CAMB

並河 俊弥

(Dated: November 14, 2013)

デフォルトの CAMB ではシアの角度パワースペクトルやシアと他の相関量の角度パワースペクトルが計算できない。このノートでは、 CAMB を用いてシアの角度パワースペクトルの計算を行うためさいに必要なコードの修正について述べる。

CONTENTS

I. 角度パワースペクトル

CAMB における修正を説明する前に、角度パワースペクトルの計算における一般論を展開しておく。揺らぎ X と Y に対して、その球面調和関数による展開係数が

$$X_{\ell m} = 4\pi i^\ell \int_0^\infty d\chi F_X(\chi) \int \frac{k^2 dk d\widehat{\boldsymbol{k}}}{(2\pi)^{3/2}} X(\boldsymbol{k},\chi) j_\ell(k\chi) Y^*_{\ell m}(\widehat{\boldsymbol{k}}) \tag{1}$$

$$Y_{\ell m} = 4\pi i^\ell \int_0^\infty d\chi F_Y(\chi) \int \frac{k^2 dk d\widehat{\boldsymbol{k}}}{(2\pi)^{3/2}} Y(\boldsymbol{k},\chi) j_\ell(k\chi) Y^*_{\ell m}(\widehat{\boldsymbol{k}}) \tag{2}$$

のように、ある関数 F を用いて書かれている場合を考える。球面調和関数の直交性と

$$\langle X(\boldsymbol{k},\chi) Y(\boldsymbol{k}',\chi')\rangle = G_{XY}(k,\chi,\chi')\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{3}$$

を使うと、アンサンブル平均は

$$\begin{aligned}
\langle X_{\ell m} Y^*_{\ell' m'}\rangle &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' F_X(\chi) F_Y(\chi') \\
&\times \int k^2 dk d\hat{\boldsymbol{k}} \int (k')^2 dk' d\widehat{\boldsymbol{k}}' \langle X(\boldsymbol{k},\chi) Y(\boldsymbol{k}',\chi')\rangle\, j_\ell(k\chi) j_{\ell'}(k'\chi') Y^*_{\ell m}(\widehat{\boldsymbol{k}}) Y_{\ell' m'}(\widehat{\boldsymbol{k}}') \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' F_X(\chi) F_Y(\chi') \\
&\times \int k^2 dk d\widehat{\boldsymbol{k}} \int (k')^2 dk' d\widehat{\boldsymbol{k}}' G_{XY}(k,\chi,\chi')\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') j_\ell(k\chi) j_{\ell'}(k'\chi') Y^*_{\ell m}(\widehat{\boldsymbol{k}}) Y_{\ell' m'}(\widehat{\boldsymbol{k}}') \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' F_X(\chi) F_Y(\chi') \\
&\times \int k^2 dk d\widehat{\boldsymbol{k}} G_{XY}(k,\chi,\chi') j_\ell(k\chi) j_{\ell'}(k\chi') Y^*_{\ell m}(\widehat{\boldsymbol{k}}) Y_{\ell' m'}(\widehat{\boldsymbol{k}}) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' F_X(\chi) F_Y(\chi') \int k^2 dk G_{XY}(k,\chi,\chi') j_\ell(k\chi) j_\ell(k\chi') \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}
\end{aligned} \tag{4}$$

と書ける。ここで、角度パワースペクトル C_ℓ^{XY} を

$$\left\langle X_{\ell m} Y^*_{\ell' m'}\right\rangle = C_\ell^{XY}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \tag{5}$$

と定義する。このとき、

$$C_\ell^{XY} = \frac{2}{\pi}\int k^2 dk \int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' F_X(\chi)F_Y(\chi')G_{XY}(k,\chi,\chi')j_\ell(k\chi)j_\ell(k\chi') \tag{6}$$

と書き下すことができる。無次元パワースペクトル $g_{XY} = k^3 G_{XY}/2\pi^2$ を G_{XY} の代わりに用いることで、角度パワースペクトルは

$$C_\ell^{XY} = 4\pi \int d\ln k \int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' F_X(\chi)F_Y(\chi')g_{XY}(k,\chi,\chi')j_\ell(k\chi)j_\ell(k\chi') \tag{7}$$

