# II. 一様非等方背景

作用は

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2\kappa^2}R-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\cdot\partial^\mu\phi-W(\phi)-\frac{1}{4}f^2(\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]$$

$$F_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \qquad (以後\ \kappa=1)$$

まず vector 場 $A_\mu$ について、$F_{\mu\nu}$ を通してのみ現れるので、

gauge 自由度がある。そこで、$A_0=0$ という gauge を採ることとし、

更に、vector 場の"向き"を $x$ 軸にとることとする。即ち、

$$A_\mu=(0,A_x(t),0,0)\quad,\quad \phi=\phi(t)$$

とおくことにする。

これにあわせて、計量も非等方時空

$$ds^2=-dt^2+e^{2\alpha(t)}\left[e^{-4\sigma(t)}dx^2+e^{2\sigma(t)}(dy^2+dz^2)\right]$$

を仮定する。

ここで

$H\equiv\dot{\alpha}$ : 体積の膨張率 : 等方宇宙での Hubble parameter に対応

$(\dot{\ })\equiv\dfrac{d}{dt}$ : cosmic time での微分

$\Sigma\equiv\dot{\sigma}$ : 空間の剪断率

を定義し、これらに注目する。

KYOTO UNIVERSITY
Department of Physics
Graduate School of Science
Yoshida South



・基礎方程式は、　定数 $p_A$ を用いて、$\dot{A}_x = f^{-2} e^{-\alpha-4\sigma} p_A$ となるのを用いて、

Hamiltonian constraint:

$$\dot{\alpha}^2 = \dot{\sigma}^2 + \frac{\kappa^2}{3}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + W(\phi) + \frac{p_A^2}{2} f(\phi)^{-2} e^{-4\alpha-4\sigma}\right]$$

EoM:

$$\dot{H} = \ddot{\alpha} = -3\dot{\alpha}^2 + \kappa^2 W(\phi) + \frac{\kappa^2 p_A^2}{6} f(\phi)^{-2} e^{-4\alpha-4\sigma}$$

$$\dot{\Sigma} = \ddot{\sigma} = -3\dot{\alpha}\dot{\sigma} + \frac{\kappa^2 p_A^2}{3} f(\phi)^{-2} e^{-4\alpha-4\sigma}$$

$$\ddot{\phi} = -3\dot{\alpha}\dot{\phi} - W_{,\phi} + p_A^2 f^{-3} f_{,\phi} e^{-4\alpha-4\sigma} \qquad (_{,\phi}) \equiv \frac{d}{d\phi}$$

となる。

まず inflation が起きるには、

$$\frac{(e^{\alpha})^{\cdot\cdot}}{e^{\alpha}} = -2\dot{\sigma}^2 - \frac{\kappa^2}{3}\dot{\phi}^2 + \frac{\kappa^2}{3}\left[\underline{\underline{W}} - \frac{p_A^2}{2} f^{-2} e^{-4\alpha-4\sigma}\right] > 0$$

つまり、準dSには、inflaton potential $W$ が、支配的になる必要がある。

次にこれを仮定した上で、"歪み"の発展をみる。

$\sigma$ の EoM より、$f$: const. とすると、　$\Sigma \downarrow 0$ となってしまうことがわかる。　これは正に宇宙無毛仮説が、あてはまる状況である。

KYOTO UNIVERSITY
Department of Physics
Graduate School of Science
Yoshida South



そこで、剪断率Σがdecayせず、ほぼ一定となるように、例えば、

$f(\phi) \propto e^{-2\alpha}$ となるような $f(\phi)$ の関数形を考えてみよう。

inflaton場のdynamicsに対するvector場の寄与が、subdominantであるとして、従来のslow roll inflationを仮定すると、

$$\frac{d\alpha}{d\phi} \simeq -\frac{\kappa^2 W(\phi)}{W_{,\phi}}$$ より、

$$f \propto e^{-2\alpha} = e^{2\kappa^2 \int \frac{W}{W_{,\phi}} d\phi}$$ であり、

例えば $\phi^n$ potentialであれば、$f \propto e^{\frac{\kappa^2\phi^2}{n}}$ である

以下、簡単のため、$W = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ を仮定するが、
同様のことが、$\phi^n$ に限らず、一般のslow roll modelに適用できる。

今回は、このことをヒントに定数 $c$ を用いて、

$$f = e^{c\cdot\frac{\kappa^2\phi^2}{2}}$$

というcoupling functionを仮定して、宇宙の発展をみてみる。
(特に $\Sigma/H$)

ここで重要なのは、剪断率は、inflaton場と、vector場のenergy密度を用いて、

$$\frac{\Sigma}{H} \simeq \frac{2}{3}\mathcal{R}, \quad \mathcal{R} \equiv \frac{\rho_{vector}}{\rho_{inflaton}} \qquad \rho_{vector} \equiv \frac{1}{2}p_A^2 f^{-2} e^{-4\alpha-4\sigma}$$

$$\rho_{inflaton} \simeq W$$

と評価できる。

KYOTO UNIVERSITY
Department of Physics
Graduate School of Science
Yoshida South



なぜなら、σのEoMより σの終端速度は、

$$\Sigma \to H^{-1}\cdot \frac{2}{9}\kappa^2 \rho_{vector}$$

と評価できるので。

従って、c=1 の場合、

$$\frac{\Sigma}{H} = O\left(\left.\frac{\rho_{vect}}{\rho_{inflaton}}\right|_{t_i}\right) : \text{const.}$$

即ち、剪断率と膨張率の比は、inflation初期のvector場とinflaton場の密度比となる。

但し、このとき、$\frac{\Sigma}{H} < O(\varepsilon_1^2)$ $\quad \varepsilon_1 \equiv -\frac{\frac{dH}{dt}}{H^2}$

というsuppressを受ける。(初期に $\left.\frac{\rho_{vect}}{\rho_{inf}}\right|_{t_i} > \varepsilon_1^2$ を仮定しても、$<$ までdecayする)

では、c>1 ならばどうなるだろうか。