

# CMBレンズングと銀河の弱重力レンズを用いた宇宙論パラメータの決定精度

理学系研究科 物理学専攻 修士 2 年 並河俊弥

平成 22 年 2 月

## 概要

本論文では、銀河の弱重力レンズとCMBレンズングを用いた宇宙論パラメータの決定精度について論じる。

これまでのIa型超新星、CMB、宇宙大規模構造の観測によって標準宇宙モデルが確立してきたが、同時に未知のエネルギーであるダークエネルギーが宇宙のエネルギー密度の70%以上を占めていることが分かっている。また、素粒子実験からニュートリノには質量があることが分かっているが、標準宇宙論では0として扱われている。暗黒エネルギーやニュートリノ質量は宇宙の構造形成に影響を与えるため、密度揺らぎの情報を含む観測量を用いることで、これらの課題にアプローチできる。そのような観測量として、本研究では特に銀河の弱重力レンズとCMBレンズングに注目した。

銀河の弱重力レンズとは、遠方の銀河から放たれた光が大規模構造による弱重力レンズ効果を受けることで、観測される銀河のイメージが歪む現象である。同様に、CMBレンズングとは、CMB光子が大規模構造による弱重力レンズ効果を受けることでCMBの温度・偏光パターンが見かけ上歪む現象である。これらの現象を利用すると、銀河分布の観測において問題となる銀河バイアスの影響を受けず、直接密度揺らぎの情報を引き出すことで、ニュートリノ質量や暗黒エネルギーを精度良く決定できる。また、同時に複数の観測を組み合わせることで、宇宙論パラメータ間の縮退が解けると期待される。

これらを受け、本研究では、弱重力レンズを用いることで暗黒エネルギーの性質とニュートリノ質量に対しどこまで制限をつけられるか調べるのが目標である。

本研究では、次世代のCMB観測であるPlanck、ACT、次世代の銀河測光サーベイであるHSCを想定することで、フィッシャー解析を用いて宇宙論パラメータの制限を見積もった。その結果、今回用いた弱重力レンズ効果は、ダークエネルギー・タスク・フォースで見積もられているStage-IIIクラスの他の観測からの制限と同程度であることが分かった。次にCMBレンズングと銀河の弱重力レンズが宇宙論パラメータの決定精度に与える影響を比較し、暗黒エネルギー・ニュートリノ質量の決定精度が何で決まっているのか調べた。その結果、銀河シアを用いた場合には、重力の非線形性で暗黒エネルギーの状態方程式とエネルギー密度の縮退が解け、暗黒エネルギーに対する制限が改善することが分かった。また、ニュートリノ質量の制限においては縮退が完全に解けず、制限があまり改善していないことも分かった。そこで、重力の非線形進化のモデルによる系統誤差が、推定される制限よりも小さく抑えられるために必要な、シアの角度パワースペクトルの精度について見積もった。その結果、角度パワースペクトルに必要な精度は4%以内であることが分かった。

以上より、暗黒エネルギー・ニュートリノ質量の制限には、弱重力レンズ効果を用いることで強い制限を与えられる。重力の非線形進化を正しく扱うことで、弱重力レンズサーベイは極めて有効な手段であるといえる。

# 目次

第1章	導入	1
1.1	宇宙論における現状と課題	1
1.2	膨張則・揺らぎを反映する宇宙論的観測	2
1.3	本論文の構成	3
第2章	膨張宇宙と揺らぎの進化	5
2.1	一様等方宇宙	5
2.2	密度揺らぎ	9
2.3	CMBの温度・偏光揺らぎ	19
2.4	宇宙論パラメータの変化がCMB・密度揺らぎのパワースペクトルへ与える影響	25
第3章	弱重力レンズ	31
3.1	重力レンズの基礎	31
3.2	銀河の弱重力レンズ	32
3.3	CMB の弱重力レンズ	39
第4章	解析手法	49
4.1	フィッシャー解析	49
4.2	系統誤差の評価方法	55
第5章	宇宙論パラメータの決定精度	59
5.1	本研究について	59
5.2	想定する観測計画	60
5.3	計算方法	62
5.4	計算結果	65
5.5	議論	73
第6章	まとめと結論	77
付録A	Code for Anisotropies in the Microwave Background : CAMB	79
A.1	角度パワースペクトル	79
A.2	CAMB を用いたシェアの角度パワースペクトルの計算	81
付録B	密度揺らぎの非線形パワースペクトルのフィッティング公式	83
B.1	Peacock & Dodds (1996)	83
B.2	Smith et al (2003)	83

謝辭	85
参考文献	87

# 第1章

## 導入

宇宙がどのように形成されてきたか、そして将来どのように進化していくのか、これらを科学的手法を用いて研究を行う「宇宙論」は、古来より多くの人々の関心を集め、研究がなされてきた。そして20世紀に目覚ましく発展を遂げた宇宙の観測技術の進展により、宇宙論は飛躍的に進歩し、人類の宇宙観は大きく変貌を遂げた。宇宙マイクロ波背景放射（cosmic microwave background radiation, CMBR, CMB）の発見は初期の宇宙が高温の熱平衡状態にあったことを示した。COBE衛星による観測からCMBは温度2.7Kに対応する黒体輻射であり、第0近似では等方的であるが、さらに細かく見ると $10^{-5}$ 程度の温度揺らぎの存在が示された。また宇宙大規模構造の観測によって、我々の宇宙がはるか遠方まで広がっており、少なくとも現在観測できる範囲では一様等方であることが示された。しかし我々の宇宙に対する理解が深まると同時に、新たな多くの問題に直面することになった。

### 1.1 宇宙論における現状と課題

銀河の回転曲線や銀河団の観測から、素粒子標準模型に含まれていない未知の物質、暗黒物質（dark matter）の存在が示唆されてきた。またCMBや遠方銀河におけるIa型超新星の観測[1, 2]から、現在の宇宙は加速膨張していることが分かった。現在では、CMBの観測と他の宇宙論的観測を組み合わせることで、宇宙の各構成要素が宇宙の全エネルギー密度の何割を占めているか明らかになっている[3]。それによると、宇宙の全エネルギー密度のうちの約70%は、宇宙の加速膨張を説明するために導入された未知のエネルギー形態、暗黒エネルギー（dark energy）が占めている。また、宇宙の全エネルギー密度のうち、約26%は暗黒物質が占めている。宇宙論では素粒子標準模型で知られている物質をバリオンとよぶが、バリオンの量は、宇宙の全エネルギー密度の数%程度である。このように、宇宙がバリオン・暗黒物質・暗黒エネルギーを構成要素として成り立っているとする考え方が定着した。このような単純化された宇宙モデルを $\Lambda$ CDMモデルと呼ぶ。

$\Lambda$ CDMモデルは宇宙の構成要素を明らかにした。そしてそれらの各構成要素の量は、宇宙に対する観測技術の進歩によって精密に測定されてきた。しかし、暗黒エネルギー、暗黒物質といった、既知の物理で説明できないものが宇宙には存在し、これらを理論的に説明することが、宇宙論におけるこれからの課題となっている。

また、 $\Lambda$ CDMモデルではニュートリノ質量は0として扱われているが、素粒子実験からニュートリノには質量があることが分かっている。素粒子実験では、ニュートリノ世代間の質量自乗の差 $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ が測定され、ニュートリノ質量の和に制限をつけている。 $\Delta m_{ij}^2$ は、ニュートリノが質量を持つ場合、ニュートリノの各世代数が保存しないような反応（ニュートリノ振動）が起こることを利用して得られる。その測定値は、

$$\Delta m_{21}^2 = (7.9_{-0.8}^{+1.0}) \times 10^{-5} \text{eV}^2, |\Delta m_{31}^2| = (2.2_{-0.8}^{+1.1}) \times 10^{-3} \text{eV}^2$$

である[4]。

ニュートリノ質量は非常に小さいが、宇宙の構造形成に影響を与える[5]。このため、宇宙大規模構造の観測から、ニュートリノ質量に対して厳しい制限を与えることができる。ニュートリノ質量和の上限値で最も厳しい値は宇宙論

から得られており、次世代の宇宙論的観測からさらに厳しい制限値が得られると期待される。

それでは、暗黒エネルギー、ニュートリノ質量を宇宙論的観測から測定・検証するには、どのような方法を用いることができるだろうか。

## 1.2 膨張則・揺らぎを反映する宇宙論的観測

暗黒エネルギーの状態方程式やニュートリノ質量は、膨張則や密度揺らぎの進化に影響を与える。これから、膨張則や密度揺らぎの進化を反映する観測量を用いることで、ニュートリノ質量の測定や暗黒エネルギーの状態方程式の検証を行うことができる。では膨張則や密度揺らぎの進化の情報が得られる宇宙論的観測にはどのようなものがあるだろうか。

Ia型超新星の観測では、超新星の絶対等級が既知であるとして光度距離が求められ、膨張率が導かれる。また、超新星から来る光のドップラーシフトを見ることで赤方偏移が分かる。これから、各赤方偏移における膨張率が求められる。

銀河数密度分布の観測では、バリオン振動と呼ばれる宇宙の密度揺らぎの特徴的なスケールを測定することで、それを標準ものさしとして角径距離、膨張率が求められる。また銀河分布が密度揺らぎの進化を反映していると考えすることで、密度揺らぎの情報が得られる。しかし銀河分布の観測では直接暗黒物質の分布を観測していることにはならないので、銀河バイアス（暗黒物質の密度揺らぎと銀河分布の密度揺らぎを関係付ける量）を通じて暗黒物質の分布を推定しなければならない。

弱重力レンズの観測では、レンズ効果によって歪んだ空間パターンを観測することで、レンズを引き起こした密度揺らぎの情報を得ることができる。

これらのうち、本研究では弱重力レンズに注目する。弱重力レンズの観測では、密度揺らぎの情報に加え、膨張則の情報も得ることができる。また、密度揺らぎを銀河バイアス無しに観測することができる。

主な弱重力レンズの観測対象として、以下の2種類が挙げられる。一つは銀河の弱重力レンズ、あるいはコスミックシア（cosmic shear）と呼ばれるものである。銀河から放たれた光は大規模構造が作る重力ポテンシャルによって曲がり、観測される銀河の形が歪む。この現象を銀河の弱重力レンズとよぶ。弱重力レンズによる銀河の歪み（shear）を統計的に調べることで、宇宙論における密度揺らぎの情報を取り出すことが可能となる。もう一つはCMBの弱重力レンズ効果である。最終散乱面から放たれたCMB光子は、我々に観測されるまでの間に大規模構造が作る重力ポテンシャルによって重力レンズを受ける。この効果によって、観測されるCMBの揺らぎのパターンが歪むが、この効果をCMBレンズングとよぶ。CMBは銀河形成以前の宇宙においてすでに重力レンズ効果を受けているためCMBレンズングは、コスミックシアの観測では到達不可能なはるか遠方からの密度揺らぎの情報を含む。したがって、CMBレンズングとコスミックシアの観測を組み合わせることで、宇宙の広範な範囲における密度揺らぎを調べることができる。

### コスミック・シアの観測

10 数年以上前は、銀河の形状を測定できるほどの精度がなく、コスミック・シアを観測することはできなかった。しかし現在では、稼働中のCanada-France-Hawaii Telescope Legacy Survey (CFHTLS) <sup>\*1</sup>などから得られるコスミックシアのデータを利用して、ニュートリノ質量などに制限が与えられるようになった[6, 7]。次世代の銀河の測光サーベイである Hyper Suprime-Cam (HSC)<sup>\*2</sup>や Dark Energy Survey (DES)<sup>\*3</sup>、Large Synoptic Survey

<sup>\*1</sup> <http://www.cfht.hawaii.edu/Science/CFHLS/>

<sup>\*2</sup> <http://www.naoj.org/Projects/HSC/>

<sup>\*3</sup> <http://www.darkenergysurvey.org/>

Telescope (LSST)<sup>\*4</sup> では、トモグラフィー [8] を用いて観測される銀河の赤方偏移を見積もることができ、暗黒エネルギーの状態方程式を高い精度で決定できると期待されている[8, 9, 10]。

### CMBレンジングの観測

CMBレンジングは、WMAPの観測データのみから直接検出されなかった。しかし、WMAPの観測データと大規模構造の観測量との相関シグナルが検出された[11, 12]。また、WMAPと地上のCMB観測プロジェクトACBARのデータを合わせた観測データは、レンズ効果を考えたCMBの温度揺らぎの観測データと考えても矛盾しない[13]。これらの受け、次世代のCMB観測プロジェクトである Planck<sup>\*5</sup>や Atacama Cosmology Telescope (ACT)<sup>\*6</sup> などから、CMBレンジングのシグナルがほぼ確実に検出されると考えられている。特にACTは高分解能で、CMBレンジングを小スケールまで高い精度で検出できると期待されている。

これらを踏まえ、本研究では弱重力レンズ（CMBレンジングおよび銀河シア）を用いることで、密度揺らぎの進化に影響を与える暗黒エネルギーの状態方程式、ニュートリノ質量に対しどこまで制限を与えることができるか調べることを目的とした。

## 1.3 本論文の構成

本論文では、CMBレンジングと銀河の弱重力レンズを用いて宇宙論パラメータの決定精度を調べる。そのさい、宇宙論パラメータとして特に暗黒エネルギーとニュートリノ質量に対する決定精度について着目する。

第2章から第4章では、本研究の解析結果・議論を理解するためのレビューを行う。第2章では、暗黒エネルギーやニュートリノ質量など、本研究で考察する宇宙論パラメータが、構造形成やCMBの揺らぎに対してどのように影響を及ぼすか理解するために、構造形成とCMBのレビューを行う。また、宇宙論パラメータ間の縮退を理解するために、パワースペクトルを導入し、宇宙論パラメータの依存性と縮退について述べる。第3章では、本研究において用いる CMBレンジング、および銀河の弱重力レンズからどのような宇宙論的情報が得られるか理解するため、弱重力レンズについてレビューを行う。銀河の弱重力レンズは文献[14]、CMBレンジングは文献[15]、[16]および[17]を参考にまとめる。第4章では、本研究において、宇宙論パラメータ推定のさいに利用するフィッシャー解析を中心にまとめる。フィッシャー解析は文献[18]を参考にまとめる。また、非線形進化のモデルの違いによって宇宙論パラメータの推定値にどの程度の系統誤差が生じるか調べるため、文献[19]を参考に、フィッシャー解析に基づく手法を導出する。

第5章は、本研究の研究結果、およびその考察について述べた章である。本研究の目的は、CMBレンジングと銀河の弱重力レンズを用いた宇宙論パラメータの決定精度について調べ、重力の非線形性が結果に与える系統誤差について調べることである。まず、第4章で述べるフィッシャー解析を用い、宇宙論パラメータの決定精度について調べる。そのさい、CMBレンジングとコスミックシアの情報があるように決定精度に影響を与えるのか調べる。次に、重力の非線形性がパラメータ推定に与える影響について調べる。最後に、第6章において、本論文全体のまとめを行う。また、ここで将来の展望について述べる。

<sup>\*4</sup> <http://www.lsst.org/lsst/>

<sup>\*5</sup> <http://www.rssd.esa.int/index.php?project=planck>

<sup>\*6</sup> <http://www.princeton.edu/act/>





## 第2章

# 膨張宇宙と揺らぎの進化

本研究では、CMB揺らぎと弱重力レンズ効果の観測を想定した解析を行う。CMB揺らぎや弱重力レンズ効果には、膨張宇宙における揺らぎの進化を通じて暗黒エネルギーやニュートリノ質量などの宇宙論パラメータの情報が含まれている。ここでは、膨張宇宙における揺らぎの進化についてレビューを行い、暗黒エネルギーやニュートリノ質量といった宇宙論パラメータが揺らぎの進化にどのような影響を与えるか述べる。また、パワースペクトルを導入し、パワースペクトルの宇宙論パラメータ依存性と宇宙論パラメータ間の縮退について述べる。

## 2.1 一様等方宇宙

我々が観測できる宇宙大規模構造は、少なくとも数百Mpc以上のスケールでほぼ一様等方だと見なせる。また、CMBはほぼ等方的に我々に到来し、その温度揺らぎは $10^{-5}$ 程度と非常に小さい。したがって、第0近似で我々の宇宙は一様等方であると仮定するのが自然である。以下では文献[20]を参考に、宇宙が一様等方な時空で記述できると仮定し、一様等方な宇宙における各物理量の時間発展について考察する。ただし光速 $c$ は1とする。

### 2.1.1 一様等方時空

一様等方な時空は、時空の曲率 $K$ 、スケール因子 $a$ を用いて

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{1}{1 - Kr^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (2.1)$$

のように表される。時間成分として、以下では $t$ の代わりに $d\eta = dt/a$ で定義される共形時間（conformal time）を用いることもある。現在の共形時間の値を $\eta_0$ とする。エネルギー・運動量テンソル $T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$ について一様等方時空のもとでの重力場の方程式を書き下すと、00成分から

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.2)$$

が得られる。 $\Lambda$ は宇宙定数、 $H = \dot{a}/a$ は膨張率である。また $\mathcal{H} = a'/a = \dot{a} = aH$ と定義しておく。ただしプライムは共形時間 $\eta$ に関する微分を意味する。式（2.2）はフリードマン方程式と呼ばれている。またエネルギー・運動量保存則の式から

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (2.3)$$

が得られる。式（2.3）は膨張宇宙における連続の式を意味する。

### 2.1.2 宇宙の構成要素

宇宙には、少なくとも光子やニュートリノ、バリオン、重力相互作用以外の相互作用が極めて弱い暗黒物質が存在

していると考えられている。現在標準とされている宇宙論では、これらを宇宙の構成要素として取り入れる。宇宙の全エネルギー密度 $\rho$ を、光子 $\rho_R$ 、ニュートリノ $\rho_\nu$ 、バリオン $\rho_B$ 、暗黒物質 $\rho_C$ の和として表すと、フリードマン方程式(2.2)は

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_R + \rho_\nu + \rho_B + \rho_C + \rho_\Lambda) \quad (2.4)$$

と書ける。ただし $\rho_\Lambda \equiv \Lambda/8\pi G$ である。ここで、各成分 $\rho_i$ の現在の値 $\rho_{i,0}$ に対して

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{c,0}}; \quad \rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (i = \nu, B, C, R, \Lambda) \quad (2.5)$$

を定義する。また $\Omega_K = -K/(a^2 H_0^2)$ と定義する。ただし $H_0$ は現在の膨張率 $H$ の値である。 $H_0$ の代わりに無次元の膨張率 $h = H_0/(100\text{Mpc})$ が用いられることもある。このとき、式(2.2)から

$$\Omega_R + \Omega_\nu + \Omega_B + \Omega_C + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1 \quad (2.6)$$

が成り立つ。

ニュートリノは、温度の減少とともに、非相対論的粒子として振る舞うようになる。現在のニュートリノの温度は

$$T_\nu^0 \simeq \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_\gamma^0 \simeq 1.9\text{K} \simeq 1.7 \times 10^{-4}\text{eV} \quad (2.7)$$

で与えられる。ニュートリノのエネルギー密度は、ニュートリノの分布関数を積分することで

$$\rho_\nu = \begin{cases} \frac{7\pi^2}{120} \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} T_\gamma^4 & (m_\nu \ll T_\nu) \\ \sum_\nu m_\nu \left(\frac{6\zeta(3)}{11\pi^2}\right) T_\gamma^3 & (m_\nu \gg T_\nu) \end{cases} \quad (2.8)$$

となる。この結果を用いると、ニュートリノが非相対論的な場合では $\Omega_\nu$ はニュートリノ質量の和 $\sum_\nu m_\nu$ を用いて

$$\Omega_\nu \simeq \frac{c^2 \sum_\nu m_\nu (1.1 \times 10^2/\text{cm}^3)}{1.9 \times 10^{-29} h^2 \text{g}/\text{cm}^3} \simeq \frac{1.1 \times 1.8 \times 10^{-31}}{1.9 \times 10^{-29}} \frac{\sum_\nu m_\nu}{h^2 \text{eV}} \simeq \frac{\sum_\nu m_\nu}{93 h^2 \text{eV}} \quad (2.9)$$

と表せる。

以降では、バリオン、暗黒物質、非相対論的なニュートリノをまとめて物質成分とよび、物質の全エネルギー密度 $\rho_m$ を

$$\rho_m \equiv \rho_B + \rho_C + \rho_\nu \quad (2.10)$$

と定義する。また

$$\Omega_m \equiv \frac{8\pi G \rho_{m,0}}{3H_0^2} \quad (2.11)$$

とする。このとき、

$$\Omega_m = \Omega_B + \Omega_C + \Omega_\nu \quad (2.12)$$

である。

一般に状態方程式 $p = w\rho$ に従う成分が宇宙を支配している場合を考える。 $w \neq -1$ であれば、フリードマン方程式(2.2)と連続の式(2.3)を用いることで、エネルギー密度とスケール因子の時間発展はそれぞれ

$$\rho \propto \frac{1}{a^{3(1+w)}} \propto \frac{1}{t^2}, \quad (2.13)$$

$$a \propto t^{2/(3+3w)} \quad (2.14)$$

となることが分かる。 $w = -1$ の場合は $\rho = \text{一定}$ となり、 $a$ は指数関数的に増大する。相対論的粒子の場合は、静止質量エネルギーが運動エネルギーに対して無視できるので $w = 1/3$ となる。このとき、エネルギー密度はスケール因子と $\rho \propto 1/a^4$ の関係をもち、またスケール因子の時間発展は $a \propto t^{1/2}$ となる。非相対論的粒子の場合は、運動エネルギーが静止質量エネルギーに対して無視できるので $w = 0$ となる。エネルギー密度はスケール因子と $\rho \propto 1/a^3$ の関係をもち、またスケール因子の時間発展は $a \propto t^{2/3}$ となる。これらをもとに膨張率の $t$ 依存性を計算すると

$$H = \mathcal{H}/a \propto \begin{cases} \frac{1}{t} & w \neq -1 \text{ のとき} \\ \text{const.} & w = -1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (2.15)$$

となる。最後に、宇宙が加速膨張するために必要な  $w$  の範囲を求める。エネルギー密度 $\rho_\Lambda$ 、圧力 $p_\Lambda$ の成分が宇宙を占めている場合を考えると、宇宙が加速膨張するためには

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} (3p_\Lambda + \rho_\Lambda) > 0 \quad (2.16)$$

となる必要がある。これから $w < -1/3$ を満たさなければならない。

### 2.1.3 宇宙論における距離

#### 共動距離

現在の時刻 $t_0$ において、観測者から天体までの間を、光の測地線に沿って進んだときの測地線の長さを共動距離 (comoving distance) と定義する。すなわち

$$\chi = a_0 \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (2.17)$$

として定義される $\chi$ が共動距離である。ここで $a_0$ は現在のスケール因子であり、以降では $a_0 = 1$ とする。赤方偏移 $z$ は $1 + z \equiv 1/a$ として定義される。これから $\chi$ は赤方偏移 $z$ の関数として

$$\chi = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a} = \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \quad (2.18)$$

と表せる。 $r$ は共動距離 $\chi$ と式 (2.17) の関係にあるので、これを積分することで

$$r = S_K(\chi) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}\chi) & (K > 0) \\ \chi & (K = 0) \\ \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}\chi) & (K < 0) \end{cases} \quad (2.19)$$

$$(2.20)$$

が得られる。一方、式 (2.18) の関係から、 $r$ を $z$ の関数として表すと

$$r = S_K \left( \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \right) \quad (2.21)$$

となる。

#### 光度距離

赤方偏移 $z$ に位置する天体が、単位時間あたりに全エネルギー $L_{\text{tot}}$ で光を放っている場合を考える。単位時間・単位面積あたりに観測者が受けるエネルギー流束 $L_{\text{flux}}$ は、赤方偏移などの効果を考慮しなければ

$$L_{\text{flux}} = \frac{L_{\text{tot}}}{4\pi r^2} \quad (2.22)$$

として求められる。ここで $r$ は天体までの距離である。膨張宇宙では以下で説明するようにこの関係式は変更される。以下の計算では $\hbar = c = 1$ とする。

まず、天体を中心とした座標系では、時刻 $t$ において天体から放出された波長 $\lambda$ の光のエネルギー $E(\lambda)$ を用いると、そのエネルギーに対応する光子数 $N(\lambda)$ は

$$N(\lambda) = \frac{E(\lambda)}{2\pi/\lambda} \quad (2.23)$$

と書ける。天体から単位時間 $\Delta t$ の間に放出された光子数は $1/4\pi r^2$ で拡散していくので、動径座標 $r$ において観測者が単位時間 $\Delta t'$ の間に観測する単位面積当たりの光子数流束は、

$$N_{\text{flux}}(\lambda') \Delta t' \Delta \lambda' = \frac{N(\lambda)}{4\pi r^2} \Delta t \Delta \lambda \quad (2.24)$$

となる。赤方偏移の効果 $\lambda' = (1+z)\lambda$ と固有時間の違い $\Delta t' = (1+z)\Delta t$ を考慮すると、この関係式は

$$N_{\text{flux}}(\lambda') \Delta t' \Delta \lambda' = \frac{N(\lambda'/(1+z))}{4\pi r^2} \frac{\Delta t'}{1+z} \frac{\Delta \lambda'}{1+z} \quad (2.25)$$

と書き直せる。したがって、この光を観測者が観測した場合、波長 $\lambda' = (1+z)\lambda$ の光のエネルギー流束は

$$E_{\text{flux}}(\lambda') = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{E(\lambda'/(1+z))}{(1+z)^3} \quad (2.26)$$

と表せる。この両辺を観測波長 $\lambda'$ で積分すれば

$$L_{\text{flux}} = \frac{L_{\text{tot}}}{4\pi r^2 (1+z)^2} \quad (2.27)$$

となる。ここで

$$d_L \equiv r(1+z) \quad (2.28)$$

で定義される量 $d_L$ を用いると、式(2.27)は

$$L_{\text{flux}} = \frac{L_{\text{tot}}}{4\pi d_L^2} \quad (2.29)$$

となり、式(2.22)の $r$ を $d_L$ で置き換えたものになる。この $d_L$ は光度距離 (luminosity distance) とよばれる。

### 角径距離

赤方偏移 $z$ において実距離 $l$ だけ離れた2点 A, B があり、その2点間の見かけの角度が $\Delta\theta$ のとき、角径距離 $d_A$  (angular diameter distance) は

$$d_A \equiv \frac{l}{\Delta\theta} \quad (2.30)$$

と定義される。離角 $\Delta\theta$ は

$$l = \int_A^B d\theta \, ar = \frac{r}{1+z} \Delta\theta \quad (2.31)$$

を用いて

$$\Delta\theta = \frac{1+z}{r} l \quad (2.32)$$

と求められるから、

$$d_A = \frac{r}{1+z} \quad (2.33)$$

が得られる。これから角径距離は

$$d_A = \frac{1}{(1+z)H_0\sqrt{\Omega_K}} \sinh \left( \sqrt{\Omega_K} \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \right) \quad (2.34)$$

と求められる。角径距離は曲率 $\Omega_K$ や膨張率 $H$ に依存することが分かる。

また、光度距離 $d_L$ と

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2} \quad (2.35)$$

の関係がある。

## 2.2 密度揺らぎ

現在観測される宇宙の大規模構造は、宇宙初期に生成された揺らぎが時間進化したものと考えられている。宇宙初期における揺らぎの生成を理論的に説明する有力な考え方がインフレーションである。インフレーションとは、宇宙初期の急激な加速膨張を引き起こす機構である。このアイデアは、ビッグバン理論の原理的問題を解決すると同時に、量子論起源の揺らぎの生成を説明できる。インフレーションで生成された揺らぎは、急激な宇宙膨張で地平線スケール $\lambda_H \equiv 1/\mathcal{H}$ （互いに因果関係をもてる限界の範囲）以上に引き伸ばされる。インフレーションが終わると $\lambda_H$ は大きくなり、地平線スケールより外側（超地平線スケール、super horizon scale）の揺らぎは再び地平線スケールより内側（地平線内スケール、sub horizon scale）に入る。そして地平線内スケールでの揺らぎが時間進化し、宇宙の大規模構造が形成されたと考えられている。ここでは、宇宙を構成する物質どうしの相互作用を考えることで、宇宙の構造形成、特に密度揺らぎの時間変化について考察する。特にここでは、宇宙の構造形成に寄与する物質として、バリオン、冷たい暗黒物質（cold dark mater, CDM）、ニュートリノを考える。

### 2.2.1 密度揺らぎの時間変化を記述する方程式

構造形成に影響を与える各物質の揺らぎの時間変化を正確に求めるためには、各物質のボルツマン方程式と重力場の一次摂動から導かれるアインシュタイン方程式から出発しなければならない。ここではそれらの方程式系の詳細な導出は行わず、得られる結果を各成分についてまとめる。ここは文献[21]および[22]を参考にまとめる。以下では特に断らない限り共形ニュートンゲージ（conformal Newton gauge）を選ぶことにする：

$$ds^2 = a^2(\eta)[(1+2\Phi)d\eta^2 - (1-2\Psi)\gamma_{ij}dx^i dx^j] \quad (2.36)$$

#### CDM の揺らぎが従う方程式系

揺らぎの時間変化を扱う場合、冷たい暗黒物質は重力相互作用のみで記述できると考えられる。この場合、ボルツマン方程式は流体近似の式に帰着させて解くことができる。その結果、冷たい暗黒物質の揺らぎは共形ニュートンゲージにおいて以下の方程式に従う：

$$\frac{\partial \delta_C}{\partial \eta} + ikv_C = 3 \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial v_C}{\partial \eta} + \mathcal{H}v_C = -ik\Phi \quad (2.38)$$

ここで $\delta_C, v_C$ は冷たい暗黒物質の密度揺らぎ、速度揺らぎの空間に関するフーリエ成分を表す。 $k$ はフーリエ波数であり、速度場の渦はないとした。すなわち $v^i = k^i v/k$ 。

### バリオンの揺らぎが従う方程式系

密度揺らぎが成長する時期には、光子とバリオン間に生じる電磁気的な相互作用はなくなっている。そのため、構造形成におけるバリオンの役割は冷たい暗黒物質と同じになり、バリオンの揺らぎが従う方程式系は冷たい暗黒物質の揺らぎが従う方程式と同じとなる：

$$\frac{\partial \delta_B}{\partial \eta} + ikv_B = 3 \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial v_B}{\partial \eta} + \mathcal{H}v_B = -ik\Phi \quad (2.40)$$

### ニュートリノの揺らぎが従う方程式系

ニュートリノの場合、質量はゼロではないがバリオンや冷たい暗黒物質に比べて非常に軽いので速度分散が大きいと考えられる。このような粒子を正確に扱うためには、相対論的ボルツマン方程式を導いて解く必要がある。しかしここでは簡単のため、流体近似をして得られる揺らぎの時間変化を表す方程式系を示しておく：

$$\frac{\partial \delta_\nu}{\partial \eta} + ikv_\nu = 3 \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial v_\nu}{\partial \eta} + \mathcal{H}v_\nu + ikc_s^2 \delta_\nu = -ik\Phi \quad (2.42)$$

ただし  $c_s$  はニュートリノの音速で、ニュートリノの圧力  $\bar{p}_\nu$  を用いて

$$c_s^2 \equiv \frac{d\bar{p}_\nu}{d\rho_\nu} \quad (2.43)$$

と定義される。

### 重力場の揺らぎが従う方程式系

共形ニュートンゲージで記述した一次摂動のアインシュタイン方程式は

$$2(2\mathcal{H}^2 + a'')\Phi + k^2\Psi + \mathcal{H}(\Phi' + 6\Psi') + \Psi'' = \sum_i 4\pi G a^2 \bar{\rho}_i \left[ -\delta_i + (1 + w_i) \left( \frac{i\mathcal{H}}{k} v_i + \sigma_i \right) \right] \quad (2.44)$$

$$k^2(\Psi - \Phi) = \sum_i 12\pi G a^2 \bar{\rho}_i (1 + w_i) \sigma_i \quad (2.45)$$

$$(-k^2 - \mathcal{H}^2 + a'')\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' + \Psi') + 3\Psi'' = \sum_i 4\pi G a^2 \bar{\rho}_i \left[ \delta_i + (1 + w_i) \left( \frac{3i\mathcal{H}}{k} v_i + \sigma_i \right) \right] \quad (2.46)$$

である。ただし、 $i = C, B, \nu$  であり、 $\sigma_i$  は非等方ストレス、 $\bar{\rho}_i$  は平均のエネルギー密度、 $w_i$  は状態方程式を表す。

#### 2.2.2 密度揺らぎの成長解

ここでは文献[23]を参考に、特に地平線内スケールにおいて物質優勢期での密度揺らぎの成長解を導き、密度揺らぎの成長がニュートリノの自由拡散スケール (free streaming scale) に依存することをみる。

まず興味があるのは地平線内スケール ( $\mathcal{H} \ll k$ ) での密度揺らぎの時間変化であるから、式 (2.46) の  $v_i$  に比例する項は無視できる。また各成分の非等方圧力  $\sigma_i$  が全て無視できるとすれば  $\Psi = \Phi$  となる。物質優勢期なので重力場の

時間変化はゼロである。これらを式 (2.37) ～ (2.46) に適用すると

$$\frac{\partial \delta_B}{\partial \eta} + ikv_B = 0 \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial v_B}{\partial \eta} + \mathcal{H}v_B = -ik\Phi \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \delta_C}{\partial \eta} + ikv_C = 0 \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial v_C}{\partial \eta} + \mathcal{H}v_C = -ik\Phi \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial \delta_\nu}{\partial \eta} + ikv_\nu = 0 \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial v_\nu}{\partial \eta} + \mathcal{H}v_\nu + ikc_s^2 \delta_\nu = -ik\Phi \quad (2.52)$$

$$k^2 \Phi = -4\pi G a^2 \bar{\rho}_m \delta_m \quad (2.53)$$

が得られる。これらを連立して解くことで密度揺らぎの時間変化を求められる。ここで  $\bar{\rho}_m$  はバリオン、CDM、非相対論的ニュートリノのエネルギー密度の和であり、 $\delta_m$  は

$$\bar{\rho}_m \delta_m = \bar{\rho}_\nu \delta_\nu + \bar{\rho}_B \delta_B + \bar{\rho}_C \delta_C \quad (2.54)$$

で定義される全物質の密度揺らぎである。

#### 非相対論的ニュートリノの揺らぎ

式 (2.51) ～ (2.53) を用いると、ニュートリノの密度揺らぎは

$$\frac{\partial^2 \delta_\nu}{\partial \eta^2} + \mathcal{H} \frac{\partial \delta_\nu}{\partial \eta} + k^2 c_s^2 \delta_\nu = 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m \delta_m \quad (2.55)$$

に従う。今、 $\delta_\nu \sim \delta_m$  であると仮定すると、上式 (2.55) は

$$\frac{\partial^2 \delta_\nu}{\partial \eta^2} + \mathcal{H} \frac{\partial \delta_\nu}{\partial \eta} + (k^2 c_s^2 - 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m) \delta_\nu = 0 \quad (2.56)$$

と書き換えられる。このとき、以下で定義されるニュートリノの自由拡散スケール

$$k_{\text{FS}} \equiv \left( \frac{4\pi G \bar{\rho}_m a^2}{c_s^2} \right)^{1/2} = \left( \frac{3\Omega_m H_0^2}{2c_s^2 a} \right)^{1/2} \quad (2.57)$$

より大きなスケール  $k < k_{\text{FS}}$  で密度揺らぎは成長し、自由拡散スケールより小さいスケール  $k > k_{\text{FS}}$  では密度揺らぎが成長しない。これは、密度揺らぎの波長スケールによってニュートリノの圧力と自己重力の大小関係が変わり、長波長スケールでは自己重力が勝って密度揺らぎが成長できるからである。

ニュートリノの自由拡散スケールは時間変化する。実際、ニュートリノの音速  $c_s$  はニュートリノの質量  $m_\nu$  を用いて

$$c_s = \frac{\langle p \rangle}{m_\nu} \simeq \frac{3T_\nu}{m_\nu} = \frac{1}{a} \frac{3T_\nu^0}{m_\nu} \quad (2.58)$$

のように表せ、スケール因子  $a$  に依存する。ニュートリノの現在の温度が  $T_\nu^0 \simeq 1.7 \times 10^{-4}$  eV であることから

$$c_s = c(1+z) \frac{3T_\nu^0}{m_\nu} \simeq 150(1+z) \left( \frac{1\text{eV}}{m_\nu} \right) \text{ kms}^{-1} \quad (2.59)$$

と書けるので、物質優勢期におけるニュートリノの自由拡散スケールは

$$k_{\text{FS}} \simeq \left( \frac{3(100h)^2}{2(150)^2} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{\Omega_m}{1+z}} \left( \frac{m}{1\text{eV}} \right) \text{ Mpc}^{-1} = 0.82 \sqrt{\frac{\Omega_m}{1+z}} \left( \frac{m}{1\text{eV}} \right) h \text{ Mpc}^{-1} \quad (2.60)$$

となる。

ニュートリノが相対論的粒子から非相対論的粒子になる時刻は、 $c_s/c \simeq 1$ 、すなわち

$$a_{\text{NL}} \simeq \frac{3T_\nu^0}{m_\nu} = 5.1 \times 10^{-4} \left( \frac{1\text{eV}}{m_\nu} \right) \quad (2.61)$$

で与えられる。この時刻での自由拡散スケールを $k_{\text{NR}}$ と表すと、

$$k_{\text{NR}} \simeq 0.018 \sqrt{\Omega_m} \left( \frac{m}{1\text{eV}} \right)^{1/2} h\text{Mpc}^{-1} \quad (2.62)$$

