

3. Quantization of Free Fields

2008/08/11, Toshiya Namikawa

ABSTRACT

前回は場の古典的な扱いについて述べたが、これからは場を量子論的に扱う理論について述べていく。今回は、一般に場を量子化する方法のうちの正準量子化について述べる。対象とする場はスカラー場と Dirac 場である。

TABLE OF CONTENTS

| | | |
|-----|-----------------|---|
| 1 | 自由スカラー場の正準量子化 | 1 |
| 1.1 | 量子力学における正準形式 | 1 |
| 1.2 | 自由スカラー場の正準量子化 | 3 |
| 1.3 | 自由スカラー場の生成消滅演算子 | 4 |
| 1.4 | 4次元交換関係 | 7 |
| 2 | Dirac 場の正準量子化 | 8 |

1 自由スカラー場の正準量子化

1.1 量子力学における正準形式

量子力学では、座標と運動量の交換関係を用いて量子化を行ったが、場の正準量子化は単純にこのアイデアを場に対しても適用したものである。ここではイントロダクショナルな意味として、量子力学における古典力学の正準量子化をまとめることにする。

N 個の粒子を考え、座標 q^r とその共役運動量 p_s の間に

$$[q^r, p_s] = i\delta_s^r, \quad [q^r, q^s] = 0, \quad [p_r, p_s] = 0 \quad (1)$$

の関係を成り立たせることが、量子力学における正準量子化であった。

► Schrödinger 表示と Heisenberg 表示 ◀

系の時間発展が状態ベクトルである波動関数 $|\psi(t)\rangle$ によって表され、演算子がこの波動関数に作用して実際に測定される物理量が得られる。波動関数の時間発展を記述する方程式は

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(q, p, t)|\psi(t)\rangle \quad (2)$$

であり、これは Schrödinger 方程式と呼ばれる。\$H\$ は演算子 \$q, p\$ の関数であり、これ自身が演算子である。このようにして量子力学を記述するものを Schrödinger 表示と呼ぶ。

しかし一方で、上記の Schrödinger 方程式から

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle, \quad U(t) \equiv T \exp \left[-i \int_0^t dt' H(t') \right] \quad (3)$$

と表せる。\$U(t)\$ は時間発展演算子と呼ばれ、\$T\$ は \$T\$ 積 (時間順序積) といって、これ以降の演算子の順序を、右側から左側にかけて新くなるように並べる演算子である。このとき、波動関数と演算子 \$O\$ を

$$|\psi\rangle' = U^{-1}|\psi(t)\rangle, \quad O'(t) = U^{-1}OU(t) \quad (4)$$

のようにして新たな波動関数 \$|\psi\rangle'\$ と演算子 \$O'\$ に定義しなおせば、Schrödinger 方程式から

$$i \frac{dO'}{dt} = i \frac{\partial O'}{\partial t} + [O', H(q', p', t)] \quad (5)$$

が得られる。これは Heisenberg 方程式と呼ばれ、このように、波動関数の時間依存性を演算子に押し込めて記述した量子力学における扱いを Heisenberg 表示と呼ぶ。また、Heisenberg 表示での正準交換関係は各時刻 \$t\$ で

$$[q'^r(t), p'_s(t)] = i\delta_s^r, \quad [q'^r(t), q'^s(t)] = 0, \quad [p'_r(t), p'_s(t)] = 0 \quad (6)$$

となる。

► 相互作用表示 ◀

Hamiltonian を自由場 \$H_f\$ と相互作用 \$V\$ に分解することを考える。つまり

$$H = H_f + V \quad (7)$$

このとき、自由場のみには Heisenberg 表示のように時間依存を押し込め、\$V\$ の作用に対しては波動関数に時間依存を残しておくという方法がある。具体的には、\$U_f \equiv \exp(-itH_f)\$ として

$$O''(t) = U_f^{-1}(t)OU_f(t) = U_f^{-1}(t)U(t)O'U^{-1}(t)U_f(t), \quad |\psi(t)\rangle'' = U_f^{-1}(t)|\psi(t)\rangle = U_f^{-1}(t)U(t)|\psi\rangle' \quad (8)$$

と定義しなおす。このような表現方法を相互作用表示と呼ぶ。このとき、\$O''(t), |\psi(t)\rangle''\$ の時間発展は

$$i \frac{dO''}{dt} = i \frac{\partial O''}{\partial t} + [O''(t), H_f] \quad (9)$$

