2. Observable Quantites

2008/08/13, Toshiya Namikawa

ABSTRACT

理論の正当性の是非を決めるのは実験や観測である。そのため、理論から導き出される結果が実験や観測で確認できることが望ましい。場の量子論は相互作用も当然扱えるはずなので、ここでは場の量子論から導き出されると考えられる状態遷移確率を既知として、崩壊確率や散乱断面積の表式をあらかじめ求めておく。

TABLE OF CONTENTS

1 単位時間あたりの崩壊確率

1.1 S 行列

まずはじめに S 行列というものを定義しておく。これは単に、始状態 α から終状態 β への遷移確率振幅のことで、

$$S_{\alpha\beta} = \langle\, \beta\, f \,|\, \alpha\, i \,\rangle \tag{1}$$

で定義される。しかし、$\langle\, \beta\, f \,|$ と $|\, \alpha\, i \,\rangle$ はそれぞれ終状態および始状態の状態空間 V_f および V_i に入っているので、計算上は不便である。そこで S 演算子として

$$\langle\, \beta\, f \,|\, \alpha\, i \,\rangle = S_{\alpha\beta} \equiv \langle\, \beta\, i \,|S|\, \alpha\, i \,\rangle \tag{2}$$

を定義しておくと、計算上は始状態の状態空間 V_i での計算さえ行えばよいことになる。また、V_i と V_f が等しいと仮定し、規格化された直交基底で張れているとすれば、$\langle\, \alpha\, i \,|$ の完全性

$$\sum_\alpha |\, \alpha\, i \,\rangle\langle\, \alpha\, i \,| = 1 \tag{3}$$

により

$$\langle\, \beta\, f\, | = \langle\, \beta\, i\, | S \tag{4}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned}\langle\, \beta\, i\, | S S^{\dagger} |\, \beta\, i\,\rangle &= \langle\, \beta\, f\, |\, \alpha\, f\,\rangle \\ &= \langle\, \beta\, i\, |\, \alpha\, i\,\rangle = \langle\, \beta\, i\, | 1 |\, \alpha\, i\,\rangle \end{aligned} \tag{5}$$

となり、S 演算子のユニタリー性が証明できた。

S 行列は相互作用によって状態の変化が起こった場合の遷移確率であるから、古典場で計算できるので、場を量子化した場合にも計算することができるはずである。したがって、S 行列が求まるとそれに応じて得られる崩壊確率、散乱断面積などの観測可能量を計算する手順をあらかじめ与える。以下では、S 行列は既知とするわけである。。

1.2 崩壊確率

ここでは、最初 1 粒子状態にあった粒子が崩壊していき、最終状態が n 粒子状態に遷移する単位時間あたりの確率、すなわち**崩壊確率**を導く。すでに S 行列は計算されているので、始状態 α から終状態 β への遷移確率は分かっている。つまり

$$S_{\alpha\beta} = \langle\, \beta\, i\, | S |\, \alpha\, i\,\rangle = \langle\, \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n\, i\, | S |\, p\, i\,\rangle \tag{6}$$

が与えられている。ただし始状態 α のときに全 4 元運動量 p であったとし、終状態 β では j 番目の粒子の 4 元運動量は p_j であるとしている。以降では始状態の状態空間 V_i で考えることにするので、上式中の i を省略することにする。また、静止系で質量 M の 1 つの粒子 a が $a \to 1+2+3+\cdots$ のように n 粒子に崩壊する過程を、常に観測者は始状態での静止系で観測していると考える。すると $p = (M, 0, 0, 0)$ である。

さて、終状態において 4 元運動量が $p_1, \cdots, p_n$ となる確率を計算するため、運動量空間を細分化していく。まず、始状態の運動量空間が完全に規格化されている、すなわち i 番目の粒子が運動量 $\boldsymbol{p}$ をもっている状態ベクトルを $|\, i\, \boldsymbol{p}\,\rangle$ と表すことにすれば、

$$\langle\, i\, \boldsymbol{p}\, |\, j\, \boldsymbol{q}\,\rangle = (2\pi)^3 2 p_0 \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) \delta_{(ij)} \tag{7}$$

が成り立っていると仮定する。このとき、

$$\int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2 p^0} |\, i\, \boldsymbol{p}\,\rangle\langle\, i\, \boldsymbol{p}\, | = 1 \tag{8}$$

