1. Principles of Classical Field Theory

——————— 2008/08/11, Toshiya Namikawa

ABSTRACT

場の量子論の準備として、今回は場の古典論についてまとめる。ますは古典場について少し述べたあと、相対論的量子力学の問題点について触れ、量子場の理論の必要性について述べる。その後は、古典場の理論構築における最小作用の原理、対称性などについて簡単にまとめる。

TABLE OF CONTENTS

1 相対論的量子力学

1.1 古典場の理論

電磁気学における電場・磁場や、相対性理論における重力場などは一般に時間・位置に依存する。したがって、一般には、場は時間・位置の関数 $\phi(t,\boldsymbol{x})$ で表される。特に相対性理論では、異なる座標系でも同じに見えるものをスカラー場と呼ぶ。場は必ずしも実数でなく、複素数をとり得るように拡張される。したがって、実場と複素場、というように区別する。

場の理論では、すべての時間・位置において場がどのようになるかを記述することが目標となる。電磁気学なら Maxwell 方程式により電磁場が決まり、相対性理論なら Einstein 方程式により重力場が決定

される。しかし、これらは量子論における確率解釈という概念を取り入れてはいない。量子論的に考えれば、2 乗して確率となる波動関数があり、すべての観測量は波動関数に演算子を作用させることで得られる。このような量子論の概念を取り入れた場の理論は場の量子論と呼ばれ、そうでないものは場の古典論と呼ばれる。

以下の議論では、光速 c と Plank 定数 $\hbar$ は 1 とする、すなわち自然単位系 $c = \hbar = 1$ を採用する。また、Minkowski 計量を $\eta^{\mu\nu}$ とし、符号は $(+, -, -, -)$ とする。

1.2 相対論的量子力学の試み

光速に近い速さで運動する粒子に対しては、特殊相対性理論を量子論的に考えなければならないはずである。特に、電子などの質量の小さい粒子を扱うには、光速に近い速さで運動する可能性がある。これを受けて、特殊相対性理論に量子論の要請を加えた理論を考案されるようになった。

まず考えられたのは、量子力学における Schrödinger 方程式をもとにする方法である。単純に $E^2 = m^2 + p^2$ に演算子の置き換えを行うことで

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0 \tag{1}$$

を得ることができるが、これは Lorentz 変換に対して不変であり、Klein-Gordon 方程式と呼ばれる。$\phi(x)$ は波動関数である。しかしこの方程式をもとにすると、負の確率がでてきてしまい訳の分からないことになる。しかも、エネルギーの値として負をもともと許しているので、負のエネルギー解も存在する。したがって粒子の安定化を考えれば、粒子はどんどん負のエネルギーへと落ち込んでいってしまうという問題もある。

この負の確率という問題点を克服するために、Dirac は波動関数を 4 成分場 ψ とし、これが

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \tag{2}$$

を満たすとした。ここで新たに導入した γ^μ は

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \tag{3}$$

を満たすものである。この方程式から Klein-Gordon 方程式を得ることができる。式（2）は Dirac 方程式と呼ばれ、負の確率というものがでない、Lorentz 変換に対して不変な方程式となっている。しかしこれでも、結局は Klein-Gordon 方程式に帰着されることから負のエネルギー解の存在という問題は解決されてはいない。Dirac はこれを空孔理論により解決しようとしたが、真空に負のエネルギーが満ちているという仮定などと不自然な部分があり、納得のいくような理論にはならなかった。結局、粒子に伴う反粒子という概念がでてくるが、粒子や反粒子の生成・消滅の記述を理論的に記述できていないのである。

しかし実際には、1932 年に Anderson による陽電子の発見があり、現実世界としてこのような粒子・反粒子の生成・消滅という現象を記述する理論が必要となる。そしてそれが場の量子論において実現されるのである。

2 古典場における Lagrangian 密度

2.1 最小作用の原理と Euler-Lagrange 方程式

場の古典論では最小作用の原理により場の時空での振舞が決定されていた。以下では特にスカラー場 ϕ について議論する。作用 S は Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ を用いて