である。このとき、ニュートリノの自由拡散スケールは任意の時刻において $k_{\text{NR}}$ より大きい。ニュートリノの温度は宇宙膨張とともに減少していくので、ニュートリノは宇宙膨張とともに相対論的粒子から非相対論的粒子へと遷移する。つまりある時期より以前では、ニュートリノは相対論的粒子として光速 $c$ で運動している。宇宙膨張とともにニュートリノの温度は下がりニュートリノの熱的速度が減少すると、相対論的に振舞っていたニュートリノはある時期 $t_{\text{nr}}$ を境にして次第に非相対論的に振舞うようになる。 $t > t_{\text{NR}}$ での自由拡散スケールは単調増加するので、ニュートリノが相対論的粒子から非相対論的粒子へ移るときの自由拡散スケールが最小値 $k_{\text{NR}}$ である。

#### 自由拡散スケールより大きいスケールでの密度揺らぎ

ニュートリノの自由拡散スケールより大きいスケール ( $k \ll k_{\text{FS}}$ ) では、ニュートリノ、バリオン、冷たい暗黒物質の密度揺らぎは同じ方程式に従う。初期条件として $\delta_{\text{m}} = \delta_\nu = \delta_B = \delta_C$ 、 $v_{\text{m}} = v_\nu = v_B = v_C$ であれば、

$$\frac{\partial \delta_{\text{m}}}{\partial \eta} + ikv_{\text{m}} = 0 \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial v_{\text{m}}}{\partial \eta} + \mathcal{H}v_{\text{m}} = 0 \quad (2.64)$$

$$k^2 \Phi = -4\pi G a^2 \bar{\rho}_m \delta_{\text{m}} \quad (2.65)$$

が成り立つ。これから密度揺らぎ $\delta_{\text{m}}$ に対する方程式

$$\frac{\partial^2 \delta_{\text{m}}}{\partial \eta^2} + \mathcal{H} \frac{\partial \delta_{\text{m}}}{\partial \eta} - 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m \delta_{\text{m}} = 0 \quad (2.66)$$

が得られる。物質優勢期であることを考慮すれば、この方程式の解は時間とともに増加する解 $\delta_{\text{m}}^+$ と減少する解 $\delta_{\text{m}}^-$ の重ねあわせで表される。 $\delta_{\text{m}}^+$ と $\delta_{\text{m}}^-$ はそれぞれ

$$\delta_{\text{m}}^+ \propto a \quad (2.67)$$

$$\delta_{\text{m}}^- \propto a^{-3/2} \quad (2.68)$$

である。

また $\delta_{\text{m}} = \delta_{\text{m}}^+$ のとき、重力場 $\Phi$ は時間変化しない。実際、式(2.65)において $\delta_{\text{m}} = \delta_{\text{m}}^+$ および $\bar{\rho}_m \propto 1/a^3$ を代入すれば $\Phi$ は $a$ に依存しない。

#### 自由拡散スケールより小さいスケールでの密度揺らぎ

ニュートリノの自由拡散スケールより小さいスケール ( $k \gg k_{\text{FS}}$ ) では、ニュートリノの速度分散が大きいためニュートリノの密度揺らぎは成長しない。一方、バリオンや冷たい暗黒物質は速度分散が無視できる（ニュートリノに比べて自由拡散スケールが小さい）と考えられるので、バリオンや冷たい暗黒物質の密度揺らぎは成長する。したがって

$$\delta_\nu \ll \delta_B, \delta_C \quad (2.69)$$



だと考えられる。また  $\bar{\rho}_\nu \ll \bar{\rho}_B, \bar{\rho}_C$  が成り立つので

$$\bar{\rho}_m \delta_m = \bar{\rho}_\nu \delta_\nu + \bar{\rho}_B \delta_B + \bar{\rho}_C \delta_C \simeq \bar{\rho}_B \delta_B + \bar{\rho}_C \delta_C = (1 - f_\nu) \bar{\rho}_m \delta_m \quad (2.70)$$

となる。ここでニュートリノの割合を表すパラメータ

$$f_\nu \equiv \frac{\bar{\rho}_\nu}{\bar{\rho}_m} = \frac{\Omega_\nu}{\Omega_\nu + \Omega_B + \Omega_C} \quad (2.71)$$

を導入した。

以上の考察から、ニュートリノの自由拡散スケールより小さいスケールにおける揺らぎの時間発展は次の方程式系に従う：

$$\frac{\partial \delta_m}{\partial \eta} + ikv_m = 0 \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial \eta} + \mathcal{H}v_m = -ik\Phi \quad (2.73)$$

$$k^2 \Phi = -4\pi G a^2 \bar{\rho}_m (1 - f_\nu) \delta_m \quad (2.74)$$

これから、密度揺らぎ  $\delta_m$  に対する方程式

$$\frac{\partial^2 \delta_m}{\partial \eta^2} + \mathcal{H} \frac{\partial \delta_m}{\partial \eta} - 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m (1 - f_\nu) \delta_m = 0 \quad (2.75)$$

が得られる。この方程式の解は、成長解  $\delta_m^+$  と減少解  $\delta_m^-$  の重ね合わせで表される。 $\delta_m^+$  と  $\delta_m^-$  はそれぞれ

$$\delta_m^+ \propto a^{p^+} \quad (2.76)$$

$$\delta_m^- \propto a^{p^-} \quad (2.77)$$

である。ただし

$$p^\pm \equiv \frac{-1 \pm \sqrt{25 - 24f_\nu}}{4} \quad (2.78)$$

と定義した。特に  $f_\nu \ll 1$  のときは

$$\delta_m^+ \propto a^{1-3f_\nu/5} \quad (2.79)$$

$$\delta_m^- \propto a^{-3/2+3f_\nu/5} \quad (2.80)$$

と表せる。

密度揺らぎの成長解  $\delta_m^+$  は、 $f_\nu = 0$  のときに  $k < k_{\text{FS}}$  の場合と一致し、 $f_\nu \neq 0$  では  $k < k_{\text{FS}}$  のときに比べて小さい。これは、ニュートリノが重力クラスタリングに寄与しないことから理解できる。

### 2.2.3 密度揺らぎのパワースペクトル

宇宙の構造形成の理論を観測的と比較するためには、密度揺らぎの統計的性質について調べる必要がある。密度揺らぎの2点相関関数やそれをフーリエ空間になおしたパワースペクトルは頻繁に用いられる統計量である。ここでは、各スケールにおける揺らぎの時間変化について述べ、密度揺らぎのパワースペクトルのスケール依存性について、文献[24]をもとにまとめる。

### 超地平線スケールでの揺らぎ

地平線内に入った揺らぎは物理的効果によってスケールごとに異なった時間変化をする。しかし初期に生成された揺らぎが断熱的（すべての成分のエネルギー密度揺らぎが同じ）であれば、次式で定義されるゲージ不変な曲率揺らぎ（Bardeen curvature）

$$\zeta \equiv -\Psi + \frac{\delta\rho}{3(\bar{\rho} + \bar{p})} \quad (2.81)$$

は超地平線スケール（ $\mathcal{H} \gg k$ ）において時間によらず一定に保たれる。輻射優勢期における曲率揺らぎ $\zeta$ と密度揺らぎ $\delta$ の関係は

$$\zeta \propto \frac{\delta}{a^2} \quad (2.82)$$

となるので、輻射優勢期における超地平線スケールでの密度揺らぎは $a^2$ に比例して成長する。

### 地平線内スケールでの揺らぎ

輻射優勢期では、地平線内スケールにおける密度揺らぎは輻射によってならされてしまい成長できない。

この効果は具体的に計算で簡単に示すことができる。密度揺らぎの方程式を地平線内スケールの極限で書き下すと、時間に代わる新たな変数 $y \equiv a/a_{\text{eq}}$ を用いて

$$y(1+y)\frac{\partial^2 \delta_C}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{3y}{2}\right) \frac{d\delta_C}{dy} - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\Omega_b h^2}{\Omega_m h^2}\right) \delta_C = 0 \quad (2.83)$$

となる。この方程式の2つの独立解のうち、物質優勢期での成長解に接続する解が

$$\delta_C = 1 + \frac{3y}{2} \quad (2.84)$$

で与えられるので、輻射優勢期 $y \ll 1$ では定数となり成長しないことが分かる。

### 遷移関数

以上のように各スケール・各時期における密度揺らぎの成長は異なる。密度揺らぎは超地平線スケールにおいて

$$\delta_m^{k \ll \mathcal{H}} = \frac{D(t)}{D(t^{\text{ini}})} \delta_m^{(\text{ini})} \quad (2.85)$$

のように関数 $D$ を用いて表せる。しかし、超地平線スケール以下のスケールではさまざまな物理過程によって各時刻・各スケールでの揺らぎが異なる。重力の線形理論では密度揺らぎは各スケール $k$ ごとに独立に時間変化するので、地平線内のスケール依存性は

$$\delta_m = \mathcal{T}(k, \eta) \delta_m^{k \ll \mathcal{H}} \quad (2.86)$$

で定義される遷移関数 $\mathcal{T}$ に押し込めることができる。この遷移関数に地平線内のすべての物理情報が含まれる。

物質・輻射等密度期（matter-radiation equality）を

$$a_{\text{eq}} \equiv \frac{\Omega_R h^2}{\Omega_m h^2} \quad (2.87)$$

と定義したとき、遷移関数は

$$k = k_{\text{eq}} \equiv \mathcal{H}|_{a=a_{\text{eq}}} \simeq 0.01 [h/\text{Mpc}] \quad (2.88)$$

から折れ曲がるが、この振る舞いは以下のように説明される。

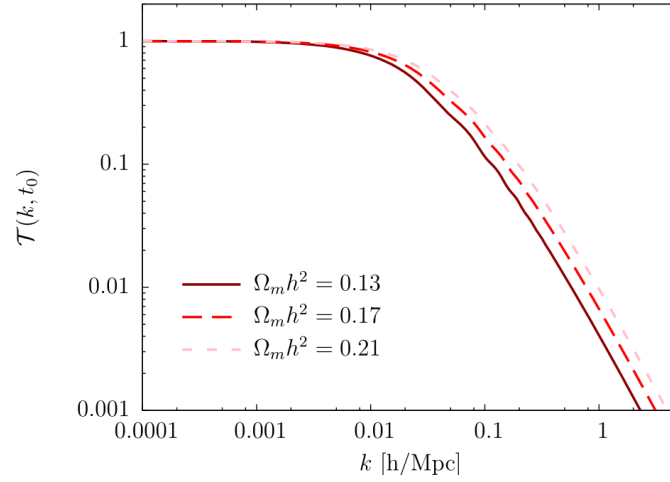


図2.1 現在の時刻における遷移関数。CAMB [25]（線形ボルツマン方程式を数值的に解く公開コード）を利用して重力の線形摂動による遷移関数を求めた。 $\Omega_m h^2$ の値をそれぞれ変えてプロットしている。

まず輻射優勢期での地平線内スケールでは密度揺らぎが成長できないのに対し、超地平線スケールではスケール因子の2乗に比例して成長できる。一方物質優勢期では地平線内スケール、超地平線スケールともにスケール因子に比例して成長する。したがって $k < k_{\text{eq}}$ での揺らぎは物質優勢期に地平線内に入るので成長が抑制されない。逆に $k > k_{\text{eq}}$ での揺らぎは輻射優勢期に地平線内に入るので成長が抑制され、スケールが小さければ小さいほど抑制を受ける時間が長く揺らぎの振幅はそれより大きいスケールに比べて小さくなる。

また、輻射優勢期での地平線スケール $\mathcal{H}$ に対応する波数は

$$k_H = \mathcal{H} \propto 1/a \quad (2.89)$$

となる。輻射優勢期に地平線内に入る揺らぎは、地平線内に入るまでは $a^2$ に比例して成長するが地平線内では成長が止まるので、地平線内に入る時点でのスケール因子を $a_{\text{enter}}$ として

$$\delta_m \propto a_{\text{enter}}^2 \delta_m^{(\text{ini})} \propto k^{-2} \delta_m^{(\text{ini})} \quad (2.90)$$

の形でスケール依存する。これらより遷移関数の漸近形

$$\mathcal{T}(k, t)|_{t \gg t_{\text{eq}}} = \begin{cases} 1 & (k \ll k_{\text{eq}}) \\ k^{-2} & (k \gg k_{\text{eq}}) \end{cases} \quad (2.91)$$

が得られる。図2.1では同期ゲージでの密度揺らぎの遷移関数を波数 $k$ に関してプロットしている。そのさい、線形ボルツマン方程式を数值的に解く公開コード（CAMB）を利用して求めている。波数 $k \sim 0.01 - 0.1$ において振動が見えるのは、後述するCMBの揺らぎの生成において現れる振動パターンが密度揺らぎに反映されたもので、バリオン振動と呼ばれる。

### パワースペクトル

あるフーリエ変換された揺らぎ $x_{\mathbf{k}}$ のパワースペクトル $P_x(k)$ は、

$$\langle x_{\mathbf{k}} x_{\mathbf{k}'} \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_x(k) \quad (2.92)$$

と定義する。ただし $\delta_D$ は $\mathbf{k}$ -空間でのデルタ関数である。また $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均である。密度揺らぎのパワースペクトルは体積の次元をもっており、

$$\Delta^2(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} P_x(k) \quad (2.93)$$

で定義される無次元量も使われる。

### 原始揺らぎのパワースペクトル

単純なインフレーション理論が予言する揺らぎはほぼガウス揺らぎであり、分散（パワースペクトル）だけで統計性が記述される。ここでは生成される（共動）曲率揺らぎ（comoving curvature perturbation） $\mathcal{R}$ の無次元パワースペクトルを

$$\Delta_{\mathcal{R}}(k) = A_s \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_s-1} \quad (2.94)$$

のようにパラメトライズする。ただし $A_s, n_s, k_*$ は定数であり、以降では $k_* = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$ とする。傾き $n_s$ は1に非常に近いが完全に1ではない。 $\zeta$ とは超地平線スケールで $\zeta \sim \mathcal{R}$ となり、断熱揺らぎの場合に超地平線スケールで保存する。

ゲージ不変である曲率揺らぎは、インフラトンの揺らぎと $\mathcal{R} = -(\mathcal{H}/\dot{\phi})\delta\phi$ （spatial flat gauge）の関係をもつ。インフラトンの揺らぎは $\delta\phi \sim H/2\pi$ であることと、スローロールパラメータが $\epsilon = \dot{\phi}^2/(2M_{\text{pl}}^2\mathcal{H}^2)$ で表せることを用いると

$$\Delta_{\mathcal{R}}(k) = \frac{1}{2\epsilon M_{\text{pl}}^2} \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2 \quad (2.95)$$

が得られる。 $\epsilon$ はスローロールパラメータ、 $M_{\text{pl}} = \sqrt{1/8\pi G}$ 、 $H$ はインフレーション時の膨張率を表す。 $\Phi = [(3+3w)/(5+3w)] = (2/3)\zeta$ （輻射優勢）となることから、ポテンシャル揺らぎの無次元パワースペクトルは

$$\Delta_{\Phi}(k) = \frac{4}{9}\Delta_{\mathcal{R}}(k) \equiv \frac{25}{9} \left( \frac{k}{H_0} \right)^{n_s-1} \delta_H^2 \left( \frac{\Omega_{m,0}}{D(a=1)} \right)^2 \quad (2.96)$$

となる。ここで導入した $\delta_H$ も初期揺らぎの振幅を表すパラメータとして使われる。 $A_s$ と $\delta_H$ の関係は

$$A_s = \frac{25}{4} \left( \frac{k_*}{H_0} \right)^{n_s-1} \left( \frac{\Omega_{m,0}}{D(a=1)} \right)^2 \delta_H^2 \quad (2.97)$$

となる。

### 密度揺らぎのパワースペクトル

各時刻における密度揺らぎの（3次元）パワースペクトル $P_m(k, t)$ は、実空間における密度揺らぎ $\delta_m(\mathbf{x})$ をフーリエ変換した量 $\delta_m(\mathbf{k})$ を用いて

$$\langle \delta_m(\mathbf{k}, t) \delta_m(\mathbf{k}', t) \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_m(k, t) \quad (2.98)$$

ある程度小さいスケール $k \gtrsim 10^{-3} \text{ Mpc}^{-1}$ では、密度揺らぎはポテンシャル揺らぎとポアソン方程式を通じて関係する：

$$\delta_m(\mathbf{k}, a) = -\frac{2}{3} \frac{k^2}{\Omega_{m,0} H_0^2} \Phi(\mathbf{k}, a) \quad (2.99)$$

また、超地平線でのポテンシャル揺らぎは、物質優勢では $\Phi = (3/5)\zeta$ となるので、輻射優勢でのポテンシャル $\Phi_{\text{ini}}$ と $\Phi = (9/10)\Phi_{\text{ini}}$ で結びつく。これから

$$\delta_m(\mathbf{k}, a) = -\frac{3}{5} \frac{k^2}{\Omega_{m,0} H_0^2} \Phi_{\text{ini}}(\mathbf{k}) \mathcal{T}(k, a) D(a) \quad (2.100)$$

パワースペクトルになおすと

$$\begin{aligned}
 P_m(k, t) &= \frac{9}{25} \frac{k^4}{\Omega_{m,0}^2 H_0^4} \frac{2\pi^2}{k^3} \Delta_\Phi(k) \mathcal{T}^2(k, a) D^2(a) \\
 &= \frac{2\pi^2}{H_0^{3+n_s}} k^{n_s} \delta_H^2 \mathcal{T}^2(k, a) \left( \frac{D(a)}{D(a=1)} \right)^2 \\
 &= \frac{8\pi^2}{25\Omega_{m,0}^2 H_0^4} A_s k \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_s-1} \mathcal{T}^2(k, a) D^2(a)
 \end{aligned} \tag{2.101}$$

が得られる。現在の時刻でのパワースペクトル  $P_m(k)$  は

$$P_m(k) = \frac{2\pi^2}{H_0^{3+n_s}} k^{n_s} \delta_H^2 \mathcal{T}^2(k, a=1) \tag{2.102}$$

と表せる。密度揺らぎのパワースペクトルは

$$P_m(k) \propto \begin{cases} k^{n_s} & (k \ll k_{\text{eq}}) \\ k^{n_s-4} & (k \gg k_{\text{eq}}) \end{cases} \tag{2.103}$$

のスケール依存性をもつ。ただし、同期ゲージでは  $k \rightarrow 0$  で密度揺らぎのパワースペクトルが  $k^{n_s}$  に近づくが、ニュートンゲージ（やその他）の場合は一般に異なるスケール依存性をもつ（ $k \lesssim 10^{-3} h \text{Mpc}^{-1}$ ）[26]。実際には密度揺らぎは観測量ではなく、ここでのゲージの依存性が観測量の予言に影響を与えるわけではない。「観測される密度揺らぎ」はかなり複雑な形で表されるが、そのような相対論的な補正は非常に大きなスケールでしか現れない。

## 2.2.4 非線形進化を考慮した密度揺らぎのパワースペクトル

現在に近づくにつれ小スケールでは重力の非線形進化が無視できなくなり、もはや密度揺らぎの時間変化を重力の線形理論で扱うことができなくなる。しかし重力の非線形進化を摂動論的に扱うのは困難であり、この困難を回避するためのさまざまな工夫がなされてきた。非線形領域での密度揺らぎの時間変化を、摂動論ではなく N 体シミュレーションを用いて求める方法は密度揺らぎの正しい非線形進化を取り扱っていると考えられている。そしてこの N 体シミュレーションの結果を補正することで得られるフィッティング公式をもとに、非線形進化を取り入れた密度揺らぎのパワースペクトルを構築する方法が考案されている。ここではそれらのフィッティング公式として Peacock & Dodds (1996) [27] (PD96) で提案されている公式（以下 PD と省略する）および Smith *et al* (2003) [28] (S03) で提案されている公式（ハロー・フィット、以下 HF と省略する）について、参考文献[28]をもとにまとめ、これらのフィッティング公式を用いた密度揺らぎのパワースペクトルを比較する。

### フィッティング公式：PD

実際の宇宙では揺らぎが発散せず、物質の速度分散などでビリアル平衡に達する。そこで、重力による非線形進化の影響が大きいスケールでは揺らぎがビリアル平衡に達し一定の密度を保つと仮定する。この仮定のもとでは、密度揺らぎの2点相関関数

$$\xi(r) \equiv \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \int \Delta^2(k, 0) \frac{\sin kr}{kr} \frac{dk}{k} \tag{2.104}$$

は  $r$  のべき乗で近似できる。そこで Hamilton *et al* (1991) [29] では、大スケールでの線形理論から導かれる揺らぎの振る舞いと、小スケールでのこの仮定から導かれる揺らぎの振る舞いを補間する方法が考察された。さらに Hamilton *et al* の方法は Peacock & Dodds (1996) [27] (PD96) において密度揺らぎのパワースペクトルを求める方法に拡張された。PD96では、線形理論における揺らぎのスケール  $k_L$  と非線形進化までを含めた揺らぎのスケール  $k_{NL}$  の間には

$$k_L = (1 + \Delta^2(k_{NL}))^{1/3} k_{NL} \tag{2.105}$$

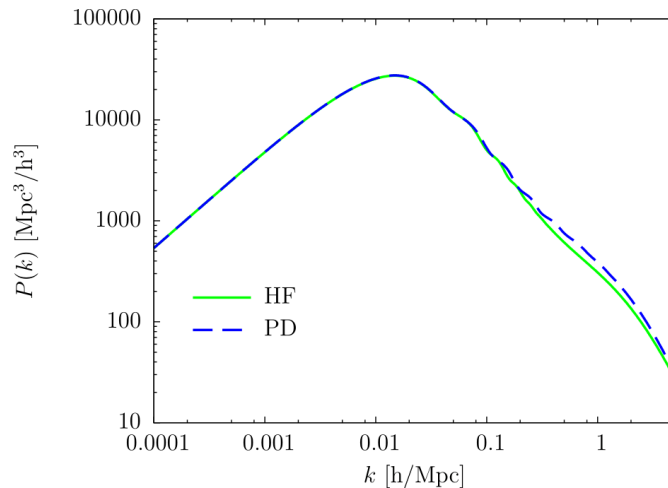


図2.2 HFとPDそれぞれのモデルにおける、現在の時刻での密度揺らぎの非線形パワースペクトル $P_m(k)$ 。

の関係が成り立つとする。ここで $\Delta_{NL}(k_{NL})$ は非線形進化までを含めた無次元の密度揺らぎのパワースペクトルである。また $\Delta_{NL}(k_{NL})$ は線形理論で求められた無次元の密度揺らぎのパワースペクトル $\Delta_L(k_L)$ を用いて

$$\Delta_{NL}^2(k_{NL}) = f_{NL}(\Delta_L^2(k_L)) \quad (2.106)$$

とフィットされる。フィッティング関数 $f_{NL}$ の具体形は付録Bにまとめた。この場合

$$n_{\text{eff}} \equiv \frac{d \ln P_m(k)}{d \ln k} \quad (2.107)$$

で定義される $n_{\text{eff}}$ を求める必要がある。PD96では、この $n_{\text{eff}}$ を

$$n_{\text{eff}}(k_L) = \left. \frac{d \ln P(k)}{d \ln k} \right|_{k=k_L/2} \quad (2.108)$$

として求め、N体シミュレーションの結果を補正することで、シミュレーション結果を再現するように導いている。

#### フィッティング公式：HF

高解像度のシミュレーションが可能となると、前述のPD96によるフィッティング公式は、高解像度シミュレーションの結果と比べ準非線形領域において密度揺らぎのパワースペクトルを小さく見積もるため[30]、シミュレーション結果と高精度で一致する新たなフィッティング公式が必要となる。Smith *et al*ではこの問題を取り扱い、ハローモデル[31, 32, 33]に基づいた新たなフィッティング公式を提案した。

まず、密度揺らぎのパワースペクトルを

$$P_{NL}(k) = P_Q(k) + P_H(k) \quad (2.109)$$

のように分解する。ここで $P_Q$ はハロー同士の重力相互作用による密度揺らぎのパワースペクトル、 $P_H$ はハローの密度揺らぎのパワースペクトルである。これは、宇宙における密度場をそれぞれ独立なハローに分解して考えたさい、大スケールではハロー同士が重力相互作用し、小スケールでは同じハロー内のCDM同士が重力相互作用する、という思想に従ったものである。次に、 $P_Q, P_H$ それぞれに対して関数形を与え、N体シミュレーションを用いた補正を行う。その補正結果からフィッティング関数のパラメータが決定される。フィッティング関数の詳細は付録Bにまとめた。

### フィッティング公式の比較

CAMBを用いた遷移関数の計算ではバリオン振動が含まれ、バリオン振動を考慮していないPDをそのまま適用すると  $n$  が大きく振動する。これを避けるため、本研究において、PD を用いた場合に  $n$  を計算するさい、遷移関数として Eisenstein & Hu (1998) [34] のバリオン振動なしの近似公式を用いる。

## 2.3 CMBの温度・偏光揺らぎ

現在観測できる最も遠い光は、宇宙の晴れ上がり（光子が電子との散乱を振り切って自由に動けるようになる時期）において散乱されたCMBである。CMBの温度・偏光揺らぎには宇宙初期におけるさまざまな物理情報が含まれており、これを詳細に調べることで初期宇宙での物理が明らかにされてきた。

CMBの温度・偏光揺らぎの生成過程は、大きく分けて宇宙の晴れ上がり前に生成されたものと宇宙の晴れ上がり後に生成されたものがある。ここでは参考文献[35, 20, 24, 36] をもとに、CMBの揺らぎの生成過程についてまとめる。また、温度揺らぎの角度パワースペクトルを定義し、宇宙論パラメータの変化が温度揺らぎの角度パワースペクトルへ与える影響についてまとめる。

### 2.3.1 揺らぎの生成：スカラー成分

CMB の温度・偏光揺らぎの時間変化は、各成分のボルツマン方程式と重力の摂動論を用いて扱うことができる。ここではそれらの詳細には立ち入らず、得られる方程式についてまとめる。

#### 偏光の記述

CMB の偏光度合を表現するためにストークス・パラメータ (Stokes parameter) を導入する。

$z$  方向に進行している平面電磁波が重ねあわさった電磁波を考察する。すなわち各振動数  $\omega$  に対し、

$$\tilde{E}_x = E_x(\omega) \exp(-i\omega t + i\delta_x(\omega)) \quad (2.110)$$

$$\tilde{E}_y = E_y(\omega) \exp(-i\omega t + i\delta_y(\omega)) \quad (2.111)$$

で平面電磁波が表される。このとき、 $\omega$  で平均をとった

$$J_{xy} \equiv \langle \tilde{E}_x \tilde{E}_y^* \rangle \quad (2.112)$$

で定義される量を強度行列 (intensity matrix) という。これを

$$\begin{pmatrix} I + Q & U + iV \\ U - iV & I - Q \end{pmatrix} \quad (2.113)$$

のように成分に分解したとき、これら  $I, Q, U, V$  はストークス・パラメータと呼ばれる。例えば、すべて直線偏光した電磁波が一様に混ざっているなら、すべて  $\delta_x - \delta_y = m\pi$  なので  $V = 0$  となる。また円偏光した電磁波では  $\delta_x - \delta_y = 2m\pi \pm \pi/2$ 、また  $E_x = E_y$  なので  $Q = U = 0$  となる。すなわち、 $Q, U$  は直線偏光、 $V$  は円偏光を表している。トムソン散乱が直線偏光のみの光子を生じることを考えれば、最終散乱の時点で  $V = 0$  であると仮定できる。したがって以降では偏光の成分として  $Q, U$  のみを考えることにする。

ストークス・パラメータを用いると、CMBの温度揺らぎと偏光を統一的に扱うことができる。現在のCMBの平均温度を  $T_0$  とすると、温度  $T_0$  の黒体輻射からのずれを表す強度行列は

$$\delta \mathbf{J}(\hat{n}) \equiv \frac{1}{T_0} \begin{pmatrix} \delta T(\hat{n}) + Q(\hat{n}) & U(\hat{n}) + iV(\hat{n}) \\ U(\hat{n}) - iV(\hat{n}) & \delta T(\hat{n}) - Q(\hat{n}) \end{pmatrix} \quad (2.114)$$

で表せる。ただし強度行列は温度  $T_0$  で規格化してあり、 $\delta T(\hat{n})$  は  $\hat{n}$  方向の CMB の温度揺らぎである。

以下では、

$$\Delta_T \equiv \frac{\delta T}{T_0} \quad (2.115)$$

$$\Delta_P \equiv \frac{\sqrt{Q^2 + U^2}}{T_0} \quad (2.116)$$

で定義される量を用いて揺らぎを表す。

また温度・偏光揺らぎをルジャンドル関数  $P_l$  で展開したさい、その展開係数を

$$\Delta_{T,l} \equiv \int d\mu \Delta_T P_l(\mu) \quad (2.117)$$

$$\Delta_{P,l} \equiv \int d\mu \Delta_P P_l(\mu) \quad (2.118)$$

と定義する。

### バリオンの揺らぎが従う方程式系

宇宙の晴れ上がり以前ではバリオン（主に陽子）は電子と電磁気力により強く結合していたので、以下ではバリオンと電子は共に動くと仮定する。また電子と光子はトムソン散乱による電磁相互作用で強く結合していた。そのため、バリオンの揺らぎが従う方程式にはトムソン散乱の項が含まれ、

$$\frac{\partial \delta_B}{\partial \eta} + ikv_B = 3 \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \quad (2.119)$$

$$\frac{\partial v_B}{\partial \eta} + \mathcal{H}v_B = -ik\Phi + \frac{1}{R} \frac{d\tau}{d\eta} (v_B + 3i\Delta_{T,1}) \quad (2.120)$$

となる。ここで  $R$  はバリオン光子比 (baryon-to-photon ratio)、 $\tau$  は光学的厚み (optical depth) と呼ばれ、

$$R \equiv \frac{3\bar{\rho}_B}{4\bar{\rho}_\gamma} \quad (2.121)$$

$$\tau \equiv \int_\eta^{\eta_0} d\eta' n_e \sigma_T a(\eta') \quad (2.122)$$

と表される。 $n_e$  は電子の密度、 $\sigma_T$  はトムソン散乱の散乱断面積を表す。

### 光子の温度揺らぎ・偏光が従う方程式系

トムソン散乱による相互作用を考慮すると、光子の温度揺らぎ  $\Delta_T$ 、偏光  $\Delta_P$  の時間変化を記述する方程式は以下で与えられる：

$$\frac{\partial \Delta_T}{\partial \eta} + ik\mu \Delta_T = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} - ik\mu \Phi - \frac{d\tau}{d\eta} \left[ \Delta_{T,0} - \Delta_T + \mu v_B - \frac{1}{2} P_2(\mu) \Pi \right] \quad (2.123)$$

$$\frac{\partial \Delta_P}{\partial \eta} + ik\mu \Delta_P = -\frac{d\tau}{d\eta} \left[ -\Delta_P + \frac{1}{2} (1 - P_2(\mu)) \Pi \right] \quad (2.124)$$

ここで  $\Pi$  は

$$\Pi \equiv \Delta_{T,2} + \Delta_{P,0} + \Delta_{P,2} \quad (2.125)$$

と表され、偏光揺らぎのソース項となっている。温度揺らぎの四重極揺らぎ  $\Delta_{T,2}$  から偏光揺らぎが生成されることを意味する。



## 光子・バリオン流体の振動

宇宙の晴れ上がり以前は光子と電子が強く相互作用しており、温度揺らぎに振動が生じる。ここでは式(2.119)、(2.120)および式(2.123)を連立して解くことで振動解を導き、バリオン・光子間の振動による温度揺らぎの生成についてまとめる。

まず、式(2.123)をルジャンドル展開すると

$$\frac{d\Delta_{T,0}}{d\eta} = -\frac{k}{3}\Delta_{T,1} - \frac{d\Psi}{d\eta} \quad (2.126)$$

$$\frac{d\Delta_{T,1}}{d\eta} = k\left(\Delta_{T,0} + \Phi - \frac{2}{5}\Delta_{T,2}\right) - n_e\sigma_T(\Delta_{T,1} - v_B) \quad (2.127)$$

$$\frac{d\Delta_{T,2}}{d\eta} = k\left(\frac{2}{3}\Delta_{T,1} - \frac{3}{7}\Delta_{T,3}\right) - \frac{9}{10}n_e\sigma_T\Delta_{T,2} \quad (2.128)$$

$$\frac{d\Delta_{T,l}}{d\eta} = k\left(\frac{l}{2l-1}\Delta_{T,l-1} - \frac{l+1}{2l+3}\Delta_{T,l+1}\right) - n_e\sigma_T\Delta_{T,l} (l > 2) \quad (2.129)$$

が得られる。光子と電子は非常に強く結合していると考えられるので、トムソン散乱の相互作用のタイムスケール  $t_T \equiv 1/(n_e\sigma_T)$  が宇宙膨張のタイムスケール  $1/H$  に比べて非常に短いと考えられる。この近似を用いると、式(2.127)から、第ゼロ近似では光子流体とバリオン流体が同じ速度で動くことを意味する式

$$\Delta_{T,1} = v_B \quad (2.130)$$

が得られる。また  $l > 1$  では  $\Delta_{T,l} = 0$  となる。

次に  $t_T$  の一次までを計算するため、定数  $C$  を用いて  $v_B = \Delta_{T,1} + Ct_T$  と表すと、式(2.120)と(2.127)において  $t_T$  のゼロ次を取り出すことで

$$\frac{d\Delta_{T,1}}{d\eta} + \mathcal{H}\Delta_{T,1} = k\Phi - \frac{C}{R} \quad (2.131)$$

$$\frac{d\Delta_{T,1}}{d\eta} = k(\Delta_{T,0} + \Phi) + C \quad (2.132)$$

が得られる。これから定数  $C$  を消去すると

$$\frac{d\Delta_{T,1}}{d\eta} + \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} \frac{R}{1+R} \Delta_{T,1} = \frac{k}{1+R} \Delta_{T,0} + k\Phi \quad (2.133)$$

が得られる。さらにこの方程式を  $\Delta_{T,0}$  について書き直すと、振動の式

$$\frac{d^2\Delta_{T,0}}{d\eta^2} + \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} \frac{R}{1+R} \frac{d\Delta_{T,0}}{d\eta} + k^2 c_s^2 \Delta_{T,0} = -\frac{d^2\Psi}{d\eta^2} - \frac{R}{1+R} \frac{da}{d\eta} \frac{d\Psi}{d\eta} - \frac{k^2}{3} \Phi \quad (2.134)$$

が得られる。ただし  $c_s$  はこの振動の速度

$$c_s \equiv \sqrt{\frac{1}{3(1+R)}} \quad (2.135)$$

である。式(2.134)の第二項は宇宙膨張に起因する摩擦項を意味する。式(2.134)は

$$\left\{ \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{R'}{1+R} \frac{d}{d\eta} + k^2 c_s^2 \right\} (\Delta_{T,0} + \Phi) = \frac{k^2}{3} (3c_s^2 \Phi - \Psi) \quad (2.136)$$

と書き直すことができる。実際に観測する温度揺らぎは最終散乱面から我々に届くまでの間に重力による効果で温度が揺らぐ。それを考慮すると、温度揺らぎの観測量は  $\Delta_{T,0} + \Phi$  となる。

振動の中心を求めるため、 $\Delta_{T,0} + \Phi$ の時間微分をゼロとする。また物質優勢期を仮定すれば重力場 $\Phi, \Psi$ は時間変化しないので、結局式(2.136)は

$$k^2 c_s^2 (\Delta_{T,0} + \Phi) = -\frac{k^2}{3} (3c_s^2 \Phi - \Psi) \quad (2.137)$$

となる。これから、観測する温度揺らぎ $\Delta_{T,0} + \Phi$ の振動中心は振動の速度 $c_s$ に依存する。

また、 $R$ が時間依存しないと仮定して物質優勢期での式(2.136)の解を求めると、インフレーションで生成される揺らぎが断熱ゆらぎである場合は

$$\Delta_{T,0} + \Phi = \left( \frac{1}{3} + R \right) |\Phi| \cos(kd_s) - R|\Phi| \quad (2.138)$$

と書ける。ただし $d_s$ は、光子の最終散乱までに振動が伝播できる限界の距離（音地平線）であり、

$$d_s(\eta) \equiv \int_0^\eta d\eta' c_s(\eta') \quad (2.139)$$

として定義される。式(2.138)からこの振動の振幅は $R$ に依存することがわかる。

この振動のピークに対応するスケールは

$$k_m = \frac{m\pi}{d_s} (m = 1, 2, \dots) \quad (2.140)$$

で与えられるが、 $m$ が奇数であればピークの大きさは $R$ に依存するのに対し、 $m$ が偶数であれば $R$ に依存しない。

### シルク減衰

$l \sim 1000$ 以上の非常に小さなスケールではCMBの温度揺らぎが急激に減少する。これは宇宙の晴れ上がりにおいて、非常に小さいスケールでは光子と電子の多重散乱によって温度揺らぎがならされてしまうことが原因である。この急激な減少はシルク減衰と呼ばれる。

### 二次的揺らぎの生成

光子は宇宙の晴れ上がりから我々に届くまでの間に重力場の時間変化によって重力による赤方・青方変移を受け、温度ゆらぎを生じる。この積分効果を Integrated Sachs Wolfe (ISW) 効果と呼ぶ。また、最終散乱面の時点における重力ポテンシャルと観測者での重力ポテンシャルが異なることによって温度揺らぎが生じる。これは SW 効果 (Sachs Wolfe effect) と呼ばれる。これらの効果は Sachs & Wolfe (1967) [37]によって見い出されている。ISW 効果が引き起こされる原因は 2 種類ある。一つは早期 ISW 効果と呼ばれるもので、宇宙の晴れ上がりの時期に輻射が残っているために生じるものである。輻射が残っていると重力ポテンシャルが変化する。もう一つは晚期 ISW 効果と呼ばれ、暗黒エネルギーの存在によって引き起こされるものである。現在に近づくとも暗黒エネルギーが支配的になり、加速膨張によって自己重力による密度揺らぎの成長が抑制され、重力ポテンシャルが変化する。以下では、SW や ISW 効果といった二次的な揺らぎの寄与を定量的に評価する。

まず、計量が共形ニュートンゲージ

$$ds^2 = a^2(\eta)[(1 + 2\Phi)d\eta^2 - (1 - 2\Psi)(d\chi^2 + S_K^2(\chi)d\Omega^2)] \quad (2.141)$$

