

9. Perturbation theory in the Yang-Mills Field

2008/09/23, Toshiya Namikawa

TABLE OF CONTENTS

1	Feynman rules in the Yang-Mills theory	1
1.1	Quantization of free vector and ghost fields	1
1.2	Feynman diagram and Feynman rules	3
2	Perturbation in the QED	8
2.1	Positronium	8
2.2	Compton scattering	14

1 Feynman rules in the Yang-Mills theory

1.1 Quantization of free vector and ghost fields

スカラー場、Dirac 場に対してはすでに自由な場合の量子化を議論しているが、新たにでてきたベクトル場、ゴースト場についてはまだ議論していないのでここで考察を行う。

まず、Lagrangian 密度として物質場を除き、場の相互作用項もなくしたもの

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + B_a \partial^\mu A_\mu^a + \frac{\alpha}{2} B^a B_a + i\bar{C}^a \square C_a \quad (1)$$

を考える。ただしゴースト場は C としてある。このとき、運動方程式は

$$\square A_\mu^a - \partial_\mu(\partial^\nu A_\nu^a) = \partial_\mu B^a \quad (2)$$

$$\partial^\mu A_\mu^a + \alpha B^a = 0 \quad (3)$$

$$\square C^a = \square \bar{C}^a = 0 \quad (4)$$

と書ける。ここで量子化の手続きに従い、同時刻交換関係を

$$[A_j^a(\mathbf{x}, t), \dot{A}_k^b(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{ab}\delta_{jk}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (5)$$

$$[A_0^a(\mathbf{x}, t), B^b(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{ab}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (6)$$

$$\{\bar{C}^a(\mathbf{x}, t), \dot{C}^b(\mathbf{y}, t)\} = -\{C^a(\mathbf{x}, t), \dot{\bar{C}}^b(\mathbf{y}, t)\} = \delta^{ab}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7)$$

と設定する。ここで α に任意性があつたことを思い出す。もしも $\alpha = 1$ とすれば運動方程式から

$$B^a = -\partial^\mu A_\mu^a, \quad \square A_\mu^a = 0 \quad (8)$$

が成立するが、ゲージ $\alpha = 1$ を Feynman ゲージという^{*1}。以下では Feynman ゲージを用いることにする。こうすると、 A は質量のない場を表現していることがわかる。

Feynman ゲージでは、同時刻交換関係が

$$[A_\mu^a(\mathbf{x}, t), \dot{A}_\nu^b(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{ab}\eta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (9)$$

と単純になる。したがって、 A, C, \bar{C} は単に 0 質量のスカラー場と同じ交換関係を満たしていることから、生成消滅演算子

$$[a_\mu^a(\mathbf{k}), a_\nu^{b\dagger}(\mathbf{q})] = -\eta_{\mu\nu}\delta^{ab}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \quad (10)$$

$$\{c^a(\mathbf{k}), \bar{c}^{b\dagger}(\mathbf{q})\} = -\{\bar{c}^a(\mathbf{k}), c^{b\dagger}(\mathbf{q})\} = i\delta^{ab}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \quad (11)$$

を定義しておけば、

$$A_\mu^a(x) = \int d^3\mathbf{k} [a_\mu^a(\mathbf{k})E_k(x) + a_\mu^{a\dagger}(\mathbf{k})E_k^*(x)] \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} c^a(x) \\ \bar{c}^a(x) \end{pmatrix} = \int d^3\mathbf{k} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} c^a(\mathbf{k}) \\ \bar{c}^a(\mathbf{k}) \end{pmatrix} E_k(x) + \begin{pmatrix} c^{a\dagger}(\mathbf{k}) \\ \bar{c}^{a\dagger}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} E_k^*(x) \end{bmatrix} \quad (13)$$

のように書ける。ここで

$$E_k(x) \equiv \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}} \quad (14)$$

である。

しかし物理的な意味を持たせた展開を考えるならば、QED ではベクトル場が電磁場を表現しているということを考えて、生成消滅演算子よりは 4 つの独立な偏極ベクトルによる展開のほうが望ましいだろう。そこで、ヘリシティ ± 1 の固有ベクトル

$$\epsilon^{(\pm)\mu}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\epsilon}^{(\pm)}(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(\pm)}(\mathbf{k}) = 0 \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(\pm)*}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(\pm)}(\mathbf{k}) = 1, \quad \boldsymbol{\epsilon}^{(\pm)*}(\mathbf{k}) \boldsymbol{\epsilon}^{(\mp)}(\mathbf{k}) = 0 \quad (16)$$

および

$$\epsilon^{(L)\mu} = -ik^\mu, \quad \epsilon^{(S)\mu}(\mathbf{k}) = \frac{i\bar{k}^\mu}{2|\mathbf{k}|^2} \quad (17)$$

をとる。 $\epsilon^{(\pm)}$ は横波モード、 $\epsilon^{(L)}$ は縦波モード、 $\epsilon^{(S)}$ はスカラーモードとよぶ。このとき、生成消滅演算子を改めて

$$[a^a(\mathbf{k}, \sigma), a^{b\dagger}(\mathbf{q}, \tau)] = \tilde{\eta}^{\sigma\tau}\delta^{ab}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \quad (18)$$

のように定義しなおす。ここで $\sigma = (+, -, L, S)$ であり、

$$\tilde{\eta}^{\sigma\tau} \equiv \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

^{*1} これ以外に $\alpha = 0$ とする Landau ゲージもある。

のように定義する。こうすれば、ベクトル場の展開式は

$$A_\mu^a(x) = \int d^3 \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}} \sum_\sigma [a^a(\mathbf{k}, \sigma) \epsilon_\mu^{(\sigma)} e^{-ikx} + a^{a\dagger}(\mathbf{k}, \sigma) \epsilon_\mu^{(\sigma)*} e^{ikx}] \quad (20)$$

