Statistical Mechanics

Toshiya Tanaka

2021 年 11 月 14 日

概要

確率を物理に用いることの妥当性について，Chebyshev 不等式と大数の法則の物理的解釈から議論する．なお，本稿の議論は，ほとんど [田 08] の焼き直しである．

1 測定精度と確率

Theorem 1.1 (Chebyshev 不等式)
確率分布 $\vec{p}$，物理量 f とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，次の不等式が成り立つ．

$$\mathrm{Prob}(|f - \langle f\rangle_{\vec{p}}| \geq \varepsilon) \leq \left(\frac{\sigma_{\vec{p}}[f]}{\varepsilon}\right)^2 \tag{1.1}$$

ここで，$\langle\bullet\rangle$ は期待値で $\sigma[\bullet]$ はゆらぎ (標準偏差) である．

<u>*Derivation.*</u> まず，次の量を定める．

$$\theta := \begin{cases} 1, & (|f_i - \langle f\rangle_{\vec{p}}| \geq \varepsilon) \\ 0, & (|f_i - \langle f\rangle_{\vec{p}}| < \varepsilon) \end{cases} \tag{1.2}$$

これは，物理量の期待値からのズレが，ε より大きいとき 1, そうでないとき 0 を返す関数で，θ の期待値は Eq.(1.1) の左辺の確率に等しい．

ところで，その期待値は

$$\sum_i \theta_i p_i \leq \sum_i \left(\frac{f_i - \langle f\rangle_{\vec{p}}}{\varepsilon}\right)^2 \tag{1.3}$$

$$= \left(\frac{\sigma_{\vec{p}}[f]}{\varepsilon}\right)^2 \tag{1.4}$$

と評価でき，不等式が示せる． □

Chebyshev 不等式 (1.1) は次のように解釈することができる．物理量 f のゆらぎ $\sigma_{\vec{p}}[f]$ が測定精度より十分小さければ，すなわち $\sigma_{vecp}[f]/\varepsilon \ll 1$ ならば，測定値 f の期待値 $\langle f\rangle_{\vec{p}}$ からのずれが有意に現れる[i.]確率は a.s.[ii.] ゼロである．

2 試行回数と確率

Theorem 2.1 (大数の法則)
f を物理量，$\vec{p}$ を一つの系の確率分布とし，同じ系を N 個考える．全系の確率分布が $\tilde{\vec{p}}$ とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Prob}_{\tilde{\vec{p}}}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i - \langle f\rangle_{\vec{p}}\right| \geq \varepsilon\right) = 0 \tag{2.1}$$

が成り立つ．すなわち，a.s. で平均値が出るということ．

i. 測定の分解能 ε より大きく現れる．
ii. almost surely

Derivation. 一つの系の物理量 f の期待値を μ，f^2 の期待値を σ^2 とする．このとき，ゆらぎは $\sigma = \sqrt{\nu - \mu^2}$ である．今，平均値という物理量を

$$m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i \tag{2.2}$$

とし，この期待値は

$$\langle m \rangle_{\tilde{p}} = \mu \tag{2.3}$$

m^2 の期待値は

$$\langle m^2 \rangle_{\tilde{p}} = \frac{1}{N^2}\sum_i \sum_j \langle f_i f_j \rangle_{(\vec{p}_i, \vec{p}_j)}. \tag{2.4}$$

これは独立性より，$i \neq j$ については

$$\langle f_i f_j \rangle = \langle f_i \rangle_{\vec{p}} \langle f_j \rangle_{\vec{p}} \tag{2.5}$$

$$= \mu^2, \tag{2.6}$$

$i = j$ については

$$\langle f_i f_i \rangle = \langle f_i^2 \rangle = \nu \tag{2.7}$$

と計算できて，

$$\langle m^2 \rangle_{\tilde{p}} = \frac{1}{N^2}\big((N^2 - N)\mu^2 + N\nu\big) \tag{2.8}$$

となる．[iii] 全体のゆらぎは

$$\sigma_{\tilde{p}}[f] = \sqrt{\frac{\nu - \mu^2}{N}} \tag{2.9}$$

$$= \frac{\sigma_{\vec{p}}[f]}{\sqrt{N}} \tag{2.10}$$

となる．ここで Chebyshev 不等式 (1.1) を用いると，

$$\mathrm{Prob}_{\tilde{p}}\left(\left| \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i - \langle f \rangle_{\vec{p}} \right| > \varepsilon \right) = \left(\frac{\sigma_{\vec{p}}[f]}{\sqrt{N}} \right) \underset{N\to\infty}{\to} 0 \tag{2.11}$$

と示せる． □

具体例を一つ．

Example 2.2
$N \sim 10^{24}$ 個のサイコロを振ることを考える．測定精度を $\varepsilon \sim 10^{-8}$ とすると，平均値

$$m := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i \tag{2.12}$$

が期待値 3.5000000 に一致しない確率は，$\langle m \rangle = 7/2$，$\langle m^2 \rangle = 35/(12N) + (7/2)^2$，$\sigma[m] = \sqrt{35/12N}$ なので[iv] Chebyshev 不等式 (1.1) より

$$\mathrm{Prob}(|m - 7/2| > 10^{-8}) < \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) \sim \left(\frac{10^{-12}}{10^{-8}}\right)^2 = 10^{-8} \tag{2.13}$$

となる． □

---

iii. めんどくて添字抜かしたので，考えて．

iv. 大数の法則の導出と同様にできる．

今，χ をある事象 A が起きたとき 1，そうでないとき 0 を返す関数として，A が起こる確率は，$p = \langle \chi \rangle$ である．このとき，大数の法則で $f = \chi$ と置くと，次が成り立つ．

Corollary 2.3
N 回の試行で事象 A がおこる回数を N_A とする．このとき，

$$\lim_{N \to \infty} \mathrm{Prob}\left(\left| \frac{N_A}{N} - p \right| \geq \varepsilon \right) = 0 \tag{2.14}$$

が成り立つ．

この系は，N が大きいとき，N_A/N の比という物理的なものが，確率 p と a.s. で等しいと解釈できる．

3　結論

- Chebyshev 不等式 (1.1) より，測定値が期待値からずれる確率を具体的に評価できる．
- 大数の法則およびその系より，たくさんあれば物理量の比と確率が a.s. で等しい．

参考文献

[田 08] 田崎晴明, **統計力学**, 新物理学シリーズ / 山内恭彦監修, no. 37-38, 培風館, 2008.