

# 海王星のマイグレーションと太陽系外縁天体の起源

並河 俊弥

平成20年3月26日提出  
京都大学理学部 課題研究P5 卒業論文

## 概要

最近、冥王星の軌道でもある海王星の3:2共鳴軌道に多くの小天体が発見され始めている。さらにそのほかの共鳴軌道にも小天体多数分布していることが分かってきた。このように海王星以遠の領域における天体、すなわちKuiperベルト天体の特徴は、特異な離心率および傾斜角をもつものが非常に多いことである。太陽系内の惑星は、水星を除けば軌道の離心率は0.1にくらべて小さい。一方、この共鳴軌道にある天体の離心率は0.1よりも大きいものがほとんどで、冥王星なら0.25近くある。これら得異なる軌道要素をもつ天体、すなわち太陽系外縁天体の起源は、現在、海王星のマイグレーションが関与した考えられている。しかし海王星のマイグレーションのみでは、このような軌道要素は完全に再現できるわけではない。

本論文では、海王星によるマイグレーション、およびガスの重力がどのように微惑星の軌道要素に影響するか数値計算で追い、現在の太陽系外縁天体の軌道要素を再現できるか考察した。その結果、離心率は十分増加するが、傾斜角の変化は小さく、ガス重力により減少することが分かった。我々が仮定した海王星のマイグレーションとガス重力では、現在観測されている太陽系外縁天体の軌道分布を再現できないことがわかった。

---

# 目次

<b>1. Introduction</b>	<b>3</b>
1.1. 海王星の形成	3
1.2. 現在観測されている太陽系外縁天体	3
1.3. 本論文の構成	4
<b>2. Migration</b>	<b>5</b>
2.1. 京都モデルと原始海王星のマイグレーション	5
<b>3. 数値計算</b>	<b>6</b>
3.1. マイグレーションモデル	6
3.2. 数値計算結果	6
3.3. 考察 I	8
3.4. 数値計算結果 2	8
3.5. 考察 II	9
<b>4. 数値計算（円盤ガスを想定）</b>	<b>16</b>
4.1. 円盤ガスモデル	16
4.2. 数値計算結果 1	17
4.2.1. 近日点の時間発展	17
4.2.2. 軌道傾斜角の時間発展	18
4.2.3. 離心率・軌道長半径の時間発展	18
4.3. 数値計算結果 2	19
<b>5. 海王星の摂動による軌道要素の変化</b>	<b>22</b>
5.1. 最低次での軌道要素の変化	22
5.2. 傾斜角の変化	24
<b>6. まとめ</b>	<b>30</b>
<b>A. 天体と軌道の力学</b>	<b>31</b>
A.1. Kepler 運動	31
A.2. 制限 3 体問題	35
A.3. 軌道要素の運動方程式	37
<b>B. 摂動関数の展開</b>	<b>43</b>
B.1. $e, s$ に関する 2 次までの展開	43
<b>C. Symplectic Integrators</b>	<b>46</b>
C.1. 四次のシンプレクティック法	46

<b>D. epicyclic motion</b>	<b>48</b>
D.1. 近日点の移動	48

---

# 第 1 章 Introduction

## 1.1 海王星の形成

太陽系形成の標準理論モデルとして知られる京都モデルは多くの観測的事実を統一的に説明する。しかし京都モデルにはいくつかの問題点も存在する。そのうちのひとつである海王星形成問題は、現在の軌道上で海王星のもととなる原始惑星が誕生するために必要な時間が太陽系の年齢を越えてしまうというものである。その解決策として現在考察されているのが海王星のマイグレーションである。これは、海王星のコアが今よりも内側で形成され、外側へと移動し現在の軌道になったというものである。内側で形成されるため、太陽系の年齢を超えずして海王星が形成される。ただしマイグレーションの原因に関する完全な解答は得られていない。

重要なのは、海王星がマイグレーションすることでは、海王星形成問題を解決するだけでなく現在の Kuiper ベルトにある太陽系外縁天体 (Trans Neptunian object, TNO) の軌道要素をうまく説明できると期待されている点である。数値計算の結果が示すには、海王星より外側の領域にあった小天体の多くは海王星の外側共鳴軌道に捕えられ、その軌道にロックされながら自身の離心率を増加させる。現在の Kuiper ベルトにある太陽系外縁天体はこれのようにして現在の軌道に掃き集められ、現在観測されるような大きい離心率を得たと考えられている。