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle'' = U_f^{-1}(t)V(t)U_f(t)|\psi(t)\rangle'' \quad (10)$$

と書ける。さらに正準交換関係は Heisenberg 表示の場合と同様に各時刻 \$t\$ で

$$[q''^r(t), p''_s(t)] = i\delta_s^r, \quad [q''^r(t), q''^s(t)] = 0, \quad [p''_r(t), p''_s(t)] = 0 \quad (11)$$

となる。

量子力学では以上のような3つの表示形式を主に用いていた。特に、粒子の種類と自由度は有限であった。しかし以降で述べる場の量子論は、粒子の生成・消滅を記述することになる。そのため、運動量などは任意の値を考えなければならず、無限個の値になる、すなわち有限の自由度とはならない。このことを、次節で考える。

1.2 自由スカラー場の正準量子化

粒子を扱う場合には「何番目の粒子」というようにラベルを貼ることができるが、場の理論では時空座標の各点で値をもち、無限の連続的な自由度がある。つまり、

$$\Sigma \rightarrow \int \quad (12)$$

のように、今までは離散的な値をとっていたものを連続的に表現することになる。

基本原理である最小作用の原理から出発するが、作用 S は

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad (13)$$

のように Lagrangian 密度の積分で表される。Lagrangian 密度は場の演算子 ϕ とその微分 $\partial_\mu \phi$ およびその複素共役の関数であり、演算子である。正準形式に持ちこむには、 ϕ, ϕ^* の共役運動量

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}, \quad \pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} \quad (14)$$

を用いる^{*1}。すると、Hamiltonian H と Hamiltonian 密度 \mathcal{H} は

$$H = \int d^3x \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = \pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{L} \quad (15)$$

として表される。正準量子化では、4つの場の演算子 ϕ, π, ϕ^*, π^* に交換関係

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi^*(t, \mathbf{y})] \equiv i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad [\phi^*(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] \equiv -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (16)$$

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \phi^*(t, \mathbf{y})] \equiv 0 \quad [\phi^*(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] \equiv 0 \quad (17)$$

$$[\pi(t, \mathbf{x}), \pi^*(t, \mathbf{y})] \equiv 0 \quad [\pi^*(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] \equiv 0 \quad (18)$$

を課す。

► 相似変換 ◀

一般的には、系が時空間での並進対称性を持てば、すでに示したように演算子である 4 元運動量ベクトル P_μ が存在する。このとき、任意の演算子 A に対し

$$i \frac{\partial A}{\partial x^\mu} = [A, P_\mu] \quad (19)$$

が成り立つ。この 0 成分はまさに Heisenberg 方程式である。また、この式から

$$A(x) = e^{ipx} A(0) e^{-ipx} \quad (20)$$

が得られる。ただし、 $px \equiv p_\mu x^\mu$ である。ここに現れた演算子 e^{ipx} はユニタリー演算子であるが、ユニタリー演算子とその逆演算子で挟んだ変換は場の量子論でも相似変換と呼ばれ、量子力学における相似変換と同じ意味である。

^{*1} ここでは $\dot{\phi} = \partial_0 \phi$, $\dot{\phi}^* = \partial_0 \phi^*$ である。

演算子 A として場の演算子を選んでも変わりはなく、式 (19) は各成分が Heisenberg 型の運動方程式に従うので、任意の時空点での場の演算子はある時空点における場の演算子からの相似変換で書ける。

以上のようにして、場の演算子に正準交換関係を課するという方法で場を量子化した。しかし、複数のスカラー場の演算子 ϕ_1, ϕ_2, \dots が含まれる場合があり、このとき、互いの場の演算子の順序をどのようにすればよいのかが問題になる。また、同一時空点での場の演算子の積 $\phi_1\phi_2$ には発散がある。つまり、場の演算子に交換関係を設定するという正準量子化はこのような問題点をもつ。しかし積に関する問題は以下で定義する生成消滅演算子に対する積の規定や、それ以外の積の定義で解決でき、また、発散はくりこみ理論において解決される。まずは場の演算子を表現する有力な方法である生成消滅演算子を定義しよう。

1.3 自由スカラー場の生成消滅演算子

正準量子化された自由スカラー場の演算子 ϕ, π に対する Heisenberg の運動方程式は

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = [\phi, H] = i\pi \quad (21)$$

$$i \frac{\partial \pi}{\partial t} = [\pi, H] = i(\Delta - m^2)\phi \quad (22)$$