と書き直される。

ここで、これらの生成消滅演算子により張られる Fock 空間について少し述べておく。生成消滅演算子の定義から、縦波、スカラー、ゴースト状態

$$a^\dagger(\mathbf{p}, L)|0\rangle, \quad a^\dagger(\mathbf{p}, S)|0\rangle, \quad c^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle, \quad \bar{c}^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle, \quad (21)$$

はそれぞれゼロノルム状態であり、そのほかの多粒子状態には負ノルム状態をとるものもある。このようにして、相互作用場において仮定していた正定値性は破れるが、このような Fock 空間をもつ Yang-Mills 理論は幸いにして、完全性を保つことができる。縦波、スカラー、ゴースト状態が物理的部分空間に含まれない。

1.2 Feynman diagram and Feynman rules

ここでは、スカラー場、Dirac 場の場合と同様に、ゲージ場における摂動論を考察し、Feynman 則の導出を行う。

すでに導いたように、共变的ゲージ固定条件での Green 関数の生成汎関数は

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}B \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\tilde{\mathcal{L}} + J(\Phi)) \right] \quad (22)$$

$$\tilde{\mathcal{L}} \equiv \mathcal{L} + B_a \partial^\mu A_\mu^a + \frac{\alpha}{2} B^a B_a + i \bar{C}^b (\partial^\mu D_\mu)_b^a C_a \quad (23)$$

$$J(\Phi) \equiv J_a^\mu A_\mu^a + J^i \phi_i + \bar{J}_C^a C_a + J_{\bar{C}}^a \bar{C}^a + J_B^a B_a \quad (24)$$

で与えられる。これから Green 関数を導き、Feynman 伝搬関数の積に直してそれに LSZ 因子を作用させることで Feynman 則を導こう。

まずは Feynman 図について定義しておく。以降では Feynman ゲージをとることにする。物質場であるスカラー場および Dirac 場については変更はない。新たな場としてゲージ場 A 、補助場 B 、およびゴースト場 C, \bar{C} があるが、それらに対する Feynman 図は以下のように決める。まず、Feynman 伝搬関数 $\langle 0 | T(A_\mu^a(x) A_\nu^b(y)) | 0 \rangle$ 、 $\langle 0 | T(\bar{C}^a(x) C_a(y)) | 0 \rangle$ に対応する Feynman 図を

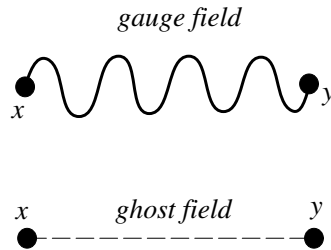


FIG 1:

と決める。また C, \bar{C} は Grassmann 数であるから C どうし、 \bar{C} どうしの伝搬関数は 0 を与え、さらに B は Feynman ゲージをとるということで消去できる。したがってこれらに対応する図は必要ない。また、摂動論であるから相互作用項が小さいとして展開していくわけだが、この相互作用項をまずは分類しておく。Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$ は

$$\tilde{\mathcal{L}} = (D^\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^\nu A_{a\nu}\partial^\mu A_\mu^a + i\bar{C}^b\partial^\mu(D_\mu)_b^a C_a \quad (25)$$

であるとする、自由な場合が

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\text{free}} = (\partial^\mu \phi)^\dagger \partial_\mu \phi + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \frac{1}{2}\partial^\nu A_{a\nu}\partial^\mu A_\mu^a + i\bar{C}^a \square C_a \quad (26)$$

と書けるから、これらを引いた残りの部分が相互作用項と考えることができる。それらを分類すると以下のように書ける：

$$\mathcal{L}_{3\text{gauge}} = (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) \frac{g}{2} f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \quad (27)$$

$$\mathcal{L}_{4\text{gauge}} = -\frac{g^2}{4} f_{ab}^e f_{cd}^e A^{a\mu} A^{b\nu} A_\mu^c A_\nu^d \quad (28)$$

$$\mathcal{L}_{\text{scalar-gauge},3} = -ig(\phi^\dagger T_a \partial_\mu \phi - (\partial^\mu \phi^\dagger) T_a \phi) A^{a\mu} \quad (29)$$

$$\mathcal{L}_{\text{scalar-gauge},4} = \frac{g^2}{2} \phi^\dagger \{T^a, T^b\} \phi A_\mu^a A^{b\mu} \quad (30)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac-gauge}} = -g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu^a T_a \psi \quad (31)$$

$$\mathcal{L}_{\text{ghost-gauge}} = igf_{bc}^a \partial^\mu \bar{C}_a A_\mu^b C^c \quad (32)$$

これらの各相互作用頂点に対して Feynman 図を

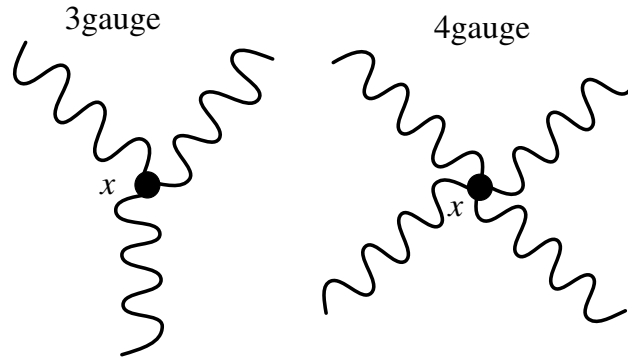


FIG 2: ゲージ場どうしの相互作用

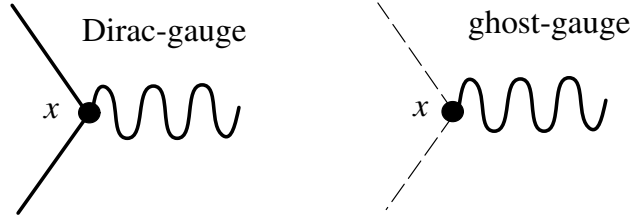


FIG 3: Fermion 場とゲージ場の相互作用

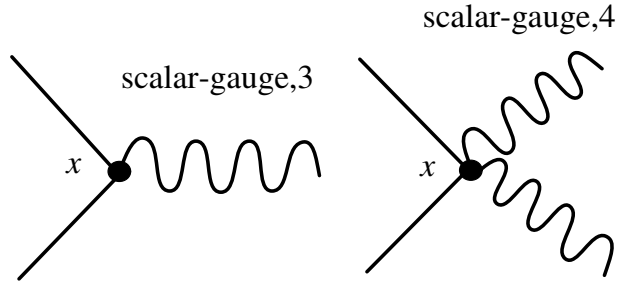


FIG 4: スカラー場とゲージ場の相互作用

のように定義することにしよう。ここで Fermion 場に対しては、あとで導く運動量空間での Feynman 則において、反粒子の場合は運動量の方向を進行方向と逆向きにとることに注意する。