## 1.2 現在観測されている太陽系外縁天体

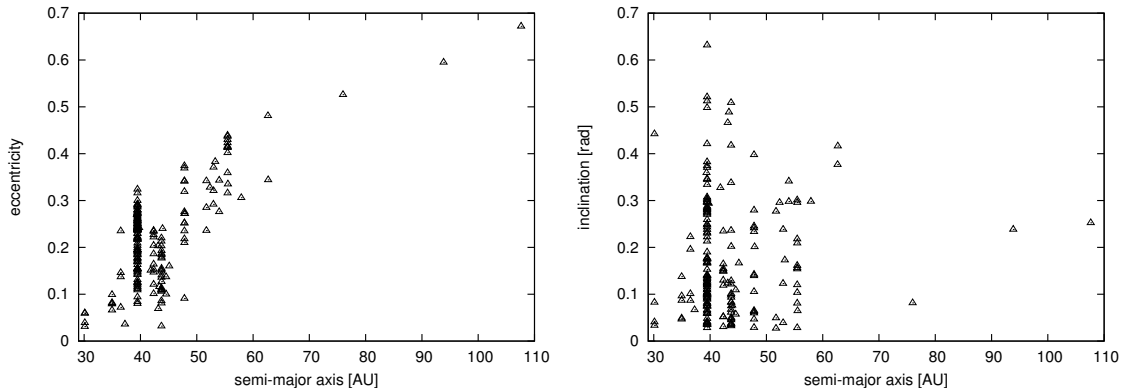


図 1: 現在観測されている太陽系外縁天体の軌道長半径と離心率 (左) および軌道長半径と傾斜角 (右)。参考文献 [8] をもとに描いた。

観測された Kuiper ベルトにおける太陽系外縁天体の数は年々増加しており、それらの軌道長半径、離心率、傾斜角などが測定されている。図は参考文献 [8] をもとに現在観測されている太陽系外縁天体の離心率、傾斜角を軌道長半径に対して描いたものである。観測されている太陽系外縁天体の離心率、軌道傾斜角は太陽系内の惑星と比較すると非常に大きな値をもつことがわかる。

### 1.3 本論文の構成

ここで、本論文の構成について述べる。まずは第2節で海王星のマイグレーションについてレビューする。第3節では、太陽、海王星、微惑星の3体のみを考え、海王星が外側へと移動していく際に微惑星が捕獲されるようすを数値的に計算する。第4節では海王星以外にガス重力を含めて微惑星の軌道要素がどのように変化するか数値計算を行った。第5節では海王星の摂動により微惑星の軌道要素がどのように変化するか計算を行い、数値計算結果と比較する。

付録Aではゼミで行った「天体と軌道の力学」の内容を簡単にまとめる。付録Bでは摂動関数の展開方法について、参考文献 [6] から引用する。付録Cではシンプレクティック法について、付録Dでは周点円運動についてそれぞれまとめた。

## 第2章 Migration

### 2.1 京都モデルと原始海王星のマイグレーション

まずはじめに、京都モデルについて簡単に振り返る。京都モデルでは、もともと存在した原始太陽系星雲は太陽質量程度で、惑星などのもととなる原始惑星星雲の総質量が太陽質量の百分の一程度でだとしている。原始惑星星雲は、ヘリウム、水素からなるガスが99%を占め、残りは炭素原子、窒素原子などを成分とした固体微粒子からなる1%程度のダストであったと考える。京都モデルでは、原始惑星星雲のガス密度分布が以下のように与えられる：

$$\rho(r, z) = 1.4 \times 10^{-9} \left( \frac{r}{1\text{AU}} \right)^{-11/4} \exp \left( -\frac{z^2}{z_0^2} \right) \quad [\text{g/cm}^3] \quad (2.1)$$

ここで

$$z_0 = 0.047 \times \left( \frac{r}{1\text{AU}} \right)^{5/4} \quad [\text{AU}] \quad (2.2)$$

はガスの厚みである。原始太陽による重力で回転している原始惑星星雲は内側へと引き込まれるが、回転速度が上がり遠心力と重力がある時点で釣り合い収縮が止まる。星雲中のダストは赤道面に集まりそこにダスト層が形成されるが、次第にそれらが重力不安定を起こして微惑星が形成される。これらの微惑星は互いの重力により散乱・衝突を繰り返すことで次第に大きくなり原始惑星が誕生する。

この原始惑星の誕生の際、現在の地球軌道のように太陽に近いところにある原始惑星ほど成長は早い。なぜなら、内側ほど微惑星は密集していて公転速度も大きく衝突頻度が外側に比べて高くなるからである。一方で外側に行くほど衝突による成長時間は長くなる。しかも現在の海王星軌道上で惑星ができるためには太陽系の年齢を超えてしまうが、これは海王星形成問題としてよく知られている。

