「量子と古典の物理と幾何」研究会 @オンライン

保存量の一般化

関数から微分形式へ

谷村省吾

名古屋大学情報学研究科

2022 年 4 月 28, 29 日

微分方程式で定められる力学系

- 力学変数

$$\vec{x}\colon \mathbb{R} \ni t \mapsto \vec{x}(t) = \left(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)\right) \in \mathbb{R}^n$$

- ベクトル場

$$\vec{V}\colon \mathbb{R}^n \ni \vec{x} \mapsto \vec{V}(\vec{x}) = \left(V^1(\vec{x}), V^2(\vec{x}), \ldots, V^n(\vec{x})\right) \in \mathbb{R}^n$$

- 運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \vec{V}(\vec{x}(t))$$

- 初期値問題の解 (flow)

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{F}(\vec{x}(0), t) \\ &= \phi_t(\vec{x}(0)) \end{aligned}$$

- 関数 (物理量，observable) $A\colon \mathbb{R}^n \ni x \mapsto A(x) \in \mathbb{R}$
- A の時間変化

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A(x(t)) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial x^i} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \\
&= \sum_i \frac{\partial A}{\partial x^i} V^i \\
&= \vec{V} \cdot \mathrm{grad}\, A \\
&= \langle \mathrm{d}A\,, \vec{V} \rangle \\
&= i_V\, \mathrm{d}A
\end{aligned}
$$

- 保存量 $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 0$

- 保存量 A があると，解軌道は保存量の定値面に限定される．
- A の値 c の等値集合 $A^{-1}(c) = \{\vec{x} \mid A(\vec{x}) = c\}$
- 独立な保存量 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ があれば，解軌道の存在領域を $(n-k)$ 次元に下げられる．
- $k = n - 1$ 個の保存量が見つかれば 1 次元的な解軌道が決まる．超可積分

多様体上の力学系

- M: n 次元多様体，$x \in M$
- $\vec{V}$: M 上のベクトル場
- 運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \vec{V}(x)$$

- 解としてのフロー $x(t) = \phi_t(x(0))$
- ω: M 上の p-form
- $\phi_t^* \omega$: ϕ_t による ω の pullback
- Lie 微分 (ベクトル場 $\vec{V}$) に沿った ω の時間変化)

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \phi_t^* \omega \right|_{t=0} =: \mathcal{L}_V \omega$$

Example 1

1-form $\omega = \omega_i \, \mathrm{d}x^i$, $\vec{V} = V^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ であれば,

$$\mathcal{L}_{\vec{V}} \omega = V^k \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} \, \mathrm{d}x^i + \omega_k \frac{\partial V^k}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^i$$

保存微分形式

- $\mathcal{L}_{\vec{V}}\omega = 0$ を満たす ω のこと

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{\vec{V}}\omega = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \phi_t^*\omega = \omega \\
\Leftrightarrow \quad & \int_{C(t)} \omega = \int_{\phi_t C(0)} \omega = \int_{C(0)} \phi_t^*\omega = \int_{C(0)} \omega
\end{aligned}
$$

- $C(t)$ はこの意味で保存量
- 特に $p = 0$ の場合が，$A(x(t)) = A(x(0))$

cohomology 保存量

- p-form ω が closed($\mathrm{d}\omega = 0$)) かつ $\mathcal{L}_{\vec{V}}\omega = \mathrm{d}\alpha$ なる $(p-1)$-form α が存在.
- この場合，$\phi_t^*\omega - \omega = \mathrm{d}\beta$ なる $(p-1)$-form β が存在.

$$
\begin{aligned}
\int_{C(t)} \omega &= \int_{\phi_t C(0)} \omega \\
&= \int_{C(0)} \phi_t^* \omega \\
&= \int_{C(0)} (\omega + \mathrm{d}\beta) \\
&= \int_{C(0)} \omega + \int_{\partial C(0)} \beta \\
&= \int_{C(0)} +0.
\end{aligned}
$$

保存微分形式

$\mathcal{L}_{\vec{V}}\omega = 0$, $\phi_t^*\omega = \omega$

積分保存量，保存積分

$$\int_{C(t)} \omega = \int_{C(0)} \omega$$

特に 0-form A の場合 $A(x(t)) = A(x(0))$

- 一本の解軌道に関する保存量ではなく，無数の解軌道族に対する保存量になっている．
- ただ，このような保存量があったからといって解軌道の絞り込み・決定に役立つか？
- レベルセットみたいなものはないか？
- cotangent bundle にはあると言えるか？

Hamilton 力学系の場合

- M : $2n$ 次元 manifold
- ω : symplectic-form
  M 上での 2-form で $\mathrm{d}\omega = 0$ non degenerate
- $H : M \to \mathbb{R}$ Hamiltonian
- $\vec{V}_H$: Hamilton vector field

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= \omega(\bullet, \vec{V}_H) = -\omega(\vec{V}_H, \bullet) \\ &= \frac{\partial H}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i \end{aligned}$$

$$\vec{V}_H = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

symplectic form ω 由来の保存量 $Q = \int_C \omega \wedge \cdots \wedge \omega$

Q のよいところ.

- Hamiltonian が explicit に time-dependent $H(q, p, \lambda(t))$ であっても保存量であり続けること.
- 外場や制御変数 $\lambda(t)$ を時間変化させるシステムといえば,

熱力学系 (熱機関) だ！

純粋力学の立場から見た熱力学

少自由度，シンプル

work reservor, 変数 $\vec{w}$

相互作用

object system, 変数 $\vec{S}$

エネルギーのやり取り

heat reservor, 変数 $\vec{h}$

大自由度，複雑，力学的挙動がよくわからない

課題

1. symplectic form 以外の保存微分形式を持つ力学系