場の量子論の数学と 2 次元 4 次元対応

2022 年 1 月 29 日

目次

1　2 次元 4 次元対応とは

- 「物理」では，二次元の共形場理論，特に Liuville 理論と四次元のゲージ理論，特に SU(2) の対応.
- 数学では，無限次元代数，Virasoro とインスタントンモジュライ空間の幾何の対応

2009 年に見つかったときにはびっくり．対応の両側とも 35 年くらい別個に数理物理で研究されていた．[*1]なぜ対応があるか．六次元の"$\mathcal{N}=(2,0)$ 理論"を $S^4\times C$(Riemann 面) で考える．C が小さい場合 C で定まる四次元の QFT があり S^4 が小さいと S^4 で定まる二次元の QFT がある．ここでトポロジカルな物理量を考える．トポロジカルというのは S^4 と C のサイズによらず，どちらで計算しても答えがかわらないものである．

2　場の量子論とはどんなものか．

0+1d QFT = 1d QFT とは普通の量子力学のことである．$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間 (状態空間) とし，この上の作用素 $A_1, A_2, \ldots$ を考える．この中で時間発展を決める特別なものがあり，それを Hamiltonian といい H と書くことにする．一次元時空の各点に Hilbert 空間があり，t_1 の時間発展を $e^{-t_1 H}$ が指定する．

閉じた 1d 多様体に対しては二点 A, B があると

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}}\, e^{-t_1 H} A e^{-t_2 H} B \in \mathbb{C} \tag{1}$$

という複素数を対応させる．

開いた 1d 多様体に対しては線型写像

$$e^{-tH}\colon \mathcal{H}\to\mathcal{H} \tag{2}$$

を対応させる．

これらは空間の切り貼りに対して compatible である．

一般化すると，(D-1)+1d QFT = D-d QFT Q とは境界なし D-d 多様体 M を与えられると分配関数 $Z_Q(M)\in\mathbb{C}$ を出力し，さらにいろいろと条件を満たすものである．

場の量子論の作り方は大きく分けて三通りある．

[*1] いろいろ precursor はあったが.

- 公理系を満たすデータを手で与える．
  e.g. 自由場の理論，topological QFT
- 経路積分を行う．
  e.g. 4d pure gauge theory

$$Z_{\mathrm{QFT},d=4,G}(M) \coloneqq \int_{M\text{ 上の }G\text{ 接続全体}} \exp\left\{-\int \mathrm{tr}\,|F|^2\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M\right\}[\mathcal{D}\,\mathrm{Vol}] \tag{3}$$

  – 数学的にきちんと構成し，性質を調べたら賞金一億円
  – スパコン上に近似して乗せられる．これは実験をよく再現する．
- 超弦理論に押し付ける．
  e.g. 10d の quantum gravity theory

3 2d Liouville と 4d $\mathcal{N}=2$ SU(2) $w/4$ flavors

2d Liuville は経路積分による構成 (2) で始まったが，結局直接定義する構成 (2) になった 2d 共形場理論である．
f を holomorophic な $\mathbb{C}$ 上の変換として微小変換 $z \mapsto z' = z + \sum_n \epsilon_n z^{n+1}$ で与えられる．
生成子は $\xi_n \coloneqq z^{n+1}\partial_z, \bar{\xi}_n \coloneqq \bar{z}^{n+1}\bar{\partial}_z$ で交換関係は

$$[\xi_m, \xi_n] = (m-n)\xi_{m+n} \tag{4}$$

$$[\bar{\xi}_m, \bar{\xi}_n] = (m-n)\bar{\xi}_{m+n} \tag{5}$$

$$[\xi_m, \bar{\xi}_n] = 0 \tag{6}$$

4 6d からの視点

参考文献