さて、このようにして定義された Feynman 図を摂動論において活用できるようにするには、Feynman 則を導いておく必要がある。新たな場 A, C, \bar{C} にたいし、Feynman ゲージをとっているとすれば、すでに見たようにそれぞれの場は相互作用のない場合には質量のないスカラー場と同様の Klein-Gordon 方程式に従うわけだから、以前に導いた LSZ 簡約公式をそのまま使うことで、 n 点 Green 関数から S 行列を求めることができる。Wick の定理もそのまま成立するので、結局は以前と同様に Feynman 伝搬関数をつなぎ合わせることになる。その際、あらかじめ運動量空間になおしてから LSZ 因子を作用させて Feynman 則を導いたことを思い出し、今回も同様の方法で各伝搬関数や頂点に対応する因子を定めていこう。

まず、生成消滅演算子の規格化条件についてはスカラー場るときと同様に不変規格化をとる。すなわち

$$[a_\mu^a(\mathbf{p}), a_\nu^{b\dagger}(\mathbf{q})] = -(2\pi)^3 2\sqrt{p_0 q_0} \eta_{\mu\nu} \delta^{ab} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (33)$$

$$\{c^a(\mathbf{p}), \bar{c}^{b\dagger}(\mathbf{q})\} = -\{\bar{c}^a(\mathbf{p}), c^{b\dagger}(\mathbf{q})\} = i\delta^{ab} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (34)$$

として生成消滅演算子を定義しなおす。こうしておけば、不変規格化条件のもとですでに求めた LSZ 簡約公式を使うことができる。このもとで Feynman 伝搬関数を求めておくと、

$$\langle 0 | T(A_\mu^a(x) A_\nu^b(y)) | 0 \rangle = -\delta^{ab} \eta_{\mu\nu} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip(x-y)}}{p^2 + i\epsilon} = -\delta^{ab} \eta_{\mu\nu} \Delta_F(x-y; p; m=0) \quad (35)$$

$$\langle 0 | T(C^a(x) \bar{C}^b(y)) | 0 \rangle = \delta^{ab} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-e^{-ip(x-y)}}{p^2 + i\epsilon} = i\delta^{ab} \Delta_F(x-y; p; m=0) \quad (36)$$

と書ける。これから、同じ種類のゲージ場どうし、ゴースト場どうしの Feynman 図を書けば十分であることがわかる。

またこの結果から、まずゲージ場 A とゴースト場 C に対しては、運動量 p の内線 $x-y$ において

$$\langle 0 | T(A_\mu^a(x) A_\nu^b(y)) | 0 \rangle \rightarrow \frac{-i}{p^2 + i\epsilon} \delta^{ab} \eta_{\mu\nu} \quad (37)$$

$$\langle 0 | T(C^a(x) \bar{C}^b(y)) | 0 \rangle \rightarrow \frac{-1}{p^2 + i\epsilon} \delta^{ab} \quad (38)$$

と対応させればよい。他の伝搬関数は、生成消滅演算子の定義からすべて 0 を与えるから、内線に関してはこれだけ計算しておけば十分である。

次に必要なのは頂点因子である。相互作用頂点の種類はすでに求めているので、これらから LSZ 因子を作用させて計算を行う。まずはゲージ場の自己 3 点相互作用

$$\mathcal{L}_{3\text{gauge}} = \frac{g}{2} f_{efg} A_\kappa^f(x) A_\lambda^g(x) (\partial_\kappa A_\lambda^e(x) - \partial_\lambda A_\kappa^e(x))$$

について考察する。外点 x_1, x_2, x_3 からそれぞれ 4 元運動量 p, q, k で入ってくる 3 つのゲージ場の相互作用を考え、その真空期待値 $\langle 0 | A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) A_\rho^c(x_3) (i\mathcal{L}_{3\text{gauge}}) | 0 \rangle$ を計算することで頂点因子を計算しよう。ゲージ場どうしの Feynman 伝搬関数を $D_{AA'}$ と表現すれば、これは運動量に関しては演算子としてはたらくことを考慮に入れて、

$$\begin{aligned} & \langle 0 | A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) A_\rho^c(x_3) i\mathcal{L}_{3\text{gauge}} | 0 \rangle \\ &= \frac{ig}{2} f_{efg} \langle 0 | A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) A_\rho^c(x_3) A_\kappa^f(x) A_\lambda^g(x) (\partial_\kappa A^{e\lambda}(x) - \partial_\lambda A^{e\kappa}(x)) | 0 \rangle \\ &= \frac{ig}{2} f_{efg} \left[(D_{A_\mu^a A_\kappa^f}(p) D_{A_\nu^b A_\lambda^g}(q) + D_{A_\mu^a A_\lambda^g}(p) D_{A_\nu^b A_\kappa^f}(q)) (D_{A_\rho^c A^{e\lambda}}(k) k^\kappa - D_{A_\rho^c A^{e\kappa}}(k) k^\lambda) \right. \\ &\quad + (D_{A_\nu^b A_\kappa^f}(q) D_{A_\rho^c A_\lambda^g}(k) + D_{A_\nu^b A_\lambda^g}(q) D_{A_\rho^c A_\kappa^f}(k)) (D_{A_\mu^a A_\lambda^e}(p) p^\kappa - D_{A_\mu^a A_\kappa^e}(p) p^\lambda) \\ &\quad \left. + (D_{A_\rho^c A_\kappa^f}(k) D_{A_\mu^a A_\lambda^g}(p) + D_{A_\rho^c A_\lambda^g}(k) D_{A_\mu^a A_\kappa^f}(p)) (D_{A_\nu^b A_\lambda^e}(q) q^\kappa - D_{A_\nu^b A_\kappa^e}(q) q^\lambda) \right] \quad (39) \end{aligned}$$