である。今、場の演算子 ϕ を

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} c_{\mathbf{p}}(t) \quad (23)$$

のように Fourier 展開すると、演算子 $c_{\mathbf{p}}(t)$ の満たす式は、 $\omega_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ と定義しておいて、Heisenberg の運動方程式から

$$\frac{d^2 c_{\mathbf{p}}}{dt^2} = -(\mathbf{p}^2 + m^2)c_{\mathbf{p}} = -\omega_{\mathbf{p}}^2 c_{\mathbf{p}} \quad (24)$$

となる。この解は一般に

$$c_{\mathbf{p}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \{e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} a_+(\mathbf{p}) + e^{i\omega_{\mathbf{p}}t} a_-(\mathbf{p})\} \quad (25)$$

と表されるが、規格化因子はあとで便利になるようにとっている。したがって場の演算子 ϕ は結局

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \{e^{-ipx} a_-(\mathbf{p}) + e^{ipx} a_+^\dagger(\mathbf{p})\} \quad (26)$$

と表される。ただし、 $p_0 = \omega_{\mathbf{p}}$ である。また、場の演算子 ϕ^* に対する表示はこの Hermite 共役

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \{e^{-ipx} a_+(\mathbf{p}) + e^{ipx} a_-^\dagger(\mathbf{p})\} \quad (27)$$

で与えられる。

► 自由実スカラー場の場合 ◀

もし、自由スカラー場の演算子 ϕ が実であった場合は自身が Hermite 共役になるので、 a_- , a_+ を区別する必要はなく、 a_- を a とすれば $a_+ = a^\dagger$ であり、したがって式 (26) は

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} \{e^{-ipx} a(\mathbf{p}) + e^{ipx} a^\dagger(\mathbf{p})\} \quad (28)$$

と書ける。ここで、 a, a^\dagger の交換関係を求める。まず、次の関数

$$f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} e^{-ipx} \quad (29)$$

は Klein-Gordon 方程式を満たす。次に、Klein-Gordon 方程式を満たす 2 つの波動関数の内積を計算すると、

$$a(\mathbf{p}) = i \int d^3x \left(f_p^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial f_p^*}{\partial t} \phi \right) \quad (30)$$

$$a^\dagger(\mathbf{p}) = i \int d^3x \left(\phi \frac{\partial f_p}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} f_p \right) \quad (31)$$

が得られることが分かる。これによって、交換関係は

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [a(\mathbf{p}), a(\mathbf{q})] = [a^\dagger(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})] = 0 \quad (32)$$

ということになる。これは ϕ, π の交換関係を課すことと同値であることが重要である。

この関係式は調和振動子のときの生成消滅演算子の交換関係式と同じであることに気づく。つまり、運動量 p ごとに古典的振動数 ω_p の異なる調和振動子があると解釈できるが、 p は離散的ではなく、空間的に連続分布している。とにかく、このような類推により a^\dagger を生成演算子、 a を消滅演算子と呼ぶ。

► 自由複素スカラー場の場合 ◀

自由複素スカラー場の場合も同様に生成消滅演算子 $a_-, a_+, a_-^\dagger, a_+^\dagger$ の交換関係を計算でき、結果だけを述べると

$$[a_+(\mathbf{p}), a_+^\dagger(\mathbf{q})] = [a_-(\mathbf{p}), a_-^\dagger(\mathbf{q})] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (33)$$

であり、それ以外の交換関係は 0 となる。

► 多粒子描像 ◀

さて、状態を表す波動関数に演算子を作用すること自体は量子力学における調和振動子の問題と変わらないので、真空の状態 $|0\rangle$ は

$$a_-(\mathbf{p})|0\rangle = a_+(\mathbf{p})|0\rangle = 0 \quad (\forall \mathbf{p} \in R^3) \quad (34)$$

と定義される。量子力学との類推から、複素自由スカラー場は 2 つの実スカラー場と等価であり、 a_\pm^\dagger はひとつの量子を増やし、 a_\pm はひとつの量子を減らすという意味に解釈してよいだろう。そこで、真空

に生成演算子 $a_{\pm}^{\dagger}(p_1)$ を作用させるた状態を $|p\rangle_{\pm}$ と書けば、これは 1 粒子状態であり、さらにそれに $a_{\pm}^{\dagger}(p_2)$ を作用させた場合を $|p_1, p_2\rangle_{\pm\pm}$ などと書くようにすると、これは 2 粒子状態を表している。このようにして、生成演算子を真空に作用させていって得られる状態ベクトルの線形結合からなる状態空間を Fock 空間とよぶ。