遠方では温度が低く、氷などの固体も原始惑星の材料になり、非常に大きな質量をもった原始惑星ができる。これらはまわりのガスを自身の重力で捕えていき、さらに質量を増やす。現在の木星、土星はこのようにしてできたと考えられている。さらに遠方では、原始惑星が形成されるころにはほとんどガスが散逸してしまい、現在の木星・土星のようにガスを十分取り巻くことはできず、ガスの層はこれらに比べて薄いものになった。これが現在の天王星・海王星の成り立ちである。

このように京都モデルは現在の太陽系の姿をうまく説明しているが、海王星の形成時間が太陽系の年齢を超えてしまうというのは問題となる。しかし海王星の原始惑星、すなわち原始海王星が外側へマイグレーションしたと考えるとこの困難は除くことができる。

マイグレーションの原因については数値計算などから多くのことが示唆されている。原始海王星が形成された時点では、まわりには多くの微惑星、ガスが同じように太陽の周りをKepler運動をしていたと考えられる。そしてその微惑星、ガスと角運動量の交換を行うことで、原始海王星は外側へと移動することができる。

原始海王星がマイグレーションする間、原始海王星以遠の微惑星は原始海王星から摂動を受けるが、共鳴軌道に位置したときに非常に大きな摂動を受け、この共鳴軌道に捕獲される。そしてこれらが現在の太陽系外縁天体となった。この捕獲されるようすを次章で数値的に計算する。

## 第3章 数値計算

### 3.1 マイグレーションモデル

マイグレーションする天体の運動はあらかじめ次のように与えておく：

$$\mathbf{r}'(t) = R(t)(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)), 0) \quad (3.1)$$

ここで、海王星が太陽中心の Kepler 回転をしながら角運動量を得て外側へとマイグレーションすると考え、

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{R^3(t)}} \quad (3.2)$$

が成り立つとする。これから、

$$R(t) = (R - 5e^{-t/\tau_p}) \quad (3.3)$$

$$\theta(t) = \sqrt{\frac{\mu}{R^3}} \left( t + 2\tau_p \ln \frac{\sqrt{R} + \sqrt{R(t)}}{\sqrt{R} + \sqrt{R-a}} - 2\tau_p \left( \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R(t)}} - \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R-a}} \right) \right) \quad (3.4)$$

とした。 $\tau_p$  はパラメータである。またパラメータの違いにより、以下のようにモデルを分けた。ただし、 $M_N = 5.1514 \times 10^{-5}$  である。

Model	M	$\tau_p$	$e$	$I$
S	$M_N$	$10 \times 10^6$	0.01	0.01
M1	$M_N/10$	$10 \times 10^6$	0.01	0.01
$\tau 1$	$M_N$	$10 \times 10^5$	0.01	0.01
$\tau 2$	$M_N$	$10 \times 10^7$	0.01	0.01
I1	$M_N$	$10 \times 10^6$	0.01	0.1
I2	$M_N$	$10 \times 10^6$	0.01	0.5

標準モデルでは原始海王星が形成されてからまわりのガスを付着させて質量を増やしていったと考えられるので、元の質量は現在よりも小さかったと考えられる。しかし今回のモデルではマイグレーション途中での海王星質量の増加は考慮していない。また微惑星の初期の傾斜角に関しては、微惑星がダスト内で形成されたことを考えると非常に小さな値をもたなければならない。少なくともガスの厚みよりは小さいので、30 AU から 40 AU 付近でのガスの厚みが約 0.3 ~ 0.5 AU であることを考え、初期の値はこれらを限界とした。

### 3.2 数値計算結果

以下にモデル S の数値計算結果を載せておく。このモデルで微惑星の捕獲された共鳴軌道は、図2から、2:1 (47.8 AU), 3:2 (39.4 AU), 4:3 (36.5 AU), 5:4 (34.9 AU), 7:6 (33.4 AU) であることがわかった。

次に、このモデルにおいて、ある軌道要素においた微惑星の軌道要素の時間発展を示す。まずは 38 AU にあった微惑星の軌道要素  $\omega, \Omega, I$  と共鳴角  $\psi$  の時間発展の数値計算結果を以下に示す。この微惑星は 3 : 2 共鳴軌道に捕えられた。共鳴軌道に捕えられたタイミングは図2から  $t/\tau_p \sim 1.5$  くらいで、そのときに各軌道要素が変化をみせている。

