma_1/2}$ ととると，Lorentz 変換を再現する．

回転は $e^{-i\theta_i\sigma_i/2}$, ブーストは $e^{w_i\sigma_i/2}$ が指定しそれぞれ det が 1 になる．
ところが，ブーストが unitary 性を破る．$\left(e^{w_i\sigma_i/2}\right)e^{w_i\sigma_i/2} \neq 1$．これらのなす群は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ である．
$a \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ に対し，

$$ct' + x'\sigma_1 + y'\sigma_2 + z'\sigma_3 = a(ct + x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3)a^\dagger \tag{1.20}$$

はひとまとめに

$$(x')^\mu\sigma_\mu = a(x^\mu\sigma_\mu)a^\dagger \tag{1.21}$$

とかくと，変換部分に関しては

$$\Lambda^\mu_\nu\sigma_\mu = a\sigma_\nu a^\dagger \tag{1.22}$$

となる．
この指揮はベクトル場の変換である SO(3,1) 変換が 2 つの $\mathrm{SL}(2.\mathbb{C})$ の組み合わせで実現できることを表しており，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 変換がより基本的である．この $\mathrm{SL}(2,C)$ で変換する場が Dirac 場である．

1.5 Dirac 場

$\Lambda^\mu_\nu \sigma_\mu = a\sigma_\nu a^\dagger$ を満たす a と a^* で変換する場 ξ, η を考える.

$$\xi'(x') = a\xi(x) \tag{1.23}$$
$$\bar{\eta}'(x') = a^*\bar{\eta}(x) \tag{1.24}$$

Dirac 場 ψ は

$$\psi(x) \coloneqq \begin{pmatrix} \xi(x) \\ i\sigma_2\bar{\eta}(x) \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

と定義される. $\bar{\eta}$ を $i\sigma_2\bar{\eta}$ と定義しなおす.

Lorentz 変換則は

$$\eta'(x') = i\sigma_2\bar{\eta}'(x') \tag{1.26}$$
$$= i\sigma_2 a^*\bar{\eta}(x) \tag{1.27}$$
$$= i\sigma_2 a^*(-i\sigma_2)i\sigma_2\bar{\eta}(x) \tag{1.28}$$
$$= \bar{a}\eta(x) \tag{1.29}$$

なので, Dirac 場の Lorentz 変換は

$$\psi'(x') = \begin{pmatrix} \xi'(x') \\ \eta'(x') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

である. 変換行列 $a, \bar{a}$ の具体系を与える. まずは $\mathrm{SL}2, \mathbb{C}$ の無限小変換を考える.

$$a \simeq 1 - i\frac{\theta_i\sigma_i}{2} + \frac{w_i}{2}\sigma_i \tag{1.31}$$

$\mathrm{SO}(3,1)$ との関係を見やすくするためにおなじパラメータを使うことにする.

$$\Lambda^\mu_\nu \simeq \delta^\mu_\nu + \epsilon^\mu_\nu \tag{1.32}$$

ここで

$$\epsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -w_1 & -w_2 & -w_3 \\ w_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ w_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ w_3 & \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

を使って,

$$a \simeq 1 - i\frac{\theta_i\sigma_i}{2} + \frac{w_i\sigma_i}{2} \tag{1.34}$$
$$= 1 - \frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \tag{1.35}$$

と書き換える.

$$\sigma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_1 & -i\sigma_2 & -i\sigma_3 \\ i\sigma_1 & 0 & \sigma_3 & -\sigma_2 \\ i\sigma_2 & -\sigma_3 & 0 & \sigma_1 \\ i\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.36}$$

さらに,

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu] \tag{1.37}$$

$\sigma_\mu = (1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $\bar{\sigma}_\mu = (1, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3)$ である.

結局, a の無限小変換が決まったので, a は指数の肩に乗せて $a = e^{-i\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}$ となる.