個数演算子は量子力学と同様に $n_{\pm} \equiv a_{\pm}^{\dagger} a_{\pm}$ と定義される。

スカラー場に対しては生成演算子の交換関係として $a_{\pm}^{\dagger}(p)a_{\pm}^{\dagger}(q) = a_{\pm}^{\dagger}(q)a_{\pm}^{\dagger}(p)$ 成り立つので、+ で表現される粒子も - で表現される粒子も、同種 2 粒子の入れ替えに対し波動関数は変化しない。さらに +, - の 2 粒子入れ替えについても可換であり、これは Boson であることを表している。したがって自由スカラー場は Boson の多粒子系を表現していると思える。

► 真空のエネルギー ◀

調和振動子のときと同じ生成消滅演算子の交換関係をもつので、個数演算子 $n_{\pm}(p)$ を用いて Hamiltonian は

$$H = \int d^3p \omega_p \frac{1}{2} \{a_{-}^{\dagger}(p)a_{-}(p) + a_{+}(p)a_{+}^{\dagger}(p)a_{-}(p)a_{-}^{\dagger}(p) + a_{+}^{\dagger}(p)a_{+}(p)\} \quad (35)$$

$$= \int d^3p \omega_p \{n_{+}(p) + n_{-}(p) + \delta(0)\} \quad (36)$$

となるが、この演算子は Fock 空間で発散してしまう。真空のエネルギーがちょうど発散項になっていることは、実際に計算すると

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \int d^3p \omega_p \delta(0) \quad (37)$$

となることから分かる。しかし真空のエネルギー自体が観測されるのではなく、ある状態があれば、その状態のエネルギーと真空のエネルギーとの差が観測される。つまり、改めて Hamiltonian を $H' = H - \langle 0 | H | 0 \rangle$ と定義する。すると

$$H' = \int d^3p \omega_p \{n_{+}(p) + n_{-}(p)\} \quad (38)$$

と書ける。以降ではこれを H と改めて書く。

► 正規積 ◀

演算子の積があるとき、その演算子を構成している生成消滅演算子に対し、 a_{\pm}^{\dagger} を a_{\pm} の左側に並べるように指定する積は、場の演算子どうしの積を定義することになる。これを正規積と呼ぶ。表記法としては N をもちいて

$$N[a_{\pm}(p)a_{\pm}^{\dagger}(q)] \equiv a_{\pm}^{\dagger}(q)a_{\pm}(p) \quad (39)$$

である。今、実自由スカラー場を考え、

$$\phi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} e^{-ipx} a(p) \quad (40)$$

$$\phi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} e^{ipx} a^{\dagger}(p) \quad (41)$$

と定義すると、実自由スカラー場 ϕ の正規積は

$$N[\phi(x)\phi(y)] = \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y) \quad (42)$$

となる。

1.4 4次元交換関係

今まで考えてきた交換関係は空間3次元であった。それを一般化し、異なる時空点での場の演算子の交換関係を4次元交換関係という。自由スカラー場に対しては

$$[\phi(x), \phi^*(y)] = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^6 2\omega_{\mathbf{p}}} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) \equiv i\Delta(x-y) \quad (43)$$

となるが、ここで定義した関数 $\Delta(x-y)$ を交換子関数という。他の4次元交換関係はすべて0である。

► 交換子関数 ◀

Heaviside の超関数 θ と符号関数 sign を用いれば、

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) \quad (44)$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2) \text{sign}(p^0) e^{-ip(x-y)} \quad (45)$$

となる。上式より Δ が Lorentz 変換に対して不変であることが分かる。また、それ以外に、Klein-Gordon 演算子を

$$K_m(x) \equiv \eta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + m^2 \quad (46)$$

