非等方inflationでの摂動の概略.

10/23.

ref. [1] arXiv: 0902.2833

○ 模型.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R - \frac{1}{4} f^2(\phi) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \omega(\phi) \right]$$

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

○ 一様背景量.

$$ds^2 = a^2(-d\eta^2 + dx^2) + b^2(dy^2 + dz^2)$$

注: 共形時間η は x方向の scalefactor a でのものを用いることにする.

$$A_\mu dx^\mu = v\, dx$$

I. Vector mode

以下. 摂動の fourier 展開 mode についてみる.

共型座標での波数 vector k について,

$k_z = 0$ として. 一般性を失わない.

このとき vector mode の摂動は. (A, B, C, D として.)

$$\delta g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 2b^2 A\, dy dz + 2b^2 B\, dx dz + 2b^2 C\, dy dz$$

$$\delta A_\mu dx^\mu = D\, dz$$

とおくことが出来る.

次に gauge として. $C = 0$ となるものをとることとする.

以下. A, B はそのような gauge での量を指す.

また. A は. non-dynamical な量であり. constraint eq. で消去できる.

最終的に発展方程式は. 正準摂動量.

$$\begin{cases} H_X \equiv \dfrac{b k_y}{\sqrt{2}\, k(y)} B & k(y) \equiv \sqrt{k_x^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 k_y} \\[2em] \mathcal{M}_\perp \equiv f D & \end{cases}$$

を用いて,

(注: H_X は等方極限 (Friedmann-Lemaître 宇宙) での
cross-mode 重力波のそれに一致する)

$$
☆
\begin{cases}
\ddot{H}_x + \left(k^2 - \left(\frac{b}{k}\right)^{\cdot\cdot} \Big/ \left(\frac{b}{k}\right)\right) H_x \\
= \sqrt{2}\,\frac{k_y}{k}\frac{f\dot{v}}{b}\left(-\dot{\mathcal{M}}_\perp + \left(\frac{\dot{f}}{f} + 2\frac{k_x^2}{k^2}(\mathcal{H} - \mathcal{G})\right)\mathcal{M}_\perp\right) \\
\ddot{\mathcal{M}}_\perp + \left(k^2 - \frac{\ddot{f}}{f} - 2\frac{k_x^2}{k^2}\frac{f^2\dot{v}^2}{a^2}\right)\mathcal{M}_\perp \\
= \sqrt{2}\,\frac{f\dot{v}}{b}\frac{k_y}{k}\left(\dot{H}_x + \left(-\mathcal{G} + \frac{k_y^2}{k^2}\frac{a^2}{b^2}(\mathcal{H} - \mathcal{G})\right)H_x\right)
\end{cases}
$$

但し、 $(\dot{\ }) \equiv \frac{d}{d\eta}$, $\mathcal{H} \equiv \dot{a}/a$, $\mathcal{G} \equiv \dot{b}/b$

となる.

次に、背景に [1] での所謂 " 2^{nd} inflationary phase" を仮定して、ゆらぎの生成をみる.

初期条件としては、subhorizon の極限 ($\eta \to -\infty$) で、H_x と $\mathcal{M}_\perp$ の両 mode がそれぞれ独立に零点振動している、として、無矛盾である.

即ち、十分過去の η_i にて、

$$
S \simeq S_{grav}[H_x] + S_{vect}[\mathcal{M}_\perp]
$$

$$
S_{grav} \equiv \frac{1}{2}\int d\eta\, d^3k \left(|\dot{H}_x|^2 - k^2 |H_x|^2 \right)
$$

$$
S_{vect} \equiv \frac{1}{2}\int d\eta\, d^3k \left(|\dot{\mathcal{M}}_\perp|^2 - k^2 |\mathcal{M}_\perp|^2 \right)
$$

となり、

量子化すると、

$$\hat{H}_x(\eta_i) = \sqrt{\frac{\hbar}{2k}}\left(\hat{b}_{k} + \hat{b}^{\dagger}_{-k}\right)$$

$$\hat{M}_\perp(\eta_i) = \sqrt{\frac{\hbar}{2k}}\left(\hat{d}_{k} + \hat{d}^{\dagger}_{-k}\right)$$

$$\left[\hat{b}_{k}, \hat{b}^{\dagger}_{k'}\right] = \left[\hat{d}_{k}, \hat{d}^{\dagger}_{k'}\right] = \delta^{(3)}(k - k')$$

etc.

として、

このとき宇宙は基底状態にあることから、

$$\hat{b}\,|宇宙\rangle = 0$$
$$\hat{d}\,|宇宙\rangle = 0$$

と仮定する.