次に $\bar{a}$ の変換を与える．無限小変換は

$$\bar{a} \simeq i\sigma_2\left(1 - \frac{i\theta_i\sigma_i}{2} + \frac{w_i\sigma_i}{2}\right)^*(-i\sigma_2) \tag{1.38}$$

$$= i\sigma\left(1 + \frac{i\theta_i\sigma_i^*}{2} + \frac{w_i\sigma_i^*}{2}\right)(-i\sigma_2) \tag{1.39}$$

$$= \left(1 - \frac{i\theta_i\sigma_i}{2} - \frac{w_i\sigma_i}{2}\right) \tag{1.40}$$

$$= 1 - \frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu} \tag{1.41}$$

で，

$$\bar{\sigma}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_1 & i\sigma_2 & i\sigma_3 \\ -i\sigma_1 & 0 & \sigma_3 & -\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & -\sigma_3 & 0 & \sigma_1 \\ -i\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

である．

$\bar{a} = e^{-i\epsilon^{\mu\nu}\bar{\sigma}_{\mu\nu}}$ と決定した．

最後に Dirac 場の Lorentz 変換を考える．

$$\psi'(x') = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix} \tag{1.43}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\epsilon^{mu\nu}\sigma_{\mu\nu}/4} & 0 \\ 0 & e^{-i\epsilon^{\mu\nu}\bar{\sigma}_{\mu\nu}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix} \qquad = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{4}\right)^n\left(\frac{i}{2}\right)(\epsilon^{\mu\nu}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu))^n\begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix} \tag{1.44}$$

$$= e^{-i\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}\begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix} \tag{1.45}$$

ここで．Dirac 行列

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

である．

- Dirac 場
  四成分の場で

$$\psi'(x') = e^{-i\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}\psi(x), \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \tag{1.47}$$

  と変換する

2 最小作用の原理，局所ゲージ不変性

2.1 量子化

最小作用の原理から始まる理論形式は量子化の筋道を与える．点粒子の量子化は作用汎関数

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(q(t), \dot{q}(t)) \tag{2.1}$$

が極小 $\delta S = 0$ となるように要請すると，Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\dot{q}} = 0 \tag{2.2}$$

が導出され，Legendre 変換したものは

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \{x, H\}_{\text{Poisson}} \tag{2.3}$$

である．Poisson braket を

$$\{x, H\}_{\text{Poisson}} \mapsto \frac{1}{i\hbar}[x, H] \tag{2.4}$$

と置き換えるのが正準量子化である．

場の量子化では，作用を

$$S = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(\varphi(x), \partial^\mu \varphi(x)) \tag{2.5}$$

と与え，変分により

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial(\partial^\mu \varphi)} = 0 \tag{2.6}$$

を得，Legendre 変換により，

$$\partial 0 \varphi = \{\varphi, H\}_{\text{Poisson}} \tag{2.7}$$

となり，正準量子化により

$$\{\varphi, H\}_{\text{Poisson}} \mapsto \frac{1}{i\hbar}[\varphi, H] \tag{2.8}$$

となる．

2.2 古典力学における最小作用の原理

ある質点が時刻 t_1 から t_2 まで運動する．この間に Lagrangian という量を時間積分したものとして作用を定義する．

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L \tag{2.9}$$

Lagrangian は質点の位置と速度に依存する関数である．

$$L = L(q(t), \dot{q}(t)). \tag{2.10}$$

作用が極値をとるような運動が実現するというのが最小作用の原理である．

境界は $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ と固定されているとして，$\delta S = 0$ を計算する．

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta L(q(t), \dot{q}(t)) && (2.11)\\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q}\, \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, \delta \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \right) \right) && (2.12)\\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\, \delta q - \left(dvt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, \delta q \right) && (2.13)\\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, \delta q(t_2) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, \delta q(t_1) && (2.14)
\end{aligned}$$

となり，後ろ二項は境界条件から消える．これがゼロになるので，

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{2.15}$$

となる．

もっとも簡単な運動の Lagrangian を考える．

Example 2.1 (等速直線運動)
運動方程式

$$m \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \vec{r}(t) = m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{v}(t) = \vec{0} \tag{2.16}$$

に Euler-Lagrange 方程式 (2.15) が一致するように Lanrangian を与えると

$$L = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 \tag{2.17}$$

はこれを満たす[i.].