と定義しておく、

- $K_m(z)\Delta(z) = 0$
- $\Delta(-z) = -\Delta(z)$
- $\Delta(z)|_{z^0=0} = 0$

が成り立つことが分かる。これらは同時刻で場の演算子が交換することを示している。このことと、Lorentz 変換に対する不変性から、 z が空間的 ($z^2 < 0$) な場合は $\Delta(z) = 0$ となる。この結果は、空間的に離れた2点での場の演算子どうしが交換することを意味する。つまり、空間的に離れた場の演算子どうしは関係をもたないので、これを局所因果律という。また

$$i\partial_0 \Delta(z)|_{z^0=0} = \delta(z) \quad (47)$$

から同時刻交換関係を得ることになる。

2 Dirac 場の正準量子化

すでに紹介したが、Dirac 場の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (48)$$

と書ける。ただし、 $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ である。これをもとに正準共役運動量を計算すると $\pi \equiv i\psi^\dagger$ となる。さらに Hamiltonian 密度 \mathcal{H} は

$$\mathcal{H} = -\psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^j \partial_j - m)\psi \quad (49)$$

となり、Heisenberg の運動方程式は Dirac 方程式そのものになる。

Dirac 場においては、正準交換関係として、反交換関係

$$\{\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \pi_\beta(t, \mathbf{y})\} = i\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (50)$$

$$\{\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi_\beta(t, \mathbf{y})\} = \{\pi_\alpha(t, \mathbf{x}), \pi_\beta(t, \mathbf{y})\} = 0 \quad (51)$$

を用いて正準量子化を行わなければならない。というのは、Dirac 場の場合にも生成消滅演算子を定義するが、それらを用いて Hamiltonian 演算子を書いたとき、エネルギーが正定値をとるようにするためには、生成消滅演算子に反交換関係を設定しなければならないからである。逆にスカラー場の場合には、反交換関係で正準量子化を無矛盾に行うことはできない。

さて、Dirac 場の平面波解として、正エネルギー解 $u(\mathbf{p}, s)$ と負エネルギー解 $v(\mathbf{p}, s)$ をとる。ただし s は z 方向のスピンの値であり、 $1/2, -1/2$ のいずれかである。スカラー場の場合と同様に、これらの平面波解で Dirac 場を展開すると

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1/2, -1/2} \{u(\mathbf{p}, s)e^{-ipx}b_s(\mathbf{p}) + v(\mathbf{p}, s)e^{ipx}d_s^\dagger(\mathbf{p})\} \quad (52)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1/2, -1/2} \{\bar{u}(\mathbf{p}, s)e^{ipx}b_s^\dagger(\mathbf{p}) + \bar{v}(\mathbf{p}, s)e^{-ipx}d_s(\mathbf{p})\} \quad (53)$$

が得られ、ここで $b, d, b^\dagger, d^\dagger$ は生成消滅演算子である。これらは場の演算子の反交換関係から

$$\{b_s(\mathbf{p}), b_r^\dagger(\mathbf{q})\} = \delta_{r,s}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (54)$$

$$\{d_s(\mathbf{p}), d_r^\dagger(\mathbf{q})\} = \delta_{r,s}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (55)$$

であり、あとの反交換関係はすべて 0 である。

このように、 b^\dagger, d^\dagger を生成演算子、 b, d を消滅演算子と解釈することができ、消滅演算子を作用させて消える状態はやはり真空という。この真空に生成演算子を作用させていくことで n 粒子状態を作ることができるが、今回はスカラー場とは違い、反交換関係を用いて量子化しているので、生成演算子を真空に作用させて得られる状態は反対称になる。つまり、Dirac 粒子は Fermion を表していることになる。

また、生成消滅演算子で Hamiltonian 演算子を表すと

$$H = \int d\mathbf{p} \sum_{s=1/2, -1/2} \omega_{\mathbf{p}} \{b_s^\dagger(\mathbf{p})b_s(\mathbf{p}) + d_s^\dagger(\mathbf{p})d_s(\mathbf{p}) - \delta(\mathbf{0})\} \quad (56)$$

となって、スカラー場のときと同様に真空のエネルギーは発散する^{*2}。したがって、真空のエネルギー分を引いたものを新たな Hamiltonian とすると、

$$H = \int d\mathbf{p} \sum_{s=1/2, -1/2} \omega_{\mathbf{p}} \{b_s^\dagger(\mathbf{p})b_s(\mathbf{p}) + d_s^\dagger(\mathbf{p})d_s(\mathbf{p})\} \quad (57)$$

となる。

^{*2} スカラー場の真空のエネルギーは正、Dirac 場は負へ発散する。これが示唆するのは、スカラー場と Dirac 場が共存したときに、うまく相殺する可能性がある。実際には、スピンの 1/2 だけ違う粒子が共存する理論では、統計性の違う粒子間の対称性である超対称性をもつ場合がある。このときは、さまざまな量子効果が相殺し、発散が極めて限られることが知られている。