

# 数物系サーバー新歓ミニセミナー

## Stern–Gerlach の実験から始める量子力学

April 10, 2022

# はじめに

まず、聴衆のみなさんのバックグラウンドをお尋ねします.

1. 新 B1 の方.
  2. 量子力学なんてなにもわからないよ, という方.
  3. ちょっとだけ勉強したことがあるよ, という方.
  4. 量子力学を完全に理解していて, 冷やかしに来た方.
- 1, 2 あたりの方に向けた雑談程度の講演であることはご理解ください.

# Introduction

量子力学の教科書の最初の話は、古典論が破綻する実験事実が書かれることが多い。

## 伝統的な Introduction

- 黒体輻射 [猪木 94, §1.1]
- 光電効果 [猪木 94, §1.2]
- Compton 散乱 [猪木 94, §1.3], [砂川 91, §1.1, (1)]
- Bohr の原子模型 [猪木 94, §1.6], [砂川 91, §1.1, (2)]

歴史的には重要であるが、破綻する古典論は統計力学・相対論など量子力学を習う段階ではしないのが普通。

## 今回の Introduction

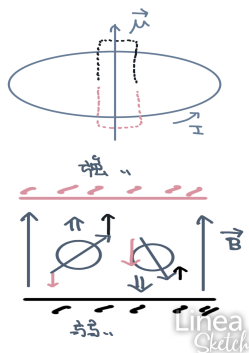
- Stern–Gerlach の実験 [桜井 15], [堀田 21]
- 破綻する古典論は電磁気学

# 必要な古典論

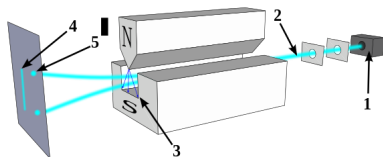
本講演では、古典ではだめで量子論が必要であるということを感じ覚的に理解することが目的である。

そのために必要な古典論の感覚を共有したい。

- 電流は電子の流れであると考える。
- 電流のループがあると磁気モーメント  $\vec{\mu}$  が発生する。棒磁石みたいなイメージ。
- これを不均一磁場  $\vec{B}$  中に入れると、力  $\vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$  を受ける。
- とにかく、**力を受ける** こと、それが**内積**で与えられることが大事。
- 内積なので、 $\vec{\mu}$  と  $\vec{B}$  のなす角  $\theta \in [0, 2\pi)$  による。



# SG の実験 I



SG1 電子発射装置

SG2 電子線

SG3 磁場

SG4 古典論からの予測

SG5 実験結果

Figure 1: SG の実験装置. Wikipedia より拝借.

## SGE の結果 1

- 前述した古典論からは、角度  $\theta$  に応じて連続的に分布する. (SG4)
- 実際は上下二点のみに等しい強度で現れる. (SG5)

## SG の実験 II

連続と思われていたものが実は離散だった，というのは他の導入にも共通している。

この電子は二種類に分類できて，上の点にゆくものを  $|\uparrow\rangle$ ，下の点にゆくものを  $|\downarrow\rangle$  と書くことにする。

### SGE の結果 2

同じ設定で装置 (SG3) を 90 度傾け，x 方向の測定，y 方向の測定，また，どれでもない斜めの方向の測定を行う。

このとき，結果 1 と同様に測定した方向に二点に分かれる。

### SGE の結果 3

装置を二つ用意して，z 方向の測定を行った後  $|\uparrow\rangle$  だったものに対して，再び z 方向の測定を行うと， $|\uparrow\rangle$  しか観測できない． $|\downarrow\rangle$  に関しても同様。

## SGE の結果 4

装置を二つ用意して、 $z$  方向の測定を行った後  $|\uparrow\rangle$  だったものに対して、 $x$  方向の測定をおこなうことを考える。このとき、電子は  $x$  方向に二点に分かれる。これに名前をつけて、 $|\rightarrow\rangle$ ,  $|\leftarrow\rangle$  と呼ぶことにする。 $|\downarrow\rangle$ ,  $y$  方向に関しても同様。