と書き直せる。また線形摂動の範囲では、遷移関数を用いることで式をもう少し単純化できる。遷移関数 $\mathcal{S}_X$ および $\mathcal{S}_Y$ を、曲率揺らぎ $\mathcal{R}$ を用いて

$$X(\boldsymbol{k},\chi) = \mathcal{R}(k)\sqrt{\frac{2\pi^2}{k^3}}\mathcal{S}_X(k,\chi) \tag{8}$$

$$Y(\boldsymbol{k},\chi) = \mathcal{R}(k)\sqrt{\frac{2\pi^2}{k^3}}\mathcal{S}_Y(k,\chi) \tag{9}$$

のように定義する。このとき、曲率揺らぎのパワースペクトル $\mathcal{P}_\mathcal{R}$ を用いて

$$\mathcal{P}_\mathcal{R}(k)\mathcal{S}_X(k,\chi)\mathcal{S}_Y(k,\chi') = g_{XY}(k,\chi,\chi') \tag{10}$$

が成り立つ。したがって、角度パワースペクトルは

$$C_\ell^{XY} = 4\pi \int d\ln k \mathcal{P}_\mathcal{R}(k)\left[\int_0^\infty d\chi F_X(\chi)\mathcal{S}_X(k,\chi)j_\ell(k\chi)\right]\left[\int_0^\infty d\chi' F_Y(\chi')\mathcal{S}_Y(k,\chi')j_\ell(k\chi')\right] \tag{11}$$

と表すことができる。

式（11）において $\eta = \eta_0 - \chi$ のように変数変換を行うと、

$$\begin{aligned} C_\ell^{XY} = 4\pi \int d\ln k \mathcal{P}_\mathcal{R}(k) &\left[\int_{\eta_0-\eta_*}^{\eta_0} d\eta F_X(\eta_0-\eta)\mathcal{S}_X(k,\eta_0-\eta)j_\ell(k(\eta_0-\eta))\right] \\ \times &\left[\int_{\eta_0-\eta_*}^{\eta_0} d\eta' F_Y(\eta_0-\eta')\mathcal{S}_Y(k,\eta_0-\eta')j_\ell(k(\eta_0-\eta'))\right] \end{aligned} \tag{12}$$

が得られる。ただし η_0 は現在での、η_* は最終散乱面での η の値である。CAMB ではこの式をもとに計算を行っている。

1. リンバー近似

角度パワースペクトルの計算において、リンバー近似、および

$$\frac{2}{\pi}\int k^2 dk j_\ell(k\chi)j_\ell(k\chi') = \frac{1}{\chi^2}\delta_D(\chi-\chi') \tag{13}$$

を用いると、式（6）は

$$\begin{aligned} C_\ell^{XY} &\sim \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' F_X(\chi)F_Y(\chi')G_{XY}(\ell/\chi,\chi,\chi')\int k^2 dk j_\ell(k\chi)j_\ell(k\chi') \\ &= \int_0^\infty d\chi \int_0^\infty d\chi' F_X(\chi)F_Y(\chi')G_{XY}(\ell/\chi,\chi,\chi')\frac{1}{\chi^2}\delta(\chi-\chi') \\ &= \int_0^\infty d\chi F_X(\chi)F_Y(\chi)G_{XY}(\ell/\chi,\chi)\frac{1}{\chi^2} \end{aligned} \tag{14}$$

となる。無次元パワースペクトル g_{XY} を G_{XY} の代わりに用いれば

$$C_\ell^{XY} = 2\pi^2 \int_0^\infty d\chi F_X(\chi)F_Y(\chi)g_{XY}(\ell/\chi,\chi)\frac{\chi}{\ell^3} \tag{15}$$