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi) \tag{4}$$

と書ける。Lagrangian 密度に対する要請は以下のようになる。

1. 実数である。
2. 同一時空点での場の値 $\phi(x)$ とその一階微分 $\partial_\mu \phi(x)$ からなる。
3. 相対論的に不変である。

条件 1 は、量子論にした場合に $\mathcal{L}$ が Hermite 演算子でなければならないということを指し、確率の保存を保証する。条件 2 は局所性を言っていて、事象が光速を越えて伝わらないという因果律を保証する。これら以外に対称性などが必要であれば、新たに条件を加えることになる。

▶ 非線型シグマモデル ◀

実スカラー場 ϕ のみの場合のもっともらしい一般的な Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} f(\phi) \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - V(\phi) \tag{5}$$

であり、これを非線型シグマモデルという。ここで $f(\phi)$ は運動項の非線型性を表現している。ここで、$(d\phi')^2 = f(\phi)(d\phi)^2$ となる新しい場 ϕ' を導入すると、ϕ' を改めて ϕ と書き直せば Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - V(\phi) \tag{6}$$

と書き直せる。

変換 $\phi \to -\phi$（離散的対称性）により Lagrangian 密度が不変であることを要請すれば、ポテンシャル V の項は ϕ の偶数ベキの項のみとなり、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{24} \phi^4 + \cdots \tag{7}$$

と書ける。

▶ Euler-Lagrange 方程式 ◀

少し一般的に、S が複数の場 $\phi_{(i)}$ に依存すると考える。このときに、$\phi_{(i)}$ に対する変分 $\phi_{(i)} + \delta\phi_{(i)}$ を考えて、最小作用の原理を適用すれば

$$0 = \delta S = \int d^4x \left(-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_{(i)}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{(i)}} \right) + \int d\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_{(i)}} \delta\phi_{(i)} \right) \tag{8}$$

となる。ただし第 2 項は時空間での境界面上の積分である。

もしも境界面上での変分 $\delta\phi_{(i)}$ がゼロであれば、Euler-Lagrange 方程式

$$-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_{(i)}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{(i)}} = 0 \tag{9}$$

を得る。

非線型シグマモデルにおける $\mathcal{L}$ に対し、離散的対称性を仮定した式（7）の ϕ に対して 2 次までとった式を使うと、Euler-Lagrange 方程式から

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0 \tag{10}$$

が得られ、これは質量 m の Klein-Gordon 方程式である。式（7）の ϕ に対し 4 次までを考えれば

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = -\frac{\lambda}{6}\phi^3 \tag{11}$$

となるが、この場合には 2 つの解の重ね合わせが解にはならない。

▶ Klein-Gordon 方程式における内積 ◀

Klein-Gordon 方程式を満たす波動関数 ϕ, ψ に対し、内積を

$$(\phi, \psi) = i \int d^3x \left[\psi^* \frac{d\phi}{dt} - \frac{d\psi^*}{dt}\phi \right] \tag{12}$$

と定義すると、

$$\frac{d}{dt}(\phi, \psi) = \int d^3x i \nabla [\psi^* \nabla\phi - (\nabla\psi^*)\phi] = 0 \tag{13}$$

より、この内積は保存する。これはスカラー場の正準量子化のとき、生成消滅演算子の交換関係を求めるのに役立つので紹介した。

2.2　種々の相互作用 Lagrangian 密度

スカラー場以外の場として考えられるものに、すでに相対論的量子力学において述べた 4 成分 Dirac 場がある。もしも Lagrangian 密度がスカラー場と Dirac 場のみを含む場合、Lagrangian 密度の Lorentz 不変性により、Dirac 場は必ず偶数ベキで表れる。実際、Dirac 方程式を導く Lagrangian 密度は、共役スピノル $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ を用いて

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \tag{14}$$

である [*1] 。スカラー場と Dirac 場のみの Lagrangian の例としては、Yukawa 相互作用

$$\mathcal{L}_{\mathrm{y}} = g_{\mathrm{y}} \bar{\psi}\psi\phi \tag{15}$$

[*1] Dirac 場 ψ による Lagrangian 密度の構成には、必ずその共役 $\bar{\psi}$ を用いてそれらが互いに同じ数だけあるように記述しなければ、Lagrangian 密度を Lorentz 不変にすることはできない。

