

磁性体の統計力学

Toshiya Tanaka

2022 年 4 月 7 日

1 方針

大まかな流れは、次のようである。

1. 分配関数の計算
2. エネルギー，磁化，磁化率の期待値の計算
3. 温度，磁場に対する振る舞いを考察

この方針は変えず，個々の系に対し様々なテクニックを使う。

2 すべての spin が独立にある場合

N 粒子系を考える．粒子 j の spin を $\sigma_j = \pm 1$ で指定し，スピン角運動量の固有値は $\pm\mu_0$ とする．磁場 H 中にある系のエネルギー固有値は

$$E = - \sum_{j=1}^N \mu_0 \sigma_j H \quad (1)$$

で，一つの粒子だけに注目したとき

$$E_j = -\mu_0 \sigma_j H \quad (2)$$

である．spin1 つの期待値は期待値の定義から

$$\langle \sigma_j \rangle = \frac{1}{Z_j(\beta)} (\mu_0 e^{\beta \mu_0 H} - \mu_0 e^{-\beta \mu_0 H}) \quad (3)$$

$$= \mu_0 \tanh(\beta \mu_0 H) \quad (4)$$

である．

独立なので，一粒子の情報がわかれば十分で，一粒子の分配関数は

$$Z_j(\beta) = e^{\beta \mu_0 H} + e^{-\beta \mu_0 H} \quad (5)$$

$$= 2 \cosh(\beta \mu_0 H) \quad (6)$$

である．よって， N 粒子あったとき，分配関数は

$$Z(\beta) = (2 \cosh(\beta \mu_0 H))^N \quad (7)$$

となる．エネルギー期待値は

$$\langle H \rangle = - \frac{\partial}{\partial \beta} \log(2 \cosh(\beta \mu_0 H)) \quad (8)$$

$$= -N \mu_0 H \tanh(\beta \mu_0 H) \quad (9)$$

である．

Definition 2.1 (磁化)

磁化を

$$m = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mu_0 \sigma_j \quad (10)$$

と定める。スピンの平均値と思ってよい。

磁化の期待値は、Eq. (4) と期待値の線形性から

$$\langle m \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mu_0 \langle \sigma_j \rangle \quad (11)$$

$$= \mu_0 \tanh(\beta \mu_0 H) \quad (12)$$

である。

Definition 2.2 ($H = 0$ での磁化率)

磁化率 χ を

$$\chi = \left. \frac{\partial m}{\partial H} \right|_{H=0} \quad (13)$$

と定める。磁場 H を揺すったときの磁石になりやすさと解釈できる。

本筋とは外れるが、エントロピーを計算する。そのためにまず、Helmholtz free energy の計算をする。

$$F(\beta, H, N) = -\frac{1}{\beta} \log Z(\beta) \quad (14)$$

$$= -N k_B T \log \left(2 \cosh \left(\frac{\mu_0 H}{k_B T} \right) \right) \quad (15)$$

ここから、エントロピーが計算できて、

$$S(\beta, H, N) = -\frac{\partial}{\partial T} F(\beta, H, N) \quad (16)$$

$$= N k_B \frac{\mu_0 H}{k_B T} \left(\cosh \left(\frac{\mu_0 H}{k_B T} \right) - \log \left(2 \cosh \left(\frac{\mu_0 H}{k_B T} \right) \right) \right) \quad (17)$$

となり、 H/k_B 単位で現れる。これを用いて、 $(T_1, H_1) \rightarrow (T_2, H_2)$ の断熱準静操作を行うとき、エントロピーが普遍なので、この単位も不変である。磁場 H をゆっくり変えることで温度を変えることが^{*1}できる。これを断熱消磁と呼ぶ。

References

[田崎 08] 田崎晴明. 統計力学. 新物理学シリーズ / 山内恭彦監修, No. 37-38. 培風館, 2008.

^{*1} 主に低温を作る。