第 22 回数物セミナー特別講義
正準交換関係について

Stone - von Neumann の定理とその応用としての Segal - Bergmann 空間

March 28, 2022

Outline

1. 作用素についての準備
2. Stone の定理

作用素についての準備

- Hilbert 空間とは完備な内積空間
- Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の作用素 $(A, \mathrm{Dom}\, A)$ とは，
dense な部分空間 $\mathrm{Dom}\, A \subset \mathcal{H}$ と線形写像 $A\colon\ \mathrm{Dom}\, A \to \mathcal{H}'$ の組
- $(A, \mathrm{Dom}\, A)$ が有界なとき，
つまり，ある定数 C が存在して，$\forall \psi \in \mathrm{Dom}\, A$, $\|A\psi\| \leq C\|\psi\|$ のとき，$\mathrm{Dom}\, A = \mathcal{H}$ として拡張が一意に決まる．

例

Example 1.1 (有限次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ 上の線形写像)

$v = \sum_{j=1} n a_j e_j$, $w = \sum_{j=1}^{n} b_j e_j$ のとき，$\langle v, w\rangle \coloneqq \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j b_j$

Example 1.2

$$L^2(\mathbb{R}) \coloneqq \left\{ \text{可測関数 } f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \right\}, \tag{1}$$

$$\langle f, g\rangle \coloneqq \int_{\mathbb{R}} f(\bar{x}) g(x) \, \mathrm{d}x \,, \tag{2}$$

$$\mathrm{Dom}(X) \coloneqq \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid x f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \} \tag{3}$$

$$X\colon \ \mathrm{Dom}(X) \to L^2(\mathbb{R}) \tag{4}$$

$$f(x) \mapsto x f(x) \tag{5}$$

作用素について

- 作用素 $(A, \mathrm{Dom}\,A)$ と $(B, \mathrm{Dom}\,B)$ が同じであるとは
  - $\mathrm{Dom}\,A = \mathrm{Dom}\,B$
  - $\forall\psi \in \mathrm{Dom}\,A;\ A\psi = B\psi$
- 以降，$A = B$ と表す
- 作用素 $(A, \mathrm{Dom}\,A)$ の共役作用素 $(A^*, \mathrm{Dom}\,A^*)$ とは

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Dom}\,A^* &:= \{\psi \in \mathcal{H} \mid \exists\phi \in \mathcal{H}; \forall\langle\psi, A\psi\rangle = \langle\phi, \psi\rangle\}, && (6)\\
&= \{\psi \in \mathcal{H} \mid \mathcal{H}\ \text{上の汎関数}\ \langle\psi, A\bullet\rangle\ \text{が有界である.}\}, && (7)\\
A^*\psi &:= \phi && (8)
\end{aligned}
$$

- 作用素が有界であるとき，$\mathrm{Dom}\,A^* = \mathcal{H}$

作用素について

- 作用素 $(A, \mathrm{Dom}\, A)$ が自己共役であるとは

$$A = A^* \tag{9}$$

- このとき，

$$\forall\psi \in A; \quad \langle\psi, A\psi\rangle = \langle\psi, A\psi\rangle = \overline{\langle\psi, A\psi\rangle} \tag{10}$$

より，$\langle\psi, A\psi\rangle \in \mathbb{R}$．逆は成り立たない．

- Eq. (10) の条件を対称という．

作用素について

Axiom 1.3

量子力学では,

- 状態を Hilbert 空間の元
- 物理量を Hilbert 空間上の自己共役作用素

として考える.

Stoneの定理

- 一径強連続ユニタリ群 $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ とは任意の $t\in\mathbb{R}$ で
  - $U(t)\colon \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ がユニタリ作用素
  - $U(s+t)=U(s)U(t)$
  - $\lim_{t\to 0}\|U(t)\psi-\psi\|=0$

Stoneの定理

Theorem 2.1 (Stoneの定理)

任意の一径強連続ユニタリ群 $\{U(t)\}$ に対し

- $\mathrm{Dom}\, A := \{\psi \in \mathcal{H} \mid (U(t)\psi - \psi)/(it)$ が $t \to 0$ で収束$\}$
- $A\psi := \lim_{t\to 0}(U(t)\psi - \psi)/(it)$

とさだめると，A は自己共役作用素である．