や、微分を用いたものなら

$$\mathcal{L}_{\mathrm{d}} = g_{\mathrm{d}} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi \partial_{\mu} \phi \tag{16}$$

などが考えられる。

さらにベクトル場 A_μ が加わった Lagrangian 密度なら、例えば

$$\mathcal{L}_{\mathrm{v}} = g_{\mathrm{v}} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi A^{\mu} \tag{17}$$

が考えられる。ここで取り上げた Lagrangian 密度は以下で実際に登場する。

3　ゲージ場

3.1　ゲージ原理

スカラー場や Dirac 場の Lagrangian 密度

$$\mathcal{L}_{\mathrm{scalar}} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi^*(x) \partial^{\mu} \phi(x) - \frac{m^2}{2} \phi^* \phi - \frac{\lambda}{24} (\phi^* \phi)^2 \tag{18}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi \tag{19}$$

は、θ を定数として、以下の変換

$$\phi \to e^{i\theta} \phi, \qquad \phi^* \to e^{-i\theta} \phi^* \tag{20}$$

$$\psi \to e^{i\theta} \psi, \qquad \bar{\psi} \to e^{-i\theta} \bar{\psi} \tag{21}$$

のもとで不変であることはすぐに分かる。しかし θ が時空点に依存するとなると、このような位相変換のもとでは $\mathcal{L}_{\mathrm{scalar}}, \mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}}$ は不変でなくなる。言い換えれば、波動関数の位相は観測量ではなく自由に決めれるはずであって、その位相をある時刻・ある場所で取り替えたとしても、他の時刻・場所において位相が変わることはないように思えるにもかかわらず、他の時空点での波動関数の位相を変えなければ Lagrangian 密度が変化し、位相を取り替えただけで異なる理論を与え、そのことにより観測量も変化を被る。要するにすべての時空点で波動関数の位相が全く同じ変換をしなければならないのは物理的に奇妙だと感じるわけである。したがって、位相のパラメータ θ が時空点による場合にも Lagrangian 密度が不変であるとするのが正しいと感じるが、この主張を**ゲージ原理**という。

ゲージ原理に従えば、各時空点で位相変換をばらばらに行っても Lagrangian 密度は不変である。そのようにするには、結論を述べると、

$$D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} - ieA_{\mu}(x) \tag{22}$$

のように、各時空点で定義される量 A_μ を導入して新たな微分 D_μ を定義する。D_μ は**共変微分**と呼ばれ、A_μ は**ゲージ場**という。こうすると、Lagrangian 密度 $\mathcal{L}_{\mathrm{scalar}}$ や $\mathcal{L}_{\mathrm{Drac}}$ において ∂_μ を D_μ に置き換え、位相変換においてゲージ場が

$$A_{\mu}(x) \to A_{\mu}(x) + \frac{1}{e}(\partial_{\mu}\theta(x)) \tag{23}$$

のように変換するとすれば、定義しなおされた新たな $\mathcal{L}_{\mathrm{scalar}}, \mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}}$ は不変となる。このようにしてゲージ場は各時空点でそれぞれ変換され、したがって共変微分も位相変換のもとで変化することになる。つまり、波動関数の位相の変わり方に応じて微分も変化するわけである。

3.2 QED

先ほど導入したゲージ場 A_μ を電磁場、Dirac 場 ψ を電荷に対応させて作られた Lagrangian 密度

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{24}$$

で記述される理論を QED（量子電気力学）という。ここで

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{25}$$

は**場の強さ**と呼ばれる。一般に各時空点による位相変換を $U(1)$ ゲージ変換といい、この変換のもとで Lagrangian が不変であるとき、その理論は $U(1)$ ゲージ対称性をもつといい、$U(1)$ ゲージ理論と呼ばれる。$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ は $U(1)$ ゲージ対称性をもつので、QED は $U(1)$ ゲージ理論である。