と表せる。さらに D が Feynman 伝搬関数で表せることを用いると

$$\begin{aligned}
(\text{上式}) &= -\frac{ig}{2} f_{efg} \Delta_F(x_1, x; p) \Delta_F(x_2, x; q) \Delta_F(x_3, x; k) \left[(\delta_a^f \delta_b^g \eta_{\mu\kappa} \eta_{\nu\lambda} + \delta_a^g \delta_b^f \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\kappa}) \delta_c^e (\eta_\rho^\lambda k^\kappa - \eta_\rho^\kappa k^\lambda) \right. \\
&\quad \left. + (\delta_b^f \delta_c^g \eta_{\nu\kappa} \eta_{\rho\lambda} + \delta_b^g \delta_c^f \eta_{\nu\lambda} \eta_{\rho\kappa}) \delta_a^e (\eta_\mu^\lambda p^\kappa - \eta_\mu^\kappa p^\lambda) + (\delta_c^f \delta_a^g \eta_{\rho\kappa} \eta_{\mu\lambda} + \delta_c^g \delta_a^f \eta_{\rho\lambda} \eta_{\mu\kappa}) \delta_b^e (\eta_\nu^\lambda q^\kappa - \eta_\nu^\kappa q^\lambda) \right] \\
&= -\frac{ig}{2} \Delta_F(x_1, x; p) \Delta_F(x_2, x; q) \Delta_F(x_3, x; k) \left[(f_{cab}(k_\mu \eta_{\nu\rho} - k_\nu \eta_{\mu\rho}) + f_{cba}(k_\nu \eta_{\mu\rho} - k_\mu \eta_{\nu\rho}) \right. \\
&\quad \left. + f_{abc}(p_\nu \eta_{\mu\rho} - p_\rho \eta_{\mu\nu}) + f_{acb}(p_\rho \eta_{\mu\nu} - p_\nu \eta_{\mu\rho}) \right. \\
&\quad \left. + f_{bca}(q_\rho \eta_{\mu\nu} - q_\mu \eta_{\rho\nu}) + f_{bac}(q_\mu \eta_{\rho\nu} - q_\rho \eta_{\mu\nu}) \right] \\
&= ig \Delta_F(x_1, x; p) \Delta_F(x_2, x; q) \Delta_F(x_3, x; k) f_{abc} \left[k_\nu \eta_{\mu\rho} - k_\mu \eta_{\nu\rho} + p_\rho \eta_{\mu\nu} - p_\nu \eta_{\mu\rho} + q_\mu \eta_{\rho\nu} - q_\rho \eta_{\mu\nu} \right] \\
&= ig \Delta_F(x_1, x; p) \Delta_F(x_2, x; q) \Delta_F(x_3, x; k) f_{abc} \left[(p-q)_\rho \eta_{\mu\nu} + (q-k)_\mu \eta_{\nu\rho} + (k-p)_\nu \eta_{\rho\mu} \right] \quad (40)
\end{aligned}$$

が得られる。これに LSZ 因子を作用させると、 Δ_F の部分は外線であるから、スカラー場のときの計算を思い出せば単に頂点 x での運動量保存則

$$\delta^4(p+q+k) \quad (41)$$

を導くだけである。さらに n 個の外線伝搬関数に対し n 回 i がかかることを使えば、最終的な頂点因子は

$$\mathcal{L}_{3\text{gauge}} \rightarrow gf_{abc} \left[(p-q)_\rho \eta_{\mu\nu} + (q-k)_\mu \eta_{\nu\rho} + (k-p)_\nu \eta_{\rho\mu} \right] \quad (42)$$

となる。4 点ゲージ場自己相互作用の場合も、

$$\langle 0 | A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) A_\rho^c(x_3) A_\sigma^d(x_4) i\mathcal{L}_{4\text{gauge}} | 0 \rangle \quad (43)$$

を考えればよく同様の計算を行うことになる。結果だけを述べると

$$\mathcal{L}_{4\text{gauge}} \rightarrow ig^2 \left[f_{eab} f_{ecd} (\eta_{\nu\rho} \eta_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma}) + f_{eac} f_{ebd} (\eta_{\nu\rho} \eta_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}) + f_{ead} f_{ebc} (\eta_{\nu\sigma} \eta_{\mu\rho} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}) \right] \quad (44)$$

である。他の相互作用も同様であり、

$$\begin{aligned}
&\langle 0 | \phi^\dagger(x_1; p) \phi(x_2; q) A_\mu^a(x_3; k) i\mathcal{L}_{\text{scalar-gauge},3} | 0 \rangle \\
&\langle 0 | \phi^\dagger(x_1; p) \phi(x_2; q) A_\mu^a(x_3; k) A_\nu^b(x_4; l) i\mathcal{L}_{\text{scalar-gauge},4} | 0 \rangle \\
&\langle 0 | \bar{\psi}(x_1; p) \psi(x_2; q) A_\mu^a(x_3; k) i\mathcal{L}_{\text{Dirac-gauge}} | 0 \rangle \\
&\langle 0 | \bar{C}^a(x_1; p) C^b(x_2; q) A^c(x_3; k) i\mathcal{L}_{\text{ghost-gauge}} | 0 \rangle
\end{aligned}$$