の形に書かれている場合を考える。この計量のもとで、最終散乱面から放たれて我々に届く光を考察する。光に沿った経路を考える場合は $ds^2 = 0$ だから、光の動径方向の時間変化は

$$\frac{d\chi}{d\eta} = -1 + \Phi(\chi\hat{n}, \eta) + \Psi(\chi\hat{n}, \eta) \quad (2.142)$$

と表される。以下では簡単のために

$$\psi(\chi\hat{n}, \eta) \equiv \frac{\Phi(\chi\hat{n}, \eta) + \Psi(\chi\hat{n}, \eta)}{2} \quad (2.143)$$

と定義する。

まず、式 (2.142) を  $\eta$  で積分すると、 $\chi_0(\eta_0, \eta) = \eta_0 - \eta$  として

$$\chi(\eta_0, \eta) = \chi_0(\eta_0, \eta) + 2 \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta' \psi(\chi_0(\eta_0, \eta') \hat{\mathbf{n}}_0, \eta') \quad (2.144)$$

となる。ただし  $\hat{\mathbf{n}}_0$  は非摂動のときの方向である。これより、最終散乱面  $\eta = \eta_*$  において放たれた光は  $\eta = \eta_0$  において観測者に観測された場合、

$$\chi(\eta_0, \eta_*) = \chi_0(\eta_0, \eta_*) + 2 \int_{\eta_0}^{\eta_*} d\eta' \psi(\chi_0(\eta_0, \eta') \hat{\mathbf{n}}_0, \eta') \quad (2.145)$$

が成り立つ。同様に最終散乱面  $\eta = \eta_* + \delta\eta_*$  において放たれた光は  $\eta = \eta_0 + \delta\eta_0$  において観測者に観測された場合は

$$\chi(\eta_0 + \delta\eta_0, \eta_* + \delta\eta_*) = \chi_0(\eta_0 + \delta\eta_0, \eta_* + \delta\eta_*) + 2 \int_{\eta_0 + \delta\eta_0}^{\eta_* + \delta\eta_*} d\eta' \psi(\chi_0(\eta_0 + \delta\eta_0, \eta') \hat{\mathbf{n}}_0, \eta') \quad (2.146)$$

光子・バリオン流体が速度  $v_*$  をもつことで、時間  $\delta\eta_*$  の間に最終散乱面の動径座標は変化する。同様のことは観測者が速度  $v_0$  をもつことでも生じる。これらの効果を組み合わせると

$$\chi(\eta_0 + \delta\eta_0, \eta_* + \delta\eta_*) - \chi(\eta_0, \eta_*) = \delta\eta_* u_* - \delta\eta_0 u_0 \quad (2.147)$$

の関係が得られる。これを用いれば、式 (2.145) と (2.146) から

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\eta_* [1 - 2\psi(\chi_0(\eta_0, \eta_*) \hat{\mathbf{n}}_0, \eta_*)] - \delta\eta_0 [1 - 2\psi(\chi_0(\eta_0, \eta_0) \hat{\mathbf{n}}_0, \eta_0)] \\ &\quad - 2\delta\eta_0 \int_{\eta_*}^{\eta_0} d\eta \left. \frac{\partial\psi(\chi \hat{\mathbf{n}}_0, \eta)}{\partial\chi} \right|_{\chi=\chi_0} - \delta\eta_* u_* + \delta\eta_0 u_0 \end{aligned} \quad (2.148)$$

が導かれる。さらに

$$\frac{d}{d\eta} \psi(\chi_0 \hat{\mathbf{n}}_0, \eta) = \left. \frac{\partial}{\partial\eta} \psi(\chi \hat{\mathbf{n}}_0, \eta) \right|_{\chi=\chi_0} - \left. \frac{\partial}{\partial\chi} \psi(\chi \hat{\mathbf{n}}_0, \eta) \right|_{\chi=\chi_0} \quad (2.149)$$

を用いれば、式 (2.148) はさらに

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta\eta_* - \delta\eta_0) [1 - 2\psi(\chi_0(\eta_0, \eta_0) \hat{\mathbf{n}}_0, \eta_0)] \\ &\quad - 2\delta\eta_0 \int_{\eta_*}^{\eta_0} d\eta \left. \frac{\partial\psi(\chi \hat{\mathbf{n}}_0, \eta)}{\partial\eta} \right|_{\chi=\chi_0} - \delta\eta_* u_* - \delta\eta_0 u_0 \end{aligned} \quad (2.150)$$

となる。これは、最終散乱面と観測点での時間間隔の関係を与えるものである。

ここで、最終散乱面での固有時間間隔  $\delta\tau_*$  と観測者フレームでの固有時間間隔  $\delta\tau_0$  はそれぞれ

$$\delta\tau_* = a_*(1 + \Phi_*)\delta\eta_*, \quad \delta\tau_0 = a_0(1 + \Phi_0)\delta\eta_0 \quad (2.151)$$

と表されるので、CMBの振動数の変化は

$$\begin{aligned} \frac{a_0\nu_0}{a_*\nu_*} &= \frac{a_0\delta\tau_*}{a_*\delta\tau_0} \\ &= 1 + \Phi_* - \Phi_0 - 2 \int_{\eta_*}^{\eta_0} d\eta \left. \frac{\partial\psi(\chi \hat{\mathbf{n}}_0, \eta)}{\partial\eta} \right|_{\chi=\chi_0} - v_* + v_0 \end{aligned} \quad (2.152)$$

で与えられる。温度揺らぎは

$$\frac{\Delta T(\hat{\mathbf{n}})}{T_0} \equiv \frac{T(\hat{\mathbf{n}})}{T_0} - 1 = \left. \frac{\delta T(\hat{\mathbf{n}})}{T} \right|_{\text{primary}} + \frac{a_0\nu_0}{a_*\nu_*} - 1 \quad (2.153)$$

と定義されるので、 $\Delta\Phi \equiv \Phi_* - \Phi_0$ と定義し、式 (2.152) を用いれば

$$\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} = \frac{\delta T(\hat{n})}{T} \Big|_{\text{primary}} + \Delta\Phi - 2 \int_{\eta_*}^{\eta_0} d\eta \frac{\partial \psi(\chi \hat{n}_0, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\chi=\chi_0} - u_* + u_0 \quad (2.154)$$

が得られる。これが、二次的な効果を含めた場合の、我々が観測する温度揺らぎとなる。式 (2.154) の第一項は最終散乱面での温度揺らぎ、第二項は SW 効果、第三項は ISW 効果を表している。また、第四項は最終散乱面、第五項は観測点でのドップラー効果を表すものである。

### 偏光の生成

光子は最終散乱されるまでの間に電子とトムソン散乱を繰り返すので、光子の偏光はほぼ直線偏光していると考えられる。この直線偏光はパリティ対称な成分である E モードとパリティ反対称な成分である B モードに分けられるが、揺らぎのスカラー成分はパリティ対称なので B モードを生成できない。ベクトル成分は時間とともに単調減少するので通常は無視され、テンソル成分が B モードを生成すると考えられている。しかし、スカラーモードでも次章で後述する重力レンズによって E モードから B モードが生成される。

## 2.3.2 CMB の温度・偏光ゆらぎのパワースペクトル

### 角度パワースペクトル

CMB の温度・偏光ゆらぎの場合も、密度揺らぎの場合と同様に二点相関などの統計量を用いて統計的に扱う必要がある。CMB の場合は奥行き情報が積分されるので、二次元球面上で球面調和関数により展開することで角度パワースペクトルになおすことができる。実空間での温度揺らぎ $\Delta T(\hat{n})$ は球面調和関数 $Y_{lm}(\hat{n})$ を用いて

$$\Theta_{lm} = \int d\hat{n} \Delta T(\hat{n}) Y_{lm}^*(\hat{n}) \quad (2.155)$$

のように展開係数になおすことができる。偏光 $Q(\hat{n}) \pm iU(\hat{n})$ はスピン 2 をもつ量なのでスピン 2 の球面調和関数 $_{\pm 2}Y_{lm}(\hat{n})$ を用いて

$$E_{lm} \pm iB_{lm} = \int d\hat{n} {}_{\pm 2}Y_{lm}^*(\hat{n}) [Q(\hat{n}) \pm iU(\hat{n})] \quad (2.156)$$

のように $E_{lm}, B_{lm}$ になおすことができる。これから $X = \Theta_{lm}, E_{lm}, B_{lm}$ に対し

$$\langle X_{lm} X_{l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l^{XX} \quad (2.157)$$

で定義される量 $C_l^{XX}$ は角度パワースペクトルである。ただしCMB温度・偏光揺らぎが等方的であると仮定している。 $B$ はパリティ反対称な成分なので、宇宙がパリティを保存するなら $B$ と $E$ 、 $B$ と $\Theta$ の相関は消え、 $C^{TB} = C^{EB} = 0$ となる。

ここで、図2.3では、角度パワースペクトルをある宇宙論パラメータをもとに描いた。温度揺らぎのパワースペクトル $C_\ell^{\Theta\Theta}$ に着目すると、 $\ell = 200$  くらいに振動の第一ピークが見え、それ以降振動のピークが続くが、 $\ell \sim 1000$  以上からはシルク減衰の効果でパワースペクトルの振幅が減少していくのが見て取れる。また $\ell \sim 100$ から振動の第一ピーク付近までは早期 ISW 効果によるもので、 $\ell < 10$  のような非常に大きいスケールでは晩期 ISW 効果によるものである。

一方、E モード偏光のパワースペクトル $C_\ell^{EE}$ は $\ell \sim 1000$ においてピークをもつ。再イオン化の影響で、大スケール $\ell < 10$ において振幅が増幅されている様子が見える。

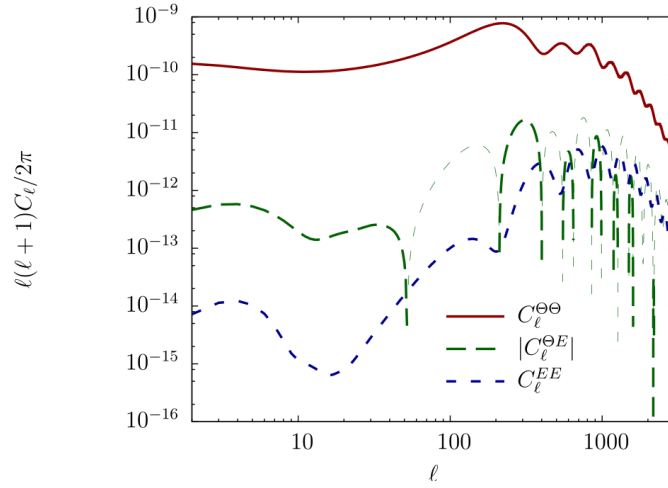


図2.3 温度揺らぎ $C_l^{\Theta\Theta}$ 、E モード偏光 $C_l^{EE}$ およびそれらの相関 $C_l^{\Theta E}$ 。  $C_l^{\Theta E}$ は負の値もとるため、絶対値でプロットしている。そのさい、本来負の値をとる場合は細い線で描いている。

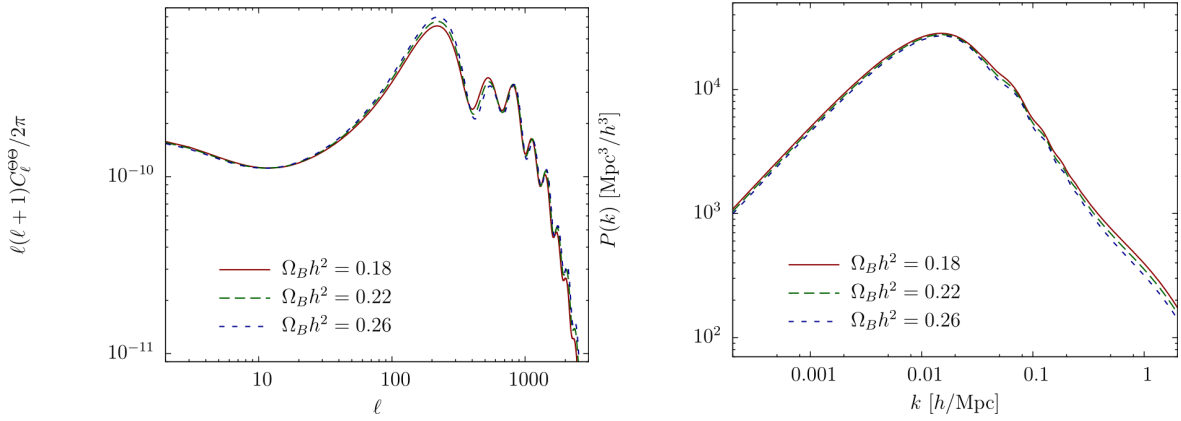


図2.4  $\Omega_B h^2$ を変化させた場合の温度揺らぎの角度パワースペクトル（左）と密度揺らぎのパワースペクトル（右）。

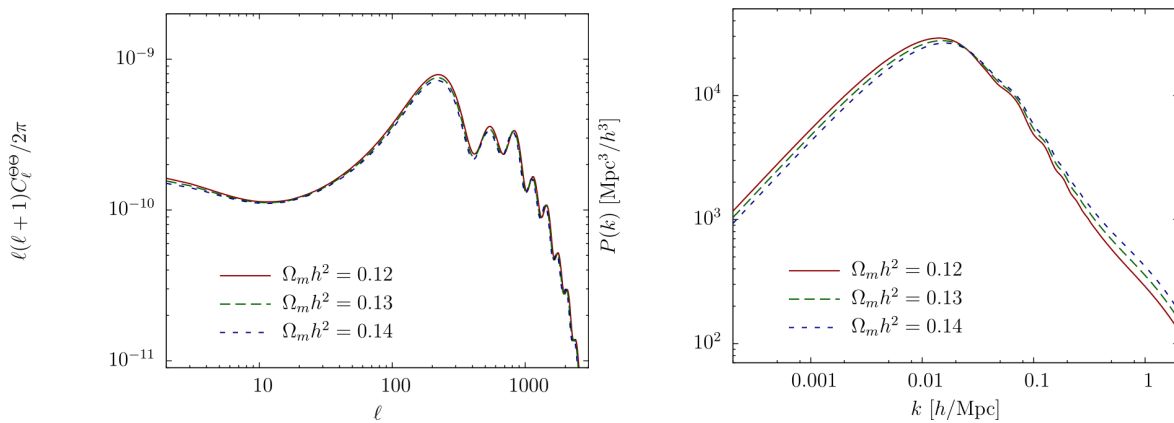
## 2.4 宇宙論パラメータの変化がCMB・密度揺らぎのパワースペクトルへ与える影響

ここでは、本研究において考察した宇宙論パラメータ $\Omega_B h^2$ 、 $\Omega_m h^2$ 、 $\Omega_\Lambda$ 、 $w$ 、 $A_s$ 、 $n_s$ 、 $\tau$ 、 $\sum m_\nu$ が、CMBや密度揺らぎのパワースペクトルへ与える影響についてまとめる。この依存性を知ること、パラメータに対する決定精度、パラメータ間の縮退に対して定性的な振る舞いを知ることができる。

### 2.4.1 宇宙論パラメータに対する依存性

#### バリオンのエネルギー密度に対する依存性

$\Omega_B h^2$ が増加すると温度揺らぎのパワースペクトルにおいて以下に述べる変化がみられる。まず、バリオン密度が大きくなるので音波が遅く伝わる。また、振動の振幅を大きくする。これは式 (2.138) においてバリオン光子比 $R$ を大きくすることで確かめられる。バリオン光子比 $R$ が変化することで、振動の奇数番目のピークが減少する。また、バリオン密度が大きくなるので拡散スケールが小さくなり、シルク減衰のスケールは小さいスケールに移行する。バリオン密度の変化は密度揺らぎにも影響を与える。バリオン密度が増加することで、バリオン振動の影響がよりはっきりと見えるようになる。また、小スケールではシルク減衰の影響で揺らぎが抑制される。図2.4は、温度揺らぎの

図2.5  $\Omega_m h^2$ を変化させた場合。

角度パワースペクトル、および密度揺らぎのパワースペクトルにおいて、バリオン密度を変化させたときの様子を表す。

### 物質のエネルギー密度に対する依存性

次に $\Omega_m h^2$ を減少させた場合について考える。輻射と物質の等密度時は

$$a_{\text{eq}} = \frac{\Omega_R h^2}{\Omega_m h^2 - \sum m_\nu / 93.14 \text{eV}} \quad (2.158)$$

で与えられる。これから、 $\Omega_m h^2$ が減少すると等密度時が現在に近くなり、輻射優勢期が長くなる。そのため、輻射優勢期に地平線スケールの内側に入るような小スケールでの密度揺らぎに対し成長が抑えられる。また、宇宙の晴れ上がりにおいて輻射がより多く存在し、早期 ISW 効果により振動の第一ピーク付近での温度揺らぎの振幅が大きくなる。 $\Omega_m h^2$ が減少すると膨張率 $H$ が減少するが、これは次のようにして示される。まず、式(2.2)の両辺を時間微分すると、

$$H \frac{dH}{dt} - \frac{2KH}{a^2} = \sum_i \frac{8\pi G}{3} \frac{d\rho_i}{dt} \quad (2.159)$$

が得られる。連続の式(2.3)を使うと、式2.159は

$$\frac{dH}{dt} = \frac{2K}{a^2} - \sum_i 8\pi G(\rho_i + p_i) \quad (2.160)$$

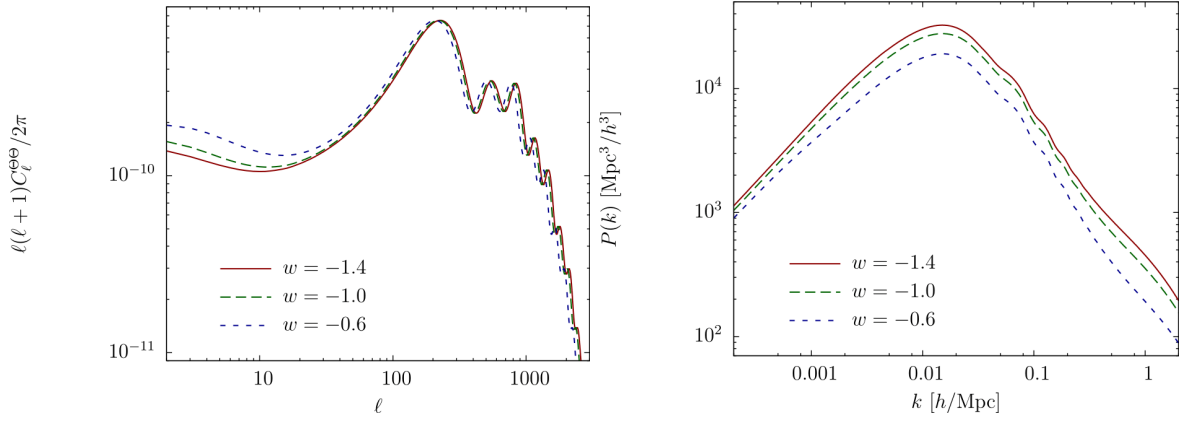
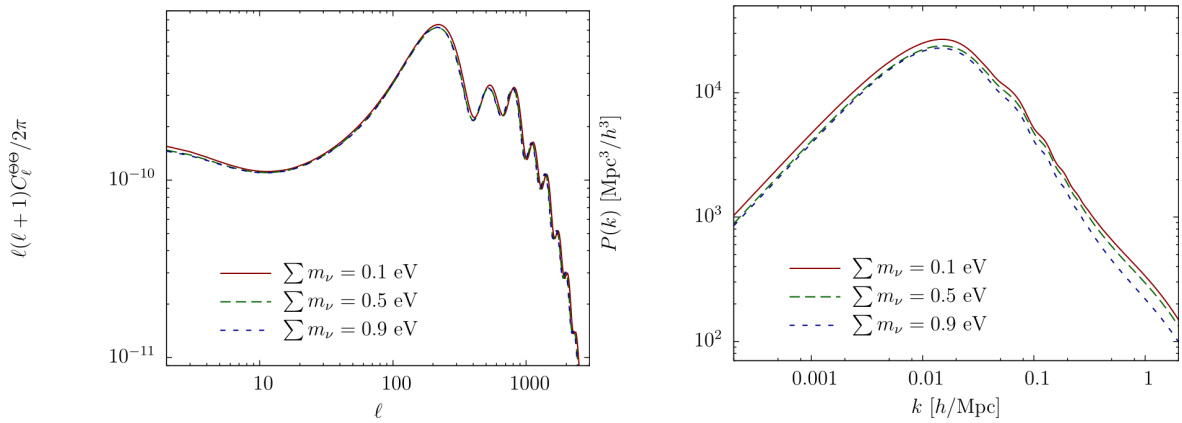
と書き直せる。 $\Omega_m h^2$ を減少させると、 $H$ の時間微分は大きくなる。すると、 $H_0$ は固定されているので $H$ は小さくなる。これより、音地平線を見込む角度が小さくなり、振動のピークに対応するスケールをより小さいスケールへずらす。

これらの効果を合わせると、密度揺らぎのパワースペクトルではより小スケールでの振幅が抑えられ、折れ曲がりの位置が小スケールへずれる。また温度揺らぎのパワースペクトルは振動の第一ピーク付近が大きくなり、振動のピークの位置が小スケールへずれる。これを実際に図に描いて表したものが図2.5である。

### 暗黒エネルギーの状態方程式

$w$ が増加すると、膨張の加速度が減少するので密度揺らぎが成長しやすくなる。また、 $w$ が増加することで膨張率 $H$ が変化する。これは次のようにして示すことができる。 $w$ を $w_0$ から変化させた場合を考える。式(2.160)は

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dt} \Big|_{w=w_0} - \frac{4\pi G}{3} (1+w) \rho_\Lambda \quad (2.161)$$

図2.6  $w$ を変化させた場合。図2.7  $\sum m_\nu$ を変化させた場合。

と表せるので、 $w$ を増加させると $H$ の時間変化は小さくなり、逆に減少させると $H$ の時間変化は大きくなる。 $w$ のみを増加させた場合、現在の膨張率 $H_0$ は一定なので、過去の膨張率 $H$ がより大きくなる。これより、音地平線を見込む角度が大きくなり、振動のピークに対応するスケールをより大きいスケールへずらす。

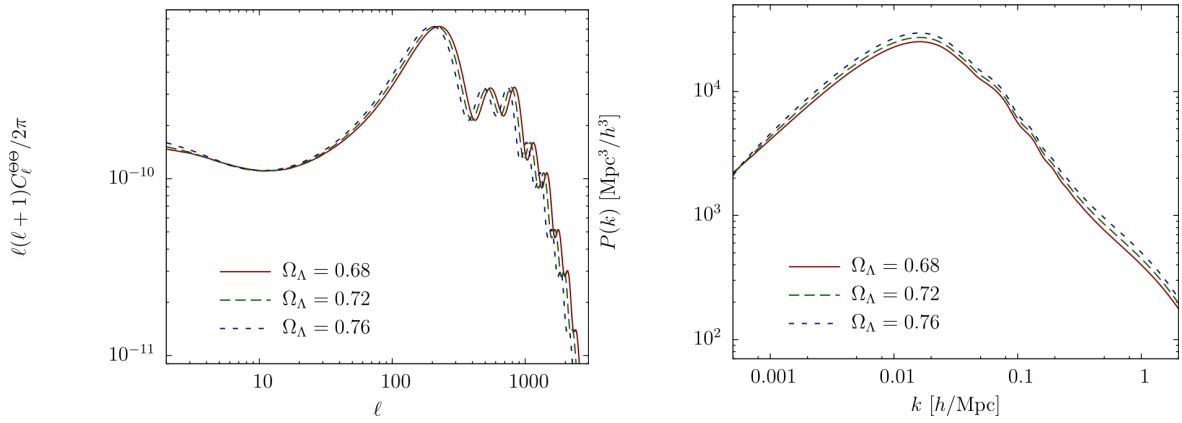
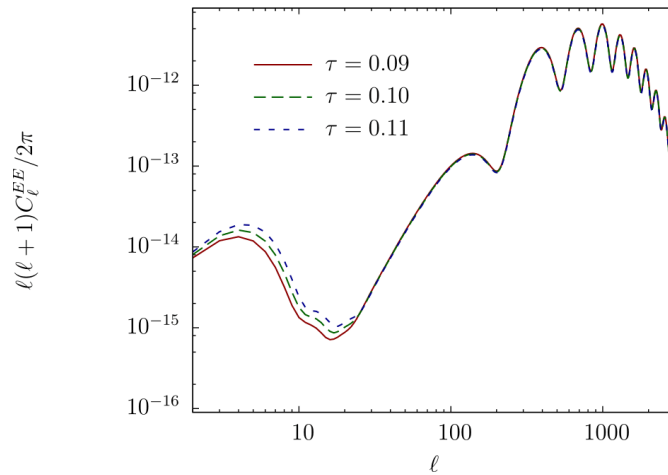
これらの効果を実際に図に描いて表したものが図2.6である。また、 $w$ が変化すると、全スケールで一様に密度揺らぎの成長を変化させる。密度揺らぎのパワースペクトルにおけるこの影響も示した。

### ニュートリノ質量

ニュートリノ質量が増加すると、等密度時が現在に近くなることで、 $\Omega_m h^2$ を減少させた場合と同様の効果が現れる。つまり振動の第一ピーク付近での増加が起こり、より小さいスケールでの密度揺らぎの成長が抑制される。また、振動のピーク、折れ曲がりの位置を小さいスケールへずらす。一方、密度揺らぎのパワースペクトルに対する影響は特徴的となる。ニュートリノの自由拡散スケール $k_{\text{FS}}$ 以下での密度揺らぎの成長解は式(2.79)で表されていたので、 $k_{\text{FS}}$ 以下での密度揺らぎの成長が抑制される。このため、 $k_{\text{FS}}$ より大スケールではほとんど変化がないが、小スケールでは振幅が抑制される。これらの効果が温度揺らぎの角度パワースペクトル、密度揺らぎのパワースペクトルにどのように現れるのか、実際に描いて表したものが図2.7である。

### 暗黒エネルギーのエネルギー密度

暗黒エネルギーのエネルギー密度が増加すると、以下に述べる効果が現れる：暗黒エネルギーによる晩期ISW効果で大スケールでの温度ゆらぎが大きくなる。また、2.160において $\Omega_\Lambda$ が大きくなると、 $H$ の時間変化は小さくなる。つまり、現在の膨張率 $H_0$ は一定なので過去の膨張率 $H$ がより大きくなる。これから音地平線を見込む角度が大きくな

図2.8  $\Omega_\Lambda$ を変化させた場合。図2.9  $\tau$ を変化させた場合のEモード偏光のパワースペクトル。

り、振動のピークに対応するスケールをより大きいスケールへずらす。一方、 $\Omega_\Lambda$ が変化することで膨張率が変化し、密度揺らぎの成長率全スケールで一様に変化させる。これは $w$ と同様である。温度揺らぎの角度パワースペクトル、密度揺らぎのパワースペクトルにおけるこれらの効果を実際に描いたものが図2.8である。

#### 初期揺らぎの振幅・傾き

初期揺らぎの振幅を変化させると揺らぎの振幅が一様に変化し、温度揺らぎの角度パワースペクトル、密度揺らぎのパワースペクトルの振幅を一様に変化させる。同様に、初期揺らぎの傾きを変化させると揺らぎのスケール依存性が変化し、温度揺らぎの角度パワースペクトル、密度揺らぎのパワースペクトルの傾きを変化させる。

#### 再電離期におけるトムソン散乱の光学的厚み

再イオン化での光学的厚みを変化させると、再イオン化によって浮遊している電子とのトムソン散乱によってCMBの温度揺らぎは $\exp(-\tau)$ 倍される。そのため、温度揺らぎの角度パワースペクトルの振幅は $\exp(-2\tau)$ 倍される。ただし散乱は再電離期での地平線スケール内で起こるので小スケールでのみ変化する。また再イオン化によって電子の密度が増加し、電子とCMB光子とのトムソン散乱が起こることでCMBの偏光が生成される。図2.9では、Eモード偏光の角度パワースペクトルにおいて光学的厚みの変化が及ぼす影響を図示している。



### 2.4.2 宇宙論パラメータ間の縮退

以上の宇宙論パラメータ依存性から、CMBの温度揺らぎの角度パワースペクトル、密度揺らぎのパワースペクトルにおいてこれらのパラメータ間に縮退が生じる。以下ではその縮退についてまとめる。

#### ニュートリノ質量と物質のエネルギー密度

物質・輻射等密度期は

$$a_{\text{eq}} = \frac{\Omega_R h^2}{\Omega_m h^2 - \sum m_\nu / 93.14 \text{eV}} \quad (2.162)$$

で決まる。これから、ニュートリノ質量 $\sum m_\nu$ を増加させることと物質のエネルギー密度 $\Omega_m h^2$ を増加させることは、 $a_{\text{eq}}$ に対して同じ効果を与える。したがって、ニュートリノ質量と物質のエネルギー密度はCMBの角度パワースペクトルにおいて正の相関をもっている。

一方、密度揺らぎのパワースペクトルにおいても、ニュートリノ質量と物質のエネルギー密度は同じ効果を与える。ニュートリノ質量は自由拡散スケール $k_{\text{FS}}$ 以下のスケールにおける密度揺らぎの成長を抑制する。物質のエネルギー密度の変化は、物質・輻射等密度期を変えることでパワースペクトルのピークをシフトさせ、さらに全体の振幅が変化することで、結果としてニュートリノ質量と同様に小スケールでのパワースペクトルの振幅を抑制する。

#### 暗黒エネルギーの状態方程式とエネルギー密度

$w$ が増加、あるいは $\Omega_\Lambda$ が増加すると、ハッブル・パラメータ $H_0$ が一定なので膨張率 $H$ が増加する。また温度揺らぎにおいては晩期 ISW 効果を増幅させる。したがってこれら 2 つの宇宙論パラメータは負の相関をもつ。

#### 暗黒エネルギーの状態方程式とニュートリノ質量

CMB の温度揺らぎのパワースペクトルにおいて、ニュートリノ質量は等密度時を変化させ、振動ピークの位置をずらす。 $w$ も膨張率の変化によって音地平線の見込む角度を変化させ、ピークの位置をずらす。したがって $\sum m_\nu$ と $w$ パラメータは縮退する。

しかし密度揺らぎのパワースペクトルにおいて、 $w$ はスケール依存しない様な変化、 $\sum m_\nu$ はスケール依存した変化をもたらす。これより、小さいスケールまで見ることでこれらの縮退は解けると考えられる。



## 第3章

# 弱重力レンズ

本研究では、宇宙論パラメータの決定精度について調べるさい、弱重力レンズの観測データを想定する。弱重力レンズは歪みのパターンを調べることで密度揺らぎの情報を得ることができる。弱重力レンズを用いて宇宙論パラメータを測定するさいには、観測量から相関関数あるいはパワースペクトルを求める。ここでは、弱重力レンズにおける観測量と、それから得られるパワースペクトルの導出についてレビューし、CMBレンズと銀河の弱重力レンズの観測からどのような宇宙論的情報が得られるか述べる。まず光子の測地線方程式から出発して、光の曲がり角 (deflection angle) を求める。次に銀河の測光サーベイにおける銀河の弱重力レンズについて述べ、最後にCMBレンズについて述べる。

### 3.1 重力レンズの基礎

ここでは文献[15]をもとに重力場の摂動によって変化する光の進行方向を求め、レンズングポテンシャルを導入する。共形ニュートンゲージにおいて、計量は

$$ds^2 = a^2(\eta)[(1 + 2\Phi)d\eta^2 - (1 - 2\Psi)\gamma_{ij}dx^i dx^j] \quad (3.1)$$

のように表される。ただし $\Psi, \Phi$ は一次の微少量である。空間座標 $x^i$ の各成分に共動距離 $\chi$ と角度 $\theta, \varphi$ を用いると、線素 $ds^2$ は

$$ds^2 = a^2(\eta)[(1 + 2\Phi)d\eta^2 - (1 - 2\Psi)(d\chi^2 + S_K^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2))] \quad (3.2)$$

と書ける。今考えている状況では $ds^2 = 0$ なので、線素を $a^2(1 - 2\Psi)$ で割った量

$$dl^2 = (1 + 4\psi)d\eta^2 - (d\chi^2 + S_K^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)) \quad (3.3)$$

を用いることにする。ただし $\psi \equiv (\Phi + \Psi)/2$ である。以下ではこの線素をもとにすべて一次の微少量までを計算する。

光のアファイン・パラメータを $\lambda$ とすると、光の測地線方程式は

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \quad (3.4)$$

と表せる。また、光の4元運動量がヌルであることから

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (3.5)$$

が満たされる。非摂動では4元運動量が第ゼロ成分（エネルギー成分）しかもたず、エネルギーは一定である。したがってアファイン・パラメータ $\lambda$ と共形時間 $\eta$ の間には $d\lambda = d\eta$ の関係が成り立つ。

測地線方程式 (3.4) の第ゼロ成分を取り出したものは

$$\frac{d^2\eta}{d\lambda^2} + 2 \left( \frac{d\eta}{d\lambda} \right)^2 \frac{d\psi}{d\eta} + 2 \frac{d\eta}{d\lambda} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial\psi}{\partial x^i} = 0 \quad (3.6)$$

である。式 (3.4) の空間成分を取り出したものは、アファイン・パラメータ  $\lambda$  を共形時間  $\eta$  に置き換えて書くと、式 (3.6) を利用することで

$$\frac{d^2x^i}{d\eta^2} - 2 \frac{dx^i}{d\eta} \left( \frac{d\psi}{d\eta} + \frac{dx^j}{d\eta} \frac{\partial\psi}{\partial x^j} \right) + 2\gamma^{ij} \frac{\partial\psi}{\partial x^j} + \bar{\Gamma}_{jk}^i \frac{dx^j}{d\eta} \frac{dx^k}{d\eta} = 0 \quad (3.7)$$

ここで  $\bar{\Gamma}_{jk}^i$  は背景時空で計算を行ったクリストッフエル記号である。式 (3.7) を各成分で書き下すと

$$\frac{d^2\chi}{d\eta^2} + 2 \frac{d\psi}{d\eta} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} - 2 \frac{d \ln S_K(\chi)}{d\chi} \frac{d\theta}{d\eta} + \frac{2}{S_K^2(\chi)} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} - 2 \frac{d \ln S_K(\chi)}{d\chi} \frac{d\varphi}{d\eta} + \frac{2}{S_K^2(\chi)} \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0 \quad (3.10)$$

となる。このとき、式 (3.8) から

$$\chi = \eta_0 - \eta - 2 \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta' \psi(\chi' \hat{n}, \eta_0 - \chi') \quad (3.11)$$

が得られる。ただし  $\eta_0$  は現在の共形時間を表す。今の場合、重力ポテンシャルは一次の微少量として考えているため、式 (3.11) 第二項の積分において  $\chi \hat{n}$  はゼロ次の量を用いる。つまり摂動を受けていない場合の測地線に沿って積分を行う： $\chi = \eta_0 - \eta$ ,  $\hat{n} = \hat{n}_0$ 。これをボルン近似 (Born approximation) と呼ぶ。

この近似を用いると、式 (3.9) と式 (3.10) それぞれから

$$\theta(\eta_0 - \chi_*) = \theta_0 - \int_0^{\chi_*} d\chi \frac{S_K(\chi_* - \chi)}{S_K(\chi_*) S_K(\chi)} 2 \frac{\partial}{\partial\theta} \psi(\chi \hat{n}, \eta_0 - \chi) \quad (3.12)$$

$$\varphi(\eta_0 - \chi_*) = \varphi_0 - \int_0^{\chi_*} d\chi \frac{S_K(\chi_* - \chi)}{S_K(\chi_*) S_K(\chi)} \frac{2}{\sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \psi(\chi \hat{n}, \eta_0 - \chi) \quad (3.13)$$

が得られる。ただし  $\chi_*$  は定数である。したがって、

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \equiv \left( \frac{\partial/\partial\theta}{\partial/\partial\varphi} \right) \quad (3.14)$$

を用いれば、式 (3.12) と式 (3.13) から、光の曲がり角

$$\alpha = \begin{pmatrix} \theta - \theta_0 \\ (\varphi - \varphi_0) \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$= -2 \int_0^{\chi_*} d\chi \frac{S_K(\chi_* - \chi)}{S_K(\chi_*) S_K(\chi)} \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \psi(\chi \hat{n}, \eta_0 - \chi) \quad (3.16)$$

が得られる。また、レンジングポテンシャル  $\phi$  (lensing potential) を  $\alpha = \partial\phi/\partial \hat{\theta}$  となるように定義すると

$$\phi(\hat{\theta}) = -2 \int_0^{\chi_*} d\chi \frac{S_K(\chi_* - \chi)}{S_K(\chi_*) S_K(\chi)} \psi(\chi \hat{\theta}, \eta) \quad (3.17)$$

が得られる。

## 3.2 銀河の弱重力レンズ

銀河の弱重力レンズでは、歪んだ銀河の形を測定し統計的にその歪みを調べる。ここでは、文献[14]をもとに、銀河の弱重力レンズにおける観測量、およびそれから得られる角度パワースペクトルを導出し、銀河の弱重力レンズから得られる情報について述べる。

### 3.2.1 銀河の弱重力レンズの観測

#### 銀河のシアとコンバージェンス

観測者と銀河間の共動距離を $\chi_s$ とする。また、銀河の方向を $\theta'$ 、レンズを受けた銀河の像の方向を $\theta$ とする。このとき $\theta'$ は $\theta$ の関数となる。 $\theta'$ と $\theta$ の差 $\delta\theta$ は、弱重力レンズによる光の曲がり角を表す。前節で導入したレンジングポテンシャル $\phi$ を用いると、

$$\theta - \theta' = \delta\theta = -\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \quad (3.18)$$