4 対称性と保存則

4.1 Noether の定理

何らかの変換をしたときに作用が不変であるとき、対称性をもつという。今、グローバル変換

$$\phi_{(i)}(x) \to \phi_{(i)}(x) + \epsilon^\nu G_{\nu\,(i)}(x) \tag{26}$$

を考える。ϵ^μ は x に依存しない微小量である。この変換に対して作用が不変であるとき、

$$0 = \delta S = \epsilon^\nu \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{(i)}} G_{\nu\,(i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_{(i)}} \partial_\mu G_{\nu\,(i)} \right) \tag{27}$$

より、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{(i)}} G_{\nu\,(i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_{(i)}} \partial_\mu G_{\nu\,(i)} = \partial_\mu X^\mu{}_\nu(\phi) \tag{28}$$

となる関数 $X^\mu{}_\nu$ が存在することになる。

今度は、ϵ^ν が x に依存するような場合を考える。すると、グローバル対称性をもった作用に対し、

$$\phi_{(i)}(x) \to \phi_{(i)}(x) + \epsilon^\nu(x) G_{\nu\,(i)}(x) \tag{29}$$

の変換を行ったときの作用の変分は

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu \epsilon^\nu(x) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_{(i)}} G_{\nu\,(i)} - X^\mu{}_\nu(\phi) \right) \tag{30}$$

であり、ここでカレント $j^\mu{}_\nu(x)$ を

$$j^\mu{}_\nu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_{(i)}} G_{\nu\,(i)} - X^\mu{}_\nu(\phi) \tag{31}$$

と定義すれば、グローバル対称性の条件と Euler-Lagrange 方程式から

$$\partial_\mu j^\mu{}_\nu(x) = 0 \tag{32}$$

が得られる。すなわち、Euler-Lagrange 方程式を満たす ϕ に対して定義されたカレントを用いると、保存量として

$$Q_\nu \equiv \int d^3x\, j^0{}_\nu(x) \tag{33}$$

が存在する。このような事実は Noether の定理として知られている。また、このカレントを Noether カレントと呼ぶ。この計算で明らかなように、以下で種々の対称性を考えたときの保存量を求めることにする。

▶ 時空並進対称性 ◀

時空の対称性の一つの例としてよく取り上げられるものに並進対称性がある。すなわち、

$$x^\mu \to x^\mu - \epsilon^\mu \tag{34}$$

とする。このとき、スカラー場は

$$\delta\phi_{(i)} = \epsilon^\nu \partial_\nu \phi_{(i)} \tag{35}$$

の微小変化をする。この変換に対して作用が不変であることを計算するには、結局は Lagrangian 密度の変化をみればよい。Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ の変化は

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon^\nu \partial_\mu (\delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}) \tag{36}$$

と書けるから、$X^\mu{}_\nu \equiv \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}$ として Noether カレント

$$T^\mu{}_\nu \equiv j^\mu{}_\nu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_{(i)}}\phi^\nu_{(i)} - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L} \tag{37}$$

が求められる。これは混合成分のエネルギー運動量テンソルである。保存量は

$$P_\nu \equiv \int d^3x\, T^0{}_\nu(x) \tag{38}$$

である。ここで、スカラー場のみを考えてきたのであって、重力場は存在しないとしている。すなわち、添字の上げ下げは $\eta^{\mu\nu}$ により行われるので、保存量の反変成分は $P^\nu = \eta^{\nu\mu}P_\mu$ とできるが、これはスカラー場のエネルギー運動量テンソルである。他の量も同様にして、$\eta^{\mu\nu}$ による添字の上げ下げで反変成分、共変成分をつくることができる。

▶ 内部対称性 ◀

次のグローバル変換

$$\phi \to \phi + i\epsilon^\nu T_\nu \phi \tag{39}$$

を考える。このような変換を考えるのは、後で出てくる BRST 変換がこの形をしているからであり、あらかじめグローバル変換の例としてここで計算しておくのである。ϵ^ν, T_ν は x に依存しない。この変換に

対して作用が不変であるとして、Noether カレントおよび保存量を計算過程で、$X^\mu{}_\nu = 0$ととれるから

$$j^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} i T_\nu \phi \tag{40}$$

$$Q_\nu = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi} i T_\nu \phi \tag{41}$$