が得られることが分かる。これから、n 個の各粒子の運動量がそれぞれ $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_1 + \delta\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n, \boldsymbol{p}_n + \delta\boldsymbol{p}_n$ の

微小ボックスに入っているという V_i の部分状態空間への射影演算子は

$$\gamma(n) = \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{d^3 \boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3 2p_j^0} \right] |\, \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n \,\rangle \langle\, \boldsymbol{p}_n, \cdots, \boldsymbol{p}_1 \,| \tag{9}$$

$$= \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{d^3 \boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3 2p_j^0} \right] |\, \beta \,\rangle \langle\, \beta \,| \tag{10}$$

と書ける。終状態では $S|\,\alpha\,\rangle$ となっているので、その状態がこの部分状態空間にある確率密度 $dP(n)$ は

$$\begin{aligned} dP(n) &= \langle\, \alpha \,| S^\dagger d\gamma(n) S |\, \alpha \,\rangle \\ &= \langle\, \alpha \,| S^\dagger \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{d^3 \boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3 2p_j^0} \right] |\, \beta \,\rangle \langle\, \beta \,| S |\, \alpha \,\rangle \\ &= \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{d^3 \boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3 2p_j^0} \right] |S_{\alpha\beta}|^2 \end{aligned} \tag{11}$$

となる。したがって、微分崩壊確率 $d\Gamma(n)$ は始状態に $p = (M, 0, 0, 0)$ の粒子をもうひとつ加えればよいだけだから、上式を $2M$ で割ったものになるはずである。すなわち

$$\frac{1}{2M} \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{d^3 \boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3 2p_j^0} \right] |S_{\alpha\beta}|^2 \tag{12}$$

として定義されたものが微分崩壊確率だと考えてよいと思うかもしれない。

しかし、4 元運動量の保存則を考慮すれば、

$$S_{\alpha\beta} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_\alpha - p_\beta) M_{\alpha\beta} \tag{13}$$

のようにデルタ関数がでてくる形で書けるので、式（12）での $|S_{\beta\alpha}|^2$ は、p_j で積分を行ったあとでも発散し、式上ではまずいことになる。それを具体的に確かめるため実際に代入すると

$$\begin{aligned} d\Gamma(n) &= \frac{1}{2M} \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{d^3 \boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3 2p_j^0} \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_n - p)(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_n - p) |M_{\alpha\beta}|^2 \\ &= \frac{1}{2M} \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{d^3 \boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3 2p_j^0} \right] (2\pi)^4 \delta^4(0)(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_n - p) |M_{\alpha\beta}|^2 \\ &= \frac{1}{2M} \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{d^3 \boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3 2p_j^0} \right] \left(\int d^4x\, 1 \right) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_n - p) |M_{\alpha\beta}|^2 \end{aligned} \tag{14}$$

と書ける。しかしこれは、全空間を考え、時間が無限大に経過した場合の崩壊確率であることを暗黙の了解としている [*1] 。実際、規格化の条件（7）から、全空間の体積を V として、状態 $|\,\alpha\,\rangle$ は静止質量 M

[*1] というのは、運動量を確定するためには全空間を考慮しなければならないし、エネルギーを確定するためには無限に長い時間をかけて観測を行わなければいけないからである。にもかかわらず、運動量、エネルギーは定まっているとしてきた。

の粒子が $2p_0V = 2MV$ 個ある状態を指している。したがって 1 粒子状態を考えたいなら式（12）を全空間で割るべきである。さらに実際に観測できるのは有限の時間であるから、単位時間の崩壊確率にするために無限大の時間 T で割る必要もある。すなわち、単位時間あたりの 1 粒子微分崩壊確率 $d\Gamma(n)$ は

$$
\begin{aligned}
d\Gamma(n) &\equiv \frac{1}{2MVT}\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{d^3\boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3 2p_j^0}\right]\left(\int d^4x\,1\right)(2\pi)^4\delta^4(p_1+\cdots+p_n-p)|M_{\alpha\beta}|^2 \\
&= \frac{1}{2MVT}\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{d^3\boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3 2p_j^0}\right]VT(2\pi)^4\delta^4(p_1+\cdots+p_n-p)|M_{\alpha\beta}|^2 \\
&= \frac{1}{2M}\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{d^3\boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3 2p_j^0}\right](2\pi)^4\delta^4(p_1+\cdots+p_n-p)|M_{\alpha\beta}|^2 \qquad (15)
\end{aligned}
$$