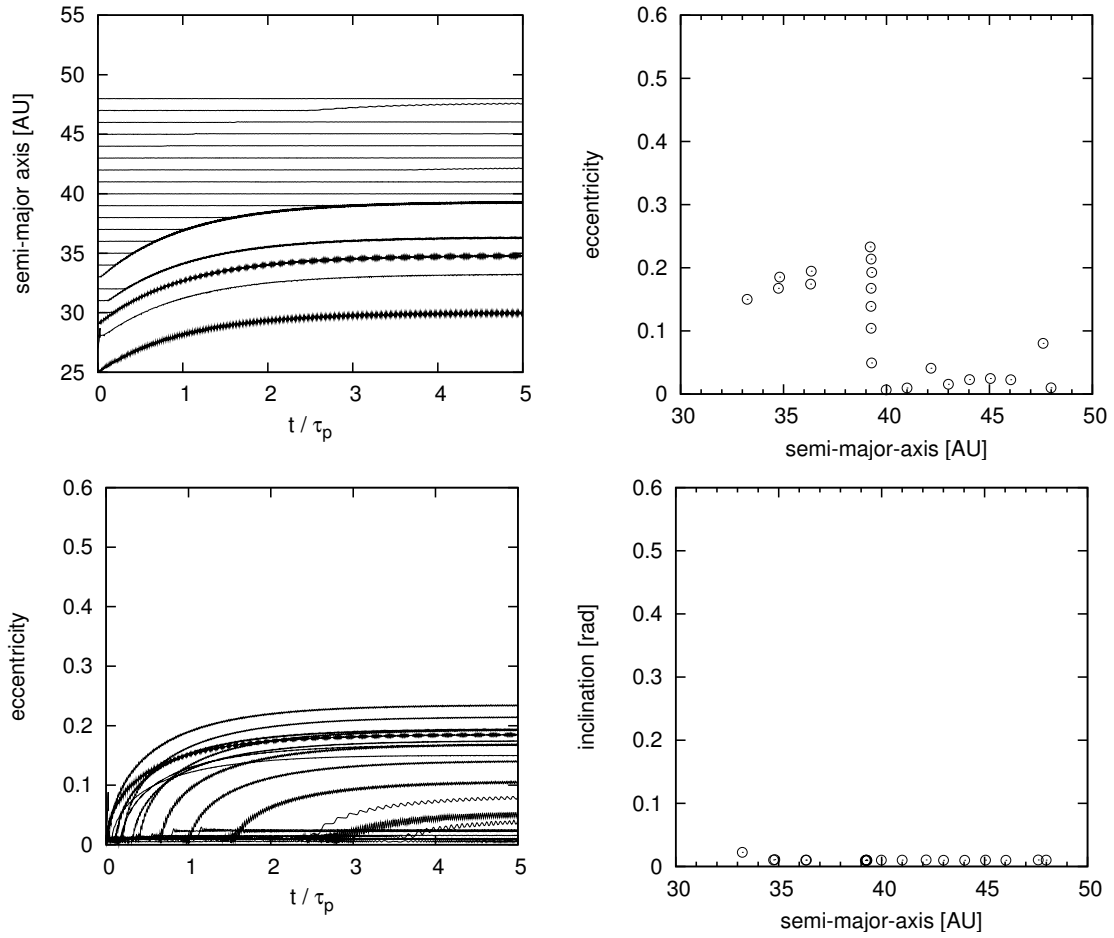


図 2: 軌道長半径の時間発展、最終的な軌道長半径と離心率、離心率の時間発展、最終的な軌道長半径と傾斜角。

今度はもっと内側の 27.7 AU にあった微惑星の軌道要素  $\omega, \Omega, I$  と共鳴角  $\psi$  の時間発展の数値計算結果を以下に示す。ただし計算時間は 2 倍にした。この微惑星は 7 : 6 共鳴軌道に捕えられた。ほとんど初期の段階  $t/\tau_p \sim 0.01$  で共鳴軌道に捕えられていた。

さらに、27.8 AU にあった微惑星の軌道要素  $\omega, \Omega, I$  と共鳴角  $\psi$  の時間発展の数値計算結果を以下に示す。同様に計算時間を 2 倍にした。この微惑星は 7 : 6 共鳴軌道に捕えられ、傾斜角が増加した。これも同様にほとんど初期  $t/\tau_p \sim 0.01$  で捕えられていた。