をそれぞれ計算することで、それぞれの頂点因子は

$$\mathcal{L}_{\text{scalar-gauge},3} \rightarrow igT^a(p-q)_\mu \quad (45)$$

$$\mathcal{L}_{\text{scalar-gauge},4} \rightarrow ig^2 \{T^a, T^b\} \eta_{\mu\nu} \quad (46)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac-gauge}} \rightarrow -ig\gamma^\mu T^a \quad (47)$$

$$\mathcal{L}_{\text{ghost-gauge}} \rightarrow -igf_{abc} p_\mu \quad (48)$$

と計算される。

外線はスカラー場などと同様に因子を付与するが、生成消滅演算子の直交化に依存していて、スカラー場は 1 であり、Dirac 場なら u などの Dirac 方程式を満たすスピノールであるが、ベクトル場は縦波・スカラーモードで S 行列成分の逆転がおこるので単純ではない。しかし 1 粒子完全系のとりかたも逆転しているので、不変散乱振幅を求めるにおいては問題なく、縦波モードなら縦波モード、スカラーモードならスカラーモードの因子をかければよい。

さらに各頂点において運動量保存則を成立させるためにデルタ関数をかけることも以前と変わらないが、不変散乱振幅を求める上ではこれは必要なくなる。また、Fermi 統計に従う場 ψ, C のループの個数分だけ符号 -1 をつけることも同様である。これから、Yang-Mills 理論における不変散乱振幅を直接求める Feynman 則をまとめると、

1. 各線に運動量を書き込み、外線因子は、スカラー場なら 1、Dirac 場なら u, \bar{u} など、ベクトル場なら $\epsilon_\mu^{(\sigma)}, \epsilon_\mu^{(\sigma)*}$ などを付与し、内線因子は

$$\begin{aligned} \phi(x) \rightarrow \phi(y) &\implies \frac{i}{p^2 - m^2} \\ \psi(x) \rightarrow \bar{\psi}(y) &\implies \frac{i}{\not{p} - m} \equiv \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \\ A_\mu^a(x) \rightarrow A_\nu^b(y) &\implies \frac{-i}{p^2} \delta^{ab} \eta_{\mu\nu} \\ C^a(x) \rightarrow \bar{C}^b(y) &\implies \frac{-1}{p^2} \delta^{ab} \end{aligned}$$

と対応させる。また、頂点因子もすでに求めたようにして対応させる。さらに Fermi 統計に従う場 ψ, C のループ数だけ -1 の因子をかける。

2. 各 Feynman ダイアグラムに応じてこれらの因子の積をとる。
3. 未知の運動量 p に関して積分因子

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \quad (49)$$

を作用させる。

4. 最後に i で割る。

のようになる。

次節以降では、この Feynman 則を応用して、実用的な問題における不変散乱振幅を計算してみることにする。

2 Perturbation in the QED

2.1 Positronium

電子およびその反粒子である陽電子の 2 粒子系であるポジトロニウムの 2 光子崩壊確率を、すでに導いた Feynman 則による方法で求めてみよう。QED として考えればよく、重心系を考えれば、光子は 2

つ以上でなければならない。したがって 1 次での寄与はなく、2 次から考えていくことになる。2 次で寄与する Feynman ダイアグラムは以下の 2 つである：

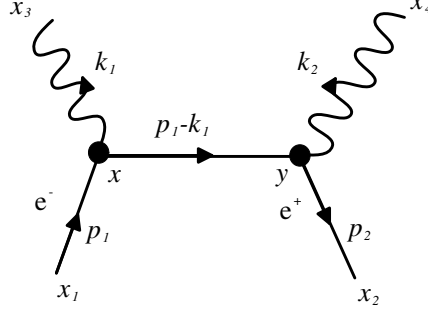


FIG 5:

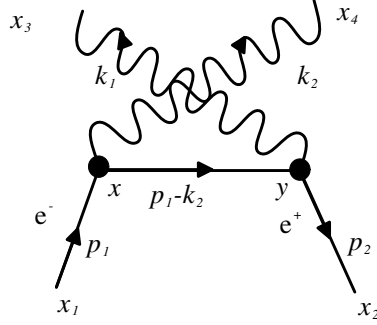


FIG 6:

これより、Feynman 則からこのダイアグラムによる不変散乱振幅 M への寄与は、

$$\epsilon^{(\sigma_1)\mu}(k_1) \equiv \epsilon_1^{*\mu}, \quad \epsilon^{(\sigma_2)\mu}(k_2) \equiv \epsilon_2^{*\mu}, \quad u(p_1, s_1) \equiv u, \quad \bar{v}(p_2, s_2) \equiv \bar{v} \quad (50)$$

として

$$\begin{aligned} M &= \epsilon_1^{*\mu} \epsilon_2^{*\nu} \bar{v} e^2 \gamma_\nu \frac{1}{m - \not{p}_1 + \not{k}_1} \gamma_\mu u + \epsilon_1^{*\mu} \epsilon_2^{*\nu} \bar{v} e^2 \gamma_\mu \frac{1}{m - \not{p}_1 + \not{k}_2} \gamma_\nu u \\ &= \epsilon_1^{*\mu} \epsilon_2^{*\nu} \bar{v} e^2 \left[\gamma_\nu \frac{1}{m - \not{p}_1 + \not{k}_1} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{1}{m - \not{p}_1 + \not{k}_2} \gamma_\nu \right] u \end{aligned} \quad (51)$$

である。ここで $p_i^2 + m^2 = 0, k_i^2 = 0$ が成り立つから

$$\frac{1}{\not{p}_i + \not{k}_j - m} = \frac{\not{p}_i + \not{k}_j + m}{(p_i + k_j)^2 - m^2} = \frac{\not{p}_i + \not{k}_j + m}{2p_i \cdot k_j} \quad (52)$$

が得られるから

$$M = e^2 \bar{v} \left[\not{\epsilon}_2^* \frac{\not{p}_1 - \not{k}_1 - m}{2p_1 \cdot k_1} \not{\epsilon}_1^* + \not{\epsilon}_1^* \frac{\not{p}_1 - \not{k}_2 - m}{2p_1 \cdot k_2} \not{\epsilon}_2^* \right] u \quad (53)$$