となる。あるいはこれを積分して

$$
\Gamma(n) \equiv \frac{1}{2M}\left[\prod_{j=1}^{n}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3 2p_j^0}\right](2\pi)^4\delta^4(p_1+\cdots+p_n-p)|M_{\alpha\beta}|^2 \qquad (16)
$$

をで与えられる $\Gamma(n)$ を n 粒子への**崩壊確率**という。ここで先ほどから用いられている $M_{\alpha\beta}$ は**不変散乱振幅**と呼ばれるが、S 行列が求まればすぐに計算できる量であり、実は Feynamnn 則により直接計算できることがあとで分かる。したがって、この式を普通は用いることになる。

1.3　2 粒子崩壊

ここではさらに $a \to 1+2$ のように 2 粒子 $1,2$ に崩壊する過程における単位時間あたりの崩壊確率 $\Gamma(n)$ の表式を、n 粒子の崩壊の場合よりも簡潔に表すことを考える。始状態の静止系で常に観測を行うとすれば、式（16）から

$$
\begin{aligned}
\Gamma(2) &= \frac{1}{2M}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1}\frac{d^3\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}(2\pi)^4\delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)\delta(E_1+E_2-M)|M_{\alpha\beta}|^2 \\
&= \frac{1}{8M}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3\sqrt{\boldsymbol{p}_1^2+m_1^2}}\frac{d^3\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^3\sqrt{\boldsymbol{p}_2^2+m_2^2}}(2\pi)^4\delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)\delta\left(\sqrt{\boldsymbol{p}_1^2+m_1^2}+\sqrt{\boldsymbol{p}_2^2+m_2^2}-M\right)|M_{\alpha\beta}|^2 \\
&= \frac{1}{8M}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^2}\frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{p}^2+m_1^2)(\boldsymbol{p}^2+m_2^2)}}\delta\left(\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_1^2}+\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_2^2}-M\right)|M_{\alpha\beta}|^2 \qquad (17)
\end{aligned}
$$

となる。ただし、$\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2 \equiv \boldsymbol{p}$ とした。ここで $k \equiv |\boldsymbol{p}|$ として、全エネルギーの 2 乗

$$
s \equiv (p_1+p_2)^2 = \left(\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_1^2}+\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_2^2}\right)^2 = \left(\sqrt{k^2+m_1^2}+\sqrt{k^2+m_2^2}\right)^2 \qquad (18)
$$

を用いれば、

$$
\begin{aligned}
ds &= 2\left(\sqrt{k^2+m_1^2}+\sqrt{k^2+m_2^2}\right)\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+m_1^2}}+\frac{k}{\sqrt{k^2+m_2^2}}\right)dk \\
&= 2\sqrt{s}\left(\frac{\sqrt{k^2+m_1^2}+\sqrt{k^2+m_2^2}}{\sqrt{(k^2+m_1^2)(k^2+m_2^2)}}\right)k\,dk \\
&= 2s\frac{1}{\sqrt{(k^2+m_1^2)(k^2+m_2^2)}}k\,dk
\end{aligned}
$$

が成り立つ。したがって、

$$
\begin{aligned}
\Gamma(2) &= \frac{1}{8M}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^2}\frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{p}^2+m_1^2)(\boldsymbol{p}^2+m_2^2)}}\delta\left(\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_1^2}+\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_2^2}-M\right)|M_{\alpha\beta}|^2 \\
&= \frac{1}{32\pi^2 M}\int_0^\infty dk\frac{k^2}{\sqrt{(k^2+m_1^2)(k^2+m_2^2)}}\delta(\sqrt{s}-M)\int d\Omega\,|M_{\alpha\beta}|^2 \\
&= \frac{1}{32\pi^2 M}\int_0^\infty \frac{ds\,k(s)}{2s}\delta(\sqrt{s}-M)4\pi|M_{\alpha\beta}|^2 \\
&= \frac{1}{8\pi M}\int_0^\infty \frac{ds'\,k(s')}{s'}\delta(s'-M)|M_{\alpha\beta}|^2 \\
&= \frac{k(s=M^2)}{8\pi M^2}|M_{\alpha\beta}|^2
\end{aligned}
\tag{19}
$$