$x$  方向の測定と  $z$  方向の測定は関係しないことがわかる。

## SGE の結果 5

装置を三つ用意して、 $z$  方向の測定を行った後  $|\uparrow\rangle$  だったものに対して、 $x$  方向の測定を行う。この測定で  $|\rightarrow\rangle$  だったものに対して再び  $z$  方向の測定を行うと電子は二点に分かれる。

# 定式化 I

さて、以上のことは量子力学では次のように定式化される。

## 量子力学の定式化の一部

- 電子の状態  $|\psi\rangle$  は  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  の線形結合でかける．すなわち  $|\psi\rangle = c|\uparrow\rangle + d|\downarrow\rangle, c, d \in \mathbb{C}$ . (重ね合わせ)
- $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  は次の意味で直交する． $\langle\uparrow|\downarrow\rangle = \langle\downarrow|\uparrow\rangle = 0$ . 規格化もしておく． $\langle\uparrow|\uparrow\rangle = \langle\downarrow|\downarrow\rangle = 1$ . ここで  $\langle\bullet|\bullet\rangle$  は内積である．
- 状態  $|\psi\rangle$  の電子に  $z$  方向の測定をしたとき、状態  $|\uparrow\rangle$  は確率  $|\langle\uparrow|\psi\rangle|^2 = |c|^2$  で観測される． $|\downarrow\rangle$  についても同様．(確率解釈)
- $|\uparrow\rangle$  を観測した場合、測定後の状態は  $|\uparrow\rangle$  になる． $|\downarrow\rangle$  を観測した場合、 $|\downarrow\rangle$  になる．



## 定式化 II

これを用いると SG の実験結果は次のように説明できる.

- 一度目の  $z$  方向の測定では,  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  も完全にランダムにあると思うと, 出現確率は  $1/2$ .
- 以降, 一度目の測定で  $|\uparrow\rangle$  を観測したとする.
- 二度目に  $z$  方向の測定をすると,  $|\uparrow\rangle$  を観測する確率は  $|\langle\uparrow|\uparrow\rangle|^2 = 1$ ,  $|\downarrow\rangle$  を観測する確率は  $|\langle\uparrow|\downarrow\rangle|^2 = 0$ .
- 二度目に  $x$  方向の測定を行うと, 確率  $1/2$  で  $|\rightarrow\rangle$ , 確率  $1/2$  で  $|\leftarrow\rangle$  を観測した. これより

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle, \quad |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle$$

と構成できる. 実際, 先に述べたルールに従うと  $|\rightarrow\rangle$  が観測される確率は  $|\langle\rightarrow|\uparrow\rangle|^2 = 1/2$  である.

- 二度目に  $|\rightarrow\rangle$  だったとすると, 測定後は  $|\rightarrow\rangle$  である. これより, 三度目に  $z$  方向の測定を行うと,  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  がそれぞれ  $1/2$  の確率で出現する.

# Summary

- SG の実験は古典論では連続と思われるものが、離散的に分布することを見た。
- さらに、方向を変えた SG の実験を連続で行うと「不思議なこと」が起こった。
- これを量子力学の枠組みでどのように説明しているのかを述べ、具体的に計算した。
- 線形代数を習うと、この枠組みは二次元の計量付き線形空間論であることがわかる。
- 物理では、量子力学がその舞台であるミクロな素粒子などでもあらわれるのはもちろん、統計力学や低温のマクロなものにも本質的役割を果たす。
- 一般の量子力学は無限次元で議論されるので、数学の人はこれが Hilbert 空間やそのうえの作用素論になる。(勉強して教えて～.)
- 以降の発展を示唆して、講演を終える。どうもありがとうございました。

# 参考文献 I

- [砂川 91] 砂川重信.  
量子力学.  
岩波書店, 1991.
- [桜井 15] 桜井純, Napolitano Jim, 桜井明夫.  
現代の量子力学.  
物理学叢書 / 小谷正雄 [ほか] 編, No. 109. 吉岡書店, 第 2 版,  
2015.
- [猪木 94] 猪木慶治, 川合光.  
量子力学.  
講談社, 1994.
- [堀田 21] 堀田昌寛.  
入門現代の量子力学: 量子情報・量子測定を中心として.  
講談社, 2021.