と求められる。<sup>\*1</sup>

レンズを受ける場合と受けない場合にできる像の関係は、 $\theta$ から $\theta'$ への写像のヤコビアンで特徴付けられる。このヤコビアンは増幅行列 (amplification matrix) とよばれ、

$$\begin{aligned} A_{ij} &\equiv \frac{\partial\theta'_i}{\partial\theta_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta_i\partial\theta_j} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

で定義される。ここに現れた $\kappa$ をコンバージェンス (convergence)、 $\tilde{\gamma} \equiv \gamma_1 + i\gamma_2$ を複素シア (complex shear) とよぶ。以下では複素シアの大きさ $|\tilde{\gamma}|$ を $\gamma$ と表記し、シア (shear) とよぶ。一般には、回転 $\omega$  (rotation) と呼ばれる量が含まれるが、線形摂動を考えている場合には生じないのでここでは無視することにする。回転は、CMBの偏光を記述するときに用いたストークス・パラメータのVモード、すなわち円偏光成分に対応する。厳密には、増幅行列の各成分と重力場、あるいはレンジングポテンシャルとの対応関係を得るためには測地線偏差の方程式を解く必要がある。線形かつスカラー成分のみを考慮する限り、以下の議論で用いる $\gamma$ は、式(3.19)でレンジングポテンシャルと関連づくので、本論文での結果には影響しない。

#### 銀河の分布

一般には単一のソース銀河ではなく、赤方偏移に分布した銀河を考える。この銀河の赤方偏移分布を考慮したシアは

$$\tilde{\gamma} = \int_0^\infty dz_s n(z_s) \tilde{\gamma}(z_s) \quad (3.20)$$

と表される。ただし $n(z)$ は単位立体角当たりの銀河の赤方偏移分布である。また $\tilde{\gamma}(z_s)$ は、赤方偏移 $z_s$ にあるソース銀河が作る像のシアである。理論計算では、 $n(z)$ を

$$n(z) \propto N_g \frac{\beta}{z_0 \Gamma[(1+\alpha)/\beta]} \left(\frac{z}{z_0}\right)^\alpha \exp\left[-\left(\frac{z}{z_0}\right)^\beta\right] \quad (3.21)$$

の形に仮定する。ただし $\alpha, \beta, z_0$ はパラメータである。観測される銀河の平均赤方偏移 $z_m$ は

$$z_m \equiv \frac{1}{N_g} \int_0^\infty dz z n(z) = z_0 \frac{\Gamma[(2+\alpha)/\beta]}{\Gamma[(1+\alpha)/\beta]} \quad (3.22)$$

で定義する。例えば $\alpha = 2, \beta = 1$ のとき、 $z_0 = z_m/3$ である。 $N_g$ は

$$N_g \equiv \int_0^\infty dz n(z) \quad (3.23)$$

であり、単位立体角当たりの銀河数を表す。以下では、 $N_g = 1$ となるように規格化された $n(z)$ を用いる。観測から得られる $n(z)$ は大まかにこの形で表せることが知られている。

<sup>\*1</sup> 注意として、ここではCMB lensingのnotationに従っているので、文献[38]と比べ、レンジングポテンシャル（及び曲がり角）の符号はここでは逆となっている。そのため、 $\kappa$ と $\phi$ の関係も符号だけ異なってくる。

### 銀河の楕円率

銀河の弱重力レンズの観測では、銀河の歪められた像を楕円で合わせる。銀河の像を楕円で合わせたとき、その楕円の長軸を $a$ 、短軸を $b$ 、座標軸からの傾きを $\theta$ として

$$e \equiv \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} e^{i\theta} \quad (3.24)$$

で定義される量 $e$ を楕円率とよぶ。銀河がそもそも歪みをもつ場合、その楕円率を固有楕円率 (intrinsic ellipticity) とよぶ。銀河の固有楕円率 $e_s$ と観測される銀河の楕円率 $e$  との関係は $A_{ij}$ による座標変換を用いて計算できる。その結果

$$e_s = \frac{e - 2g + g^2 e^*}{1 + |g|^2 - 2\Re(g e^*)} \quad (3.25)$$

と表される。ただし $g \equiv \gamma/(1 - \kappa)$ は換算シア (reduced shear) である。弱重力レンズ極限 $\kappa \ll 1$ 、 $\gamma \ll 1$ の場合、式 (3.26) は

$$e_s \simeq e - 2\gamma \quad (3.26)$$

となる。実際の観測では楕円率を測定するため、そこから推定される量はリデュースド・シアである。

### 3.2.2 銀河の弱重力レンズにおける統計量

観測ではすべての観測領域を使えるわけではなく、全球面でフーリエ展開することは厳密にはできない。そのため、実際の測定では実空間での相関量を用いる。しかし宇宙論パラメータの振る舞いなどを理解する上では実空間よりもフーリエ空間のほうが便利である。ここではシア、コンバージェンスの角度パワースペクトルを理論的に導出する。

#### レンジングポテンシャルの角度パワースペクトル

シアとコンバージェンスの角度パワースペクトルを導出するさい、レンジングポテンシャルの角度パワースペクトルをあらかじめ計算しておくとも便利である。そこでまずはレンジングポテンシャルの角度パワースペクトルを導出する。

式 (3.17) を銀河分布を考慮した場合に一般化すると、レンジングポテンシャルは

$$\phi(\hat{\theta}) \equiv \int_0^\infty d\chi \Delta_\phi(\chi) \psi(\chi \hat{\theta}, \eta) \quad (3.27)$$

で定義される。ただし

$$\Delta_\phi(\chi) \equiv -2 \int_\chi^\infty d\chi_s \left[ n(z(\chi)) \frac{dz(\chi)}{d\chi} \right]_{\chi=\chi_s} \frac{S_K(\chi_s - \chi)}{S_K(\chi_s) S_K(\chi)} \quad (3.28)$$

であり、 $n(z)$ は赤方偏移 $z$ に対する銀河の分布である。 $\Delta_\phi(\chi)$ は無次元量である。レンジングポテンシャル $\phi(\hat{\theta})$ を球面調和関数 $Y_{\ell m}(\hat{\theta})$ で展開すると

$$\phi(\hat{\theta}) = \int_0^\infty d\chi \Delta_\phi(\chi) \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \psi(\mathbf{k}, \eta) e^{i\chi \mathbf{k} \cdot \hat{\theta}} \quad (3.29)$$

$$= \int_0^\infty d\chi \Delta_\phi(\chi) \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \psi(\mathbf{k}, \eta) \sum_{\ell m} 4\pi i^\ell j_\ell(k\chi) Y_{\ell m}(\hat{\theta}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) \quad (3.30)$$

となる。球面調和関数による展開係数を

$$\phi_{\ell m} \equiv \int d\hat{\theta} \phi(\hat{\theta}) Y_{\ell m}^*(\hat{\theta}) \quad (3.31)$$

と定義する。このとき、球面調和関数の直交性

$$\int d\hat{\theta} Y_{\ell m}^*(\hat{\theta}) Y_{\ell' m'}(\hat{\theta}) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (3.32)$$

を用いれば、式 (3.30) の両辺に球面調和関数の複素共役  $Y_{\ell m}^*(\hat{\theta})$  をかけることで

$$\phi_{\ell m} = 4\pi i^\ell \int_0^\infty d\chi \Delta_\phi(\chi) \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \psi(\mathbf{k}, \eta) j_\ell(k\chi) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) \quad (3.33)$$

が得られる。ここで、重力ポテンシャルに関する無次元パワースペクトル  $\Delta_\psi$  を以下のように定義する：

$$\langle \psi(\mathbf{k}, \eta) \psi(\mathbf{k}', \eta') \rangle \equiv \frac{2\pi^2}{k^3} \Delta_\psi(k, \eta, \eta') \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.34)$$

これを用いれば、式 (3.33) から

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\ell m}^* \phi_{\ell' m'} \rangle &= (4\pi)^2 \int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' \Delta_\phi(\chi) \Delta_\phi(\chi') \\ &\times \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}} \langle \psi^*(\mathbf{k}, \eta) \psi(\mathbf{k}', \eta') \rangle Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell' m'}^*(\hat{\mathbf{k}}') j_\ell(k\chi) j_{\ell'}(k'\chi') \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} &= (4\pi)^2 \int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' \Delta_\phi(\chi) \Delta_\phi(\chi') \\ &\times \int \frac{dk}{(2\pi)^3} k^2 \frac{2\pi^2}{k^3} \Delta_\psi(k, \eta, \eta') \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} j_\ell(k\chi) j_{\ell'}(k\chi') \end{aligned} \quad (3.36)$$

が得られる。したがって、レンズングポテンシャルの角度パワースペクトル  $C_\ell^{\phi\phi}$  を

$$\langle \phi_{\ell m}^* \phi_{\ell' m'} \rangle \equiv \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_\ell^{\phi\phi} \quad (3.37)$$

で定義すると、

$$C_\ell^{\phi\phi} = 4\pi \int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' \Delta_\phi(\chi) \Delta_\phi(\chi') \int d \ln k \Delta_\psi(k, \eta, \eta') j_\ell(k\chi) j_\ell(k\chi') \quad (3.38)$$

が最終的に得られる。以降では、 $\Delta_\phi(\chi)$  をレンズング・カーネル (lensing kernel) と呼ぶことにする。

密度揺らぎのパワースペクトルを用いた表式

レンズングポテンシャルの角度パワースペクトルは、密度揺らぎのパワースペクトルと結びつけることができる。式 (2.44) と (2.46) において物質優勢期を仮定する、すなわち  $\Phi$  および  $\Psi$  の時間変化を無視し、 $p = 0$ 、 $a \propto t^{2/3}$  を代入すれば

$$-k^2 \psi = 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m \delta_m \quad (3.39)$$

が得られる。これより

$$\begin{aligned} \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \Delta_\psi(k, \eta, \eta') &= \frac{k^3}{2\pi^2} \left( \frac{4\pi G}{k^2} \right)^2 a^2 \bar{\rho}_m a'^2 \bar{\rho}_m' \langle \delta_m^*(\mathbf{k}, \eta) \delta_m(\mathbf{k}', \eta') \rangle \\ &= \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{1}{2\pi^2 k} \frac{9\Omega_m^2 H_0^4}{4a a'} P(k, \eta, \eta') \end{aligned} \quad (3.40)$$

となる。ここで密度揺らぎのパワースペクトル

$$\langle \delta_m^*(\mathbf{k}, \eta) \delta_m(\mathbf{k}', \eta') \rangle \equiv \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P(k, \eta, \eta') \quad (3.41)$$

を用いた。最終的に、式 (3.38) は

$$C_\ell^{\phi\phi} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' \Delta_\phi(\chi) \Delta_\phi(\chi') \int d \ln k \frac{9\Omega_m^2 H_0^4}{4aa'} j_\ell(k\chi) j_\ell(k\chi') P(k, \eta, \eta') \quad (3.42)$$

と表せる。上式を見ると、ポアソン方程式を通じて重力ポテンシャルと密度揺らぎが関係付けられることから、角度パワースペクトルには物質密度揺らぎの情報が銀河バイアスなしに直接含まれていることが分かる。また、物質密度揺らぎだけでなく、レンジング・カーネルから膨張率の情報も取り出すことができる。

### コンバージェンスとシアの角度パワースペクトル

ここでは、レンジングポテンシャルの角度パワースペクトルとコンバージェンス、シアの角度パワースペクトルを関連付ける式を導く。コンバージェンスとシアの角度パワースペクトルは統一的に求めることができる [16]。レンジングポテンシャル  $\phi(\hat{\theta})$  と曲がり角  $\alpha(\hat{\theta})$  の間には

$$\alpha(\hat{\theta}) = \frac{\partial \phi(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} \quad (3.43)$$

の関係がある。スピンの昇降演算子  $\mathbf{m}_\pm$  を

$$\mathbf{m}_- \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} {}_s Y_{\ell m} = \sqrt{\frac{(\ell-s)(\ell+s+1)}{2}} {}_{s+1} Y_{\ell m} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{m}_+ \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} {}_s Y_{\ell m} = \sqrt{\frac{(\ell+s)(\ell-s+1)}{2}} {}_{s-1} Y_{\ell m} \quad (3.45)$$

と定義すると、

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} Y_{\ell m} = \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}} [{}_1 Y_{\ell m} \mathbf{m}_+ - {}_{-1} Y_{\ell m} \mathbf{m}_-] \quad (3.46)$$

が得られる。これと式 (3.31) を式 (3.43) に用いると、

$$\alpha(\hat{\theta}) = \sum_{\ell m} \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}} \phi_{\ell m} [{}_1 Y_{\ell m}(\hat{\theta}) \mathbf{m}_+ - {}_{-1} Y_{\ell m}(\hat{\theta}) \mathbf{m}_-] \quad (3.47)$$

が導かれる。コンバージェンス  $\kappa(\hat{\theta})$ 、シア  $\gamma(\hat{\theta})$  は

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \kappa g_{ij} + (\gamma_1 + i\gamma_2)(\mathbf{m}_+ \otimes \mathbf{m}_+)_{ij} + (\gamma_1 - i\gamma_2)(\mathbf{m}_- \otimes \mathbf{m}_-)_{ij} \quad (3.48)$$

のように  $\phi$  の2回微分で表される。これは、式 (3.19) の単位行列以外の部分を球面上に一般化したものである。ただし  $g_{ij}$  は単位球面上の2次元計量である。球面調和関数の2回微分が

$$\frac{\partial^2 Y_{\ell m}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{\ell(\ell+1)}{2} Y_{\ell m} g_{ij} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} [{}_2 Y_{\ell m}(\mathbf{m}_+ \otimes \mathbf{m}_+ + {}_{-2} Y_{\ell m}(\mathbf{m}_- \otimes \mathbf{m}_-)]_{ij} \quad (3.49)$$

と書けることから、

$$\kappa(\hat{\theta}) = \sum_{\ell m} \frac{1}{2} \ell(\ell+1) \phi_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\theta}) \quad (3.50)$$

$$\gamma_1(\hat{\theta}) \pm i\gamma_2(\hat{\theta}) = - \sum_{\ell m} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \phi_{\ell m \pm 2} Y_{\ell m}(\hat{\theta}) \quad (3.51)$$



が求められる。したがって角度パワースペクトルは

$$\begin{aligned}
 C_\ell^{\kappa\kappa} &= \frac{\ell^2(\ell+1)^2}{4} C_\ell^{\phi\phi} \\
 C_\ell^{\gamma\gamma} &= \frac{(\ell+2)!}{4(\ell-2)!} C_\ell^{\phi\phi} \\
 C_\ell^{X\kappa} &= \frac{\ell(\ell+1)}{2} C_\ell^{X\phi} \\
 C_\ell^{X\gamma} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} C_\ell^{X\phi}
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

と書ける。ただし  $X$  はシアやコンバージェンスと相関をもつ任意の観測量である。

以上より、シアの角度パワースペクトルを測定することで、レンジングポテンシャルを通じて膨張率・物質密度揺らぎの情報を得られることが分かる。このため、重力レンズを用いることで暗黒エネルギーやニュートリノ質量などの膨張率や密度揺らぎに影響を与える宇宙論パラメータの測定を行うことができる。

### トモグラフィー

銀河の測光サーベイにおいて、銀河のカラーからその赤方偏移を見積もることができる。赤方偏移をいくつかの区間（赤方偏移ビン、redshift bin）に分け、観測銀河をその赤方偏移ビンにしたがって分割する方法をトモグラフィー（Tomography）とよぶ。トモグラフィーを行うことで、銀河が存在する赤方偏移の範囲を見積もることができるので、大まかな時間変化の情報を得ることができる。実際の観測では赤方偏移を見積もることができる銀河は限られてしまうが、以下の計算では全ての銀河が赤方偏移を見積もることができたとして計算を行っている。

測定される赤方偏移の範囲  $0 \leq z \leq z_{\max}$  を  $N$  個の区間に分け、 $i$  番目のビンの赤方偏移の範囲を  $z_i$  から  $z_{i+1}$  ( $> z_i$ ) とする。角度パワースペクトルは各赤方偏移ビンごとに測られる。 $i$  番目の赤方偏移ビンの銀河分布を  $n_i(z)$  とすると、 $i$  番目のビンで測られたシア  $\gamma_i$  は

$$\gamma_i(\hat{\theta}) = \int_{z_i}^{z_{i+1}} dz_s n_i(z_s) \gamma(z_s, \hat{\theta}) \tag{3.53}$$

と書ける。ただし

$$\int_0^\infty dz n_i(z) = 1 \tag{3.54}$$

と規格化されている。これから、 $i$  番目の赤方偏移ビンと  $j$  番目の赤方偏移ビンのシア  $\gamma_i, \gamma_j$  の角度パワースペクトル

$$\langle \gamma_{\ell m, i} \gamma_{\ell' m', j} \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_\ell^{\gamma_i \gamma_j} \tag{3.55}$$

を考えると、

$$\begin{aligned}
 C_\ell^{\gamma_i \gamma_j} &= \frac{1}{2\pi} \frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!} \int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' \Delta_{\phi, i}(\chi) \Delta_{\phi, j}(\chi') \\
 &\quad \times \int \frac{d \ln k}{k} \frac{9\Omega_m^2 H_0^4}{4aa'} P(k, \eta, \eta') j_\ell(k\chi) j_\ell(k\chi')
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

となる。

図3.1は、赤方偏移を  $0 < z < 1$ 、 $1 < z < 1.5$ 、 $1.5 < z$  の3つの赤方偏移ビンに分けた場合に、シアのパワースペクトルを描いたものである。ただし赤方偏移の小さいビンから番号を付け、図3.1中の  $i, j$  はビンの番号である。銀河分布は  $\alpha = 2, \beta = 1.5$  としている。より遠方の赤方偏移ビンで計算された角度パワースペクトルほど、遠方までのレンズ効果の情報を積分する。そのため図に示されているように遠方の赤方偏移ビンほど振幅が大きくなる。

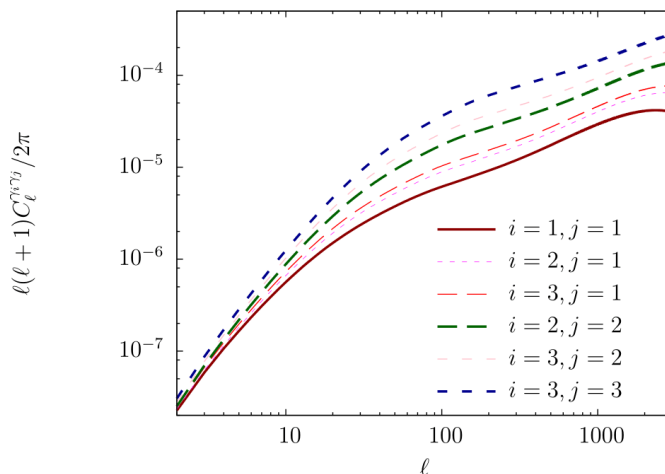


図3.1 銀河のシアの角度パワースペクトル。密度揺らぎの非線形パワースペクトルの計算では HF を用いた。ただし  $0 < z < 1$ 、 $1 < z < 1.5$ 、 $1.5 < z$  の 3 つの赤方偏移でトモグラフィを行っており、それぞれ  $i = 1, 2, 3$  に対応する。

### フラット・スカイ近似とリンバー近似

弱重力レンズは小角度スケールにおいて効果が大きくなる。ここではフラット・スカイ近似 (flat sky limit)  $\ell \gg 1$  における角度パワースペクトルを求める。

$\ell \gg 1$  のとき、式 (3.42) における密度揺らぎのパワースペクトル  $P(k, \chi, \chi')$  は、 $k$  に対してベッセル関数  $j_\ell(k\chi)$  よりもゆるやかに変化する。 $j_\ell(k\chi)$  は  $k \sim \ell/\chi$  でピークをもつので、式 (3.42) において波数  $k$  の積分を行うさいに  $k$  を  $\ell/\chi$  で置き換える。また、公式

$$\int dk k^2 j_\ell(k\chi) j_\ell(k\chi') = \frac{\pi}{2\chi^2} \delta_D(\chi - \chi') \quad (3.57)$$

を用いると、式 (3.42) は

$$C_l^{\phi\phi} \simeq \frac{1}{\ell^4} \int_0^{\chi_*} d\chi \chi^2 \Delta_\phi^2(\chi) \frac{9\Omega_m^2 H_0^4}{4a^2} P\left(\frac{\ell}{\chi}, \chi\right) \quad (3.58)$$

と近似される。このとき、異なる共動距離にある密度揺らぎの相関が入らないが、これはリンバー近似と呼ばれている。

### ISW 効果と銀河のシアの相関

銀河のレンジングポテンシャルとCMBが受ける ISW 効果での重力場はともに大規模構造が生み出したものであり、これらは互いに相関をもつ。その角度パワースペクトル  $C_\ell^{\Theta\gamma_i}$  を示したのが図3.2である。

### 3.2.3 銀河の弱重力レンズにおける系統誤差

ここでは、銀河の弱重力レンズにおける系統誤差について触れる。

#### シアと換算シア

楕円率から直接推定される量は換算シア  $g$  である。近似式 (3.26) より、楕円率からシア  $\gamma$  を求めることができるが、これは  $\gamma \ll 1$ 、 $\kappa \ll 1$  の極限のみで正しい。そのため、LSST などの次世代サーベイにおいて、式 (3.26) を仮定した場合に生じる系統誤差の見積もりが行われている [39, 40]。

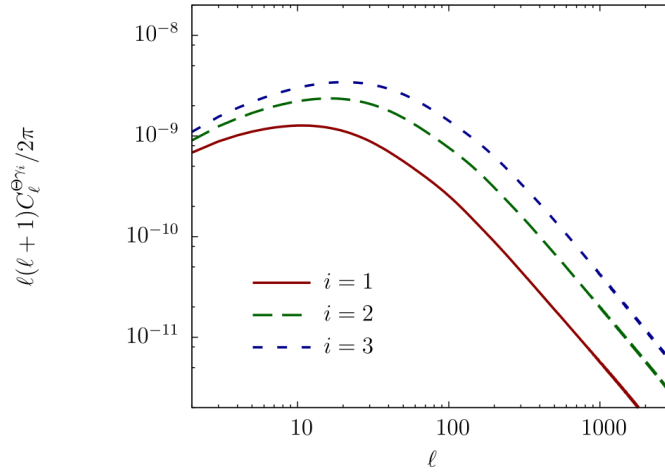


図3.2 銀河のシアと ISW 効果の角度パワースペクトル  $C_\ell^{\Theta\gamma_i}$ 。  $i$  は  $i$  番目のビンで、銀河分布やビンの分割方法は図3.1と同じである。

#### ボルン近似

レンジングポテンシャルを導くさいに用いたボルン近似は線形摂動の範囲で正しいが、さらに高次の摂動を取り入れた場合には近似の精度が問題となる。特に銀河の弱重力レンズは小角度スケールでシグナルが大きくなるため、非線形摂動の効果を正しく取り入れる必要がある。Cooray & Hu (2002) [41]ではより高次の項の影響について調べている。

#### バリオンの効果

小スケールではバリオンが重力相互作用以外に物理的にどのように振舞うか正しく記述する必要がある。バリオンに対する物理過程を正しく取り入れることは困難であり、モデルによる系統誤差が生じる。小角度スケールにおけるこれらの影響を見積もる研究が行われている[42, 43]。

#### 密度揺らぎの非線形パワースペクトル

シアの角度パワースペクトルにおいては、密度揺らぎにおける非線形摂動の効果を正しく取り入れる必要がある。密度揺らぎのパワースペクトルを計算するさい、第2章で述べたフィッティング公式を用いる方法があるが、これらのフィッティング公式はあくまでモデルであり、正確な非線形パワースペクトルを再現できていないことによる系統誤差が考えられる。図3.3では、PDとHFそれぞれで計算したシアのパワースペクトルを描いた。非線形性の効き始める小角度スケール ( $\ell \sim 100$ ) からずれが大きくなる。

### 3.3 CMB の弱重力レンズ

銀河が放った光が大規模構造の作る重力場で進行方向を曲げられるのと同様に、最終散乱面から放たれたCMB光子も大規模構造が作る重力場で進行方向が曲げられる。CMB光子が大規模構造によるレンズ効果を受けた結果として、CMBの揺らぎのパターンは歪められる。ここでは、文献[15]をもとに、レンズを受けたCMBの揺らぎの角度パワースペクトルを導出し、CMBの観測量からCMBのレンジングポテンシャルを求める方法について述べる。

#### 3.3.1 レンズを受けたCMBの角度パワースペクトル

ここでは、レンズを受けたCMBの角度パワースペクトルの導出を、参考文献[16]を参考にまとめる。

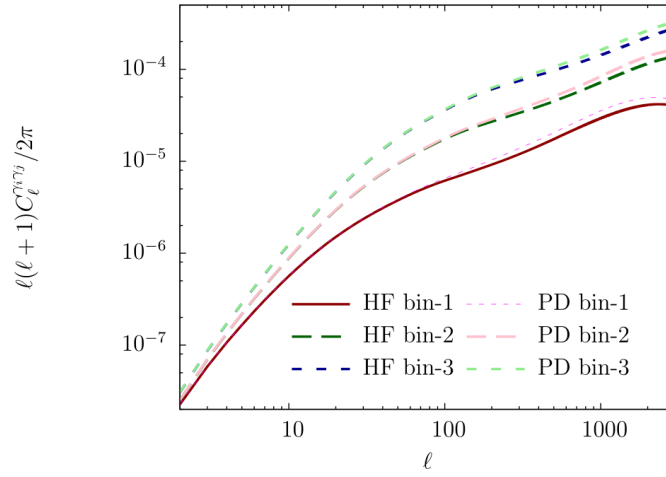


図3.3 密度揺らぎの非線形パワースペクトルの計算においてPDを用いた場合とHFを用いた場合とで銀河のシアの角度パワースペクトルを比較。赤方偏移ビンの分割方法、銀河の分布は図3.1と同じである。ここでは bin-1 を  $i = j = 1$ 、bin-2 を  $i = j = 2$ 、bin-3 を  $i = j = 3$ に対応させている。

### CMB レンジングの角度パワースペクトル

CMB 光子が弱重力レンズを受けるさい、銀河の弱重力レンズと同様に、レンズによる曲がり角 $\mathbf{d}$ はレンジングポテンシャルを用いて記述できる。CMB のソースは最終散乱面なので、レンジングポテンシャルは、

$$\Delta_\phi \rightarrow -2 \frac{S_K(\chi^* - \chi)}{S_K(\chi^*)S_K(\chi)} \quad (3.59)$$

を式 (3.38) に適用して得られる。ただし $\chi_*$ は最終散乱面の無次元共動距離である。このとき式 (3.38) は

$$C_\ell^{\phi\phi} = 4\pi \int d \ln k \int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' \times \left( -2 \frac{S_K(\chi^* - \chi)}{S_K(\chi^*)S_K(\chi)} \right) \left( -2 \frac{S_K(\chi^* - \chi')}{S_K(\chi^*)S_K(\chi')} \right) \Delta_\psi(k, \eta, \eta') j_\ell(k\chi) j_\ell(k\chi') \quad (3.60)$$

となる。この式をフラット・スカイ近似し、物質密度揺らぎのパワースペクトルを用いて書き直すと、式 (3.58) より

$$C_l^{\phi\phi} \simeq \frac{4}{\ell^4} \int_0^{\chi_*} d\chi \chi^2 \left( \frac{3\Omega_m H_0^2}{2a} \frac{S_K(\chi^* - \chi)}{S_K(\chi^*)S_K(\chi)} \right)^2 P\left(\frac{\ell}{\chi}, \chi\right) \quad (3.61)$$

となる。CMBレンジングでは、曲がり角 $\mathbf{d}$ の大きさ $d$ の角度パワースペクトル

$$C_\ell^{dd} = \ell(\ell+1)C_\ell^{\phi\phi} \quad (3.62)$$

を用いる場合、あるいは式 (3.52) で形式的に定義されるコンバージェンスのパワースペクトル

$$C_\ell^{\kappa\kappa} = \frac{\ell^2(\ell+1)^2}{4} C_\ell^{\phi\phi} = \frac{\ell(\ell+1)}{4} C_\ell^{dd} \quad (3.63)$$

を用いることもある。CMBレンジングは、最終散乱面から我々の間に届く弱重力レンズ効果を積分したものである、銀河の弱重力レンズに比べてはるか遠方における弱重力レンズ効果の寄与が含まれる。角度パワースペクトル  $C_\ell^{dd}$  において、赤方偏移 $z$ ごとに寄与を調べたのが図3.4である。これより、 $z = 1$ から 10における密度揺らぎの寄与が最も大きいということが分かる。

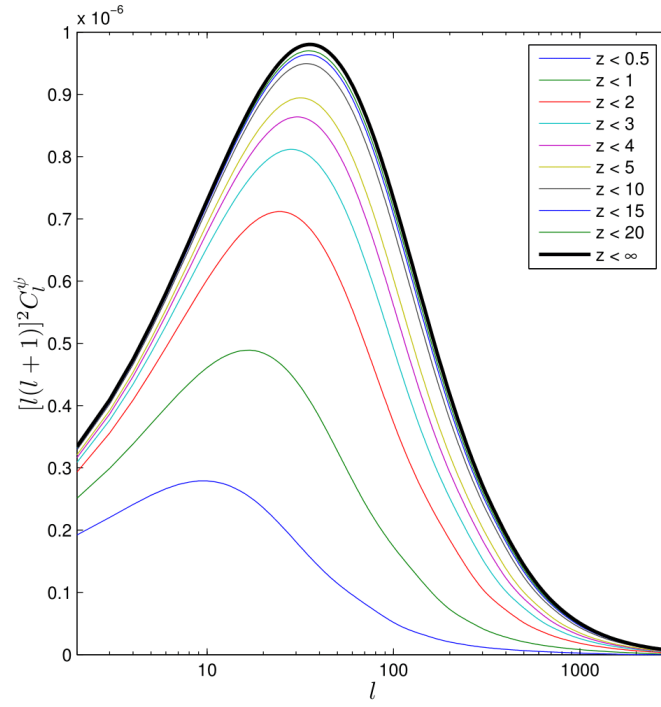


図3.4  $C_\ell^{\phi\phi}$ に対する赤方偏移 $z$ からの寄与[15]。この図では $C_\ell^\psi = C_\ell^{\phi\phi}$ である。

#### CMB のレンジングポテンシャルと他の観測量との相関

CMB のレンズによる曲がり角 $d$ と ISW 効果はともに大規模構造の重力ポテンシャルによって生じたものであり相関をもつ。これらの角度パワースペクトル $C_\ell^{\Theta d}$ を図示したのが図3.5である。非常に大きいスケール $\ell < 10$ では ISW 効果からの寄与が大きい、小さいスケール $\ell > 100$ では ISW 効果からの寄与がほとんどない。また、曲がり角 $d$ の角度パワースペクトル $C_\ell^{dd}$ は $\ell \sim 60$  でピークをもち、それ以上の $\ell$ では単調減少する。そのため、曲がり角 $d$ と ISW 効果の相関は $\ell$ が増加するにしたがって減少する。同様にCMBのレンジングポテンシャルと銀河のレンジングポテンシャルはともに大規模構造が作る重力場から生じたものであり、CMBのレンジングポテンシャルと銀河のレンジングポテンシャルは相関をもつ。この角度パワースペクトル $C_\ell^{d\gamma_i}$ を示したのが図3.6である。

図3.2と3.5を見ると、ISW 効果と銀河のシア、ISW 効果と曲がり角 $d$ の角度パワースペクトルの振幅は $10^{-9}$ 程度である。シアや曲がり角の角度パワースペクトルに比べて 2 桁以上小さく、検出が難しいシグナルであることが分かる。

CMB レンジングは、銀河の弱重力レンズに比べ高赤方偏移における密度揺らぎの情報を含んでいる。そのため、銀河の弱重力レンズに比べて重力の非線形摂動による理論の不定性が少ない。図3.7は、PD と HF それぞれで計算したCMBレンジングの角度パワースペクトル $C_\ell^{dd}$ を描いたものである。これを見ると、 $\ell \sim 1000$ 程度からしかずれ始めないことが分かる。

#### レンズを受けた温度揺らぎの角度パワースペクトル

ここでは、レンズを受けた温度揺らぎの角度パワースペクトルを導出する。レンズを受けたCMBが $\hat{\theta}$  方向から到来してきた場合を考える。レンズを受けたことによる曲がり角を $d$ とすると、レンズを受けた温度揺らぎ $\tilde{\Theta}$ は、レンズを受けていない温度揺らぎ $\Theta$ を用いて

$$\tilde{\Theta}(\hat{\theta}) = \Theta(\hat{\theta} + d) \quad (3.64)$$

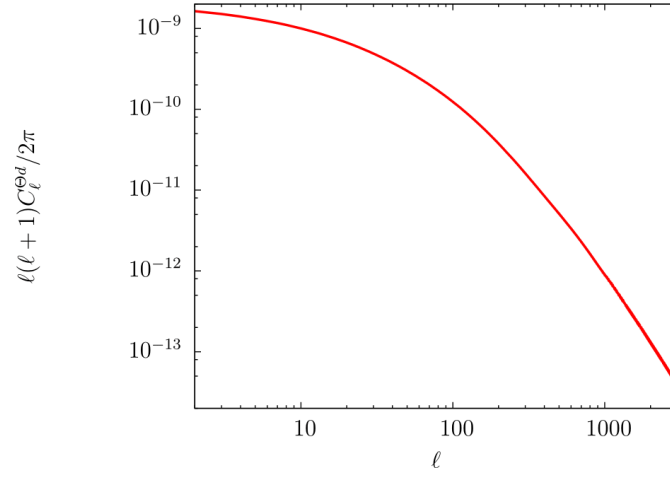


図3.5 CMB のレンズによる曲がり角 $d$ と ISW 効果の相関の角度パワースペクトル $C_\ell^{\Theta d}$ 。

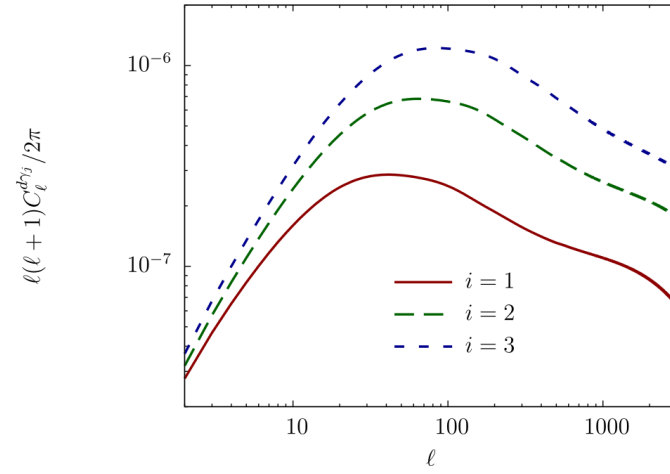


図3.6 CMB のレンジングポテンシャルと銀河のシアの角度パワースペクトル $C_\ell^{d\gamma_i}$ 。3つのビンに分割してトモグラフィを行った場合。 $i$ はビンの番号を意味する。

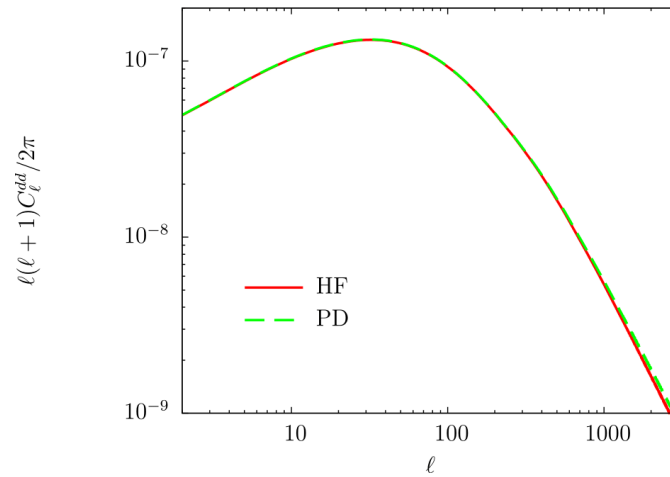


図3.7 PD と HF それぞれで計算したCMBレンジングの角度パワースペクトルの比較。 $C_\ell^{dd}$ は非線形摂動のモデルにあまり依存しないことが分かる。

と表される。これを  $\mathbf{d} = d^i$  に関してテイラー展開すると

$$\tilde{\Theta}(\hat{\theta}) = \Theta(\hat{\theta}) + d^i(\hat{\theta})\partial_i\Theta(\hat{\theta}) + \frac{1}{2}d^i(\hat{\theta})d^j(\hat{\theta})\partial_i\partial_j\Theta(\hat{\theta}) + \mathcal{O}(|\mathbf{d}|^3) \quad (3.65)$$

となる。 $\mathbf{d}$ は式 (3.16) から

$$\mathbf{d} = -2 \int_0^{\chi_*} d\chi \frac{S_K(\chi_* - \chi)}{S_K(\chi_*)S_K(\chi)} \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \psi(\chi \hat{\theta}, \eta_0 - \chi) \quad (3.66)$$

と求められる。ただし  $\chi_*$  は最終散乱面の共動距離である。

ここでは、曲がり角の代わりにレンジングポテンシャルを用いて計算を行う。レンジングポテンシャルは式 (3.17) から

$$\phi(\hat{\theta}) = -2 \int_0^{\chi_*} d\chi \frac{S_K(\chi_* - \chi)}{S_K(\chi_*)S_K(\chi)} \psi(\chi \hat{\theta}, \tau) \quad (3.67)$$

と求められる。レンズを受けた温度揺らぎの角度パワースペクトル  $\tilde{C}_\ell^{\Theta\Theta}$  は、球面調和関数の展開係数

$$\tilde{\Theta}_{\ell m} \equiv \int d\hat{\theta} \tilde{\Theta}(\hat{\theta}) Y_{\ell m}^*(\hat{\theta}) \quad (3.68)$$

を用いて

$$\delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \tilde{C}_\ell^{\Theta\Theta} \equiv \langle \tilde{\Theta}_{\ell m}^* \tilde{\Theta}_{\ell' m'} \rangle \quad (3.69)$$