となる。一般に、式（39）による変換で作用が不変なとき、系は内部対称性をもつと呼ぶ。

4.2 共形群

ここでは少し本題から離れて、共形群について説明する。今、$\lambda \ll 1$として座標変換

$$\delta x^\mu = -\lambda x^\mu \tag{42}$$

を考える。これは$x^\mu \to x^\mu e^{-\lambda}$と変換したものであり、同時にスカラー場$\phi$も$\phi \to \phi e^{-\lambda}$と変化するとする。これを無限小スケール変換という。このとき、

$$\delta \phi = -i\lambda D\phi, \quad D \equiv i(x^\mu \partial_\mu + 1) \tag{43}$$

である。また、無限小平行移動$\delta x^\mu = -\epsilon^\mu$から

$$\delta \phi = -i\epsilon^\mu P_\mu, \quad P_\mu \equiv i\partial_\mu \tag{44}$$

無限小 Lorentz 変換$\delta x^\mu = -\omega^\mu{}_\nu x^\nu$から

$$\delta \phi = -i\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu} \phi, \quad J_{\mu\nu} \equiv i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \tag{45}$$

が得られる。さらに変換

$$\delta x^\mu = -2c_\nu x^\nu x^\mu + c^\mu x^2 \tag{46}$$

を考える。これは特殊共形変換と呼ばれる。このとき、scalar 場の変換は

$$\delta \phi = -ic^\mu K_\mu \phi, \quad K_\mu \equiv i(2x_\mu x^\nu - x^2 \delta_\mu{}^\nu)\partial_\nu + 2ix_\mu \tag{47}$$

と書ける。

ここまでで得られた 4 つの演算子$D, P_\mu, K_\mu, J_{\mu\nu}$は以下のような交換関係を満たす：

$$[D, D] = 0 \tag{48}$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \tag{49}$$

$$[K^\mu, K^\nu] = 0 \tag{50}$$

$$[P^\mu, J^{\nu\lambda}] = i(\eta^{\mu\nu} P^\lambda - \eta^{\mu\lambda} P^\nu) \tag{51}$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\lambda\rho}] = -i(\eta^{\mu\lambda} J^{\nu\rho} - \eta^{\nu\lambda} J^{\mu\rho} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\lambda} + \eta^{\nu\rho} J^{\mu\lambda}) \tag{52}$$

$$[D, P^\mu] = -iP^\mu \tag{53}$$

$$[D, J^{\mu\nu}] = 0 \tag{54}$$

$$[D, K^\mu] = iK^\mu \tag{55}$$

$$[K^\mu, P^\nu] = -2i(\eta^{\mu\nu} D + J^{\mu\nu}) \tag{56}$$

$$[K^\mu, J^{\nu\lambda}] = i(\eta^{\mu\nu} K^\lambda - \eta^{\mu\lambda} K^\nu) \tag{57}$$

上記のように、4 つの演算子は交換関係について閉じており、Lie 代数をなしていることを示している。これらの演算子が生成する Lie 群を**共形群**という。実際、微小変換であるから、例えば Lorentz 変換 Λ なら

$$\Lambda^{\nu}{}_{\mu}x^{\mu} = \exp(J^{\nu}{}_{\mu})x^{\mu} \simeq (1 + J^{\nu}{}_{\mu})x^{\mu} = x^{\nu\prime} \tag{58}$$

が得られ、実際に無限小 Lorentz 変換の生成子になっていることがわかる。

これらの交換関係を見ると分かるように、$J_{\mu\nu}$ のみでも交換関係として閉じているが、一般にこれは Lorentz 群の Lie 代数になっており、また $P_{\mu}, J_{\mu\nu}$ だけでも同様に閉じており、これが Poincaré 群の Lie 代数となっている。

数学的には交換関係が群の代数構造を決めているので、場を量子化した場合にもこれらの交換関係は成り立つ。実は、平行移動、Lorentz 不変性、スケール不変性が成り立つと、自動的に特殊共形変換に対しても不変であることが知られている。