そして、$\hat{M}_\perp(\eta)$, $\hat{H}_x(\eta)$ は $\hat{b}, \hat{d}$ の線型結合で表わせる

$$\begin{cases} \hat{H}_{x k}(\eta) = C_{Hb}(\eta)\,\hat{b}_{k} + C^*_{Hb}(\eta)\,\hat{b}^{\dagger}_{-k} + C_{Hd}(\eta)\,\hat{d}_{k} + C^*_{Hd}(\eta)\,\hat{d}^{\dagger}_{-k} \\ \hat{M}_{\perp k}(\eta) = C_{Mb}(\eta)\,\hat{b}_{k} + C^*_{Mb}(\eta)\,\hat{b}^{\dagger}_{-k} + C_{Md}(\eta)\,\hat{d}_{k} + C^*_{Md}(\eta)\,\hat{d}^{\dagger}_{-k} \end{cases}$$

が、この輸送行列 C は古典的な発展方程式☆をとくことで得られる

e.g.) $H_x(\eta_i) = \sqrt{\frac{\hbar}{2k}}$, $\dot{H}_x(\eta_i) = -i\sqrt{\frac{\hbar k}{2}}$, $\dot{M}_\perp(\eta_i) = M_\perp(\eta_i) = 0$

という初期条件で解いた $H_x(\eta)$, $M_\perp(\eta)$ を用いて、

$$C_{Hb}(\eta) = H_x(\eta)$$
$$C_{Mb}(\eta) = M_\perp(\eta)$$

と評価できる.

このようにして、得られた輸送行列 C を用いて、各spectrumは、

$$\langle |H_{\times k}(\eta)|^2 \rangle = |C_{Hb}|^2 + |C_{Hd}|^2$$

$$\langle |M_{\perp k}(\eta)|^2 \rangle = |C_{Mb}|^2 + |C_{Md}|^2$$

$$\langle H_{\times k}(\eta) M^*_{\perp k}(\eta) \rangle = C_{Hb} C^*_{Mb} + C_{Hd} C^*_{Md}$$

と評価できる。

これらを評価しよう。

まず第0近似、slow-roll parametersや非等方性が小さいとすると、
[1]より、
$f \propto e^{-2\alpha}$ であったので、また④の右辺は無視でき、superhorizonで、

$$|H_\times|^2 k^3 \propto k^0$$
$$|M_\perp|^2 k^3 \propto k^0$$

なflat spectaが得られる。

次に微小parametersを加味しよう。

結果としては得られるspectraに非等方性が現れるのだが、

本模型においては、mixingからの寄与が大きい。

cf. ACW模型(astroph/0701357)では
背景の非等方膨張の効果のみ。
つまり、波数方向のscale factorの膨張率の違いのみなので、

$$\frac{P^{\text{anisotropic}}_{(k)}}{P^{\text{isotropic}}_{(k)}} \simeq O\left(\frac{\Sigma}{H} \cdot (\text{e-folding number after horizon exit})\right)$$

という程度である。

これを評価するには.
まず,
[1]の(25)式より

$$\frac{\Sigma}{H} = \frac{1}{3}\frac{c-1}{c}\varepsilon \qquad \varepsilon \equiv -\frac{\frac{dH}{dt}}{H^2}, \ c: \text{parameter}.$$

だったので.

$$\frac{\Sigma}{H} = \frac{1}{3} I\varepsilon$$ とおくことにすると.

c	$1 \to \infty$
I	$0 \to 1$

$$\frac{f^2 \dot{v}^2}{a^2} \simeq 3 I\varepsilon \mathcal{H}^2$$ と評価できる

つまり.大まかには

$$\ddot{H}_x + (k^2 - \ddot{a}/a)H_x = \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\theta\sqrt{I\varepsilon}\,\mathcal{H}\left(-\dot{M}_\perp + \frac{\dot{f}}{f}M_\perp\right)$$

(θ: kとe_xのなす角)

となっており,この右辺からの寄与が.輸送行列の C_{Hd} 成分をとおして.

H_xのspectrumに.非等方性を生じさせる.(おそらく horizon crossingの際に)

この非等方性は. $P^{anisotropic}_{(k)} \propto I\varepsilon \cdot \sin^2\theta$

だが,その比例係数は.背景にpower-lawを仮定した数値計算で.

$$\frac{P^{aniso}}{P^{iso}} \sim 100\, I\varepsilon \cdot \sin^2\theta$$ ぐらいと出ている

これは右辺をgivenとして.2重積分で評価できると考えている.