で定義される。微分  $\partial^i$  を角度微分とし、式 (3.65) をレンジングポテンシャルを用いて書き直すと

$$\tilde{\Theta}(\hat{\theta}) = \Theta(\hat{\theta}) + [\partial^i \phi(\hat{\theta})] \partial_i \Theta(\hat{\theta}) + \frac{1}{2} [\partial^i \phi(\hat{\theta})] [\partial^j \phi(\hat{\theta})] \partial_i \partial_j \Theta(\hat{\theta}) + \mathcal{O}(\phi^3) \quad (3.70)$$

となるので、この両辺に球面調和関数の複素共役  $Y_{\ell m}^*$  をかけて単位球面上で積分すると、

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_{\ell m} &= \Theta_{\ell m} + \int d\hat{\theta} Y_{\ell m}^*(\hat{\theta}) [\partial^i \phi(\hat{\theta})] \partial_i \Theta(\hat{\theta}) + \frac{1}{2} \int d\hat{\theta} Y_{\ell m}^*(\hat{\theta}) [\partial^i \phi(\hat{\theta})] [\partial^j \phi(\hat{\theta})] \partial_i \partial_j \Theta(\hat{\theta}) + \mathcal{O}(\phi^3) \\ &= \Theta_{\ell m} + \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \phi_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2} \left[ I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2} + \frac{1}{2} \sum_{\ell_3 m_3} \phi_{\ell_3 m_3}^* J_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m m_1 m_2 m_3} \right] \end{aligned} \quad (3.71)$$

が得られる。ただし、 $X = \phi, \Theta$  に対して

$$X(\hat{\theta}) = \sum_{\ell m} X_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\theta}) \quad (3.72)$$

を用い、また

$$I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2} \equiv \int d\hat{\theta} Y_{\ell m}^* \partial_i Y_{\ell_1 m_1} \partial^i Y_{\ell_2 m_2} \quad (3.73)$$

$$J_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m m_1 m_2 m_3} \equiv \int d\hat{\theta} Y_{\ell m}^* \partial_i Y_{\ell_1 m_1} \partial_j Y_{\ell_3 m_3}^* \partial^i \partial^j Y_{\ell_2 m_2} \quad (3.74)$$

と定義した。これをもとにレンズを受けた温度揺らぎの角度パワースペクトルを計算すると

$$\tilde{C}_\ell^{\Theta\Theta} = C_\ell^{\Theta\Theta} + \sum_{\ell_1 \ell_2} C_{\ell_1}^{\phi\phi} C_{\ell_2}^{\Theta\Theta} S_1 + C_\ell^{\Theta\Theta} \sum_{\ell_1} C_{\ell_1}^{\phi\phi} S_2 \quad (3.75)$$

となる。ただし、アンサンブル平均をとるさいに、式 (3.75) の第二項、第三項ではそれぞれ

$$\langle \phi_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2} \phi_{\ell'_1 m'_1}^* \Theta_{\ell'_2 m'_2}^* \rangle = \delta_{\ell_1 \ell'_1} \delta_{m_1 m'_1} \delta_{\ell_2 \ell'_2} \delta_{m_2 m'_2} C_{\ell_1}^{\phi\phi} C_{\ell_2}^{\Theta\Theta} \quad (3.76)$$

$$\langle \phi_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2} \phi_{\ell_3 m_3}^* \Theta_{\ell m}^* \rangle = \delta_{\ell_1 \ell_3} \delta_{m_1 m_3} \delta_{\ell_2 \ell} \delta_{m_2 m} C_{\ell_1}^{\phi\phi} C_\ell^{\Theta\Theta} \quad (3.77)$$

およびその複素共役を用いている。また

$$S_1 \equiv \sum_{m_1 m_2} (I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2})^2 \quad (3.78)$$

$$S_2 \equiv \frac{1}{2} \sum_{m_1} J_{\ell \ell_1 \ell_1}^{m m_1 m m_1} + \text{c.c.} \quad (3.79)$$

と定義した。

### レンズを受けた偏光の角度パワースペクトル

次に、レンズを受けた偏光の角度パワースペクトルを導出する。レンズを受けて歪んだ偏光は、温度揺らぎと同様に計算できる。 $\pm X_{\ell m} = E_{\ell m} \pm iB_{\ell m}$ としたとき、式 (3.70) の  $\Theta$  を  $\pm X$  と置き換えても成り立つので、スピン 0 あるいは 2 の球面調和関数の展開係数を用いて

$$\pm \tilde{X}_{\ell m} = \pm X_{\ell m} + \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \phi_{\ell_1 m_1} \pm X_{\ell_2 m_2} \left[ \pm 2 I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2} + \frac{1}{2} \sum_{\ell_3 m_3} \phi_{\ell_3 m_3}^* \pm 2 J_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m m_1 m_2 m_3} \right] \quad (3.80)$$

となる。ただし

$$\pm 2 I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2} \equiv \int d\hat{\theta} \pm 2 Y_{\ell m}^* \partial_i Y_{\ell_1 m_1} \partial^i \pm 2 Y_{\ell_2 m_2} \quad (3.81)$$

$$\pm 2 J_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m m_1 m_2 m_3} \equiv \int d\hat{\theta} \pm 2 Y_{\ell m}^* \partial_i Y_{\ell_1 m_1} \partial_j Y_{\ell_3 m_3} \partial^i \partial^j \pm 2 Y_{\ell_2 m_2} \quad (3.82)$$

である。これをもとにレンズを受けた E モード・B モードの角度パワースペクトルを求めると

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\ell^{EE} &= C_\ell^{EE} + \frac{1}{2} \sum_{\ell_1 \ell_2} C_{\ell_1}^{\phi\phi} [(C_{\ell_2}^{EE} + C_{\ell_2}^{BB}) + (-1)^L (C_{\ell_2}^{EE} - C_{\ell_2}^{BB})] {}_{22}S_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} C_\ell^{EE} \sum_{\ell_1} C_{\ell_1}^{\phi\phi} ({}_2S_2 + {}_{-2}S_2) \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\ell^{BB} &= C_\ell^{BB} + \frac{1}{2} \sum_{\ell_1 \ell_2} C_{\ell_1}^{\phi\phi} [(C_{\ell_2}^{BB} + C_{\ell_2}^{EE}) + (-1)^L (C_{\ell_2}^{BB} - C_{\ell_2}^{EE})] {}_{22}S_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} C_\ell^{BB} \sum_{\ell_1} C_{\ell_1}^{\phi\phi} ({}_2S_2 + {}_{-2}S_2) \end{aligned} \quad (3.84)$$

となる。ただし  $L = \ell + \ell_1 + \ell_2$  であり、

$${}_{22}S_1 \equiv \sum_{m_1 m_2} ({}_2I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2})^2 \quad (3.85)$$

$$\pm {}_2S_2 \equiv \frac{1}{2} \sum_{m_1} \pm {}_2J_{\ell \ell_1 \ell_1}^{m m_1 m m_1} + \text{c.c.} \quad (3.86)$$

である。また、レンズを受けた温度揺らぎと E モードの相関は

$$C_\ell^{\tilde{\Theta}\tilde{E}} = C_\ell^{\Theta E} + \frac{1}{2} \sum_{\ell_1 \ell_2} C_{\ell_1}^{\phi\phi} C_{\ell_2}^{\Theta E} [1 + (-1)^L] {}_{02}S_1 + \frac{1}{4} C_\ell^{\Theta E} \sum_{\ell_1} C_{\ell_1}^{\phi\phi} ({}_2S_2 + {}_{-2}S_2 + 2S_2) \quad (3.87)$$

となる。ただし

$$S_2 \equiv -\frac{1}{2} \ell(\ell+1) \ell_1(\ell_1+1) \frac{2\ell_1+1}{4\pi} \quad (3.88)$$

$${}_{02}S_1 \equiv \sum_{m_1 m_2} (I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2} {}_2I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2}) \quad (3.89)$$



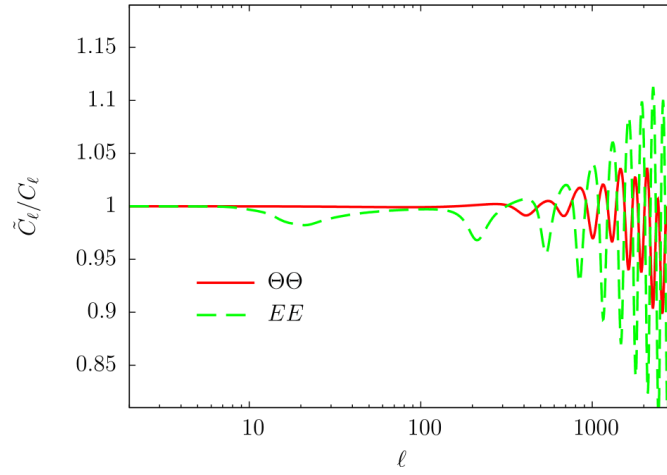


図3.8 重力レンズを受けたCMB温度揺らぎ、およびEモード偏光と、受ける前のそれらの揺らぎとの比  $C_\ell/\tilde{C}_\ell$ 。  
 $\ell \sim 1000$ までは、レンズ効果が非常に小さいことが分かる。

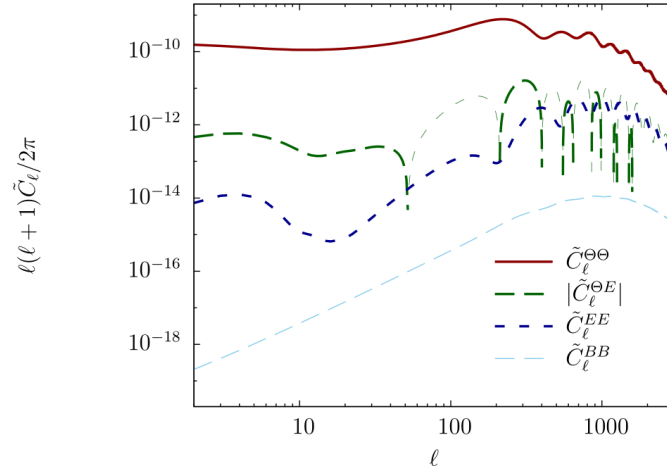


図3.9 重力レンズを受けたCMBの  $\Theta\Theta$ 、 $\Theta E$ 、 $EE$ 、 $BB$  の角度パワースペクトル。

である。式 (3.84) は、最終散乱面の時点でCMBの B モード成分がゼロであっても、重力レンズ効果によって B モードができることを示している。

レンズ効果が角度パワースペクトルへ与える影響を見るため、図3.8では、レンズを受けたCMB の角度パワースペクトルとレンズを受ける前の角度パワースペクトルの比を示した。図3.8から、温度揺らぎにおいてCMBレンジングの効果が効いてくるのは  $\ell \sim 1000$  くらいからである。しかしこのスケールではシルク減衰の効果が効いてくるので、シグナル自体が小さくなり、角度パワースペクトルにおけるレンズ効果を取り出しにくくなる。

図3.9では、レンズを受けたすべてのCMBのパワースペクトルを描いた。すでに計算において示したように、CMBは弱重力レンズを受けて B モードを生成する。CMBレンジングを受けて生成される B モードの角度パワースペクトルは、 $\ell \sim 1000$ にピークをもつ。一方でテンソル起源の B モードは大スケールにおいてピークをもつため、角度分解能が高く、偏光に高い感度をもつ実験であればレンズ効果を取り出しやすくなる。

#### フラット・スカイ近似

非常に小スケールにおいてレンズ効果は角度パワースペクトルへ影響を及ぼすため、フラット・スカイ近似を行った場合でもレンズ効果を受けた角度パワースペクトルを再現できる。ここでは、フラット・スカイ近似を行い、特に B モードに対する振る舞いの漸近形を与える。

フラット・スカイ近似の場合、各量は2次元フーリエ変換を行う：

$$\Theta(\hat{\theta}) = \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} \Theta(\ell) e^{i\ell \cdot \hat{\theta}} \quad (3.90)$$

偏光の場合はスピン 2 なので

$$\pm X(\hat{\theta}) = \pm i \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} \pm X(\ell) e^{\pm i(\varphi_\ell - \varphi_\theta)} e^{i\ell \cdot \hat{\theta}} \quad (3.91)$$

と展開される。ただし、 $\ell = \ell(\cos \varphi_\ell, \sin \varphi_\ell)$  および  $\hat{\theta} = \theta(\cos \varphi_\theta, \sin \varphi_\theta)$  である。これらをもとに、さきほど計算を行った方法でレンズを受けた角度パワースペクトルを求めると、温度揺らぎは

$$\tilde{C}_\ell^{\Theta\Theta} = C_\ell^{\Theta\Theta} + \int \frac{d^2\ell'}{(2\pi)^2} [\ell' \cdot (\ell - \ell')]^2 C_{|\ell - \ell'|}^{\phi\phi} C_{\ell'}^{\Theta\Theta} - C_\ell^{\Theta\Theta} \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} (\ell \cdot \ell')^2 C_\ell^{\phi\phi} \quad (3.92)$$

となり、それ以外は

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\ell^{EE} &= C_\ell^{EE} + \frac{1}{2} \int \frac{d^2\ell'}{(2\pi)^2} [\ell' \cdot (\ell - \ell')]^2 C_{|\ell - \ell'|}^{\phi\phi} [(C_{\ell'}^{EE} + C_{\ell'}^{BB}) + (C_{\ell'}^{EE} - C_{\ell'}^{BB}) \cos 4\varphi_{\ell'}] \\ &\quad - C_\ell^{EE} \int \frac{d^2\ell'}{(2\pi)^2} (\ell \cdot \ell')^2 C_{\ell'}^{\phi\phi} \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\ell^{BB} &= C_\ell^{BB} + \frac{1}{2} \int \frac{d^2\ell'}{(2\pi)^2} [\ell' \cdot (\ell - \ell')]^2 C_{|\ell - \ell'|}^{\phi\phi} [(C_{\ell'}^{EE} + C_{\ell'}^{BB}) - (C_{\ell'}^{EE} - C_{\ell'}^{BB}) \cos 4\varphi_{\ell'}] \\ &\quad - C_\ell^{BB} \int \frac{d^2\ell'}{(2\pi)^2} (\ell \cdot \ell')^2 C_{\ell'}^{\phi\phi} \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\ell^{\Theta E} &= C_\ell^{\Theta E} + \int \frac{d^2\ell'}{(2\pi)^2} [\ell' \cdot (\ell - \ell')]^2 C_{|\ell - \ell'|}^{\phi\phi} C_{\ell'}^{\Theta E} \cos 2\varphi_{\ell'} \\ &\quad - C_\ell^{\Theta E} \int \frac{d^2\ell'}{(2\pi)^2} (\ell \cdot \ell')^2 C_{\ell'}^{\phi\phi} \end{aligned} \quad (3.95)$$

で与えられる。ここで B モードに着目する。スカラー摂動のみを考えている場合、上式から

$$\tilde{C}_\ell^{BB} = \int \frac{d^2\ell'}{(2\pi)^2} [\ell' \cdot (\ell - \ell')]^2 C_{|\ell - \ell'|}^{\phi\phi} C_{\ell'}^{EE} \sin^2 2\varphi_{\ell'} \quad (3.96)$$

が得られる。大角度スケールを考えている場合、積分の中身は  $\ell \ll \ell'$  の部分だけからの寄与で評価できる。すなわち

$$\tilde{C}_\ell^{BB} \simeq \int \frac{d^2\ell'}{(2\pi)^2} (\ell')^2 C_{\ell'}^{\phi\phi} C_{\ell'}^{EE} \sin^2 2\varphi_{\ell'} \quad (3.97)$$

となる。このとき、レンズを受けた B モードはスケール  $\ell$  に依存していない。これは図3.9にも示されているように、 $\ell \ll 1000$  では  $\ell(\ell+1)\tilde{C}_\ell^{BB}/2\pi$  は  $\ell^2$  に比例して増加していることが分かる。また小角度スケール極限では、積分を  $\ell \gg \ell'$  の部分だけで評価すれば

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\ell^{BB} &\simeq C_\ell^{\phi\phi} \int \frac{d^2\ell'}{(2\pi)^2} [\ell' \cdot \ell]^2 C_{\ell'}^{EE} \sin^2 2\varphi_{\ell'} \\ &= \ell^2 C_\ell^{\phi\phi} \int \frac{d\ln \ell'}{8\pi} (\ell')^4 C_{\ell'}^{EE} \end{aligned} \quad (3.98)$$

となる。 $\tilde{C}_\ell^{EE}$  も同じ漸近形をとるので、レンズを受けた E モード偏光と B モード偏光の角度パワースペクトルは小角度スケールではほぼ同じ振る舞いをするようになる。

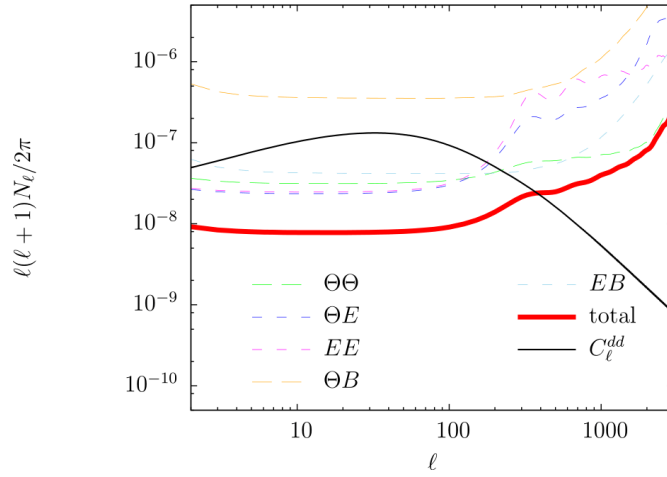


図3.10 ノイズスペクトル $N_\ell^{\Theta\Theta}$ 、 $N_\ell^{\Theta E}$ 、 $N_\ell^{\Theta B}$ 、 $N_\ell^{EE}$ 、 $N_\ell^{EB}$ および $N_\ell^{dd}$  (total)。参考に $C_\ell^{dd}$ を描いてある。ただし、レンズを受けたCMBのシグナルは、ACTを想定した観測から得られたものと仮定している。小角度スケールでのBモード偏光はレンズ効果で生成されるため、高角度分解能の偏光観測ほどノイズを小さく抑えられる。

### 3.3.2 レンズ場の再構築

CMBの観測で実際に測定されるのはレンズを受けたCMBである。ここでは、レンズを受けたCMBとレンズを受けていないCMBから、レンジングポテンシャルの情報を得る方法について述べる[44, 17]。

重力レンズによる影響で、観測される揺らぎには非線形な項が含まれる。このため、CMBの揺らぎの相関において、非対角成分にはレンジングポテンシャルの情報が含まれる。これを利用することで、重力レンズの寄与を取り出すことが可能となる。実際、レンジングポテンシャル $\phi$ が固定されていると、レンズを受けたCMBの揺らぎ $\tilde{X}, \tilde{Y}$ の相関は

$$\langle \tilde{X}_{\ell m} \tilde{Y}_{\ell' m'} \rangle_{CMB} = C_\ell^{XY} \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, -m'} (-1)^m + \sum_{LM} (-1)^M \begin{pmatrix} \ell & \ell' & L \\ m & m' & -M \end{pmatrix} f_{\ell L \ell'}^{XY} \phi_{LM} + \mathcal{O}(\phi_{LM}^2) \quad (3.99)$$

の形に書ける。ここで、左辺におけるアンサンブル平均 $\langle \dots \rangle_{CMB}$ は、レンジングポテンシャルを統計量として扱わず、重力レンズを受ける前の揺らぎに対する統計平均操作を意味する。また、

$$\begin{pmatrix} \ell & \ell' & L \\ m & m' & -M \end{pmatrix} \quad (3.100)$$

はウィグナーの 3j 記号 (Wigner 3j-symbol) である。レンジングポテンシャルの前の係数 $f$ は

$$f_{\ell_1 L \ell_2}^{\Theta\Theta} \equiv C_{\ell_1}^{\Theta\Theta} F_{\ell_2 L \ell_1} + C_{\ell_2}^{\Theta\Theta} F_{\ell_1 L \ell_2} \quad (3.101)$$

$$f_{\ell_1 L \ell_2}^{\Theta E} \equiv C_{\ell_1}^{\Theta E} F_{\ell_2 L \ell_1} + C_{\ell_2}^{\Theta E} F_{\ell_1 L \ell_2} \quad (3.102)$$

$$f_{\ell_1 L \ell_2}^{EE} \equiv C_{\ell_1}^{EE} F_{\ell_2 L \ell_1} + C_{\ell_2}^{EE} F_{\ell_1 L \ell_2} \quad (3.103)$$

$$f_{\ell_1 L \ell_2}^{\Theta B} \equiv i C_{\ell_1}^{\Theta E} F_{\ell_2 L \ell_1} \quad (3.104)$$

$$f_{\ell_1 L \ell_2}^{EB} \equiv i [C_{\ell_1}^{EE} F_{\ell_2 L \ell_1} - C_{\ell_2}^{BB} F_{\ell_1 L \ell_2}] \quad (3.105)$$

$$f_{\ell_1 L \ell_2}^{BB} \equiv C_{\ell_1}^{BB} F_{\ell_2 L \ell_1} + C_{\ell_2}^{BB} F_{\ell_1 L \ell_2} \quad (3.106)$$

であり、 $F$ はウィグナーの 3j 記号を用いて

$$\pm_s F_{\ell L \ell'} \equiv [L(L+1) + \ell'(\ell'+1) - \ell(\ell+1)] \sqrt{\frac{(2L+1)(2\ell+1)(2\ell'+1)}{16\pi}} \begin{pmatrix} \ell & L & \ell' \\ \pm_s & 0 & \mp_s \end{pmatrix} \quad (3.107)$$

と定義される。ただし、スカラー成分のみを考えている場合は  $C_\ell^{BB} = 0$  であるため、 $f^{BB} = 0$  である。式 (3.99) において、 $\ell = \ell'$  かつ  $m = m'$  のような対角成分の相関を考えた場合には、第一項しか残らない。しかし  $\ell \neq \ell'$  あるいは  $m \neq m'$  のような非対角成分の相関を考えた場合には  $\phi$  を含んだ項が取り出せる。そこで、揺らぎ  $X, Y$  の非対角成分の 2 点相関から、レンジングポテンシャル  $\phi^{XY}$  を

$$\hat{\phi}_{LM}^{XY} = A_L^{XY} \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} (-1)^M \begin{pmatrix} \ell & \ell' & L \\ m & m' & -M \end{pmatrix} g_{\ell\ell'L}^{XY} \tilde{X}_{\ell m} \tilde{Y}_{\ell' m'} \quad (3.108)$$

の形に見積もることとする。ただし  $A_L^{XY}, g_{\ell\ell'L}^{XY}$  は以下の二条件から決まる。一つは

$$\langle \hat{\phi}_{LM}^{XY} \rangle_{\text{CMB}} = \phi_{LM} \quad (3.109)$$

を満たすことである。もう一つはレンジングポテンシャルのシグナルを大きくするために分散

$$\langle \phi_{LM}^{XY} \phi_{LM}^{XY} \rangle \quad (3.110)$$

が最小になることである。ただし、ここでの  $\langle \dots \rangle$  はレンジングポテンシャルに対しても統計平均をとるものである。これら二条件から、 $A, g$  はそれぞれ

$$A_L^{XY} = L(L+1)(2L+1) \left( \sum_{l'l'} g_{ll'L}^{XY} f_{l'l'}^{XY} \right)^{-1} \quad (3.111)$$

$$g_{ll'L}^{XY} = \frac{C_{l'}^{\tilde{X}\tilde{X}} C_l^{\tilde{Y}\tilde{Y}} f_{ll'L}^{XY*} - (-1)^{L+l+l'} C_l^{\tilde{X}\tilde{Y}} C_{l'}^{\tilde{X}\tilde{Y}} f_{l'lL}^{XY*}}{C_l^{\tilde{X}\tilde{X}} C_l^{\tilde{Y}\tilde{Y}} C_{l'}^{\tilde{X}\tilde{X}} C_{l'}^{\tilde{Y}\tilde{Y}} - (C_l^{\tilde{X}\tilde{Y}} C_{l'}^{\tilde{X}\tilde{Y}})^2} \quad (3.112)$$

と求まる。

このようにして、各  $X, Y$  の組からレンジングポテンシャルの推定量  $\hat{\phi}^{XY}$  が求まる。これらを組み合わせ、 $\phi_{\ell m}$  の分散をさらに小さくするため

$$\hat{\phi}_{LM} = \sum_{X,Y} w_L^{XY} \phi_{LM}^{XY} \quad (3.113)$$

で得られる量  $\hat{\phi}_{LM}$  をレンジングポテンシャルの推定量とする。ここで

$$w_L^{XY} \equiv N_L^{mv} \sum_{X',Y'} [(N_L)^{-1}]^{XY,X'Y'} \quad (3.114)$$

および

$$N_{LM} \equiv \frac{1}{\sum_{XY,X'Y'} [(N_L)^{-1}]^{XY,X'Y'}} \quad (3.115)$$

は、 $\langle \hat{\phi}_{LM} \rangle_{\text{CMB}} = \phi$ 、および分散が最小になるようにして決まる。 $N_{LM}$  は

$$\langle \hat{\phi}_{LM} \hat{\phi}_{L'M'} \rangle = \delta_{LL'} \delta_{MM'} (C_L^{dd} + N_L^{dd}) \quad (3.116)$$

で定義される  $N_L^{dd}$  に等しい。これより、各マップの組み合わせから得られるノイズ  $N_\ell^{XY} \equiv \langle \hat{\phi}^{XX} \hat{\phi}^{YY} \rangle$  をもとに、最小分散  $N_\ell^{dd}$  が計算されることになる。

図3.10では、各マップから得られるノイズ  $N_\ell^{XY}$ 、および各マップを組み合わせで求めた最小分散  $N_\ell^{dd}$  を、 $C_\ell^{dd}$  とともに描いた。ただし、レンズを受けたCMBのシグナルは、ACTを想定した観測から得られたものと仮定している。ここで述べた方法では、レンズを受ける前のCMBの揺らぎ以外に、大規模構造の密度揺らぎの情報を含むレンジングポテンシャルをシグナルとして取り出している。そのため、この方法によってシグナルから得られる情報は増えることになる。これは、レンジングポテンシャルを推定するさい、揺らぎのパワースペクトルより高次の量を取り出してきていることに起因する。

## 第4章

# 解析手法

本研究では、ある想定されたサーベイにおいて、真の宇宙論パラメータが得られた場合に、その宇宙論パラメータがどれほどの精度のもとに決定されるか調べる。また、重力の非線形モデルに含まれる不定性が、最終的な宇宙論パラメータの決定においてどの程度の系統誤差を生じるか見積もる。

ここでは、宇宙論パラメータの決定精度を調べる上で本研究で用いるフィッシャー解析について述べる。また、用いた非線形モデルが真の非線形進化を正しく記述できていないことで引き起こされる宇宙論パラメータへの系統誤差の評価方法について述べる。

### 4.1 フィッシャー解析

フィッシャー解析は、最尤推定法に基づくパラメータ推定において、パラメータの決定精度を理論的に見積もることができる統計的解析手法である。理論パラメータと観測データの統計的性質を仮定することで、与えた理論パラメータがどの程度の誤差で制限できるか調べることで、将来観測のインパクト、異なる観測量の相補性などを調べることに用いられる。ここでは、参考文献[18]をもとに、フィッシャー解析についてまとめる。

#### 4.1.1 準備

観測から得られる $N$ 個のデータ $D_i (i = 1, 2, \dots, N)$ に対して、データベクトル $\mathbf{D}$ を

$$\mathbf{D} \equiv \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_N \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

とする。また、理論の $M$ 個のパラメータ $p_i (i = 1, 2, \dots, M)$ に対して、ベクトル

$$\mathbf{p} \equiv \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_M \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

を定義する。

理論のパラメータ $\mathbf{p}$ が与えられたときにデータ $\mathbf{D}$ が得られる確率 $\mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p})$ を尤度関数という。これは、 $\mathbf{D}$ と $\mathbf{p}$ の二変数関数である。ただし

$$\int d\mathbf{D} \mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p}) = 1 \quad (\forall \mathbf{p}) \quad (4.3)$$

が成り立つように規格化する。以下では、簡単のために平均操作を

$$\langle X \rangle \equiv \int d\mathbf{D} X(\mathbf{D})\mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p}) \quad (4.4)$$

と表す。 $\langle X \rangle$ は $\mathbf{p}$ の関数である。

#### 共分散行列

データ $\mathbf{D}$ から計算される $i$ 次元の量 $\mathbf{X}(\mathbf{D}) = (X_1(\mathbf{D}), X_2(\mathbf{D}), \dots, X_i(\mathbf{D}))$  に対して

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}) \equiv \langle {}^t[\mathbf{X} - \langle \mathbf{X} \rangle][\mathbf{X} - \langle \mathbf{X} \rangle] \rangle \quad (4.5)$$

で定義される行列 $\mathbf{C}$ を共分散行列 (covariance matrix) とよぶ。これは、一次元における分散を $i$ 次元に拡張したものである。

#### 不偏推定量

あるデータから理論のパラメータ $p_i$ を推定する状況を考える。データから求められた推定量を $\hat{\mathbf{p}}$ としたとき、 $\hat{\mathbf{p}}$ の期待値が理論のパラメータ $\mathbf{p}$ に一致する場合、 $\hat{\mathbf{p}}$ は不偏推定量とよばれる。これを式で表すと

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle \equiv \int d\mathbf{D} \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{D})\mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p}) = \mathbf{p} \quad (4.6)$$

となる。

#### 4.1.2 フィッシャー行列

##### フィッシャー (情報) 行列

まず、確率分布関数 $\mathcal{L}$ の規格化条件 (4.3) において両辺を $p_i$ で微分すると

$$0 = \int d\mathbf{D} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p})}{\partial p_i} = \int d\mathbf{D} \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p})}{\partial p_i} \mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p}) = \left\langle \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p})}{\partial p_i} \right\rangle \quad (4.7)$$

となる。さらに $p_j$ で微分を行うと

$$\left\langle \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p})}{\partial p_i} \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p})}{\partial p_j} \right\rangle = 0 \quad (4.8)$$

が得られる。尤度関数を用いて

$$F_{ij}(\mathbf{p}) \equiv - \left\langle \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j} \right\rangle \quad (4.9)$$

で定義される行列 $F_{ij}$ はフィッシャー情報行列 (フィッシャー information matrix)、あるいは単にフィッシャー行列とよばれる。式 (4.8) から、フィッシャー行列は

$$F_{ij}(\mathbf{p}) = \left\langle \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p})}{\partial p_i} \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p})}{\partial p_j} \right\rangle \quad (4.10)$$

と書ける。

#### フィッシャー行列とクラメール・ラオの不等式

不偏推定量を用いて推定される理論パラメータの分散には最小値が存在する (クラメール・ラオの不等式)。この分散を最小分散 (minimum variance) という。ここでは、その不偏推定量に対する最小分散を求める。

式 (4.6) を理論のパラメータ  $p_i$  で微分すると

$$\int d\mathbf{D} \hat{p}_i \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p})}{\partial p_j} \mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p}) = \delta_{ij} \quad (4.11)$$

が得られる。この式から

$$\langle [\hat{p}_i - p_i] \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p})}{\partial p_j} \rangle = \delta_{ij} \quad (4.12)$$

が導かれる。

ここで、ベクトル

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{p}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

を考える。このとき、このベクトルの共分散行列  $\mathbf{V}(\mathbf{A})$  は

$$\mathbf{V}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}(\hat{\mathbf{p}}) & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{C}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}}\right) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

と書ける。ただし  $\mathbf{I}$  は  $N$  次元の単位行列である。

共分散行列は半正定値行列であるから、任意のベクトル  $\mathbf{U}$  に対して

$${}^t \mathbf{U} \mathbf{V}(\mathbf{A}) \mathbf{U} \geq 0 \quad (4.15)$$

が成り立つ。ここで  $N$  次元ベクトル  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  を用いて

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

と分解すると、式 (4.15) は

$${}^t \mathbf{u} \mathbf{C}(\hat{\mathbf{p}}) \mathbf{u} + {}^t \mathbf{u} \mathbf{v} + {}^t \mathbf{v} \mathbf{u} + {}^t \mathbf{v} \mathbf{F} \mathbf{v} \geq 0 \quad (4.17)$$

と書き直せる。ただし  $\mathbf{F}$  はフィッシャー行列である。この式の左辺は

$${}^t \mathbf{u} (\mathbf{C}(\hat{\mathbf{p}}) - \mathbf{F}^{-1}) \mathbf{u} + {}^t (\mathbf{v} + \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u}) \mathbf{F} (\mathbf{v} + \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u}) \quad (4.18)$$

と表せるので、任意の  $\mathbf{u}$  に対して

$${}^t \mathbf{u} (\mathbf{C}(\hat{\mathbf{p}}) - \mathbf{F}^{-1}) \mathbf{u} \geq 0 \quad (4.19)$$

であることが分かる。この不等式はクラメール・ラオの不等式と呼ばれる。  $\mathbf{u}$  を  $N$  次元単位ベクトルに選ぶと、クラメール・ラオの不等式は

$$C_{ii}(\hat{\mathbf{p}}) \geq (F^{-1})_{ii} \quad (4.20)$$

となる。すなわち、フィッシャー行列を用いて計算された  $(F^{-1})_{ii}$  が、パラメータ  $\lambda_i$  の不偏推定量  $\hat{p}_i$  の分散の最小値を与える。不偏推定量のうち、最小分散をとるものが最も好ましい。

多重ガウス型の場合でのフィッシャー行列

ここで、尤度関数をガウス分布と仮定した場合のフィッシャー行列を求める。尤度関数 $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{\sqrt{C}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{D} - \langle \mathbf{D} \rangle)^\dagger \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{D} - \langle \mathbf{D} \rangle) \right] \quad (4.21)$$

のように、ガウス型と仮定する。ここで、 $\mathbf{D}$ はデータベクトル、その $\mathbf{C}$ は共分散行列である。

$\chi^2$ を尤度関数 $\mathcal{L}$ を用いて

$$\chi^2 \equiv -2 \ln \mathcal{L} \quad (4.22)$$

と定義する。尤度関数がガウス分布 (4.21) に従うとき、

$$\chi^2 = \text{Tr}(\ln \mathbf{C} + \mathbf{C}^{-1} \Delta) \quad (4.23)$$

と表せる。ただし $\Delta = (\mathbf{D} - \langle \mathbf{D} \rangle)^\dagger (\mathbf{D} - \langle \mathbf{D} \rangle)$ である。 $\chi^2$ を理論パラメータ $p_i$ に関して一回微分したものは

$$\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial p_i} = \text{Tr} \left( \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_i} - \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_i} \mathbf{C}^{-1} \Delta + \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \Delta}{\partial p_i} \right) \quad (4.24)$$

であり、二回微分したものは

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial p_i \partial p_j} = & \text{Tr} \left( \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_i} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_j} + \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial p_i \partial p_j} + \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_j} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_i} \mathbf{C}^{-1} \Delta \right. \\ & - \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial p_i \partial p_j} \mathbf{C}^{-1} \Delta + \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_i} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_j} \mathbf{C}^{-1} \Delta - \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_i} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \Delta}{\partial p_j} \\ & \left. - \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_j} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \Delta}{\partial p_i} + \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial p_i \partial p_j} \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

となる。

フィッシャー行列を得るため、式(4.25)の両辺に

$$\langle \cdots \rangle = \int d\mathbf{D} \mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p}) \quad (4.26)$$

を作用させる。ここで、 $\Delta$ の平均は、その定義から

$$\langle \Delta \rangle = \mathbf{C} \quad (4.27)$$

となる。一方、一回微分は

$$\left\langle \frac{\partial \Delta}{\partial p_i} \right\rangle = -2 \left\langle (\mathbf{D} - \langle \mathbf{D} \rangle) \frac{\partial \langle \mathbf{D}^t \rangle}{\partial p_i} \right\rangle = -2 \langle \mathbf{D} - \langle \mathbf{D} \rangle \rangle \frac{\partial \langle \mathbf{D}^t \rangle}{\partial p_i} = 0 \quad (4.28)$$

であり、さらに二回微分は

$$\left\langle \frac{\partial^2 \Delta}{\partial p_i \partial p_j} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{\partial \langle \mathbf{D} \rangle}{\partial p_i} \frac{\partial \langle \mathbf{D}^t \rangle}{\partial p_j} \right\rangle = 2 \frac{\partial \langle \mathbf{D} \rangle}{\partial p_i} \frac{\partial \langle \mathbf{D}^t \rangle}{\partial p_j} \quad (4.29)$$

これを用いると、式 (4.25) をフィッシャー行列の定義式 (4.9) に代入することで、尤度関数がガウス分布の場合のフィッシャー行列

$$F_{ij} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_i} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_j} \right) \Big|_{p_i=\langle p_i \rangle} + \frac{\partial \langle \mathbf{D}^t \rangle}{\partial p_j} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \langle \mathbf{D} \rangle}{\partial p_i} \quad (4.30)$$

が得られる。



### 4.1.3 決定精度の理論予測

事後確率分布 $P(\mathbf{p}|\mathbf{D})$ は、事前確率分布が $\mathbf{p}$ や $\mathbf{D}$ に依存しないと考えると $\mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p})$ に比例する。データが与えられたもとでの推定値 $\mathbf{p}$ と真値 $\mathbf{p}_0$ のずれを微小量として、 $\mathbf{p}_0$ まわりで対数事後確率分布を展開すると

$$\begin{aligned} \ln P(\mathbf{p}|\mathbf{D}) &= \ln P(\mathbf{p}_0|\mathbf{D}) + \left. \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p})}{\partial p_i} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^t \left. \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) + \mathcal{O}(|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|^3) \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\simeq \text{const.} - \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^t \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \quad (4.32)$$