となり、$k(s=M^2)$ はまさに終状態の 2 粒子の重心の運動量の大きさ P_{cm} そのものであるから

$$
\Gamma(2) = \frac{P_{\mathrm{cm}}}{8\pi M^2}|M_{\alpha\beta}|^2 \tag{20}
$$

が成り立つ。

2 微分散乱断面積

1 粒子の崩壊確率の測定以外に、微分散乱断面積という量を測定することもできる。ここでは、同様に不変散乱断面積が与えられたとして、そこから微分散乱断面積を求める式を導く。

2.1 断面積

粒子 a のビームと粒子 b のビームを衝突させることを考える。このとき、もちろん反応せず素通りのものもあるし、a と b が反応して n 粒子になっているものもある。そこで、a と b が反応して n 粒子へと崩壊する確率を知りたいわけである。

そこでまずは**古典的なイメージ**で、断面積（あるいは反応断面積）というものを定義する。

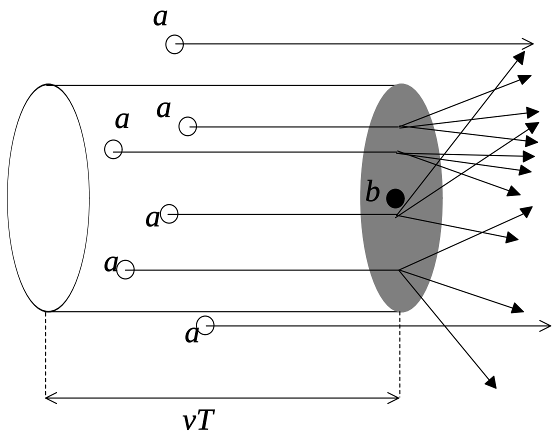

FIG 1:

今、粒子 b をひとつ取り、その静止系で観測することにし、粒子 b を中心として面積 σ の円を考える。a のビームはこの円に垂直に入射してくるとし、この円にぶつかるものは反応して崩壊すると考える。またそれ以外のものは反応せずに素通りすると考える。この σ を**断面積**という。したがって σ が大きいほど反応しやすいことが分かる。

さて、a と b のビームを衝突させると、時間 T、体積 V の中でどれほどの個数 N が反応しているか、σ を用いて N を表してみよう。まず、b をひとつ選び、その静止系で考えてみると、他の粒子 b もすべて静止していることになる。そこへ a が速度 v で入射してくる場合を考えれば、a の個数密度を ρ_a として、ひとつの粒子 b の断面積にぶつかり反応する回数は

$$N = (a \text{ が } \sigma \text{ にぶつかる粒子数}) = (\text{体積 } vT\sigma \text{ に入っている } a \text{ の粒子数}) = \rho_1(vT\sigma) \tag{21}$$

と書ける。b の個数密度を ρ_b とすると、粒子 b は体積 V 中に $\rho_2 V$ 個あるから、結局

$$N = \rho_a \rho_b v V T \sigma \tag{22}$$

である。このうち、反応してできた n 粒子がそれぞれ運動量 $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ で微小立体角 $d\Omega$ 方向に飛ばされるような反応の回数 $dN/d\Omega$ は反応の種類に依存するはずで、その依存性は σ に押し込められているから、

$$\frac{dN}{d\Omega} = \rho_a \rho_b v V T d \frac{\sigma}{d\Omega} \tag{23}$$

と書ける。ここで $d\sigma/d\Omega$ を**微分断面積**という。VT を全時空体積と考えれば、$dN/d\Omega$ は式（11）で与えられる確率密度 $dP(n)$ を、運動量の方向について $d\Omega$ に制限したものに他ならないから、

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\Omega} &= \frac{1}{d\Omega}\left[\prod_{j=1}^{n} \frac{d^3\boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3 2p_j^0}\right] |S_{\alpha\beta}|^2 \\ &= VT\left[\prod_{j=1}^{n} \frac{d^3\boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3 2p_j^0}\right] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_n - p_a - p_b) |M_{\alpha\beta}|^2 \end{aligned} \tag{24}$$

で与えられるので、結局微小断面積 $d\sigma$ は

$$d\sigma = \frac{1}{\rho_a \rho_b v}\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{d^3\boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3 2p_j^0}\right](2\pi)^4\delta^4(p_1+\cdots+p_n-p_a-p_b)|M_{\alpha\beta}|^2 \tag{25}$$

として求められることになる。

この中の ρ_a, ρ_b, v を p_a, p_b, m_a, m_b を用いて表すなら、1 粒子状態の規格化から、粒子個数密度は $2p^0$ で与えられるので、$\rho_a = 2p_a^0, \rho_b = 2p_b^0$ であり、また、粒子 a のビームの速度は a と b の相対速度でもあるから、

$$v = \frac{\sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}}{p_a^0 p_b^0} \tag{26}$$