この式をさらに簡単化するために、座標系として初期の電子の静止系を考える。さらに放射光子 1 の運動量の向きを z 軸とする。こうすることで、

$$k_1 = (k, 0, 0, k), \quad p_1 = (m, 0, 0, 0) \quad (54)$$

となるから、 x, y 成分しかもたない放射光子 1 の横波ベクトル ϵ_1 は実とすることができる。しかも

$$\epsilon_1 \cdot k_1 = \epsilon_1 \cdot p_1 = 0 \quad (55)$$

が成り立つ。さらに放射光子 2 の横波ベクトル ϵ_2 に対しても定義から空間成分しかもたず、自身の波数ベクトルに垂直なので

$$\epsilon_2 \cdot p_1 = \epsilon_2 \cdot k_2 = 0 \quad (56)$$

である。さらにガンマ行列の反交換関係 $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}$ と Dirac 方程式 $(\not{p} - m)u(p) = 0$ を用いると、

$$(\not{p}_1 - \not{k}_1 - m)\not{\epsilon}_1 u = -\not{\epsilon}_1(\not{p}_1 - \not{k}_1 + m)u + 2(k_1 - p_1) \cdot \epsilon_1 u = \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 u \quad (57)$$

が得られる。同様にして

$$(\not{p}_1 - \not{k}_2 - m)\not{\epsilon}_2 u = \not{\epsilon}_2 \not{k}_2 u \quad (58)$$

となるから、 M は

$$M = e^2 \bar{v} \left[\frac{\not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1}{2p_1 \cdot k_1} + \frac{\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{k}_2}{2p_1 \cdot k_2} \right] u \quad (59)$$

と書ける。

さらにこの 2 乗を計算することになるが、そのさい、ガンマ行列を減らす式変形をひたすら行うことになるので、

$$\not{a}\not{a} = -a \cdot a, \quad \not{a}\not{b} = -\not{b}\not{a} - 2a \cdot b \quad (60)$$

を用いることになる。また、入射電子、陽電子のスピンの偏極はどれも同じ確率でとりうるので、計算においてはスピンの平均をとったものを M として用いてよいはずである。したがってスピンについては平均をとることにする。まず、自乗項として

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} |\bar{v} \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 u|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} \bar{v} \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 u \bar{u} \not{k}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 v \\ &= \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} \text{Tr}(\not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 u \bar{u} \not{k}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 v \bar{v}) \end{aligned} \quad (61)$$

を計算しよう。スピン平均をとる理由は計算を以下のように

$$\sum_s u(p; s) \bar{u}(p; s) = \not{p} + m \quad (62)$$

と簡単化できるからである。これを用いれば、式 (61) は

$$\begin{aligned} \sum_{s_1, s_2} \text{Tr}(\not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 u \bar{u} \not{k}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 v \bar{v}) &= \text{Tr}[\not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 (p_1 + m) \not{k}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 (p_2 - m)] \\ &= \text{Tr}[\not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 \not{p}_1 \not{k}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2] \end{aligned} \quad (63)$$

となる。ただし、 $\not{k}_1 \not{k}_1 = -k_1 \cdot k_1 = 0$ および奇数個のガンマ行列のトレースはゼロになることを用いた。さらに

$$\begin{aligned} \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 \not{p}_1 \not{k}_1 \not{\epsilon}_1 &= \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 (-\not{k}_1 \not{p}_1 - 2k_1 \cdot p_1) \not{\epsilon}_1 = -2(k_1 \cdot p_1) \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 \not{\epsilon}_1 \\ &= -2(k_1 \cdot p_1) \not{\epsilon}_1 (-\not{\epsilon}_1 \not{k}_1) = -2(k_1 \cdot p_1) (\epsilon_1 \cdot \epsilon_1) \not{k}_1 = -2(k_1 \cdot p_1) \not{k}_1 \end{aligned} \quad (64)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} |\bar{v} \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 u|^2 &= -\frac{1}{2} (k_1 \cdot p_1) \text{Tr}[\not{\epsilon}_2 \not{k}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2] \\ &= -2(k_1 \cdot p_1) [2(\epsilon_2 \cdot k_1)(\epsilon_2 \cdot p_2) + (\epsilon_2 \cdot \epsilon_2)(k_1 \cdot p_2)] \\ &= -2(k_1 \cdot p_1) [2(\epsilon_2 \cdot k_1)(\epsilon_2 \cdot (k_1 + k_2 - p_1)) + k_1 \cdot p_2] \\ &= -2(k_1 \cdot p_1) [2(\epsilon_2 \cdot k_1)^2 + k_1 \cdot p_2] \end{aligned} \quad (65)$$

となる。同様にしてもう一つの自乗項は

$$\frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} |\bar{v} \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{k}_2 u|^2 = -2(k_2 \cdot p_1) [2(\epsilon_1 \cdot k_2)^2 + k_2 \cdot p_2] \quad (66)$$

となる。

残りはクロスターム

$$\begin{aligned} \sum_{s_1, s_2} (\bar{v} \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 u) (\bar{v} \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{k}_2 u) &= \sum_{s_1, s_2} \bar{v} \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 u \bar{u} \not{k}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 v \\ &= \text{Tr}[\not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 (p_1 + m) \not{k}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 (p_2 - m)] \end{aligned} \quad (67)$$

を計算する必要がある。これも同様にガンマ行列を減らしていくことで、

$$\sum_{s_1, s_2} (\bar{v} \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 u) (\bar{v} \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{k}_2 u) = -2(k_1 \cdot p_1)(k_2 \cdot p_1) [2(\epsilon_2 \cdot \epsilon_2)^2 - 1] + 2(\epsilon_2 \cdot k_1)^2 (k_2 \cdot p_1) + 2(\epsilon_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot p_1) \quad (68)$$