ただし、尤度関数の微分は、 $\mathcal{L}(\mathbf{D}|\mathbf{p})$ によるデータに対する平均値で評価した。これを書き換えると、

$$P(\mathbf{p}|\mathbf{D}) \propto \exp \left( -\frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^t \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \right) \quad (4.33)$$

二次元平面上での $1\sigma$ の制限の等高線を書くには、

$$\int_{S_{\mathbf{p}_0}} d\mathbf{p} \exp \left( -\frac{1}{2} (\mathbf{p})^t \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) \mathbf{p} \right) \quad (4.34)$$

が0.68となる、中心 $\mathbf{p}_0$ の二次元面 $S_{\mathbf{p}_0}$ を求めればよい。

### 4.1.4 CMBの観測における尤度関数

ここでは、CMBの温度揺らぎ、偏光のデータを想定した場合の尤度関数を導く。次に、CMBの観測、銀河の測光サーベイを全て組み合わせた場合のフィッシャー行列を導く。

#### ビームパターン

CMBの観測では、複数のピクセルごとに光を検出する。光を受けたピクセルにおいて、そのシグナルは有限の広がりをもつ。 $i$ 番目のピクセルにおいて検出されるシグナル $s_i$ は、 $i$ 番目のピクセルに入射した光の揺らぎ $X_i$ 、 $i$ 番目のピクセルにおけるビームパターン $B_i$ を用いて

$$s_i = \int d\hat{\mathbf{n}} X_i(\hat{\mathbf{n}}) B_i(\hat{\mathbf{n}}) \quad (4.35)$$

と表される。ここで、ビームパターンは各ピクセルごとの特性を表すもので、検出器に依存する。そこで、 $\hat{\mathbf{n}}_i$ を $i$ 番目のピクセルの方向とし、ビームパターン $B_i$ を

$$B_i(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left( -\frac{(\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}_i)^2}{2\sigma^2} \right) \quad (4.36)$$

のようにガウス型を仮定する。このとき、ビームパターンをフーリエ変換したものは

$$B_i(\ell) = e^{-\ell^2 \sigma^2} \quad (4.37)$$

となる。

$\sigma$ は角度分解能を意味する。以降ではFWHMに直した角度分解能 $\theta \equiv \sqrt{8 \ln 2} \sigma$  [rad] を用いる。

### 観測機器由来のノイズ

ビームパターンを角度分解能 $\theta$ のガウス型と仮定する。本来のシグナル $X$ に一樣なノイズ $n^X$ が加わると、測定されるパワースペクトル $\hat{C}_\ell^{XX}$ は

$$\hat{C}_\ell^{XX} = e^{-\ell^2 \theta^2 / 8 \ln 2} (C_\ell^{XX} + N_\ell^{XX}) \quad (4.38)$$

となる。ただし

$$N_\ell^{XX} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \equiv \langle n_{\ell m}^{X,*} n_{\ell m}^X \rangle e^{\ell^2 \theta^2 / 8 \ln 2} \quad (4.39)$$

であり、ノイズとシグナルの相関はゼロとした。

$\langle n_{\ell m}^{X,*} n_{\ell m}^X \rangle$ は揺らぎ $X$ を測定するさいの観測機器の感度を表す。CMBの温度 $T_{\text{CMB}}$ を用い、感度 $\sigma_X$ を

$$\frac{\sigma_X}{T_{\text{CMB}}} \equiv n^X \quad (4.40)$$

と定義すると、ノイズのスペクトル $N_\ell^{XX}$ は

$$N_\ell^{XX} \delta_{\ell\ell'} \equiv \left( \frac{\sigma_X}{T_{\text{CMB}}} \right)^2 e^{\ell^2 \theta^2 / 8 \ln 2} \quad (4.41)$$

と表せる。

複数の振動数で観測を行っている場合、複数のCMBのマップを得ることができる。それぞれから得られたデータを組み合わせることで、ノイズの寄与を小さくすることができる。 $i$ を振動数 $\nu_i$ のチャンネルとして

$$\frac{1}{N} \equiv \sum_i \frac{1}{N_i} = \sqrt{\sum_{i \geq j} \frac{2}{N_i N_j (1 + \delta_{ij})}} \quad (4.42)$$

と一般化されたノイズ $N$ を用いると、データを組み合わせた場合に生じるノイズの寄与が最小になる。

### 尤度関数

得られるデータ $\mathbf{D}$ を、温度揺らぎ・偏光の展開係数 $X_{\ell m}, Y_{\ell m}$ とする。このとき、部分データベクトル

$$\mathbf{D}_\ell = (X_{\ell-\ell}, X_{\ell,-\ell+1}, \dots, X_{\ell,\ell}, Y_{\ell,-\ell}, \dots, Y_{\ell,\ell}) \quad (4.43)$$

を用いて、データベクトルを

$$\mathbf{D} = \{\mathbf{D}_\ell\}_{\ell=2,3,\dots} \quad (4.44)$$

と表すことにする。式(4.5)で定義される共分散行列は

$$\mathbf{C} = \delta_{\ell\ell'} \langle \mathbf{D}_\ell^\dagger \mathbf{D}_{\ell'} \rangle = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{D}_2^\dagger \mathbf{D}_2 \rangle & & \\ & \langle \mathbf{D}_3^\dagger \mathbf{D}_3 \rangle & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

のように、部分行列 $\mathbf{c}_\ell \equiv \langle \mathbf{D}_\ell^\dagger \mathbf{D}_\ell \rangle (\ell = 2, 3, \dots)$ を用いて表される。 $\mathbf{c}_\ell$ は

$$\mathbf{c}_\ell = \begin{pmatrix} C_\ell^{\Theta\Theta} & C_\ell^{\Theta E} \\ C_\ell^{\Theta E} & C_\ell^{EE} \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

と表される。ただし $C_\ell^{XY}$ は

$$C_\ell^{XY} \equiv \delta_{mm'} C_\ell^{XY} = \begin{pmatrix} C_\ell^{XY} & & \\ & \ddots & \\ & & C_\ell^{XY} \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

のように、パワースペクトル  $C_\ell^{XY}$  を対角成分にもつ  $2\ell + 1$  次元の対角行列である。

尤度関数  $\mathcal{L}$  がガウス分布に従う場合、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \det(C)}} \exp\left(-\frac{1}{2} D^\dagger C^{-1} D\right) \quad (4.48)$$

と書ける。 $\mathbf{c}_\ell$  を用いると

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_\ell \frac{1}{\det \mathbf{c}_\ell} \exp\left(-\frac{1}{2} D_\ell^\dagger \mathbf{c}_\ell^{-1} D_\ell\right) \quad (4.49)$$

となる。

### フィッシャー行列

式 (4.49) で定義される尤度関数をもとにフィッシャー行列を導くと、

$$F_{ij} = \sum_{\ell=2} \frac{2\ell+1}{2} \text{Tr} \left( C_\ell^{-1} \frac{\partial C_\ell}{\partial p_i} C_\ell^{-1} \frac{\partial C_\ell}{\partial p_j} \right) \quad (4.50)$$

である。ここで

$$C_\ell \equiv \begin{pmatrix} C_\ell^{\Theta\Theta} & C_\ell^{\Theta E} \\ C_\ell^{\Theta E} & C_\ell^{EE} \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

であり、 $p_i$  は理論のパラメータである。また  $C_\ell^{XY}$  はパワースペクトルである。

実際の観測では、ピクセル数は有限であり、情報は有限しかない。そのため、 $\ell = \ell_{\max}$  より小さいスケールの情報は得られないと考えられる。また観測領域が有限の場合は、全天に対する観測領域の割合  $f_{\text{sky}}$  を用いて

$$F_{ij} = \sum_{\ell=2}^{\ell_{\max}} \frac{(2\ell+1)f_{\text{sky}}}{2} \text{Tr} \left( C_\ell^{-1} \frac{\partial C_\ell}{\partial p_i} C_\ell^{-1} \frac{\partial C_\ell}{\partial p_j} \right) \quad (4.52)$$

と近似する。

一般に複数の観測量  $X_{\ell m}^{(1)}, X_{\ell m}^{(2)}, \dots$  があり、二点相関が

$$\langle X_{\ell m}^{(i)*} X_{\ell m}^{(j)} \rangle = C_\ell^{X^{(i)} X^{(j)}} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (4.53)$$

の形に書けるとする。尤度関数がガウス分布の場合、フィッシャー行列は式 (4.52) の形になり、 $C_\ell$  は

$$C_{\ell,ij} = C_\ell^{X^{(i)} X^{(j)}} \quad (4.54)$$

となる。

## 4.2 系統誤差の評価方法

推定したい宇宙論パラメータ  $p_i$  は、観測から得られた統計量（例えばパワースペクトル  $C_{\text{obs}}$ ）を理論の対応する量（理論のパワースペクトル  $C_{\text{true}}(p_i)$ ）でフィットして求める。以下ではガウス揺らぎを仮定し、宇宙論パラメータを推定することを想定する。

パラメータ推定において、パワースペクトルの理論計算の精度が十分でない場合などは、結果がバイアスされてしまう。ここでは、参考文献[19]をもとに、誤った理論パワースペクトル  $C_{\text{bias}}$  を用いて求めた宇宙論パラメータ  $p^{\text{bias}}$  が、真の理論パワースペクトル  $C_{\text{true}}$  を用いて求めた宇宙論パラメータ  $p^{\text{true}}$  とどの程度異なるか、定量的に見積もる方法について述べる。

まず、誤った理論パワースペクトルから計算されたカイ二乗 $\chi_{\text{bias}}^2$ を、真のパラメータ $\mathbf{p}^{\text{true}}$ のまわりで展開すると

$$\chi_{\text{bias}}^2(\mathbf{p}) = \chi_{\text{bias}}^2(\mathbf{p}^{\text{true}}) + \sum_i \frac{\partial \chi_{\text{bias}}^2(\mathbf{p}^{\text{true}})}{\partial p_i} (p_i - p_i^{\text{true}}) + \sum_{i,j} \frac{1}{2} (p_i - p_i^{\text{true}}) \frac{\partial^2 \chi_{\text{bias}}^2(\mathbf{p}^{\text{true}})}{\partial p_i \partial p_j} (p_j - p_j^{\text{true}}) \quad (4.55)$$

となる。

知りたいのは、パラメータ空間において $\chi_{\text{bias}}^2$ を最小にする $p_i^{\text{bias}}$ と真の値 $p_i^{\text{true}}$ との差 $\mathbf{b} \equiv \mathbf{p}^{\text{bias}} - \mathbf{p}^{\text{true}}$ である。これは以下のようにして求められる。まず、式(4.55)をさらに $p^k$ で微分することで

$$\frac{\partial \chi_{\text{bias}}^2(\mathbf{p})}{\partial p_k} = \frac{\partial \chi_{\text{bias}}^2(\mathbf{p}^{\text{true}})}{\partial p_k} + \sum_j \frac{\partial^2 \chi_{\text{bias}}^2(\mathbf{p}^{\text{true}})}{\partial p_k \partial p_j} (p_j - p_j^{\text{true}}) \quad (4.56)$$

が得られる。ここでバイアスされたフィッシャー行列

$$F_{ij}^{\text{bias}} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi_{\text{bias}}^2(\mathbf{p}^{\text{true}})}{\partial p_i \partial p_j} \quad (4.57)$$

を定義する。 $\chi_{\text{bias}}^2$ をもとに真のパラメータまわりでフィッシャー解析を行う場合には、この $F_{ij}^{\text{bias}}$ をもとに推定を行っていることになる。式(4.56)に $\mathbf{p} = \mathbf{p}^{\text{bias}}$ を代入すると左辺は消えるから

$$\frac{\partial \chi_{\text{bias}}^2(\mathbf{p}^{\text{true}})}{\partial p_i} + \sum_j 2F_{ij}^{\text{bias}} b_j = 0 \quad (4.58)$$

となる。これより、

$$b_i = -\frac{1}{2} \sum_{ij} F_{ij}^{\text{bias}} \frac{\partial \chi_{\text{bias}}^2(\mathbf{p}^{\text{true}})}{\partial p_i} \quad (4.59)$$

が得られる。

式(4.59)を、 $\chi^2$ の代わりに共分散行列 $\mathbf{C}$ を用いて表すこともできる。まず、式(4.24)から

$$\frac{\partial \chi_{\text{bias}}^2}{\partial p_i} = \text{Tr} \left( \mathbf{C}_{\text{bias}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_{\text{bias}}}{\partial p_i} - \mathbf{C}_{\text{bias}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_{\text{bias}}}{\partial p_i} \mathbf{C}_{\text{bias}}^{-1} \Delta + \mathbf{C}_{\text{bias}}^{-1} \frac{\partial \Delta}{\partial p_i} \right) \quad (4.60)$$

が得られる。これから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_{\text{bias}}^2(\mathbf{p}^{\text{true}})}{\partial p_i} &= \text{Tr} \left( \mathbf{C}_{\text{bias}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_{\text{bias}}}{\partial p_i} - \mathbf{C}_{\text{bias}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_{\text{bias}}}{\partial p_i} \mathbf{C}_{\text{bias}}^{-1} \langle \Delta \rangle + \mathbf{C}_{\text{bias}}^{-1} \left\langle \frac{\partial \Delta}{\partial p_i} \right\rangle \right) \\ &= \text{Tr} \left( \mathbf{C}_{\text{bias}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_{\text{bias}}}{\partial p_i} - \mathbf{C}_{\text{bias}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_{\text{bias}}}{\partial p_i} \mathbf{C}_{\text{bias}}^{-1} \mathbf{C}_{\text{true}} \right) \\ &= \text{Tr} \left( -\mathbf{C}_{\text{bias}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_{\text{bias}}}{\partial p_i} \mathbf{C}_{\text{bias}}^{-1} (\mathbf{C}_{\text{true}} - \mathbf{C}_{\text{bias}}) \right) \end{aligned} \quad (4.61)$$

と計算できるので、これを式(4.59)に代入すると最終的に

$$b_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} F_{ij}^{\text{bias}} \text{Tr} \left( \mathbf{C}_{\text{bias}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_{\text{bias}}}{\partial p_i} \mathbf{C}_{\text{bias}}^{-1} (\mathbf{C}_{\text{true}} - \mathbf{C}_{\text{bias}}) \right) \quad (4.62)$$

が得られる。

一般に複数の観測量 $X_{\ell m}^{(1)}, X_{\ell m}^{(2)}, \dots$ があり、二点相関が

$$\langle X_{\ell m}^{(i)*} X_{\ell m}^{(j)} \rangle = C_{\ell}^{X^{(i)} X^{(j)}} \delta_{\ell \ell'} \delta_{mm'} \quad (4.63)$$

の形に書ける場合、式(4.62)は

$$b_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} [(F^{\text{bias}})^{-1}]_{ij} \sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{2} \text{Tr} \left( \mathbf{C}_{\ell}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_{\ell}}{\partial p_i} \mathbf{C}_{\ell}^{-1} (\mathbf{C}_{\ell}^{\text{true}} - \mathbf{C}_{\ell}) \right) \quad (4.64)$$

と書ける。ただし行列 $\mathbf{C}_\ell$ は

$$C_{\ell,ij} = C_\ell^{X^{(i)}X^{(j)}} \quad (4.65)$$

であり、パワースペクトル $C_\ell^{X^{(i)}X^{(j)}}$ はバイアスされたものである。また、 $\mathbf{C}_\ell^{\text{true}}$ は真のパワースペクトルを用いて計算した $\mathbf{C}_\ell$ である。



## 第5章

# 宇宙論パラメータの決定精度

ここでは、本研究で行った結果、およびその考察について述べる。そのさい必要な解析手法については、第4章において述べた。また、結果の解釈に必要な基礎事項については第2章から第3章までを通して述べた。

### 5.1 本研究について

本研究では、弱重力レンズを用いることで、暗黒エネルギーおよびニュートリノに対し、どこまで制限がつけられるのか調べるのが目的である。そのさい、宇宙論パラメータの縮退や重力の非線形進化が重要になる。これについて以下で述べる。

- 宇宙論パラメータの縮退

本研究では、CMBレンズングとコスミックシアの情報を組み合わせた解析を行うが、このように複数の情報を組み合わせることの利点は、宇宙論パラメータの縮退を解き、決定精度を向上させることが期待される点である。宇宙論パラメータの決定を行うさい、宇宙論パラメータ間の縮退は決定精度の向上を妨げる。第2章で述べたように、暗黒エネルギーの状態方程式とニュートリノ質量は、CMBの温度揺らぎのパワースペクトルに対して同じ影響を及ぼす。このため、CMBの温度揺らぎのパワースペクトルのみを用いた場合には、暗黒エネルギーとニュートリノ質量は縮退し、決定精度が向上しない。しかし、密度揺らぎのパワースペクトルの情報を小スケールまで加えていくと、暗黒エネルギーとニュートリノ質量の縮退は解ける。例えば、CMBレンズングは密度揺らぎの情報をもつので、CMBの情報と組み合わせることで、暗黒エネルギーとニュートリノ質量の縮退が解け、それぞれの決定精度が向上する。本研究では、CMBレンズングとコスミックシアがどのように宇宙論パラメータの決定精度に影響を与えるのか、そして宇宙論パラメータ間の縮退をどのように解くのか詳細に調べる。

- 重力の非線形性

第3章で述べたように、コスミックシアの信号は重力の非線形進化に影響されやすい。また、それに比べてCMBレンズングの信号は非線形性の影響を受けにくい。重力の非線形進化は、現在では重力の非線形摂動論やN体シミュレーションを用いて計算を行うことで求めている。また、シミュレーション結果を補正することで得たフィッティング公式を用いると、重力の非線形進化を考慮したパワースペクトルを簡単に計算することができる。しかし、摂動論やN体シミュレーション、フィッティング公式など異なった方法を用いて計算した非線形パワースペクトルに対し、どれが正しく非線形性を扱えているのかはよく分からない。これを受け、本研究では、暗黒エネルギー・ニュートリノ質量の制限において、角度パワースペクトルの理論計算に要求される精度を調べる。

### 5.1.1 本研究の位置付け

本研究と同様に、CMBレンズング、あるいは銀河の弱重力レンズと、他の観測量とを組み合わせることで宇宙論パラメータの決定精度について調べた研究が存在する。文献[45]では、CMBとCMBレンズングを組み合わせることでニュートリノ質量に対する決定精度を理論的に見積もっている。この結果から、ニュートリノ質量に対する制限は、CMBレンズングを加えることで、加えない場合に対して3-4倍ほど精度が向上する。文献[9]では、CMBと宇宙ミックスシアを組み合わせることで、暗黒エネルギーの状態方程式、ニュートリノ質量に対する決定精度を見積もっている。この結果から、(赤方偏移)トモグラフィを行うことでいくつもの異なる赤方偏移の情報が加わり、暗黒エネルギーの状態方程式が精度良く決定できることが分かる。文献[46]では、CMBとCMBレンズング、宇宙ミックスシアを組み合わせることで、暗黒エネルギーの状態方程式に対する決定精度を見積もっている。

これらを踏まえると、本研究と最も近い研究と考えられるのは文献[46]の研究である。本研究では、文献[46]で考慮されていないニュートリノ質量についても、その決定精度を見積もる。そのさい、新たに次世代サーベイであるACTおよびHSCを想定する。また、宇宙ミックスシアを用いるさいに重力の非線形性を正しく扱うことが重要となるので、角度パワースペクトルの理論計算に要求される精度を調べる。

## 5.2 想定する観測計画

本研究で想定するCMBの観測として、PlanckとACTPol、また銀河の測光サーベイとしてHSCを考察した。これらのサーベイ計画や観測時期などについて以下でまとめる。そのさい、フィッシャー解析を行う上で必要なパラメータについて述べる。

### Planck

PlanckはESA (European Space Agency、欧州宇宙機関) が計画したCMBの温度・偏光を測定する探査機である。COBE、WMAPに次ぐ宇宙空間でのCMB観測探査機であり、2009年に打ち上げられ、観測が始まっている。現在宇宙空間で稼働中のCMB探査機であるWMAPに比べ、Planckは感度・角度分解能ともに優れており、WMAPより小スケールの揺らぎの測定を行う。宇宙空間での観測は、地上のCMB観測と異なり、地球大気の揺らぎの影響を受けず、地上観測では困難な大スケールの揺らぎの観測を行うことができる。

### ACT

ACT (Atacama Cosmology Telescope) は、チリ北部のアタカマ砂漠に建設された電波望遠鏡である。2007年からCMBによるSZの観測が開始されており、2014年までCMBの温度・偏光の観測を行う予定である。ACTは、小スケールのCMBの揺らぎを観測することで、インフレーションなどの初期宇宙の情報やSZ効果の検出を目的としている。また、角度分解能が高く、レンズを受けたBモード偏光やCMBレンズングの検出も目指している。ACTの観測領域は、SDSS (Sloan Digital Sky Survey) やBOSS (Baryonic Oscillation Spectroscopic Survey) など、多くの観測と観測領域が重なっており、相補的な観測を行うことができる。ACTは、2010年から2011年にかけて、 $2000 \text{ deg}^2$  の領域を観測する。また2012年から2014年にかけて、CMBの偏光観測を行う予定である (ACTPol)。ACTPolでは、さらに広範囲のサーベイ領域 ( $4000 \text{ deg}^2$ ) でCMBの測定を行うものと、サーベイ領域は同じだが長いタイムスケールで観測する計画がある。後者は長時間の観測を行うことで、高感度の観測を行うことが可能となる。ACTPolでは、偏光の測定によってBモード偏光を精度良く検出することができ、CMBレンズングの情報が高精度で引き出せるようになる。本研究では、ACTの計画のうち、ACTPolのサーベイデザインを用いて宇宙論パラメータ推定を行う。ACTは地上観測であり、CMBの揺らぎの観測において地球大気の揺らぎが大きなノイズ源となる。



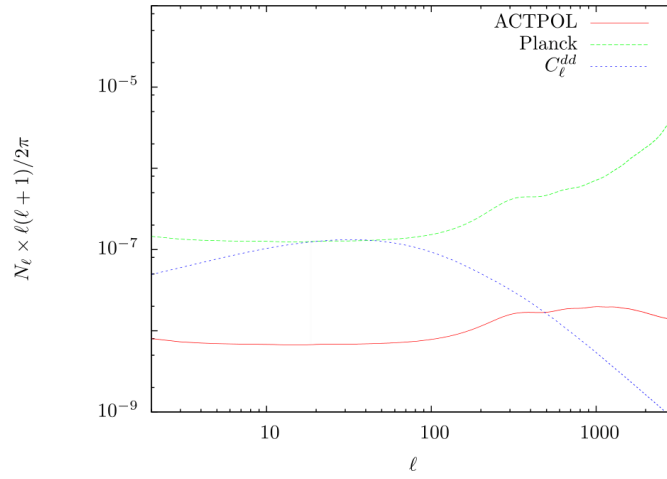


図5.1 PlanckとACTPolに対し、レンジングポテンシャルとノイズ $N_{\ell}^{dd}$ を描いた。赤線がACTPol、緑線がPlanckを想定してレンジングポテンシャルを再構築した場合のノイズである。青線は曲がり角のパワースペクトルである。ACTPolは $\ell \leq 700$ の揺らぎを除外して計算した。

大スケール ( $\ell \sim 700$ 以下) では大気の影響が大きいので、本研究では、ACTから得られる $\ell = 700$ 以下のシグナルを使わず、代わりにPlanckのデータを $\ell = 2 - 700$ まで利用することを想定して解析を行う。

本研究では、CMBの実験としてPlanckおよびACTPolの2種類について考察する。Planck、およびACTPolに対し、温度の感度 $\sigma_T$ 、偏光の感度 $\sigma_P$ 、全天に対する観測領域の割合 $f_{\text{sky}}$ 、角度分解能 $\theta$ を表5.1にまとめる。ただし $\nu$ はチャンネルの振動数である。

表5.1 本研究で想定したPlanck、およびACTPolの感度、角度分解能、観測領域の大きさ。以下ではこれらを総称して実験パラメータと呼ぶ。

実験	$f_{\text{sky}}$	$\nu$ [GHz]	$\theta$ [arcmin]	$\sigma_P$ [ $\mu$ K/pixel]	$\sigma_T$ [ $\mu$ K/pixel]
Planck [47]	0.65	30	33	4.4	6.2
		44	23	6.5	9.2
		70	14	9.8	13.9
		100	9.5	6.8	10.9
		143	7.1	6.0	11.4
		217	5.0	13.1	26.7
		353	5.0	40.1	81.2
ACTPol [48]	0.1	148	1.4	3.6	5.0

この表から、PlanckとACTPolは感度が同程度であり、Planckに比べてACTPolのほうが4-5倍ほど高い角度分解能を持っていることが分かる。このため、Planckに比べてACTPolのほうがレンジングポテンシャルの情報を精度良く取り出すことができる。実際にレンジングポテンシャルを再構築するさいに見積もるノイズ $N_{\ell}^{dd}$ を図5.1に描いた。Planckではレンジングポテンシャルがノイズにほぼ埋もれてしまうが、ACTPolでは $\ell \sim 500$ くらいまで、レンジングポテンシャルのシグナルがノイズを上回る。

## HSC

Subaru HSC (Hyper Suprime-Cam) とは、すばる望遠鏡に取り付ける新たな主焦点カメラのことである。HSCを用いることで、現在の主焦点カメラであるSuprime-Camの性能を維持したまま、10倍程度の視野を確保できる。本論文では、HSCを用いたサーベイを、以降では単にHSCと呼ぶことにする。HSCを利用した銀河の測光サーベイが2012年から予定されており、バリオン振動や銀河の弱重力レンズなどによる暗黒エネルギーについての研究が計画されている。HSCは2000 deg<sup>2</sup>の領域を観測するが、ACTと同じ領域を観測するように計画が進んでおり、CMBの観測から得られるデータと銀河の弱重力レンズの観測から得られるデータとの相関をとることができる。

本研究では、HSCを用いた銀河の測光サーベイにおいて観測される銀河分布を

$$n(z) = N_g \frac{3z^2}{2z_0^3} \exp \left[ - \left( \frac{z}{z_0} \right)^{3/2} \right] \quad (5.1)$$

と仮定する。ただし、銀河の個数は  $N_g = 30 \text{ arcmin}^{-2}$ 、 $z_0 = 0.694$  とする。平均の赤方偏移  $z_m$  に直すと、 $z_m = 1$  である。HSCの観測領域の大きさは2000 deg<sup>2</sup>であるとする。これを全天に対する観測領域の割合に換算すると  $f_{\text{sky}} = 0.05$  となる。

銀河の測光サーベイにおいて見積もられる銀河の赤方偏移の誤差について考える。遠い銀河ほど暗くなるので誤差が大きくなると考え、赤方偏移誤差を

$$\sigma(z) = 0.03(1 + z) \quad (5.2)$$

と仮定する。この誤差を考慮し、 $i$  番目のビン ( $z_i < z < z_{i+1}$ ) における銀河分布を

$$n_i(z) = \frac{1}{2} n(z) \left[ \text{erfc} \left( \frac{z_i - z}{\sqrt{2}\sigma(z)} \right) - \text{erfc} \left( \frac{z_{i+1} - z}{\sqrt{2}\sigma(z)} \right) \right] \quad (5.3)$$

と表す[49]。ここで  $\text{erfc}(x)$  は相補誤差関数 (complementary error function) で、

$$\text{erfc}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty dz \exp(-z^2) \quad (5.4)$$

と定義される。本研究では、ビンを分けない場合と、3つのビン ( $0 < z < 0.7$ 、 $0.7 < z < 1.2$ 、 $1.2 < z$ ) に分割した場合の2通りを考察した[50]。

## 5.3 計算方法

ここでは、本研究において採用するモデルパラメータおよび解析内容の詳細についてまとめ、具体的にどのような計算方法を用いるのか説明する。

### 宇宙論パラメータ

本研究で採用した宇宙論パラメータを表5.2にまとめる。これは文献[3]で得られている宇宙論パラメータと矛盾しないものを選んでいく。ただしニュートリノ質量に関しては、[3]からは上限しか与えられていないので、 $\sum m_\nu = 0.1 \text{ eV}$  を仮定する。

表5.2 解析で仮定する宇宙論パラメータの値。

$\Omega_B h^2$	$\Omega_m h^2$	$\Omega_\Lambda$	$w$	$n_s$	$A_s \times 10^9$	$\tau$	$\sum m_\nu$
0.012	0.14	0.72	-1.004	0.96	2.4	0.086	0.1 eV

本研究では、これらのパラメータや仮定をもとに CAMB に組み込まれているボルツマン方程式を解くコードを利用して、角度パワースペクトルやノイズの計算を行う。そのさいに利用する非線形パワースペクトルのフィッティング公式として、HFを用いる。

### ノイズ源

CMBの観測において想定される検出器のノイズは、第四章で考察したガウス型のビームパターンを想定すること

$$N_\ell^{\Theta\Theta} \equiv \left( \frac{\sigma_T}{T_{\text{CMB}}} \right)^2 \exp \left[ -\frac{\ell(\ell+1)\theta^2}{8 \ln 2} \right] \quad (5.5)$$

$$N_\ell^{EE} \equiv \left( \frac{\sigma_P}{T_{\text{CMB}}} \right)^2 \exp \left[ -\frac{\ell(\ell+1)\theta^2}{8 \ln 2} \right] \quad (5.6)$$

と書ける。ここで $T_{\text{CMB}}$ はCMBの温度で、 $T_{\text{CMB}} \sim 2.7$  Kである。また、温度揺らぎの検出器と偏光の検出器におけるノイズは相関がないと仮定した： $N_\ell^{TE}$ 。CMB レンズングにおけるノイズ $N_\ell^{dd}$  は、レンズを受けたCMBの角度パワースペクトルからCMBレンズングの情報を再構築するさいに生じるものである。本研究では、文献[17]の方法でレンズングポテンシャルを再構築すると想定した。

シアの観測において考慮すべきノイズ源は、銀河の固有楕円率を考慮したショットノイズである：

$$N_\ell^{\gamma_i \gamma_i} \equiv \frac{\langle \gamma_{\text{int}}^2 \rangle}{N_g^2 f_i^2} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5.7)$$

$$f_i \equiv \frac{\int_0^\infty n_i(z) dz}{\int_0^\infty n(z) dz} \quad (5.8)$$

ただし、異なるビンにおける固有楕円率は相関がないと仮定した。また、 $\langle \gamma_{\text{int}}^2 \rangle^{1/2}$ は銀河の固有楕円率の統計平均であり、本研究では

$$\langle \gamma_{\text{int}}^2 \rangle^{1/2} = 0.4 \quad (5.9)$$

とする[51]。

### 5.3.1 解析内容

このようにして計算した角度パワースペクトルを用いて、本研究では、フィッシャー解析、非線形進化のモデルによる系統誤差の評価を行う。ここではその詳細について述べる。

#### フィッシャー解析

本研究で考察するシグナルは、温度揺らぎ $\Theta$ 、偏光のEモード $E$ 、銀河のシア $\gamma$ 、CMBの曲がり角 $d$  である。銀河

を $n$ 個のビンに分けてトモグラフィーを行う場合、 $i$ 番目のビンにおけるシアを $\gamma_i$ とすれば、共分散行列は

$$C_\ell = \begin{pmatrix} C_\ell^{\Theta\Theta} + N_\ell^{\Theta\Theta} & C_\ell^{\Theta E} & C_\ell^{\Theta d} & C_\ell^{\Theta\gamma_1} & \cdots & C_\ell^{\Theta\gamma_n} \\ C_\ell^{\Theta E} & C_\ell^{EE} + N_\ell^{EE} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_\ell^{\Theta d} & 0 & C_\ell^{dd} + N_\ell^{dd} & C_\ell^{d\gamma_1} & \cdots & C_\ell^{d\gamma_n} \\ C_\ell^{\Theta\gamma_1} & 0 & C_\ell^{d\gamma_1} & C_\ell^{\gamma_1\gamma_1} + N_\ell^{\gamma_1\gamma_1} & \cdots & C_\ell^{\gamma_1\gamma_n} \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_\ell^{\Theta\gamma_n} & 0 & C_\ell^{d\gamma_n} & C_\ell^{\gamma_n\gamma_1} & \cdots & C_\ell^{\gamma_n\gamma_n} + N_\ell^{\gamma_n\gamma_n} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

と表される。

本論文では、PlanckとHSCを想定した場合をPlanck+HSC、ACTPolとHSCを想定した場合をACTPol+HSCと表記する。また、シグナルとして $\Theta$ 、 $E$ 、 $d$ を用いた場合を $+d$ 、 $\Theta$ 、 $E$ 、 $\gamma$ を用いた場合を $+\gamma$ 、 $\Theta$ 、 $E$ 、 $d$ 、 $\gamma$ を用いた場合を $+d+\gamma$ と表す。本研究では、以下の場合について計算を行う：

- Planck+HSC
  - $+d$
  - $+\gamma$  (トモグラフィーなし/あり)
  - $+d+\gamma$  (トモグラフィーなし/あり)
- ACTPol+HSC
  - $+d$
  - $+\gamma$  (トモグラフィーなし/あり)
  - $+d+\gamma$  (トモグラフィーなし/あり)

本研究におけるフィッシャー解析では、レンズを受けていない温度揺らぎ ( $\Theta$ ) とEモード偏光 ( $E$ ) の情報が得られると仮定し、 $\ell = 3000$ までは事前情報として加える。これに重力レンズのシグナルを足して制限の変化を見ていくことで、重力レンズがどの程度制限を改善していくのか調べる。ここで、フィッシャー行列の計算における各モードの寄与

$$D_{ij,\ell} \equiv \frac{2\ell+1}{2} \left( C_\ell^{-1} \frac{\partial C_\ell}{\partial p_i} C_\ell^{-1} \frac{\partial C_\ell}{\partial p_j} \right) \quad (5.11)$$

に対し、例えば $D_{ij,\ell}^{\Theta Ed}$ なら、上式において $\Theta, E, d$ に対応する要素をもつ共分散行列を使うとする。Planck+HSC、 $+d+\gamma$ の場合、フィッシャー行列 $F_{ij}$ を

$$F_{ij} = \sum_{\ell=2}^{\ell_{\max}} \left\{ f_{\text{sky}}^{\text{HSC}} D_{ij,\ell}^{\Theta Ed\gamma} + (f_{\text{sky}}^{\text{P}} - f_{\text{sky}}^{\text{HSC}}) D_{ij,\ell}^{\Theta Ed} \right\} + \sum_{\ell=\ell_{\max}+1}^{3000} f_{\text{sky}}^{\text{P}} D_{ij,\ell}^{\Theta E} \quad (5.12)$$

とする。ここで $f_{\text{sky}}^{\text{P}}$ はPlanckの観測領域の全天に対する割合である。第1項はHSCとPlanckが同時に観測する領域、第2項はPlanckのみが観測する領域を表し、第3項はPlanckから得られる事前情報である。

ACTPol+HSC、 $+d+\gamma$ の場合、Planckのデータ利用を考慮して、フィッシャー行列 $F_{ij}$ を

$$\begin{aligned} F_{ij} = & \sum_{\ell=2}^{\min(700, \ell_{\max})} \left\{ f_{\text{sky}}^{\text{HSC}} D_{ij,\ell}^{\Theta^P E^P d^A \gamma} + (f_{\text{sky}}^{\text{A}} - f_{\text{sky}}^{\text{HSC}}) D_{ij,\ell}^{\Theta^P E^P d^A} + (f_{\text{sky}}^{\text{P}} - f_{\text{sky}}^{\text{A}}) D_{ij,\ell}^{\Theta^P E^P d^P} \right\} \\ & + \sum_{\ell=701}^{\ell_{\max}} \left\{ f_{\text{sky}}^{\text{HSC}} D_{ij,\ell}^{\Theta^A E^A d^A \gamma} + (f_{\text{sky}}^{\text{A}} - f_{\text{sky}}^{\text{HSC}}) D_{ij,\ell}^{\Theta^A E^A d^A} + (f_{\text{sky}}^{\text{P}} - f_{\text{sky}}^{\text{A}}) D_{ij,\ell}^{\Theta^P E^P d^P} \right\} \\ & + \sum_{\ell=\ell_{\max}+1}^{8000} f_{\text{sky}}^{\text{A}} D_{ij,\ell}^{\Theta^A E^A} + \sum_{\ell=\ell_{\max}+1}^{3000} (f_{\text{sky}}^{\text{P}} - f_{\text{sky}}^{\text{A}}) D_{ij,\ell}^{\Theta^P E^P} \end{aligned} \quad (5.13)$$

とする。ただし  $\ell = 700$  以下では、観測機器による  $1/f$  などのノイズの影響を考慮し、ACTの観測領域でも温度揺らぎ、Eモード偏光のシグナルはPlanckを想定する。 $\Theta$  などへの上付き文字  $A, P$  は、それぞれ ACTPol、Planckを想定したノイズを考慮することを指す。一段目と二段目はPlanck、ACTPolとHSCを想定して  $\ell = 2 - \ell_{\max}$  までの情報を加え、三段目はCMBの事前情報を加えることを意味する。

フィッシャー解析における角度パワースペクトルの微分は、中間差分を用いて計算を行った：

$$\frac{\partial C_\ell}{\partial p_i}(p_i) \equiv \frac{C_\ell(p_i + \Delta p_i) - C_\ell(p_i - \Delta p_i)}{2\Delta p_i} \quad (5.14)$$

ここで、本研究では  $\Delta p_i$  を表5.3のように選んだ。

表5.3 本研究において選んだ  $\Delta p_i$  の値。

$\Delta\Omega_B h^2$	$\Delta\Omega_m h^2$	$\Delta\Omega_\Lambda$	$\Delta w$	$\Delta n_s$	$\Delta A_s$	$\Delta\tau$	$\Delta\sum m_\nu$
$0.05\Omega_B h^2$	$0.05\Omega_m h^2$	$0.1\Omega_m$	$0.1w$	$0.005n_s$	$0.01A_s$	$0.4\tau$	$0.1\sum m_\nu \text{ eV}$