のように Lorentz 共変形で表しておけば、最終的に

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}}\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{d^3\boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3 2p_j^0}\right](2\pi)^4\delta^4(p_1+\cdots+p_n-p_a-p_b)|M_{\alpha\beta}|^2 \tag{27}$$

のように書ける。

また、注意しておかなければいけないことは、σ は Lorentz 共変であり、したがって、上式は任意の慣性系で成り立つ。なぜ Lorentz 共変になっているかというと、式（22）において、VT は 4 元体積であり Lorentz 不変、また N は慣性系により異ならないはずだから不変、さらに

$$\rho_a \rho_b v = \sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2} \tag{28}$$

であるから、これも不変である。よって σ は Lorentz 不変である。これより、b の静止系における観測という条件は不要である。

2.2 2 粒子散乱

ここでは、前小節で求めた断面積の微小変化分 $d\sigma$ の式を用いて、2 粒子散乱問題の場合の微分断面積を求める。特に散乱なので、微分断面積のことを**微分散乱断面積**という。

2 粒子散乱とは、粒子 a と b が衝突し、終状態でも同種粒子 a と b のままであるような反応のことをいう。さて、具体的に入射粒子の 4 元運動量を p_a, p_b、散乱後の 4 元運動量を ${p'}_a, {p'}_b$ とすると、式（27）は

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}}\frac{d^3\boldsymbol{p'}_a}{(2\pi)^3 2{p'}_a^0}\frac{d^3\boldsymbol{p'}_b}{(2\pi)^3 2{p'}_b^0}(2\pi)^4\delta^4({p'}_a+{p'}_b-p_a-p_b)|M_{\alpha\beta}|^2 \tag{29}$$

と書ける。始状態の重心系で観測することにすると、終状態でも重心系になっており、$\boldsymbol{p}_a = -\boldsymbol{p}_b \equiv \boldsymbol{p}$ お

および $\boldsymbol{p'}_a = -\boldsymbol{p'}_b \equiv \boldsymbol{p'}$ と定義しておけば、

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{1}{64\pi^2\sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}} d^3\boldsymbol{p'} \frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{p'}^2 + m_a^2)(\boldsymbol{p'}^2 + m_b^2)}} \\
&\quad \times \delta\left(\sqrt{(\boldsymbol{p'}^2 + m_a^2)} + \sqrt{(\boldsymbol{p'}^2 + m_b^2)} - \sqrt{(\boldsymbol{p}^2 + m_a^2)} - \sqrt{(\boldsymbol{p}^2 + m_b^2)}\right) |M_{\alpha\beta}|^2 \\
&= \frac{1}{64\pi^2\sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}} \frac{|\boldsymbol{p'}|^2 d|\boldsymbol{p'}|}{\sqrt{(\boldsymbol{p'}^2 + m_a^2)(\boldsymbol{p'}^2 + m_b^2)}} \\
&\quad \times \delta\left(\sqrt{(\boldsymbol{p'}^2 + m_a^2)} + \sqrt{(\boldsymbol{p'}^2 + m_b^2)} - \sqrt{(\boldsymbol{p}^2 + m_a^2)} - \sqrt{(\boldsymbol{p}^2 + m_b^2)}\right) d\Omega |M_{\alpha\beta}|^2
\end{aligned} \tag{30}$$

となる。ここで以前の 2 粒子崩壊の計算と同様に $s = (p_a + p_b)^2 = (E_a + E_b)^2$ を使えば

$$(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2 = \frac{1}{4}[s - (m_a + m_b)^2][s - (m_a - m_b)^2] \tag{31}$$

となるから、

$$d\sigma = \frac{|\boldsymbol{p}|_{\mathrm{cm}}}{64\pi^2 s\sqrt{[s - (m_a + m_b)^2][s - (m_a - m_b)^2]}} d\Omega |M_{\alpha\beta}|^2 \tag{32}$$

が得られる。あるいは

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{cm}} = \frac{|\boldsymbol{p}|_{\mathrm{cm}}}{64\pi^2 s\sqrt{[s - (m_a + m_b)^2][s - (m_a - m_b)^2]}} |M_{\alpha\beta}|^2 \tag{33}$$

のようにして微分散乱断面積を求められる。