相対論的量子力学

Toshiya Tanaka

May 3, 2022

1 Klein–Gordon 方程式

Klein–Gordon 方程式は

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\phi(t,\vec{x}) = 0 \tag{1}$$

で，電荷 q をもつときは共変微分 $D_\mu \coloneqq \partial_\mu + iqA_\mu$ を用いて

$$\left(D_\mu D^\mu + m^2\right)\phi(t,\vec{x}) = 0 \tag{2}$$

である．

1.1 非相対論極限

Eq.(2) の非相対論極限をとると Schrödinger 方程式が出ることを議論する．非相対論極限では静止エネルギーよりもポテンシャルや運動などのエネルギーが小さいことをいう．$m \gg qA^0, \mathrm{d}\phi\,/\,\mathrm{d}t$．相対論特有の静止エネルギー項を消すため，Klein–Gordon 方程式の解 $\phi(t,\vec{x})$ と Schrödinger 方程式の解 $\psi(t,\vec{x})$ は $\phi(t,\vec{x}) = e^{-imt}\psi(t,\vec{x})$ と細工をしなければならない．

$\psi(t,\vec{x})$ を Eq. (2) に代入して，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iqA^0\right)^2 \phi = \left((\vec{\nabla} - iq\vec{A})^2 - m^2\right)\phi \tag{3}$$

となる．左辺を計算すると[*1]，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} + iqA^0\right)^2 \phi &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + iqA^0\right)e^{-imt}\left(-im\psi + \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} + iqA^0\psi\right) \qquad (4)\\ &= e^{-imt}\left(-m^2\psi - 2im\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + iq\frac{\partial A^0}{\partial t}\psi + iqA^0\frac{\partial\psi}{\partial t} + 2mqA^0\psi + iqA^0\frac{\partial\psi}{\partial t} - q^2\left(A^0\right)^2\psi\right) \qquad (5)\end{aligned}$$

である．非相対論極限では m が支配的で他のエネルギーは小さいので，小さい量が単独で存在する項[*2]を無視して

$$\to e^{-imt}\left(-m^2\psi - 2im\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} + 2mqA^0\psi iqA^0\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} - q^2\left(A^0\right)^2\psi\right) \tag{6}$$

となり，

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla} - iq\vec{A}\right)^2 + qA^0\right)\psi \tag{7}$$

のように Schrödinger 方程式に帰着する．

References

[坂本 14] 坂本眞人. 場の量子論：不変性と自由場を中心にして. 量子力学選書 / 坂井典佑, 筒井泉監修. 裳華房, 2014.

[*1] [坂本 14, p.55] では，関数 $f(t)$ に対して成り立つ公式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n e^{-imt} f(t) = e^{-imt}\left(\frac{\partial}{\partial t} - im\right)^n f(t)$$

を用いる，と書いてあるが，微分と関数の和の冪 $\left(\partial/\partial t + A^0(t)\right)^n$ に対しても成り立つのだろうか．

[*2] $-2im\ \partial\psi/\partial t$ などは m がかかっているので残すが，$iq\ \partial A^0/\partial t$ は落とす．