## 5.4 計算結果

本研究では、解析内容で述べた方法をもとに角度パワースペクトル、ノイズを計算し、フィッシャー解析と系統誤差の見積もりを行った。ここでは、それらの結果についてまとめる。

### 5.4.1 角度パワースペクトルの測定誤差

#### CMB

レンズを受けていないCMBの観測から得られるシグナルは、温度揺らぎ  $\Theta$  とEモード偏光  $E$  である。これから得られる角度パワースペクトルは  $C_\ell^{\Theta\Theta}$ 、 $C_\ell^{\Theta E}$  および  $C_\ell^{EE}$  である。

図5.2と図5.3は、本研究で用いるPlanck、およびACTPolに関して、角度パワースペクトルと宇宙論的分散を含めた測定誤差を同時に描いたものである。宇宙論的分散を含めた誤差は、ビン幅  $\Delta\ell$  を用いて

$$\begin{aligned} \text{Cov}_\ell^{XY} &= \frac{C_\ell^{XX} + N_\ell^{XX}}{\sqrt{(\ell + 1/2)f_{\text{sky}}\Delta\ell}} & (X = Y) \\ &= \sqrt{\frac{(C_\ell^{XY})^2 + (C_\ell^{XX} + N_\ell^{XX})(C_\ell^{YY} + N_\ell^{YY})}{(2\ell + 1)f_{\text{sky}}\Delta\ell}} & (X \neq Y) \end{aligned} \quad (5.15)$$

として計算される。図を描くさい、 $\Delta\ell = \ell^2$  とした。

図5.2と図5.3を見ると、暗黒エネルギーの状態方程式を  $-1.1$  に変化させたパワースペクトルはエラーに埋もれてしまう。同様にニュートリノ質量を  $0.2 \text{ eV}$  にしても、エラーに埋もれてしまう。暗黒エネルギーの状態方程式やニュートリノ質量がこの程度の差の場合には、レンズを受けていないCMBのシグナルのみから制限することが難しい。

#### CMBレンズング

実際の観測ではレンズを受けたCMBを観測する。PlanckやACTPolではCMBレンズングのシグナルが検出可能だと考えられており、このようなサーベイではCMBレンズングのシグナルも考慮すべきである。CMBレンズングのシグナルが得られた場合、角度パワースペクトルとして  $C_\ell^{\Theta d}$  および  $C_\ell^{dd}$  が得られる。ただし、 $C_\ell^{\Theta d}$  における  $\Theta$  はISW効果から生じる温度揺らぎである。図5.4は、CMBレンズングにおいて得られる角度パワースペクトルと宇宙論的分散を含めたエラーを描いている。ISW効果との相関  $C_\ell^{\Theta d}$  は完全にエラーに埋もれている。

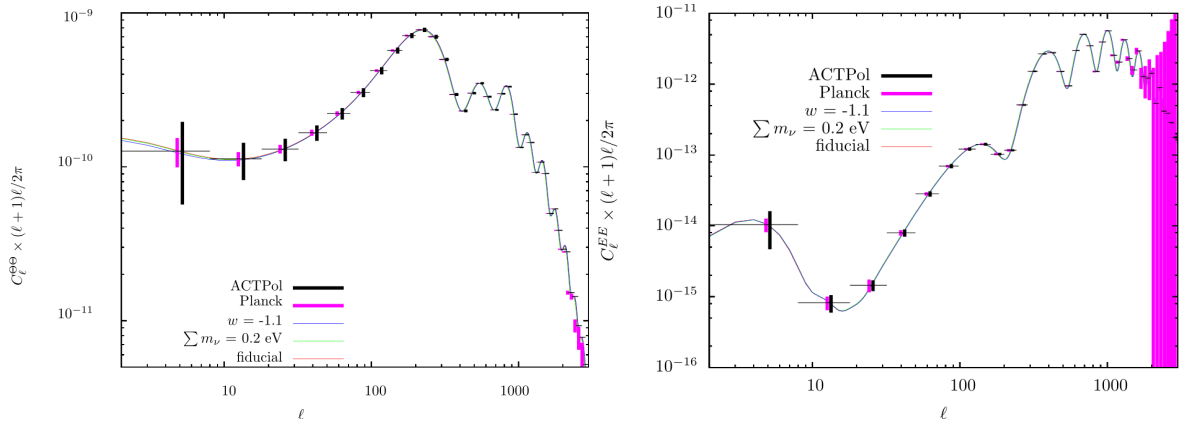


図5.2 (左) CMB の温度揺らぎの角度パワースペクトルとノイズ。測定誤差はPlanckとACTPolを想定した。同時に、ニュートリノ質量 $\sum m_\nu$ と暗黒エネルギーの状態方程式 $w$ を変化させた角度パワースペクトルを描いた。誤差は十字で描いてあり、誤差の横軸はビンの幅を意味する。Planck、ACTPolどちらの場合にも、変化させた角度パワースペクトルは誤差に埋もれてしまう。(右) Eモード偏光の場合。

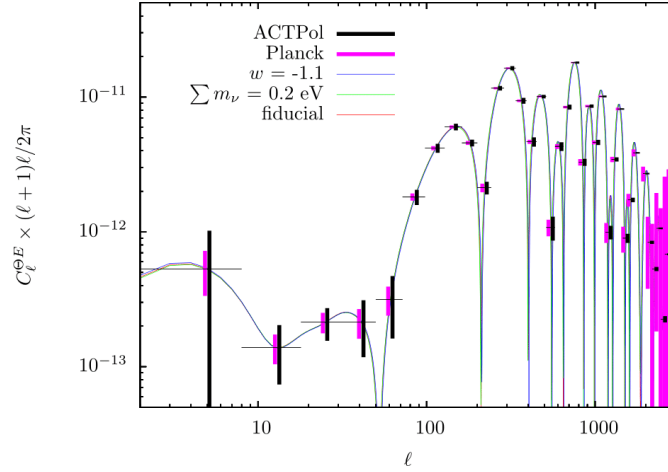


図5.3 CMBの温度揺らぎとEモード偏光の相関パワースペクトルの場合。

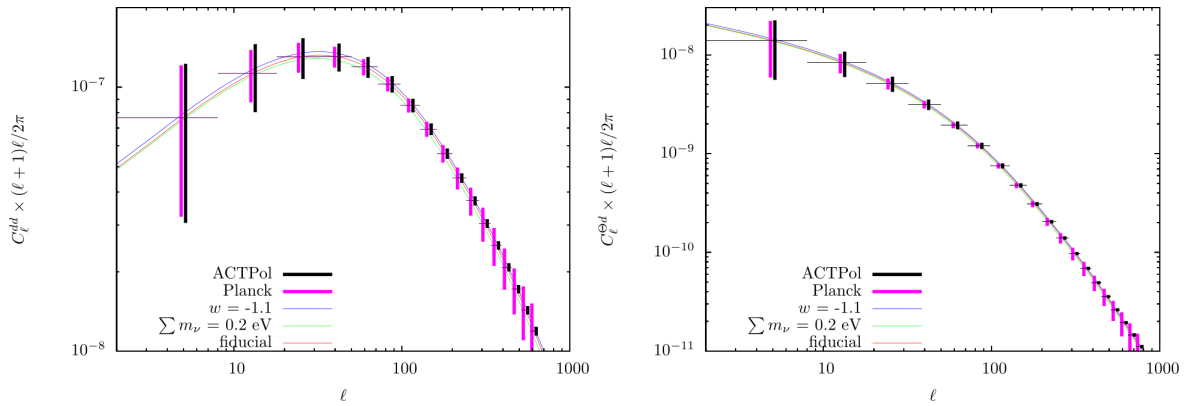


図5.4 (左) CMB レンズングの曲がり角の角度パワースペクトル。CMBレンズングのノイズはPlanckおよびACTPolを想定して計算した。温度揺らぎや偏光の場合と違い、ACTPolでは $\ell \sim 1000$ までの角度スケールにおいて、ずれた角度パワースペクトルとの違いを区別することができる。これは、CMBレンズングの情報が密度揺らぎを反映し、暗黒エネルギーやニュートリノ質量の変化に敏感であるからだと考えられる。(右) CMBレンズングの曲がり角とISW効果により生じた温度揺らぎの相関パワースペクトル。

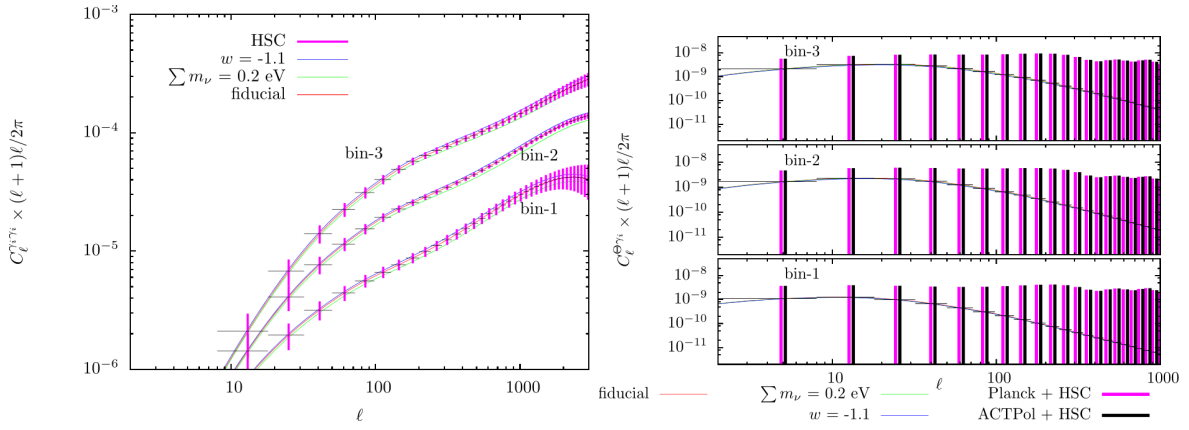


図5.5 (左) シアの角度パワースペクトル。エラーはHSCのを想定して描いた。bin-1、bin-2、bin-3はそれぞれ  $0 < z < 0.7$ 、 $0.7 < z < 1.5$ 、 $1.5 < z$ のビンを意味する。(右) シアとISW効果により生じた温度揺らぎの相関パワースペクトル。

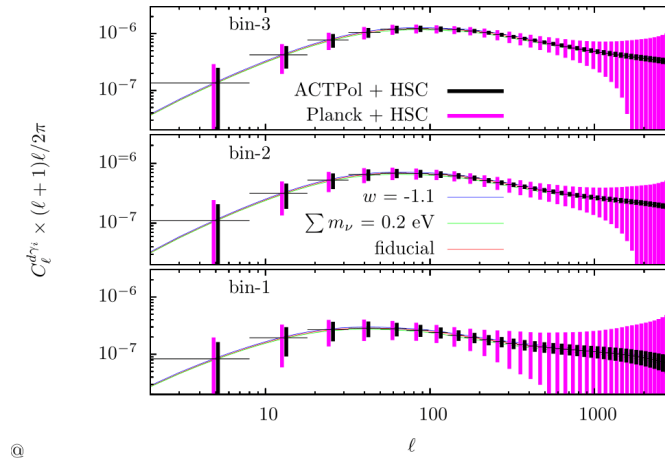


図5.6 シアとCMBレンズングの曲がり角との相関パワースペクトルの場合。

### コスミックシア

コスミックシアの観測では、シアのシグナル $\gamma$ が得られる。トモグラフィーを考え、銀河を $n$ 個のビンに分けた場合、各ビンごとにシアのシグナル $\gamma_i$ が得られる。このとき、得られるパワースペクトルは  $C_\ell^{\gamma_i\gamma_j}$ 、 $C_\ell^{\Theta\gamma_i}$ 、 $C_\ell^{d\gamma_i}$ である。ただし、CMBレンズングの場合と同様に、 $C_\ell^{\Theta\gamma_i}$ における $\Theta$ はISW効果により生じた温度揺らぎである。

図5.5と図5.6では、これをもとに宇宙論的分散を含めたノイズとパワースペクトルを同時に描いた。これらより、 $C_\ell^{\gamma_i\gamma_j}$ や $C_\ell^{dd}$ は、CMBのプライアに比べ、ニュートリノ質量や暗黒エネルギーの状態方程式に対して制限を厳しく与えられることが分かる。また、ISW効果との相関 $C_\ell^{\Theta\gamma_i}$ は完全にエラーに埋もれている。

### 5.4.2 結果1：フィッシャー解析を用いた宇宙論パラメータの決定精度

PlanckとHSCを組み合わせた場合、ACTPolとHSCを組み合わせた場合それぞれにおいて、フィッシャー解析による宇宙論パラメータの決定精度を求め、得られた結果を表5.4にまとめた。ただし、 $+\gamma$ 、 $+d+\gamma$ ではトモグラフィーを考慮している。また、どの場合も $\ell_{\max} = 3000$ としている。特に断らない限り、決定精度は $1\sigma$ を意味する。

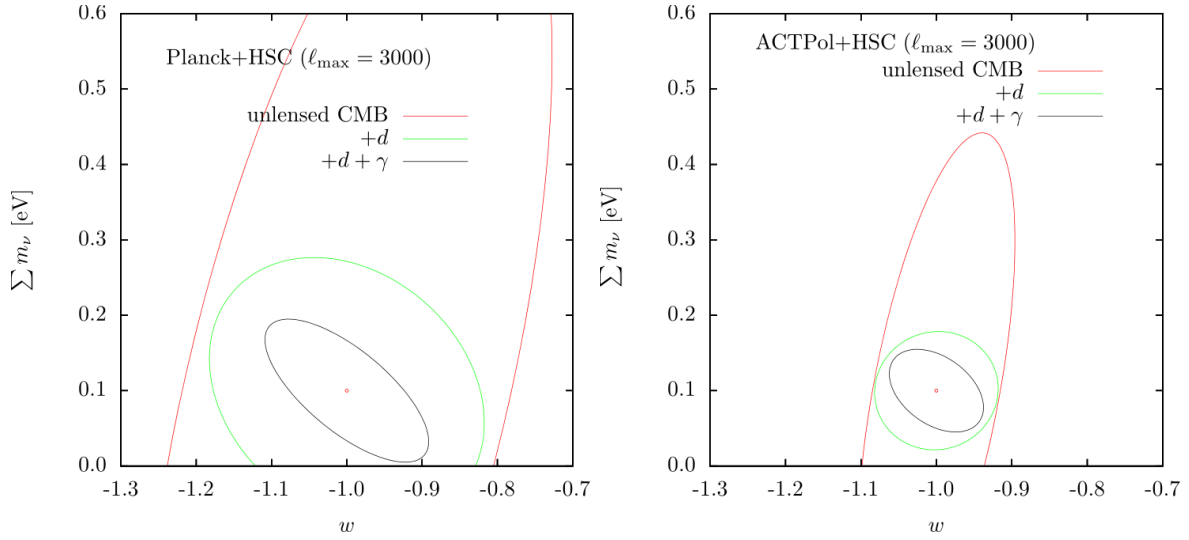


図5.7 (左) Planck+HSCにおける $w$ と $\sum m_\nu$ の2次元決定精度。CMBの温度・偏光揺らぎのみ、CMBレンズングを加えた場合 $+d$ 、すべてを組み合わせた場合 $+d + \gamma$ 同時に描き、比較した。(右) ACTPol+HSCの場合。

表5.4 フィッシャー解析の結果。 $\ell_{\max} = 3000$ における各パラメータの $1\sigma$ の決定精度を示している。

宇宙論パラメータ	Planck + HSC			ACTPol + HSC		
	+ d	+ $\gamma$	+d+ $\gamma$	+ d	+ $\gamma$	+d+ $\gamma$
$\ln(\Omega_B h^2)$	0.006	0.006	0.006	0.003	0.003	0.003
$\ln(\Omega_m h^2)$	0.02	0.01	0.01	0.009	0.007	0.007
$\Omega_\Lambda$	0.08	0.04	0.04	0.05	0.03	0.03
$w$	0.12	0.08	0.08	0.05	0.04	0.04
$n_s$	0.003	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002
$\ln(A_s)$	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
$\tau$	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004
$\sum m_\nu$ [eV]	0.1	0.07	0.06	0.05	0.04	0.04

フィッシャー解析の結果、まずACTPolのほうがPlanckよりも全ての宇宙論パラメータに対して制限が強いことが分かる。また、 $+d$ と $+ \gamma$ では $+ \gamma$ のほうが暗黒エネルギーの状態方程式とニュートリノ質量に対する制限が強い。 $+d$ に比べ、 $+ \gamma$ や $+d + \gamma$ の場合は、暗黒エネルギーの状態方程式やニュートリノ質量に対する決定精度が改善していることが分かる。その他のパラメータは、 $\Omega_m h^2$ と $\Omega_\Lambda$ 以外、ほとんど変化がない。密度揺らぎの情報を加えて制限が改善する宇宙論パラメータは、今の場合、 $w$ 、 $\sum m_\nu$ 、 $\Omega_m h^2$ 、 $\Omega_\Lambda$ である。

図5.7では、情報を加えていくことで暗黒エネルギーの状態方程式とニュートリノ質量の決定精度がどのように変化するか示すため、Planck+HSC、ACTPol+HSCそれぞれに対し、 $w$ と $\sum m_\nu$ に関する2次元の決定精度を示した。Planck+HSCでは、Planckから得られるCMBの温度・偏光揺らぎとCMBレンズングの情報にコスミックシアの情報を組み合わせることで決定精度が改善している。また、CMBの温度・偏光揺らぎに対してCMBレンズングの情報を加えることで、密度揺らぎの情報が加わり、暗黒エネルギーの状態方程式やニュートリノ質量に対する制限が強くなっていることが分かる。ACTPol+HSCにおいても、すべての情報を加えることで強い制限が得られている。ACTPol+HSCの場合には、CMBの温度・偏光揺らぎだけでもPlanck+HSCの場合に比べて制限が強い。

図5.8では、トモグラフィーを考慮した場合と考慮しない場合で、暗黒エネルギーの状態方程式とニュートリノ質量の2次元決定精度がどのように変化するか示すため、Planck+HSCの場合に、 $+d + \gamma$ に対して、トモグラフィーを考



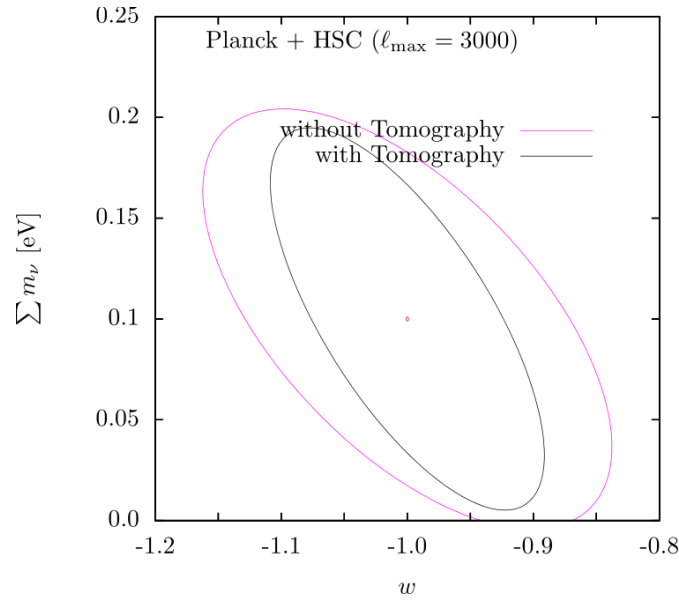


図5.8  $+d + \gamma$ における $w$ と $\sum m_\nu$ の2次元決定精度。トモグラフィーを考慮した場合としない場合とを比較した。Planck+HSCを想定している。

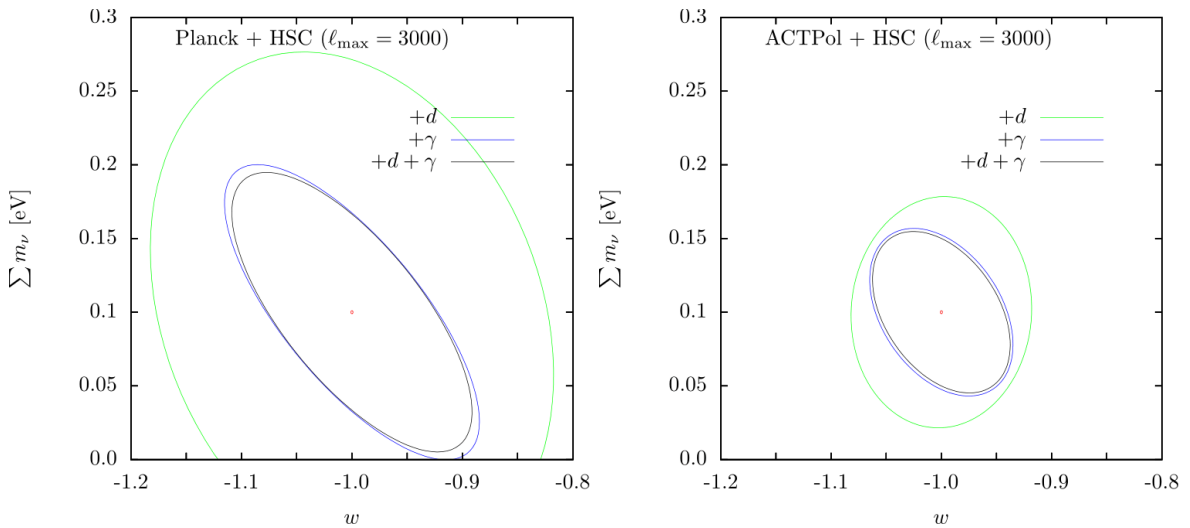


図5.9  $w$ と $\sum m_\nu$ の2次元決定精度。Planck+HSC（左）およびACTPol+HSC（右）を想定している。

慮した場合、考慮しなかった場合それぞれを同時に描いた。これより、トモグラフィーの効果によって $w$ に対する制限が強くなっていることが分かる。暗黒エネルギーは現在 $z < 1$ において重要な量であり、この赤方偏移に対するより詳細な情報がトモグラフィーを行うことで加わったためと考えられる。これらはACTPol+HSCの場合でも同様である。

最後に、図5.9では、CMBレンジングとコスミックシアの情報のどちらが制限に寄与しているのか示すため、 $+d$ 、 $+ \gamma$ 、 $+d + \gamma$ の場合それぞれを同時に描いた。これから、Planck+HSC、ACTPol+HSCのどちらにおいても、CMBレンジングよりシアのシグナルのほうが制限に大きく寄与していることが分かる。

#### ここまでの結果

これまでのフィッシャー解析を通じて得られた結果を以下にまとめる：

- パラメータの決定精度は、Planck+HSC、ACTPol+HSCのどちらの場合も $+d$ より $+ \gamma$ のほうが制限が強い。そのため、 $+d + \gamma$ の場合と $+ \gamma$ の場合の差が小さい（Planck+HSCでは、暗黒エネルギーの状態方程式は

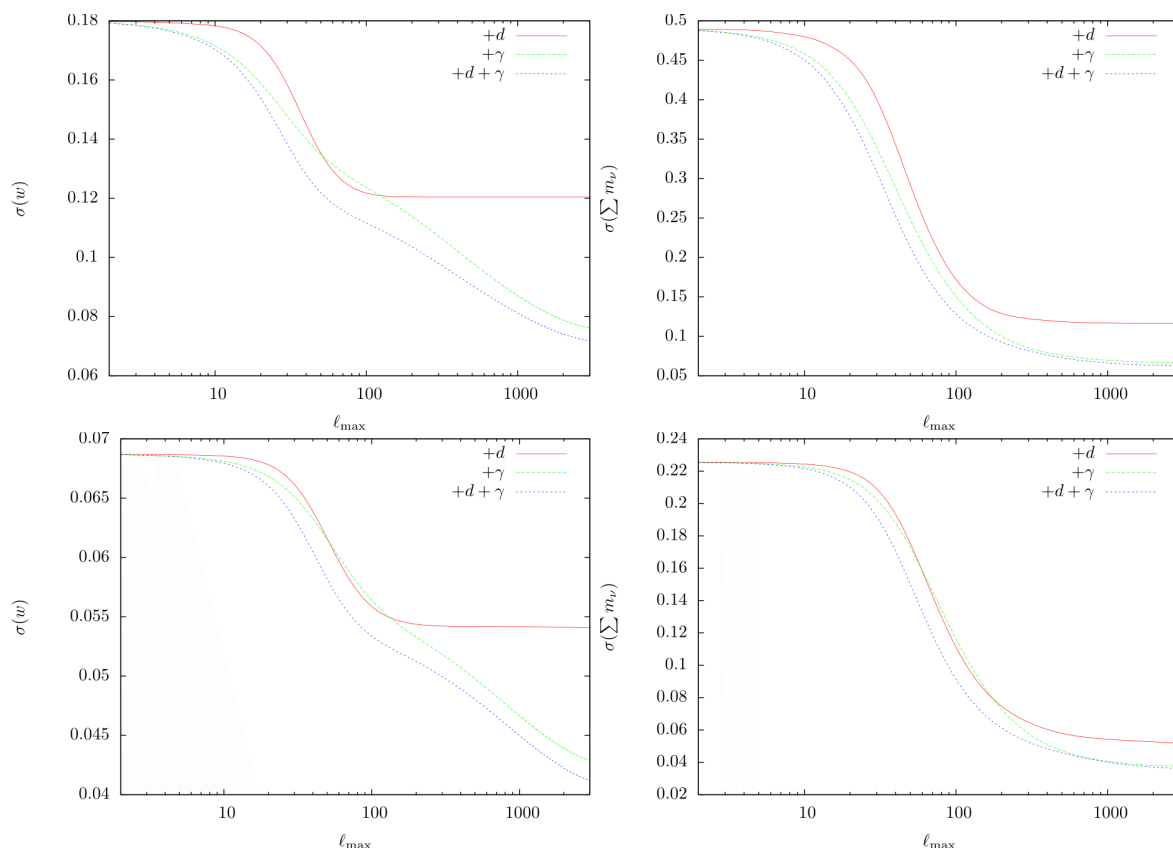


図5.10 Planck+HSCにおける $\sigma(w)$ （上左）と $\sigma(\sum m_\nu)$ （上右）の $\ell_{\max}$ 依存性。下図はACTPol+HSCの場合。

1.6倍、ニュートリノ質量は1.4倍の改善)。

- トモグラフィの考慮をすることで距離の情報が加わり、考慮しない場合に比べ $w$ に対する制限が強くなる。

### 5.4.3 考察：パラメータの決定精度の決まり方

フィッシャー解析の結果、PlanckやACTPolから得られるCMBレンジングを用いるよりも、HSCから得られるシアの情報を用いるほうが、制限を改善できることが分かった。特に、ACTPolはPlanckに比べCMBレンジングの情報を高精度で引き出せるにも関わらず、シアからの制限が圧倒的に強い。そこでここでは、暗黒エネルギーの状態方程式、ニュートリノ質量がの決定精度がどのようにして決まっているのか調べることにする。

#### 決定精度のスケール依存性

パラメータの決定精度がどのような物理で決まっているのか調べるため、まずは $\ell_{\max}$ に対する依存性をみる。図5.10は、 $w$ および $\sum m_\nu$ に対して決定精度を $\ell_{\max}$ の関数として描いたものである。+dに共通する振る舞いは、 $\ell_{\max} \sim 100$ 付近で決定精度が頭打ちになることである。 $\ell_{\max} \sim 100$ まで徐々に精度が向上するのは、 $\ell \sim 100$ がCMBレンジングのパワースペクトルのピークとなっており、かつパワースペクトルの測定誤差がほぼ一定値だからと考えられる。また、 $\ell_{\max} \sim 100$ では+ $\gamma$ の場合とほぼ同じ程度の決定精度を得られている。 $w$ の場合には、+ $\gamma$ と+d+ $\gamma$ の場合に $\ell_{\max}$ とともに決定精度が単調に減少していく。一方ニュートリノでは、+d、+ $\gamma$ 、+d+ $\gamma$ それぞれの $\ell_{\max}$ に対する振る舞いは同じで、 $\ell_{\max} \sim 100$ から制限の改善が弱くなる。

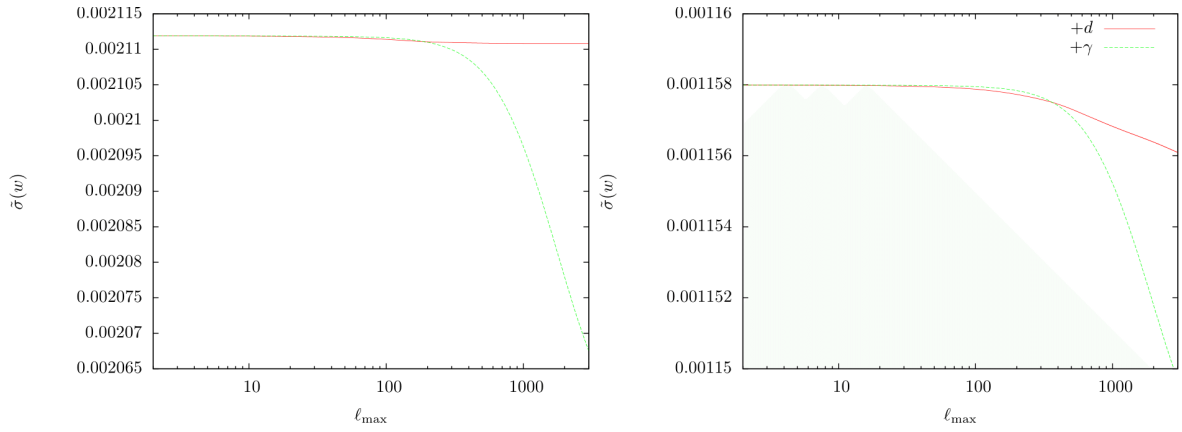


図5.11 Planck+HSC（左）あるいはACTPol+HSC（左）を想定した場合の、 $\tilde{\sigma}(\sum m_\nu)$ の $\ell_{\max}$ 依存性。

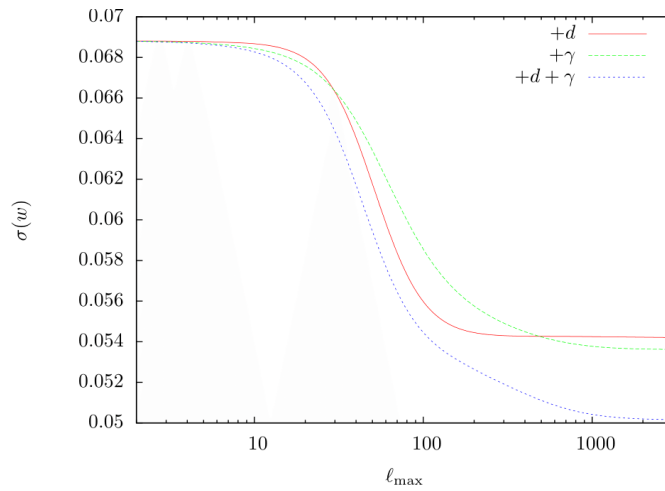


図5.12 線形理論において $\sigma(w)$ を $\ell_{\max}$ に関して描いた。

#### 暗黒エネルギーの決定精度

$w$ の決定精度の $\ell_{\max}$ 依存性より、 $+d$ の場合だけ $\ell_{\max} \sim 100$ から決定精度が $\ell_{\max}$ に対し変化しなくなる。一方、シアを用いた場合には制限が改善していく。考えられる原因として、一つはS/Nや微分の値が小さいということである。そこで、以下で定義される量

$$\tilde{\sigma}(p_i) \equiv \frac{1}{\sqrt{F_{ii}}} \quad (5.16)$$

を $\ell_{\max}$ に対してプロットしてみたのが図5.11である。定義より、 $\tilde{\sigma}(p_i)$ はS/Nと微分の積に比例すると考えてよい。Planck+HSCでは、 $+d$ の場合、 $\ell_{\max} \sim 100$ 以上で一定になるが、これはS/Nが原因であると考えられる。一方、ACTPol+HSCでは、 $\ell_{\max}$ が増加するにしたがって $\tilde{\sigma}(w)$ が減少している。この場合、 $+d$ において $\ell_{\max}$ が増加しても決定精度 $\sigma(w)$ が改善しないことは、S/Nやパワースペクトルの $w$ に関する微分だけでは説明できず、パラメータ間の縮退が原因だと考えられる。

図5.12では、ACTPol+HSCの場合に、線形理論の範囲でフィッシャー解析を行い、 $\sigma(w)$ を $\ell_{\max}$ に関して描いた。 $+d$ の振る舞いは、図5.10と変化がない。それに比べ、 $+\gamma$ や $+d+\gamma$ の場合は、図5.10では $\ell_{\max}$ に関して単調減少していたのに対し、図5.12では $\ell_{\max} \sim 500$ でほぼ一定になる。これより、非線形性が決定精度に影響している。

図5.13では、 $w$ と強く縮退しているパラメータ $\Omega_\Lambda$ との2次元決定精度を、 $+d$ および $+d+\gamma$ 各々で、線形・非線形の場合に示してある。CMBレンジングだけでは $w$ と $\Omega_\Lambda$ の縮退は、線形と非線形で変化がない。しかし $w$ と $\Omega_\Lambda$ は重力の非線形性を考えることで縮退が解ける方向に変化する。 $w$ の制限において重力の非線形性は重要となることが分かる。

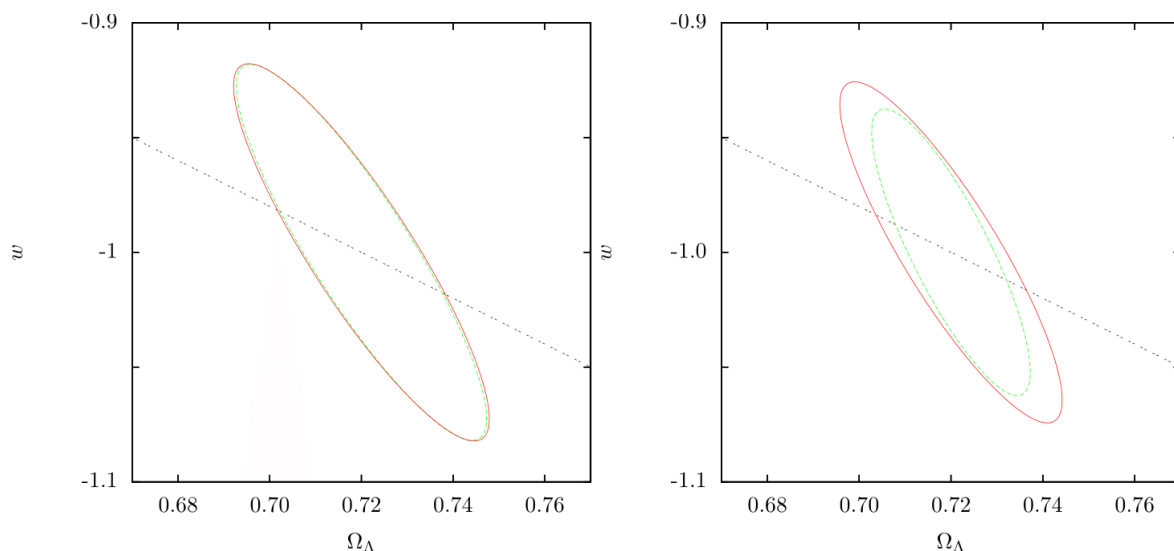


図5.13  $+d$  (左)、および $+d+\gamma$  (右) の場合での、線形理論、非線形理論それぞれにおいて描いた  $w$  と  $\Omega_\Lambda$  の2次元決定精度。  $\ell_{\max} = 3000$  である。直線は最も縮退が強い方向を表す。

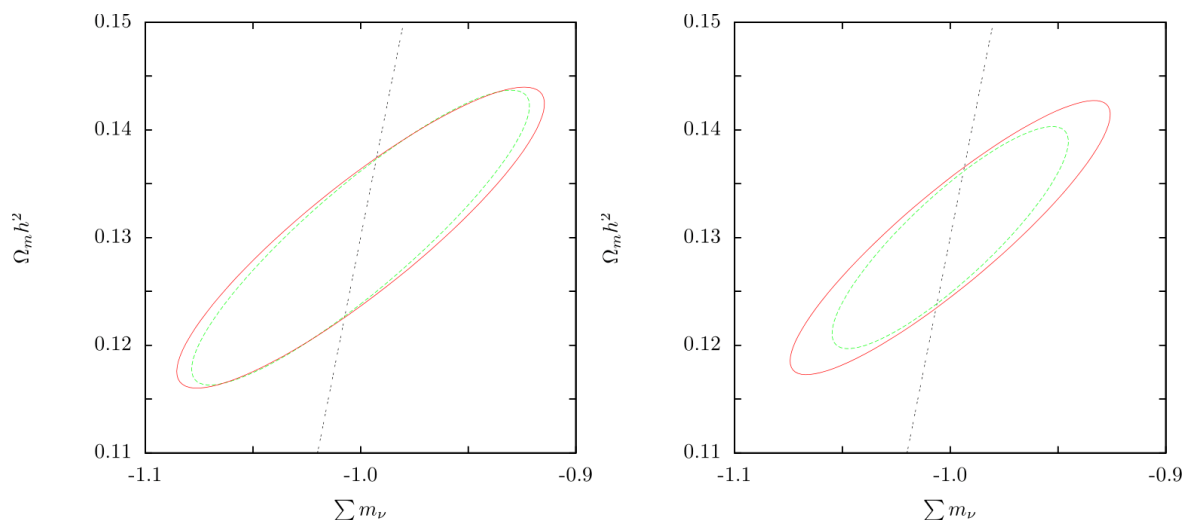


図5.14  $+d$  (左)、および $+d+\gamma$  (右) において、  $w$  と  $\Omega_\Lambda$  の2次元決定精度を線形理論、非線形理論で比較したもの。  $\ell_{\max} = 3000$  である。直線は最も縮退が強い方向を表す。