この Lagrangian は次の性質を実際に満たす.

1. Lagrangian は位置と速度に依存する関数である.
$$L = L(q(t), \dot{q}(t)) \tag{2.18}$$
2. Lagrangian は実関数である.
$$L = L^* \tag{2.19}$$
3. Lagrangian は系の対称性を反映している.

2.3 古典場の理論における最小作用の原理

同様に Lagrangian という量を時間積分したものとして作用を定義する.

$$S :== \int \mathrm{d}t\, L = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L}. \tag{2.20}$$

Lagrangian は場と，場の一階微分項に依存する関数とする[ii.].

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial^\mu \varphi(x)). \tag{2.21}$$

以上に定義した作用が極値をとるような運動が実現する．同様に変分を計算すると，Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} - \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial(\partial^\mu \varphi(x))} = 0 \tag{2.22}$$

を得る.

Example 2.2 (Dirac 方程式)
よく知られた相対論的場の方程式として Dirac 方程式を考える.

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \tag{2.23}$$

Euler-Lagrange 方程式がこれに一致するような Lagrangian は

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - \frac{i}{2}\big(\partial_\mu \bar{\psi}(x)\big)\gamma^\mu \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \tag{2.24}$$

で与えられる．実際,

$$-\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi(x))} = -\frac{i}{2}\partial^\mu \bar{\psi}(x)\gamma_\mu \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi(x)} = -\frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi}(x)\gamma^\mu - m\bar{\psi}(x) \tag{2.26}$$

となり,

$$-i\partial_\mu \bar{\psi}(x)\gamma^\mu - m\bar{\psi}(x) = 0 \tag{2.27}$$

を得る．両辺エルミート共役を取り，γ_0 をかけることで，Dirac 方程式を得る.

Eq. (2.24) の Lagrangian は次の性質を満たす.

---

i. 一意ではないが.

ii. 電磁気学では場 φ はポテンシャルに相当して，これらの微分が電磁場である.

1. Lagrangian は場と，その一階微分に依存する関数.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial^\mu \varphi(x)) \tag{2.28}$$

2. Langrangian は実関数.

$$\mathcal{L}^* = L \tag{2.29}$$

3. Lagrangian は系の対称性を反映している．Lorentz 不変性は

$$\bar{\psi}(x)\psi(x), \bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \tag{2.30}$$

である．Lorentz 不変性では $(\bar{\psi}(x)\psi(x))^n$ のような高次項は禁止されない.
そこで次の要請も加える.

4. 各項の係数は自然単位系で負の質量次元を持たない.
5. Lagrangian 密度は局所的.

2.4 自然単位系

物理量は質量 [M]，時間 [T], 長さ [L] の組み合わせで構成される．e.g., エネルギーは $\mathrm{ML^2T^{-2}}$ の次元を持つ.
自然単位系では

$$c[\mathrm{LT^{-1}}] = \hbar[\mathrm{ML^2T^{-1}}] = 1 \tag{2.31}$$

とおく．これより，[L] = [T], [M] = $[\mathrm{L}^{-1}]$ となり，すなわち，

$$[\mathrm{M}] = [\mathrm{L}^{-1}] = [\mathrm{T}^{-1}] \tag{2.32}$$

である．この質量の次元をカウントする.

2.5 Lagrange の未定乗数法

拘束条件の元で極値を求めるのに便利な方法である Lagrange 未定乗数法の使い方をまとめる.