と書き直される。

CAMB では時間積分、波数積分の順番で計算を行うので、リンバー近似を行うさいには $K = \ell/\chi$ として

$$
\begin{aligned}
C_\ell^{XY} &= 4\pi \int_0^\infty \frac{\ell dK}{K^2} \frac{\pi}{2K\ell^2} F_X(\chi) F_Y(\chi) g_{XY}(K, \ell/K) \\
&= 4\pi \int_0^\infty d\ln K \left[\sqrt{\frac{\pi}{2\ell}} \frac{1}{K} F_X(\chi)\right] \left[\sqrt{\frac{\pi}{2\ell}} \frac{1}{K} F_Y(\chi)\right] g_{XY}(K, \ell/K) \\
&= 4\pi \int_0^\infty d\ln K \mathcal{P}_\mathcal{R}(K) \left[\sqrt{\frac{\pi}{2\ell}} \frac{1}{K} F_X(\chi) \mathcal{S}_X(K, \ell/K)\right] \left[\sqrt{\frac{\pi}{2\ell}} \frac{1}{K} F_Y(\chi) \mathcal{S}_Y(K, \ell/K)\right] \qquad (16)
\end{aligned}
$$

と変形することで計算を行っている。

II. CAMB を用いたシアの角度パワースペクトルの計算

角度パワースペクトルを計算するさい、波数積分や時間積分は cmbmain.f90 で行われている。また、必要な変数の多くは modules.f90 において宣言されている。そのため、修正が必要なファイルは modules.f90 および cmbmain.f90 である。

2. modules.f90

モジュール ModelData の変数宣言部において、

```
integer, parameter :: C_SS = 6
```

を追加する。これで、シアに対する角度パワースペクトルの出力を行うことができる。また、

```
integer :: C_last = C_PhiTemp
```

を

```
integer :: C_last = C_SS
```

と書き直す。これにより、出力ファイルの最終列はシアの角度パワースペクトルになる。

3. cmbmain.f90

まず、シアのレンジング・カーネル $\Delta_\phi(\eta_0 - \eta)$ を計算する関数（ここでは Kernel としておく）を作る。次にサブルーチン CalcScalarSources の

```
call output(...
```

の下に

```
sources(4) = Kernel(tau)*sources(3)*(-0.5*f_K(CP%tau0-tau_maxvis) &
             /f_K(tau-tau_maxvis)/f_K(CP%tau0-tau))
```

を記述する。配列 sources は遷移関数 $\mathcal{S}$ に対応しており、 sources(1) は温度揺らぎ、 sources(2) は E モード偏光、sources(3) は CMB レンジングにおけるレンジングポテンシャルの遷移関数を表している。

配列 sources のメモリを確保するため、サブルーチン GetSourceMem において

```
SourceMem = 3
C_last = C_PhiTemp
```

を

```
SourceMem = 4
C_last = C_SS
```

と書き直す。

最後に、サブルーチン CalcScalCls において

```
iCl_scalar(j,C_PhiTemp) = iCl_scalar(j,C_PhiTemp) + ...
```

の下に

```
iCl_scalar(j,C_SS) = iCl_scalar(j,C_SS) + &
                     apowers*CTrans%Delta_p_l_k(4,j,q_ix)**2dlnk
```

を追加する。ここでは台形公式を用いて波数積分が行われており、変数 apowers は $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$、 iCl _ scalar は角度パワースペクトルに対応している。これで、シアの角度パワースペクトルの計算が可能となる。

さらにシアと他の相関量の角度パワースペクトルの計算を行うには、 modules.f90 において

```
integer, parameter :: C_SS = 6, C_dS = 7, C_TS = 8, ...
```

と増やし、サブルーチン CalcScalCls において

```
iCl_scalar(j,C_dS) = iCl_scalar(j,C_dS) + &
       apowers*CTrans%Delta_p_l_k(3,j,q_ix)*CTrans%Delta_p_l_k(4,j,q_ix)*dlnk
iCl_scalar(j,C_TS) = iCl_scalar(j,C_dS) + &
       apowers*CTrans%Delta_p_l_k(1,j,q_ix)*CTrans%Delta_p_l_k(4,j,q_ix)*dlnk
```

とすればよい。ただしこの方法では温度揺らぎとシアの相関のさいに ISW 以外の寄与も含まれてしまうので、ISW の寄与は別の sources に渡して計算させる必要がある。