となる。もう一つのクロスタームも、この複素共役から得られるが、実であるので同一の表式である。

以上から、不変散乱振幅の 2 乗は

$$\frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} |M|^2 = \frac{-e^4}{2} \left[\frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot p_1} + \frac{k_2 \cdot p_2}{k_2 \cdot p_1} - 4(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 + 2 \right] \quad (69)$$

となる。

► 実験室系と重心系間の微分散乱断面積の変換 ◀

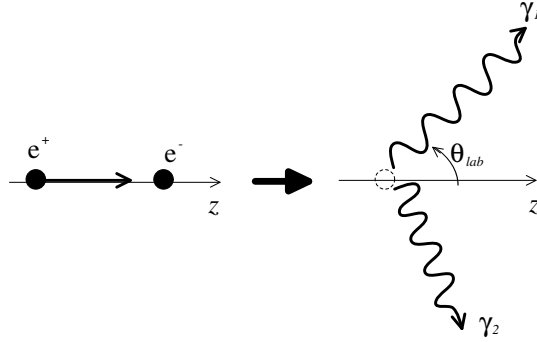


FIG 7: 実験室系でのポジトロニウムの対消滅。反応により2つの光子 γ_1 および γ_2 が放出される場合。

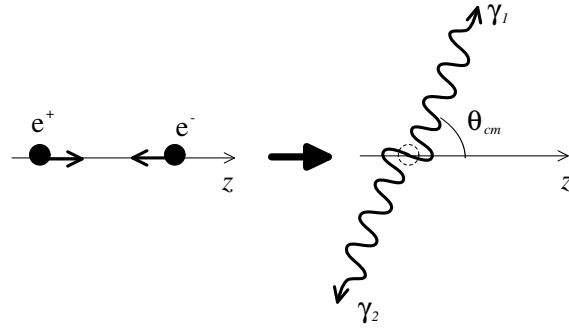


FIG 8: 重心系でポジトロニウムの対消滅を観測した場合。

今までの計算は実験室系において計算をしてきたが、すでに求めた公式は重心系において求めている。したがって、この間の変換を考えないといけない。その変換は、 ϕ 方向の対称性から

$$d\Omega_{\text{lab}} = \frac{d \cos \theta_{\text{lab}}}{d \cos \theta_{\text{cm}}} d\Omega_{\text{cm}} \quad (70)$$

である。ここで θ は放射光子 1 の散乱角であり、この角変数の間の変換を実験室系での k_1, k_2 を用いて求めてみよう。

まず、各系での運動量表示を求めておく。座標を取り直し、 z 軸を入射粒子方向にとるとすると、実験室系では

$$\begin{aligned} p_1 &= (m, 0, 0, 0) & p_2 &= (\sqrt{p^2 + m^2}, 0, 0, p) \\ k_1 &= (k, \mathbf{k}) & k_2 &= (k', \mathbf{k}') \end{aligned}$$

であり、一方で重心系では

$$\begin{aligned} p_1 &= (\sqrt{P^2 + m^2}, 0, 0, -P) & p_2 &= (\sqrt{P^2 + m^2}, 0, 0, P) \\ k_1 &= (K, \mathbf{K}) & k_2 &= (K, -\mathbf{K}) \end{aligned}$$

が成り立っている。これより、 $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$ として、Lorentz 不変量 $(p_1 + p_2)^2$ が両方の系で等しいと置くことにより、

$$2m(m + E_p) = 4(P^2 + m^2) \quad (71)$$

が成り立つ。また $(p_1 + p_2)^2 = (k_1 + k_2)^2$ から上式はさらに $4K^2$ に等しい。重心系から見て、電子は速度 $\mathbf{v} = -\mathbf{P}/\sqrt{P^2 + m^2}$ 、すなわち

$$\mathbf{v} = -\mathbf{e}_z \sqrt{\frac{E_p - m}{E_p + m}} \quad (72)$$

で動いている。重心系から実験系に移るために z 軸方向に Lorentz 変換を行うと、この変換のもとで放射光子 1 の z 方向の運動量は

$$k \cos \theta_{\text{lab}} = \gamma(K \cos \theta_{\text{cm}} + K\beta) \quad (73)$$

と変換する。これと式 (71) から、

$$\frac{k^2 \cos^2 \theta_{\text{lab}}}{\gamma^2 (\cos \theta_{\text{cm}} + \beta)^2} = \frac{E_p + m}{2} m \quad (74)$$

が得られるが、これを式 (72) を用いて整理すると

$$2k \cos \theta_{\text{cm}} = E_p + m \quad (75)$$

となる。さらに重心系において

$$k_1 \cdot p_1 = k_2 \cdot p_2 = (p_1 + p_2 - k_1) \cdot p_2 \quad (76)$$

という Lorentz 不変量が成り立つことから、これに実験系での表式を代入して

$$km = mE_p + m^2 + (-kE_p + kp \cos \theta_{\text{lab}}) \quad (77)$$

が得られる。すなわち

$$k = \frac{m(E_p + m)}{E_p + m + p \cos \theta_{\text{lab}}} \quad (78)$$

である。これより式 (78) を式 (75) に代入して

$$\frac{4m \cos \theta_{\text{lab}}}{E_p + m + p \cos \theta_{\text{lab}}} = v + \cos \theta_{\text{cm}} \quad (79)$$

を得る。これを微分すると

$$d \cos \theta_{\text{cm}} = \frac{4m(E_p + m)}{(E_p + m + p \cos \theta_{\text{lab}})^2} d \cos \theta_{\text{lab}} \quad (80)$$

が得られる。

► 微分散乱断面積 ◀

重心系での微分散乱断面積はすでに不変振幅から求められるように公式を導いてある。それを使うと

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{cm}} = \frac{|\mathbf{P}|}{64\pi^2 s \sqrt{(s-4m^2)}} |M|^2 \quad (81)$$

