$0 \leq A_i \leq K (1 \leq i \leq N)$、$A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_N = 0$ を満たす数列 $A_1, A_2, \ldots, A_N$ は何通りありますか。（$1 \leq N \leq 1000$、$0 \leq K \leq 2^{50}$）

非負整数 x の i ビット目を $f(x, i)$ とすると、$A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_N = 0$ という条件は、次のように言い換えられます。

$$\text{すべての正整数 } j \text{ について、} \sum_{i=1}^{N} f(A_i, j) \text{ は偶数}$$

つまり、A_i の 2 進数表記での各桁に注目し、1 が偶数個になるような数列 A が何通りあるかを求めればよいです。そこで次の DP を考えます。

$dp[i][j] :=$ (上位から i ビット目までを見たときに、K 未満と確定した要素の数が j 個のときの A の通り数)

このとき、残りの $N - j$ 個については、まだ K 未満かどうか確定していません。よって、K にするか K 未満にするかを選択可能です。

$dp[i][j]$ が既に求まっているものとして遷移を考えます。ここで、K の 2 進数表記での桁数を D とおくことにします。

(1) $f(K, D - i) = 0$ **のとき**

$N - j$ 個の要素については、K を超えてはいけないので 0 を選ぶ必要があります。残りの j 個の要素については、0 と 1 のどちらを選択することも可能ですが、1 の個数は偶数でなければならないため 2^{j-1} 通りになります。ということで遷移は以下です。

$$dp[i + 1][j] = dp[i][j] \times 2^{j-1}$$

(2) $f(K, D - i) = 1$ **のとき**

j 個の要素については、$N - j$ が奇数の場合は奇数個の 1 を、偶数の場合は偶数個の 1 を選ぶことになり、どちらも 2^{j-1} 通りです。

$N - j$ 個の要素については、0 と 1 のどちらを選択することも可能です。そして、k 個の 0 を選択すると、K 未満に確定する要素が k 個増えるため、遷移先は $dp[i + 1][j + k]$ になります。$N - j$ 個から k 個の 0 を選ぶ方法は ${}_{N-j}C_k$ 通りあるため、最終的には次のような遷移になります。

$$dp[i + 1][j + k] = dp[i][j] \times 2^{j-1} \times_{N-j} C_k$$

ここで一つ注意すべき点があり、$j = 0$ かつ $k = 0$ かつ N が奇数のときは、$\sum_{l=1}^{N} f(A_l, D - i)$ が必ず奇数となるため 0 通りです。

このような DP を行ったあと、$\sum_{i=0}^{N} dp[D][i]$ が答えとなります。計算量は $O(N^2 \log K)$ となり間に合います。