Example 2.3
束縛 $x^2 + 2xy + y^2 = 1$ のもとで，$x^2 + 3y^2$ の極値を求めることを考える．未定乗数 λ を加えた三変数関数 $F(x, y; \lambda) \coloneqq x^2 + 3y^2 - \lambda(x^2 + 2xy + y^2 - 1)$ を作り，これの変分をとる.

$$\delta F = 2x\,\delta x + 6y\,\delta y - \lambda(2x\,\delta x + 2x\,\delta y + 2y\,\delta x + 2y\,\delta y) - \delta\lambda\,(x^2 + 2xy + y^2 - 1) \tag{2.33}$$

これがゼロになるように,

$$2x - 2x\lambda - 2y\lambda = 0, \tag{2.34}$$
$$6y - 2x\lambda - 2y\lambda = 0 \tag{2.35}$$

より

$$x = 3y \tag{2.36}$$

を得る．これより $y = \pm 1/4$ となり，極値 $x^2 + 3y^2 = 3/4$ を得る.

これを使って，Euler-Lagrange 方程式を再考する．今，Lagrangian を位置 $x(t)$ と速度 $v(t)$ を独立に取って $L = L(x(t), v(t))$ と与え，これを拘束条件 $v(t) = \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$ の元で作用を極小にすることを考える.
このとき，未定乗数を含めた Lagrangian

$$L'(x(t), v(t); \lambda) = L(x(t), v(t)) - \lambda(v - \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}) \tag{2.37}$$

を時間積分して作られる作用の変分を考えれば良い．

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta L' && (2.38)\\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\delta L - \delta\lambda \left(v - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right) - \lambda \left(\delta v - \frac{\mathrm{d}\,\delta x}{\mathrm{d}t} \right) \right) && (2.39)
\end{aligned}
$$

Lagrangian 自体の変分は

$$
\delta L = \frac{\partial L}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial L}{\partial v}\,\delta v \tag{2.40}
$$

で，

$$
\lambda \frac{\mathrm{d}\,\delta x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\,\delta x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda\,\delta x) \tag{2.41}
$$

は最後の全微分項は定積分で落ちることを考えると，

$$
\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} \right) \delta x + \left(\frac{\partial L}{\partial v} - \lambda \right) \delta v - \left(v - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right) \delta\lambda \right) \tag{2.42}
$$

となる．これがゼロという条件から未定乗数は

$$
\lambda = \frac{\partial L}{\partial v} \tag{2.43}
$$

となって

$$
\left. \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial v} \right) \right|_{v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}v} = 0 \tag{2.44}
$$

となる．

2.6 U(1) gauge 理論

自由 Dirac 場の Lagrangian を考える．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{i}{2}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\psi(x)) - \frac{i}{2}\big(\partial_{\mu}\bar{\psi}(x)\big)\gamma^{\mu}\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) && (2.45)\\
&= i\bar{\psi}(x)\gamma^{/mu}(\partial_{\mu}\psi(x)) - \frac{i}{2}\partial_{\mu}\big(\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\big) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) && (2.46)\\
&= i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) && (2.47)
\end{aligned}
$$

これ以降この形を使う．

大域的 U(1) gauge 変換は θ を定数すると

$$
\begin{aligned}
\psi'(x) &= e^{-i\theta} && (2.48)\\
\bar{\psi}' &= \bar{\psi}(x)e^{i\theta} && (2.49)
\end{aligned}
$$

である．

この変換の下で

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= i\bar{\psi}'(x)\gamma^{\mu}\partial_{mu}\psi'(x) - m\bar{\psi}'(x)\psi(x) && (2.50)\\
&= i\bar{\psi}(x)e^{i\theta}\gamma^{mu}\partial_{\mu}e - -u\theta\psi(x) - m\bar{\psi}(x)e - i\theta e^{-i\theta}\psi(x) && (2.51)\\
&= \mathcal{L} && (2.52)
\end{aligned}
$$