シアを加えることで暗黒エネルギーの状態方程式に対する制限が大きく改善していた理由は、シアが重力の非線形性に敏感だからである。

### ニュートリノ質量の決定精度

ここでは、ニュートリノ質量の決定精度の  $\ell_{\max}$  依存性が、暗黒エネルギーの状態方程式の場合と異なる理由について考察する。図5.10の  $w$  と  $\sum m_\nu$  の場合を比較すると、シアを考慮した場合には  $\ell_{\max}$  に対する振る舞いが異なる。これは、シアによる暗黒エネルギーの状態方程式の決定精度が非線形性によって大きく振る舞いが変化することから、暗黒エネルギー・ニュートリノの決定精度の振る舞いの違いは、非線形性が関与して生じていると考えられる。ニュートリノの場合にはあまり制限が改善していないので、暗黒エネルギーの場合のようにパラメータ間の縮退が解けてはいないと考えられる。今の場合、ニュートリノ質量と縮退しているパラメータは  $\Omega_m h^2$  である。そこで、 $+d$  および  $+d+\gamma$  それぞれの場合について、線形・非線形の場合に  $\Omega_m h^2$  と  $\sum m_\nu$  の2次元決定精度を描いたのが図5.14である。 $+d$ 、 $+d+\gamma$  どちらの場合も、重力の非線形性によって制限は多少変化しているが、縮退は解ける方向に変化していない。また、制限の強さはCMBレンジングよりシアのほうが強いが、これはS/Nの時点でシアのほうが大きい

からである。シアのS/Nは非線形性の強いスケールで大きくなるので、ニュートリノ質量の制限においても非線形性が重要だと言える。

#### ここまでの結果

暗黒エネルギーの状態方程式、ニュートリノ質量の決定精度がどのようにして決まっているのか調べた結果、以下のことが分かった：

- $w$ の決定精度は、非線形性により $w$ と $\Omega_\Lambda$ の縮退が解ける方向に変化することで改善している。したがって、 $+d$ と $+d+\gamma$ で $\ell_{\max}$ 依存性が異なる。
- $\sum m_\nu$ の決定精度は、非線形性を考慮しても $\sum m_\nu$ と $\Omega_m h^2$ の縮退が解けず、あまり改善しない。したがって、 $+d$ 、 $+d+\gamma$ の $\ell_{\max}$ 依存性はほぼ同じである。また、シアのほうが制限が大きいのは非線形性によるものである。

以上から、暗黒エネルギー・ニュートリノの制限において非線形性が重要となることが分かる。

#### 5.4.4 結果2：角度パワースペクトルの理論計算に要求される精度

フィッシャー解析の結果より、 $\ell_{\max} = 3000$ では、CMBレンズングに比べてシアのほうが、暗黒エネルギーやニュートリノの決定精度を大きく改善する。これは、重力の非線形進化によるものである。しかし重力の非線形進化を正しく扱うことは困難である。ここでは、暗黒エネルギー・ニュートリノの制限において角度パワースペクトルの理論計算に要求される精度を見積もる。

角度パワースペクトルの計算において、真の角度パワースペクトルに対し $\delta C_\ell$ だけずれたパワースペクトルを計算したとする。このとき、見積もられるパラメータの推定量は

$$b_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} [F^{-1}]_{ij} \sum_{\ell=2} \frac{2\ell+1}{2} \text{Tr} \left( C_\ell^{-1} \frac{\partial C_\ell}{\partial p_j} C_\ell^{-1} \delta C_\ell \right) \quad (5.17)$$

と書ける。ここで $\delta C_\ell$ は $\delta C_\ell$ を含めた共分散行列である。パワースペクトルのずれを、PDとHFで計算したパワースペクトルで規格化して

$$\delta C_\ell \equiv r(C_\ell^{\text{PD}} - C_\ell^{\text{HF}}) \quad (5.18)$$

と表すことにする。 $r$ は一般に $\ell$ 依存性をもつが、本研究では定数として扱うことにする。また、角度パワースペクトルのずれとしてシアのみを考え、それ以外の角度パワースペクトルのずれは無視できるとする。

ACTPol+HSCの場合に、要求される $r$ について調べたのが図5.15である。角度パワースペクトルの理論計算による系統誤差を $1\sigma$ 以内に収めるためには、 $r < 0.2$ となる必要がある。 $\ell_{\max} \sim 3000$ では、 $C_\ell^{\text{PD}} \simeq 1.8 \times C_\ell^{\text{HF}}$ である。これより、角度パワースペクトルの理論計算に要求される精度は約4%以内となる。

## 5.5 議論

前節では、CMBレンズングとコスミックシアが暗黒エネルギーやニュートリノ質量の制限にどのような影響を及ぼすか考察した。ここでは、今回フィッシャー解析から得られた制限値を、他の観測量を想定した場合と比較する。

本研究のオリジナルな点の一つは、次世代サーベイのPlanck、ACTPolおよびHSCによるCMBと弱重力レンズのデータを想定したことである。宇宙論パラメータに対する制限は、他の次世代サーベイに比べどの程度のものだろうか。

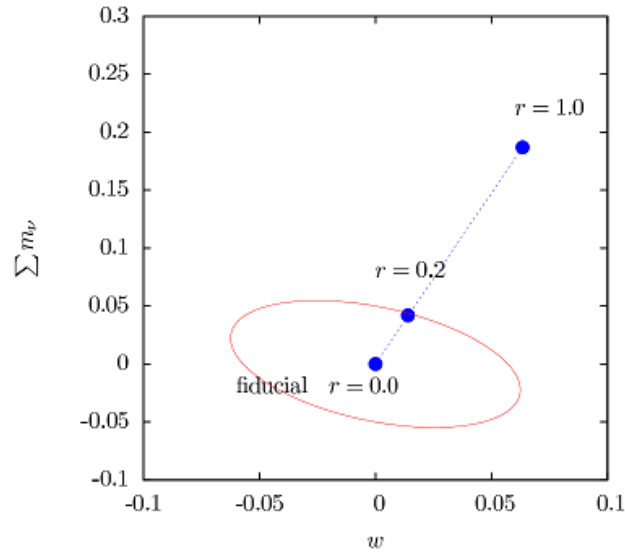


図5.15  $r$ に要求される値を見積もった図。  $\ell_{\max} = 3000$ 。  $r < 0.2$ であれば、角度パワースペクトルの理論計算による系統誤差が  $1\sigma$  以内に収まる。

#### 暗黒エネルギーの状態方程式

暗黒エネルギーの探求を目的とした組織的なプロジェクトとしてDETF（Dark Energy Task Force）がある。DETFでは、BAO、CL（銀河団統計）、SN（Ia型超新星）、WL（銀河の弱重力レンズ）を用いた暗黒エネルギーの測定を念頭に置いている。2006年の時点で、これら4種類の観測手段を用いた観測プロジェクトを、観測時期によってStage IからStage IVまで分類している：

- Stage I …… 現在すでにデータが得られている。
- Stage II …… 観測が進行中である（現在では進行中の観測もある）。
- Stage III …… 現在提案されている次世代の観測計画（BOSS、SuMIREなど）。
- Stage IV …… LSST、SKA（Square Kilometer Array）、JDEM（Joint Dark Energy Mission）。

DETFによる暗黒エネルギーの状態方程式とエネルギー密度への制限の見積もりを以下にまとめた：

表5.5 DETF による暗黒エネルギーの状態方程式 $w$ とエネルギー密度 $\Omega_\Lambda$ への制限の見積もり[10]。モデルは、観測手段（BAO、CL、SN、WL）と観測時期（Stage I~IV）を意味する。すべて、Planckから得られるCMBの情報をプライアとして加えている。WLからの制限が最も強い。

モデル	$\sigma(w)$	$\sigma(\Omega_\Lambda)$
BAO-III	0.11	0.04
BAO-IV	0.03	0.02
CL-II	0.18	0.05
CL-III	0.04	0.02
CL-IV	0.04	0.02
SN-II	0.11	0.03
SN-III	0.08	0.03
SN-IV	0.05	0.02
WL-II	0.12	0.05
WL-III	0.05	0.02
WL-IV	0.02	0.01

本研究では、Planck+HSCおよびACTPol+HSCについて考察した。これらのサーベイは、DETFの分類に従うと Stage IIIに該当すると考えられる。表5.5から、Stage IIIにおいて最も強い制限はWLからであり、 $\sigma(w) = 0.05$ 、 $\sigma(\Omega_\Lambda) = 0.02$ である。本研究において得られた結果は、ニュートリノ質量を考慮したうえで、Planck+HSCで $\sigma(w) = 0.07$ 、 $\sigma(\Omega_\Lambda) = 0.04$ 、ACTPol+HSCで $\sigma(w) = 0.04$ 、 $\sigma(\Omega_\Lambda) = 0.03$ である。これらの見積もりから、暗黒エネルギーに対する制限は、HSCを用いることでStage IIIにおけるWL以外の観測と同程度かそれ以上の制限を行うことができる。

### ニュートリノ質量和

ニュートリノ質量に対する制限に関して、他の観測量を用いた場合の見積もりと比較するとどうか。CMBとコスミックシアの観測を想定した場合に得られるニュートリノ質量への制限値が見積もられている[52]。S-0.007はSNAP、G-0.5はLSSTを想定している。SNAPはJDEMに含まれる計画で、SNAP、LSSTはともにStage-IVの観測計画である。

表5.6  $\sum m_\nu$  [eV]の制限値の見積もり[52]。レンズを受けていないCMBとコスミックシアを用いた場合。S、Gはそれぞれ宇宙空間（space）、地上（ground）におけるコスミックシアの観測を意味する。また、数字は全天に対する観測領域の割合である。

	S-0.007	S-0.025	G-0.5	G-1
Planck	0.12	0.09	0.052	0.045
CMBPol	0.047	0.045	0.031	0.027

本研究の結果、HSCでは、Planckと組み合わせることで $\sigma(\sum m_\nu) = 0.07$  eVとなる。この結果と比較すると、PlanckとHSCを組み合わせてもニュートリノ質量に対する制限はStage-IVに及ばない。また、ACTPolとHSCを組み合わせた場合には、ニュートリノ質量に対する制限はStage-IVと同程度の制限を得ることができるが、これは今回想定したACTPolのサーベイがかなり理想的だからである。したがって、この結果からACTPolとHSCを組み合わせることでStage IVと同程度の制限が得られると結論できるわけではない。





## 第6章

# まとめと結論

本研究の動機は、標準宇宙モデルにおいて問題となっている暗黒エネルギー、考慮されていないニュートリノ質量に対し、その測定・検証を行うことである。そのために、本研究では、CMBと弱重力レンズ効果の観測からの測定・検証を想定し、暗黒エネルギー・ニュートリノがどこまで制限できるか、フィッシャー解析をもとに見積もりを行った。そのさい、PlanckとHSC、ACTPolとHSCというサーベイの組み合わせを想定した。フィッシャー解析の結果では、CMBレンズングに比べ、コスミックシアのほうが暗黒エネルギーの状態方程式やニュートリノ質量に対して強い制限を与えることが分かった。Planck+HSCの場合には、コスミックシアを用いた場合、CMBの観測から得られる情報（CMBの温度・偏光揺らぎ、およびCMBレンズング）に比べ、暗黒エネルギーの状態方程式への制限は1.6倍、ニュートリノ質量への制限は1.4倍である。ACTPol+HSCの場合には、CMBの温度・偏光揺らぎからの制限が強く、CMBの観測から得られる情報のみを用いた場合に比べ、コスミックシアを組み合わせると暗黒エネルギーに対する制限は1.2倍になる。これから、次世代サーベイであるPlanck、ACTPol、HSCを用いることで、以下の結果を得た：

- 暗黒エネルギーの制限値：DETFで計画されている、超新星、銀河などを用いたStage-IIIの観測と同程度の制限値が得られる。
- ニュートリノの制限値：ニュートリノ質量が0.1 eVであれば $2\sigma$ で質量を検出することができる。

次に、各観測量の決定精度における寄与を調べると、CMBレンズングに比べ、シアからの制限が強いことが分かった。この原因について調べるため、暗黒エネルギー・ニュートリノの決定精度がどのようにして決まっているのか考察を行った。そのさい、決定精度の $\ell_{\max}$ 依存性やパラメータの縮退について調べた。これらの結果、以下のことが分かった：

- 暗黒エネルギーの決定精度：非線形性により、 $w$ と $\Omega_\Lambda$ の縮退が解けるなどして改善する。シアを加えた場合と加えない場合で $\ell_{\max}$ 依存性が異なる。
- ニュートリノの決定精度： $\sum m_\nu$ と $\Omega_m h^2$ の縮退が解けず、あまり改善しない。したがって、シアを加えても加えなくても $\ell_{\max}$ 依存性はほぼ同じである。また、シアを加えることで制限が大きいのは非線形性によるものである。

この結果から、暗黒エネルギー・ニュートリノに対して制限を行うさい、重力の非線形性が重要となる。しかし非線形進化を正しく扱うことは困難である。また、シアを用いる場合には、非線形進化以外にもさまざまな系統誤差が考えられる。そこで、角度パワースペクトルの理論計算に要求される精度の見積もりを行った。その結果、4%以内の精度が必要であることが分かった。

本研究ではACTPolの解析において、大気の揺らぎによる不定性を避けるために $\ell \leq 700$ の情報を除外して計算を行った。この方法で大気による不定性の影響を完全に避けられたとは言えず、この不定性を見積もりがどれほど解析の

結果に影響を与えるか調べるのが今後の課題の一つである。また、本研究において仮定したトモグラフィーのビン分けが、暗黒エネルギーやニュートリノ質量に制限を与えるさい、最適かどうか調べる必要がある。それ以外にも、銀河の赤方偏移に対する分布 $n(z)$ や、銀河の赤方偏移誤差 $\sigma(z)$ の仮定が制限の見積もりに与える影響は、実際に調べてみないと分からない。これらに関しては今後の研究の課題である。本研究では暗黒エネルギーの状態方程式に対して解析を行ったが、同様の解析手法を用いて修正重力理論の検証可能性について調べることは、これからの研究の一つの方向として考えられる。修正重力理論の検証において重力の非線形進化は本質的なので、非線形進化のモデルによる系統誤差の影響や、CMBレンズングとコスミックシアの観測を組み合わせでどれほど修正重力理論に制限を与えられるか調べてみたい。

## 付録A

# Code for Anisotropies in the Microwave Background : CAMB

デフォルトのCAMBではシェアの角度パワースペクトルやシェアと他の相関量の角度パワースペクトルが計算できない。ここでは、CAMBを用いてシェアの角度パワースペクトルの計算を行うためさいに必要なコードの修正について述べる。

## A.1 角度パワースペクトル

CAMB における修正を説明する前に、角度パワースペクトルの計算における一般論を展開しておく。揺らぎ  $X$  と  $Y$  に対して、その球面調和関数による展開係数が

$$X_{\ell m} = 4\pi i^\ell \int_0^\infty d\chi F_X(\chi) \int \frac{k^2 dk d\hat{\mathbf{k}}}{(2\pi)^{3/2}} X(\mathbf{k}, \chi) j_\ell(k\chi) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) \quad (\text{A.1})$$

$$Y_{\ell m} = 4\pi i^\ell \int_0^\infty d\chi F_Y(\chi) \int \frac{k^2 dk d\hat{\mathbf{k}}}{(2\pi)^{3/2}} Y(\mathbf{k}, \chi) j_\ell(k\chi) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) \quad (\text{A.2})$$

のように、関数  $F$  を用いて書かれている場合を考える。球面調和関数の直交性

$$\langle X(\mathbf{k}, \chi) Y(\mathbf{k}', \chi') \rangle = G_{XY}(k, \chi, \chi') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (\text{A.3})$$

を使うと、アンサンブル平均は

$$\begin{aligned} \langle X_{\ell m} Y_{\ell' m'}^* \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' F_X(\chi) F_Y(\chi') \\ &\times \int k^2 dk d\hat{\mathbf{k}} \int k'^2 dk' d\hat{\mathbf{k}}' \langle X(\mathbf{k}, \chi) Y(\mathbf{k}', \chi') \rangle j_\ell(k\chi) j_{\ell'}(k'\chi') Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell' m'}(\hat{\mathbf{k}}') \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' F_X(\chi) F_Y(\chi') \\ &\times \int k^2 dk d\hat{\mathbf{k}} \int k'^2 dk' d\hat{\mathbf{k}}' G_{XY}(k, \chi, \chi') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') j_\ell(k\chi) j_{\ell'}(k'\chi') Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell' m'}(\hat{\mathbf{k}}') \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' F_X(\chi) F_Y(\chi') \\ &\times \int k^2 dk d\hat{\mathbf{k}} G_{XY}(k, \chi, \chi') j_\ell(k\chi) j_{\ell'}(k\chi') Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell' m'}(\hat{\mathbf{k}}) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' F_X(\chi) F_Y(\chi') \int k^2 dk G_{XY}(k, \chi, \chi') j_\ell(k\chi) j_{\ell'}(k\chi') \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

と書ける。ここで、角度パワースペクトル  $C_\ell^{XY}$  を

$$\langle X_{\ell m} Y_{\ell' m'}^* \rangle = C_\ell^{XY} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (\text{A.5})$$

と定義する。このとき、

$$C_\ell^{XY} = \frac{2}{\pi} \int k^2 dk \int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' F_X(\chi) F_Y(\chi') G_{XY}(k, \chi, \chi') j_\ell(k\chi) j_\ell(k\chi') \quad (\text{A.6})$$

と書き下すことができる。無次元パワースペクトル  $g_{XY} = k^3 G_{XY} / 2\pi^2$  を  $G_{XY}$  の代わりに用いることで、角度パワースペクトルは

$$C_\ell^{XY} = 4\pi \int d\ln k \int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' F_X(\chi) F_Y(\chi') g_{XY}(k, \chi, \chi') j_\ell(k\chi) j_\ell(k\chi') \quad (\text{A.7})$$

と書き直せる。また線形摂動の範囲では、遷移関数を用いることで式をもう少し単純化できる。遷移関数  $\mathcal{S}_X$  および  $\mathcal{S}_Y$  を、曲率揺らぎ  $\mathcal{R}$  を用いて

$$X(\mathbf{k}, \chi) = \mathcal{R}(k) \sqrt{\frac{2\pi^2}{k^3}} \mathcal{S}_X(k, \chi) \quad (\text{A.8})$$

$$Y(\mathbf{k}, \chi) = \mathcal{R}(k) \sqrt{\frac{2\pi^2}{k^3}} \mathcal{S}_Y(k, \chi) \quad (\text{A.9})$$

のように定義する。このとき、曲率揺らぎのパワースペクトル  $\mathcal{P}_\mathcal{R}$  を用いて

$$\mathcal{P}_\mathcal{R}(k) \mathcal{S}_X(k, \chi) \mathcal{S}_Y(k, \chi) = g_{XY}(k, \chi, \chi') \quad (\text{A.10})$$

が成り立つ。したがって、角度パワースペクトルは

$$C_\ell^{XY} = 4\pi \int d\ln k \mathcal{P}_\mathcal{R}(k) \left[ \int_0^\infty d\chi F_X(\chi) \mathcal{S}_X(k, \chi) j_\ell(k\chi) \right] \left[ \int_0^\infty d\chi' F_Y(\chi') \mathcal{S}_Y(k, \chi') j_\ell(k\chi') \right] \quad (\text{A.11})$$

と表すことができる。

式 (A.11) において  $\eta = \eta_0 - \chi$  のように変数変換を行うと、

$$\begin{aligned} C_\ell^{XY} &= 4\pi \int d\ln k \mathcal{P}_\mathcal{R}(k) \left[ \int_{\eta_0 - \eta_*}^{\eta_0} d\eta F_X(\eta_0 - \eta) \mathcal{S}_X(k, \eta_0 - \eta) j_\ell(k(\eta_0 - \eta)) \right] \\ &\quad \times \left[ \int_{\eta_0 - \eta_*}^{\eta_0} d\eta' F_Y(\eta_0 - \eta') \mathcal{S}_Y(k, \eta_0 - \eta') j_\ell(k(\eta_0 - \eta')) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

が得られる。ただし  $\eta_0$  は現在での、 $\eta_*$  は最終散乱面での  $\eta$  の値である。CAMB ではこの式をもとに計算を行っている。

リンバー近似

角度パワースペクトルの計算において、リンバー近似、および

$$\frac{2}{\pi} \int k^2 dk j_\ell(k\chi) j_\ell(k\chi') = \frac{1}{\chi^2} \delta_D(\chi - \chi') \quad (\text{A.13})$$

を用いると、式 (A.6) は

$$\begin{aligned} C_\ell^{XY} &\sim \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' F_X(\chi) F_Y(\chi') G_{XY}(\ell/\chi, \chi, \chi') \int k^2 dk j_\ell(k\chi) j_\ell(k\chi') \\ &= \int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' F_X(\chi) F_Y(\chi') G_{XY}(\ell/\chi, \chi, \chi') \frac{1}{\chi^2} \delta(\chi - \chi') \\ &= \int_0^\infty d\chi F_X(\chi) F_Y(\chi) G_{XY}(\ell/\chi, \chi) \frac{1}{\chi^2} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

となる。無次元パワースペクトル  $g_{XY}$  を  $G_{XY}$  の代わりに用いれば

$$C_\ell^{XY} = 2\pi^2 \int_0^\infty d\chi F_X(\chi) F_Y(\chi) g_{XY}(\ell/\chi, \chi) \frac{\chi}{\ell^3} \quad (\text{A.15})$$

と書き直される。

CAMB では時間積分、波数積分の順番で計算を行うので、リンバー近似を行うさいには  $K = \ell/\chi$  として

$$\begin{aligned}
 C_\ell^{XY} &= 4\pi \int_0^\infty \frac{\ell dK}{K^2} \frac{\pi}{2K\ell^2} F_X(\chi) F_Y(\chi) g_{XY}(K, \ell/K) \\
 &= 4\pi \int_0^\infty d\ln K \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2\ell}} \frac{1}{K} F_X(\chi) \right] \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2\ell}} \frac{1}{K} F_Y(\chi) \right] g_{XY}(K, \ell/K) \\
 &= 4\pi \int_0^\infty d\ln K \mathcal{P}_\mathcal{R}(K) \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2\ell}} \frac{1}{K} F_X(\chi) \mathcal{S}_X(K, \ell/K) \right] \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2\ell}} \frac{1}{K} F_Y(\chi) \mathcal{S}_Y(K, \ell/K) \right] \quad (\text{A.16})
 \end{aligned}$$

と変形することで計算を行っている。

## A.2 CAMB を用いたシェアの角度パワースペクトルの計算

角度パワースペクトルを計算するさい、波数積分や時間積分は `cmbmain.f90` で行われている。また、必要な変数の多くは `modules.f90` において宣言されている。そのため、修正が必要なファイルは `modules.f90` および `cmbmain.f90` である。

`modules.f90`

モジュール `ModelData` の変数宣言部において、

```
integer, parameter :: C_SS = 6
```

を追加する。これで、シェアに対する角度パワースペクトルの出力を行うことができる。また、

```
integer :: C_last = C_PhiTemp
```

を

```
integer :: C_last = C_SS
```

と書き直す。これにより、出力ファイルの最終列はシェアの角度パワースペクトルになる。

`cmbmain.f90`

まず、シェアのレンジング・カーネル  $\Delta_\phi(\eta_0 - \eta)$  を計算する関数（ここでは `Kernel` としておく）を作る。次にサブルーチン `CalcScalarSources` の

```
call output(...
```

の下に

```
sources(4) = Kernel(tau)*sources(3)*(-0.5*f_K(CP%tau0-tau_maxvis) &
    /f_K(tau-tau_maxvis)/f_K(CP%tau0-tau))
```

を記述する。配列 `sources` は遷移関数  $S$  に対応しており、`sources(1)` は温度揺らぎ、`sources(2)` は E モード偏光、`sources(3)` は CMBレンジングにおけるレンジングポテンシャルの遷移関数を表している。

配列 `sources` のメモリを確保するため、サブルーチン `GetSourceMem` において

```
SourceMem = 3
```

```
C_last = C_PhiTemp
```

を

```
SourceMem = 4
C_last = C_SS
```

と書き直す。

最後に、サブルーチン CalcScalCls において

```
iCl_scalar(j,C_PhiTemp) = iCl_scalar(j,C_PhiTemp) + ...
```

の下に

```
iCl_scalar(j,C_SS) = iCl_scalar(j,C_SS) + &
    apowers*CTrans%Delta_p_l_k(4,j,q_ix)**2dlnk
```

を追加する。ここでは台形公式を用いて波数積分が行われており、変数  $\text{apowers}$  は  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ 、 $\text{iCl\_scalar}$  は角度パワースペクトルに対応している。これで、シェアの角度パワースペクトルの計算が可能となる。

さらにシェアと他の相関量の角度パワースペクトルの計算を行うには、modules.f90 において

```
integer, parameter :: C_SS = 6, C_dS = 7, C_TS = 8, ...
```

を増やし、サブルーチン CalcScalCls において

```
iCl_scalar(j,C_dS) = iCl_scalar(j,C_dS) + &
    apowers*CTrans%Delta_p_l_k(3,j,q_ix)*CTrans%Delta_p_l_k(4,j,q_ix)*dlnk
iCl_scalar(j,C_TS) = iCl_scalar(j,C_dS) + &
    apowers*CTrans%Delta_p_l_k(1,j,q_ix)*CTrans%Delta_p_l_k(4,j,q_ix)*dlnk
```

とすればよい。ただしこの方法では温度揺らぎとシェアの相関のさいに ISW 以外の寄与も含まれてしまうので、ISW の寄与は別の sources に渡して計算させる必要がある。

## 付録B

# 密度揺らぎの非線形パワースペクトルのフィッティング公式

ここでは、非線形パワースペクトルのフィッティング公式として本編で用いている PD および HF について、そのフィッティング関数の詳細をまとめる。

## B.1 Peacock & Dodds (1996)

フィッティング関数 $f_{NL}$ は成長関数をスケール因子で割った関数 $g = D/a$ を用いて

$$f_{NL}(y) = y \left\{ \frac{1 + B\beta y + (Ay)^{\alpha\beta}}{1 + [(Ay)^{\alpha} g^3 / (Vy^{1/2})]^{\beta}} \right\}^{1/\beta} \quad (\text{B.1})$$

で与えられ、パラメータ $A, B, \alpha, \beta, V$ はそれぞれ

$$A = 0.482(1 + n/2)^{-0.947} \quad (\text{B.2})$$

$$B = 0.226(1 + n/3)^{-1.778} \quad (\text{B.3})$$

$$\alpha = 3.310(1 + n/3)^{-0.244} \quad (\text{B.4})$$

$$\beta = 0.862(1 + n/3)^{-0.287} \quad (\text{B.5})$$

$$V = 11.55(1 + n/3)^{-0.423} \quad (\text{B.6})$$

として求められる。

## B.2 Smith et al (2003)

無次元の密度揺らぎのパワースペクトル $\Delta_Q^2, \Delta_H^2$ はそれぞれ

$$\Delta_Q^2(k) = \Delta_L^2(k) \frac{[1 + \Delta_L^2(k)]^{\beta_n}}{1 + \alpha_n \Delta_L^2(k)} \exp \left[ -\frac{y}{4} - \frac{y^2}{8} \right] \quad (\text{B.7})$$

$$\Delta_H^2(k) = \frac{1}{1 + \mu_n y^{-1} + \nu_n y^{-2}} \frac{a_n y^{3f_1}}{1 + b_n y^{f_2} + [c_n f_3 y]^{3-\gamma_n}} \quad (\text{B.8})$$

としてフィットされる。ただし $y \equiv k/k_\sigma$ であり、 $k_\sigma$ は

$$\sigma^2(R) \equiv \int \Delta_L^2(k) \exp(-k^2 R^2) d \ln k \quad (\text{B.9})$$

に対し

$$\sigma^2(1/k_\sigma) \equiv 1 \quad (\text{B.10})$$

を満たすものとして定義される。またパラメータ  $a_n, b_n, c_n, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \mu_n, \nu_n$  は

$$\log_1 0a_n = 1.4861 + 1.8369n + 1.6762n^2 + 0.7940n^3 + 0.1670n^4 - 0.6206C \quad (\text{B.11})$$

$$\log_1 0b_n = 0.9463 + 0.9466n + 0.3084n^2 - 0.9400C \quad (\text{B.12})$$

$$\log_1 0c_n = -0.2807 + 0.6669n + 0.3214n^4 - 0.0793C \quad (\text{B.13})$$

$$\alpha_n = 1.3884 + 0.3700n - 0.1452n^2 \quad (\text{B.14})$$

$$\beta_n = 0.8291 + 0.9854n + 0.3401n^2 \quad (\text{B.15})$$

$$\gamma_n = 0.8649 + 0.2989n + 0.1613C \quad (\text{B.16})$$

$$\log_1 0\mu_n = -3.5442 + 0.1908n \quad (\text{B.17})$$

$$\log_1 0\nu_n = 0.9589 + 1.2857n \quad (\text{B.18})$$

で与えられ、 $n, C$  はそれぞれ

$$n \equiv -3 - \left. \frac{d \ln \sigma^2(R)}{d \ln R} \right|_{\sigma=1} \quad (\text{B.19})$$

$$C \equiv - \left. \frac{d^2 \ln \sigma^2(R)}{d \ln R^2} \right|_{\sigma=1} \quad (\text{B.20})$$

として求められる。さらに  $f_1, f_2, f_3$  は  $\Omega_m$  の関数であり

$$f_1(\Omega_m) = \Omega_m^{-0.0732} (\Omega_m \leq 1) \quad (\text{B.21})$$

$$f_2(\Omega_m) = \Omega_m^{-0.1423} (\Omega_m \leq 1) \quad (\text{B.22})$$

$$f_3(\Omega_m) = \Omega_m^{-0.0725} (\Omega_m \leq 1) \quad (\text{B.23})$$

$$f_1(\Omega_m) = \Omega_m^{-0.0307} (\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1) \quad (\text{B.24})$$

$$f_2(\Omega_m) = \Omega_m^{-0.0585} (\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1) \quad (\text{B.25})$$

$$f_3(\Omega_m) = \Omega_m^{-0.0743} (\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1) \quad (\text{B.26})$$

として与えられる。



# 謝辞

まず、本論文は両親の修士課程への進学支援、健康上の心理的なサポート無しに完成させることはできませんでした。両親には大変感謝しています。

また、本論文は樽家篤史助教と博士課程3年の斎藤俊さんの指導の下、完成させることができました。樽家篤史助教と斎藤俊さんには、ゼミなどを通じて多くの助言を頂き、本論文を執筆する際に非常にためになりました。Fortran や CAMB を用いた計算の仕方なども丁寧に教えていただき、大変感謝しています。

プリンストン大学の David Spergel 教授には、ACTPol に関する資料を送っていただき、本研究をより充実したものにすることができました。IPMU の高田昌広さんには、Subaru-HSC で想定されるサーベイデザインについて教えていただき、非常に感謝しています。

Thierry Sousbie 研究員、河原創研究員には、研究室全体のゼミを通して多くのことを教えていただき、感謝しています。

博士課程3年の諏訪雄大さん、西道啓博さんには、研究における貴重な多くのご意見をいただき、また時には励ましていただき、感謝しています。

修士課程2年の平野照幸くん、藤井友香さんには、修士入学当初から共に励まし合い、お互いに成長できたこと、そして健康面を含めた様々な相談にのってくれたことに感謝しています。

修士課程1年の福永健介くん、藤井顕彦くんには、同じ研究室の仲間として楽しく過ごせたことに感謝しています。

最後に、指導教員である須藤靖教授には、修士1年のころからゼミなどを通じて論文の読み方や論理的な思考を鍛えられ、非常に多くの事を教えられました。修士の入学時から健康面について配慮していただいたことで修士課程の2年間を無事過ごすことができ、大変感謝しています。



# 参考文献

- [1] **Supernova Search Team Collaboration** , A. G. Riess *et al. Astron. J.* **116** (1998) 1009–1038, astro-ph/9805201.
- [2] **Supernova Cosmology Project Collaboration** , S. Perlmutter *et al. Astrophys. J.* **517** (1999) 565–586, astro-ph/9812133.
- [3] **WMAP Collaboration** , E. Komatsu *et al. Astrophys. J. Suppl.* **180** (2009) 330–376, arXiv:0803.0547.
- [4] M. Maltoni, T. Schwetz, M. A. Tortola, and J. W. F. Valle *New J. Phys.* **6** (2004) 122, hep-ph/0405172.
- [5] J. R. Bond, G. Efstathiou, and J. Silk *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 1980–1984.
- [6] R. Maoli *et al. Astronomy & Astrophysics* (2000) astro-ph/0011251.
- [7] K. Ichiki, M. Takada, and T. Takahashi *Phys. Rev.* **D79** (2009) 023520, arXiv:0810.4921.
- [8] W. Hu *Astrophys. J.* **522** (1999) L21–L24, astro-ph/9904153.
- [9] S. Hannestad, H. Tu, and Y. Y. Y. Wong *JCAP* **0606** (2006) 025, astro-ph/0603019.
- [10] A. Albrecht *et al. arXiv* (2006) astro-ph/0609591.
- [11] K. M. Smith, O. Zahn, and O. Dore *Phys. Rev.* **D76** (2007) 043510, arXiv:0705.3980.
- [12] C. M. Hirata, S. Ho, N. Padmanabhan, U. Seljak, and N. A. Bahcall *Phys. Rev.* **D78** (2008) 043520, arXiv:0801.0644.
- [13] C. L. Reichardt *et al. Astrophys. J.* **694** (2009) 1200–1219, arXiv:0801.1491.
- [14] D. Munshi, P. Valageas, L. Van Waerbeke, and A. Heavens *Phys. Rept.* **462** (2008) 67–121, astro-ph/0612667.
- [15] A. Lewis and A. Challinor *Phys. Rept.* **429** (2006) 1–65, astro-ph/0601594.
- [16] W. Hu *Phys. Rev.* **D62** (2000) 043007, astro-ph/0001303.
- [17] T. Okamoto and W. Hu *Phys. Rev.* **D67** (2003) 083002, astro-ph/0301031.
- [18] M. Tegmark, A. Taylor, and A. Heavens *Astrophys. J.* **480** (1997) 22, astro-ph/9603021.
- [19] B. Joachimi and P. Schneider *Astronomy and Astrophysics* (2009) arXiv:0905.0393.
- [20] S. Weinberg, *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.
- [21] C.-P. Ma and E. Bertschinger *Astrophys. J.* **455** (1995) 7–25, astro-ph/9506072.
- [22] F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztanaga, and R. Scoccimarro *Phys. Rept.* **367** (2002) 1–248, astro-ph/0112551.
- [23] J. Lesgourgues and S. Pastor *Phys. Rept.* **429** (2006) 307–379, astro-ph/0603494.
- [24] 二間瀬敏史、池内了、千葉紘司、シリーズ現代の天文学・宇宙論II. 日本評論社, 2007.
- [25] A. Lewis, A. Challinor, and A. Lasenby *Astrophys. J.* **538** (2000) 473–476, astro-ph/9911177.
- [26] J. Yoo *Phys. Rev. D* **82** (2010) 083508, arXiv:1009.3021.
- [27] J. A. Peacock and S. J. Dodds *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **280** (1996) L19, astro-ph/9603031.
- [28] R. E. Smith *et al. Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **341** (2003) 1311, astro-ph/0207664.
- [29] A. Hamilton, P. Kumar, E. Lu, and A. Matthews *Astrophys. J.* **D78** (1991).

- [30] B. Jain and E. Bertschinger *Astrophys. J.* **509** (1998) 517, [astro-ph/9808314](#).
- [31] C.-P. Ma and J. N. Fry *Astrophys. J.* **543** (2000) 503–513, [astro-ph/0003343](#).
- [32] J. A. Peacock and R. E. Smith *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **318** (2000) 1144, [astro-ph/0005010](#).
- [33] U. Seljak *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **318** (2000) 203, [astro-ph/0001493](#).
- [34] D. J. Eisenstein and W. Hu *Astrophys. J.* **496** (1998) 605, [astro-ph/9709112](#).
- [35] S. Dodelson, *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003.
- [36] W. Hu *Ann. Phys.* **303** (2003) 203–225, [astro-ph/0210696](#).
- [37] R. K. Sachs and A. M. Wolfe *Astrophys. J.* **147** (1967).
- [38] M. Bartelmann and P. Schneider *Phys. Rep.* **340** (2001) 291–472, [astro-ph/9912508](#).
- [39] S. Dodelson, C. Shapiro, and M. J. White, 1 *Phys. Rev.* **D73** (2006) 023009, [astro-ph/0508296](#).
- [40] C. Shapiro *Astrophys. J.* **696** (2009) 775–784, [arXiv:0812.0769](#).
- [41] A. Cooray and W. Hu *Astrophys. J.* **574** (2002) 19, [astro-ph/0202411](#).
- [42] A. R. Zentner, D. H. Rudd, and W. Hu *Phys. Rev.* **D77** (2008) 043507, [arXiv:0709.4029](#).
- [43] H. Zhan and L. Knox *Astrophys. J.* **616** (2004) L75–L78, [astro-ph/0409198](#).
- [44] W. Hu and T. Okamoto *Astrophys. J.* **574** (2002) 566–574, [astro-ph/0111606](#).
- [45] J. Lesgourgues, L. Perotto, S. Pastor, and M. Piat *Phys. Rev.* **D73** (2006) 045021, [astro-ph/0511735](#).
- [46] W. Hu *Phys. Rev.* **D65** (2002) 023003, [astro-ph/0108090](#).
- [47] PLANCK Collaboration [astro-ph/0604069](#).
- [48] D. N. Spergel.
- [49] W. Hu and R. Scranton *Phys. Rev.* **D70** (2004) 123002, [astro-ph/0408456](#).
- [50] M. Takada and S. Bridle *New J. Phys.* **9** (2007) 446, [arXiv:0705.0163](#).
- [51] G. M. Bernstein and M. Jarvis *Astron. J.* **123** (2002) 583–618, [astro-ph/0107431](#).
- [52] Y.-S. Song and L. Knox *Phys. Rev.* **D68** (2003) 043518, [astro-ph/0305411](#).