である。ここで

$$|\mathbf{P}| = P = \sqrt{\frac{m(E_p - m)}{2}}$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 4(P^2 + m^2) = 4 \frac{m(E_p + m)}{2}$$

だから、

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{cm}} = \frac{\sqrt{s-4m^2}}{64\pi^2 s \sqrt{(s-4m^2)}} |M|^2 = \frac{1}{256\pi^2 m(E_p + m)} |M|^2 \quad (82)$$

であり、よって実験室系では

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{lab}} = \frac{2}{(E_p + m + p \cos \theta_{\text{lab}})^2} \frac{-e^4}{64\pi^2} \left[\frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot p_1} + \frac{k_2 \cdot p_2}{k_2 \cdot p_1} - 4(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 + 2 \right] \quad (83)$$

となることが分かる。ここで微細構造定数 $\alpha = e^2/4\pi$ 、および重心系における Lorentz 不変な関係式に実験室系での値を代入した式

$$p_1 \cdot k_1 = p_2 \cdot k_2 = km, \quad p_1 \cdot k_2 = p_2 \cdot k_1 = kE_p - kp \cos \theta_{\text{lab}} \quad (84)$$

を用いると、不変散乱振幅の部分が実験室系の量で表せて、結果は

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{lab}} = \frac{-\alpha^2}{8} \frac{1}{(E_p + m + p \cos \theta_{\text{lab}})^2} \left[\frac{E_p - p \cos \theta_{\text{lab}}}{m} + \frac{m}{E_p - p \cos \theta_{\text{lab}}} - 4(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 + 2 \right] \quad (85)$$

となる。

2.2 Compton scattering

今度は Compton 散乱の微分散乱断面積を求める。この場合の最低次の Feynman 図の寄与は、相互作用の形から先ほどと変わらない。したがって、不変散乱振幅は式 (69) と同一の表式

$$\frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2} |M|^2 = e^4 \left[\frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot p_1} + \frac{k_2 \cdot p_2}{k_2 \cdot p_1} + 4(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - 2 \right]$$

を与える。ここで実験室系での各 4 元運動量を

$$p_1 = (m, 0, 0, 0) \quad p_2 = (\sqrt{p^2 + m^2}, \mathbf{p})$$

$$k_1 = (k, 0, 0, k) \quad k_2 = (k', \mathbf{k}')$$

とし、一方の重心系では

$$\begin{aligned} p_1 &= (\sqrt{K^2 + m^2}, 0, 0, -K) & p_2 &= (\sqrt{P^2 + m^2}, \mathbf{P}) \\ k_1 &= (K, 0, 0, K) & k_2 &= (P, -\mathbf{P}) \end{aligned}$$

と表現しよう。ただし、入射光子の進行方向を z 軸にとった。この条件下で先ほどと同じように微小立体各の Jacobian を計算したい。したがって、先ほどと同様の計算を行う。まず、重心系からみて、電子は

$$\mathbf{v} = -e_z \frac{K}{\sqrt{K^2 + m^2}} \quad (86)$$

で動いている。これを z 方向に Lorentz 変換すると、散乱光子の波数の z 成分は

$$k' \cos \theta_{\text{lab}} = \gamma(P \cos \theta_{\text{cm}} + P\beta) \quad (87)$$

という変換を受ける。ここで $(k_1 + p_1)^2$ を両方の系で等しいとして計算すれば

$$2mk + m^2 = 2K^2 + 2K\sqrt{K^2 + m^2} + m^2 \implies K = \sqrt{mk}2k + m \quad (88)$$

となり、また $(k_1 + p_1)^2 = (k_2 + p_2)^2$ から上式はさらに $2P^2 + 2P\sqrt{P^2 + m^2}$ にも等しいので

$$P = \sqrt{mk}2k + m = K \quad (89)$$

である。さらにこれから $k_2 \cdot p_1 = p_2 \cdot k_1 = (k_1 + p_1 - k_2) \cdot k_1$ が重心系で成り立つので、これに実験系の値で置き換えると、

$$mk' = mk + kk'(1 - \cos \theta_{\text{lab}}) \quad (90)$$

すなわち、Compton の公式

$$k' = \frac{mk}{m + (1 - \cos \theta_{\text{lab}})k} \quad (91)$$

を得る。したがって、式(87)に式(86)、式(89)および Compton の公式を用いれば、 $\cos \theta_{\text{cm}}$ と $\cos \theta_{\text{lab}}$ の関係を得ることができ、それを微分することで

$$\frac{d \cos \theta_{\text{cm}}}{d \cos \theta_{\text{lab}}} = \frac{2k + m}{m} \frac{k'^2}{k^2} \quad (92)$$

が求められる。

不変散乱振幅は実験系の量を用いて

$$\frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2} |M|^2 = e^4 \left[\frac{k'}{k} + \frac{k}{k'} + 4(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - 2 \right] \quad (93)$$

と書けるから、 $s = 2mk + m^2$ 重心系での微分散乱断面積は

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{cm}} = \frac{1}{64\pi^2 m(m + 2k)} |M|^2 \quad (94)$$

である。これを変換すれば、実験室系での微分散乱断面積

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2}{4m^2} \frac{k'^2}{k^2} \left[\frac{k'}{k} + \frac{k}{k'} + 4(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - 2 \right] \quad (95)$$

が得られる。特に、 $\omega = k, \omega' = k'$ とし、それぞれの光子の偏極ベクトルは横波モード ϵ, ϵ' をそれぞれとることになるが、これらで表した式

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2}{4m^2} \frac{\omega'^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 4(\epsilon \cdot \epsilon')^2 - 2 \right] \quad (96)$$

を Klein-Nishina の公式という。ここでもし、入射光子のエネルギー k が電子の静止質量 m に比べて十分小さいとき、上式は

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{lab}} \simeq \frac{\alpha^2}{m^2} (\epsilon \cdot \epsilon')^2 \quad (97)$$

のように、古典電子による輻射の散乱を表す Thomson の公式に一致する。