となる．自由 Dirac 場の Lagrangian は大域的 U(1) gauge 不変性を持つ．

次に本題の局所 U(1) gauge 変換を考える．変換パラメータ θ を座標依存に依存するようにし，$\theta(x)$ とする．局所的 U(1) 変換は

$$
\psi'(x) = e^{-i\theta(x)}e^{i\theta(x)} \tag{2.53}
$$

である．このとき，座標に依存するので，微分がヒットし

$$\partial^\mu e^{-i\theta(x)} = -i(\partial^\mu)e^{-i\theta(x)} \tag{2.54}$$

となる．

自由 Dirac 場は

$$\begin{align}
\mathcal{L} &= i\bar{\psi}'(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi'(x) - m\bar{\psi}'(x)\psi'(x) \tag{2.55}\\
&= i\bar{\psi}(x)e^{i\theta(x)}\gamma^\mu\partial_\mu e^{-i\theta(x)}\psi(x) - m\bar(\psi)(x)e - i\theta e^{-i\theta}\psi(x) \tag{2.56}\\
&= i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(-i\partial_\mu\theta(x) + \partial_\mu)\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \neq \mathcal{L} \tag{2.57}
\end{align}$$

変換する．故に自由 Dirac 場の Lagrangian は局所的 U(1) 対称性を持たない．

ここでアクロバティックな発想をする．Lagrangian が局所 U(1) 対称性を持つべきである，という信念によって局所的 gauge 対称性を持つように書き換える．この書き換えによって場の相互作用の仕方が決まる．[iii.]

今，微分を強偏微分に書き換える．U(1) gauge 場を $A^\mu(x)$ とし，共変微分を

$$D^\mu := \partial^\mu - ieA^\mu(x) \tag{2.58}$$

として，Lagrangian は

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu D_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \tag{2.59}$$

と書き換える．これと同時に gauge 場も

$$\begin{align}
\psi' &= e^{-i\theta(x)}\psi(X) \tag{2.60}\\
(A')^\mu(x) &= A^\mu - \frac{1}{e}\partial^\mu\theta(x) \tag{2.61}
\end{align}$$

と変換する．

この下で Lagrangian の変換を見る．

$$\begin{align}
\mathcal{L}' &= i\bar{\psi}'(x)\gamma^\mu\big(\partial_\mu - ieA'_\mu(x)\big)\psi'(x) - m\bar{\psi}'(x)\psi'(x) \tag{2.62}\\
&= i\bar{\psi}(x)e^{i\theta(x)}\gamma^\mu e^{-i\theta(x)}(-i\partial^\mu\theta(x) + \partial_\mu - ieA_\mu(x) + i\partial^\mu\theta(x))\psi(x) - \cdots \tag{2.63}\\
&= i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu(x))\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \tag{2.64}\\
&= \mathcal{L} \tag{2.65}
\end{align}$$

書き換えた Lagrangian は局所 gauge 不変である．

新しい Lagrangian

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_{mu}(x))\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \tag{2.66}$$

に対して運動方程式を求める．

$$\frac{\partial L}{\partial\psi(x)} = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu - m\bar{\psi}(x) \tag{2.67}$$

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \tag{2.68}$$

$$\big(i\gamma^\mu\partial_{[}\mu] - m\big)\psi(x) = e\gamma^\mu A_\mu\psi(x) \tag{2.69}$$

[iii.] 電磁気学では Maxwell 方程式が gauge 不変になっている．これがなぜかはわからないが原理になっているとして gauge 不変性が原理にあるとして考えると，これは強い力でも成り立っていることがわかっている．ここでは，そういう原理であるとして受け入れることにする．

iv.v.

物質場の Lagrangian$\mathcal{L}(\psi(x),\partial^\mu\psi(x))$ を $\mathcal{L}(\psi(x),\partial^\mu\psi(x),A^\mu(x))$ と微分項も許し，各要請を破らないように足し上げる．非微分項で他に許される形はあるか．$\dim\left(\bar{\psi}A\psi\right)=4$ ならば $\dim A=1$．
高事項は局所 gauge 不変性を破ってしまう．

$$(A^\mu(x)A_\mu(x))'\neq A^\mu(x)A_\mu(x) \tag{2.72}$$

これより，質量項が禁止される．
微分項に局所 gauge 不変性を保つ形はあるか．

$$\partial^\nu(A')^\mu(x)=\frac{1}{e}\partial^\nu\partial^\mu\theta(x) \tag{2.73}$$

と μ と ν の対称な形になっている．ここで場の強さ $F^{\mu\nu}:=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu A^\mu$ を導入する．

$$(F')^{\mu\nu}=\partial^{mu}(A')^\mu A^\nu-\frac{1}{e}\partial^\mu\partial^\nu\theta(x)-\left(\partial^\nu A^\mu-\frac{1}{e}\partial^\nu\partial^\mu\theta(x)\right)=F^{\mu\nu} \tag{2.74}$$

と gauge 不変になっている．
ここで，共変微分に対し便利な表記を導入する．Dirac 場の gauge 変換は phase を簡単のため $U(x)$ とかくと，

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x)&=e^{i\theta(x)}\psi(x) &(2.75)\\&=U(x)\psi(x), &(2.76)\\(D^\mu\psi(x))'&=e^{-i\theta(x)}\psi(x) &(2.77)\\&=U(x)D^\mu\psi(x) &(2.78)\end{aligned}$$

この 2 つを形式的に

$$(D^\mu)'=U(x)D^\mu U^{-1}(x) \tag{2.79}$$

と書く．共変微分の交換関係を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{i}{e}[D^\mu,D^\nu]&=\frac{i}{e}((\partial^\mu-ieA^\mu)(\partial^\nu-ieA^\nu)-(\mu\leftrightarrow\nu)) &(2.80)\\&=\frac{i}{e}\big((\partial^\mu\partial^\nu-ie(\partial^\mu A^\nu)-ieA^\nu\partial^\mu-ieA^\nu\partial^\mu-e^2A^\mu A^\nu)-(\mu\leftrightarrow\nu)\big) &(2.81)\\&=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu &(2.82)\\&=F^{\mu\nu} &(2.83)\end{aligned}$$

と場の強さになる．これは一般相対論では曲率テンソルに対応する．この計算法で場の強さの変換を計算すると

$$\begin{aligned}(F')^{\mu\nu}&=\frac{i}{e}([D^\mu,D^\nu])' &(2.84)\\&=\frac{i}{e}((D')^\mu(D')^\nu-(D')^\nu(D')^\mu) &(2.85)\\&=\frac{i}{e}(UD^\mu U^{-1}UD^\nu U^{-1}-UD^\nu U^{-1}UD^\mu U^{-1}) &(2.86)\\&=UF^{\mu\nu}U^{-1} &(2.87)\\&=F^{\mu\nu} &(2.88)\end{aligned}$$

---

iv. 以上が数学的要請のみから導出される事実である．左辺の相互作用項は実験から決めるしかないが，ここから e が決まり，すべてが決定されることになる．

v. 古典力学を思いだす．古典力学でもフルに対称性を要求してフリーな場合の

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}(t)=0 \tag{2.70}$$

と導かれる．力が加わる一般的な場合は

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}(t)=\vec{F} \tag{2.71}$$

の右辺は実験事実からきまる．

となる．

ところで，場の強さ $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu$ の質量次元は 2 であるので，$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ などは許され，$F^{\mu\nu}F^\rho_\nu F_{\rho\mu}$ などは禁止される．許されるすべてを含めた Lagrangian は量子電磁力学の Lagrangian と呼ばれ，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = \frac{-1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \tag{2.89}$$

である．