これらの微惑星が共鳴軌道に捕えられている場合、合になるのが遠日点に近ければ弱い摂動を受け、近日点に近ければ摂動が強い。この合になる点を調べるため、それらが非常に接近した各瞬間に対し、それが遠日点に近いのか、近日点に近いかを調べていった。さらに、初期の微惑星と原始海王星との位置関係の依存性を確かめるために、初期状態での原始海王星と微惑星のなす角  $\omega$  を  $0, \pi/2, \pi$  と 3 つの場合について数値計算を行った。34 AU から始めた微惑星について、その結果を図??に示す。

これから、初期の原始海王星と微惑星の位置関係には関係なく、共鳴軌道に捕えられたあとは遠日点で合になる。



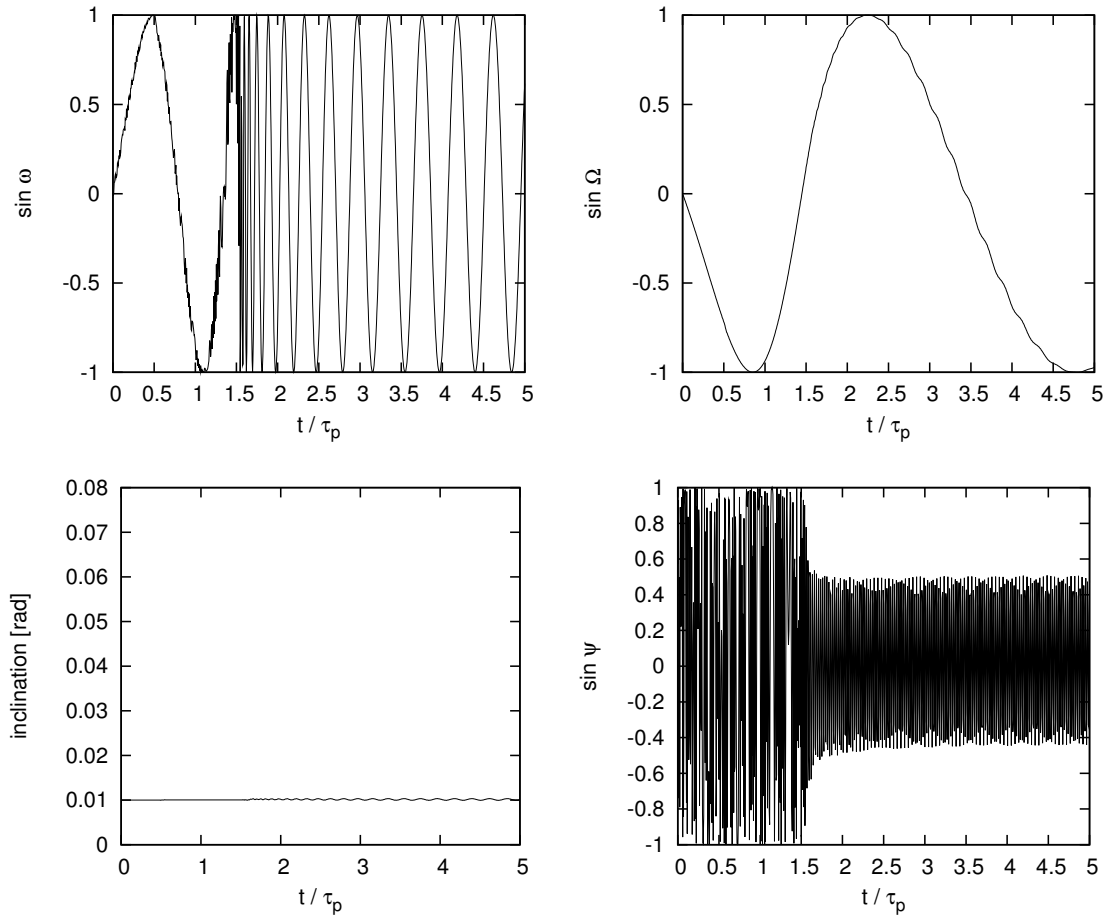


図 3:  $\omega$ 、 $\Omega$ 、傾斜角および共鳴角の時間発展。

### 3.3 考察 I

Fig 2から、このモデルでは離心率が飛躍的に増加することが分かったが、一方で傾斜角に関しては現在の太陽系外縁天体を説明することはできない。

3 : 2 共鳴軌道に捕えられた微惑星の軌道要素の時間発展については付録??で議論してあるが、それから離心率の増加は（最低次ではあるが）説明できる。また傾斜角に関してはほとんど増加しないことも分かった。共鳴角  $\psi$  は、十分時間がたてば最低次で  $\sin \psi = 0$  となることも述べた。したがって、数値計算結果 Fig 5の振動部分はより高次の時間発展を考えないと説明できない。

7 : 6 共鳴軌道に捕えられた微惑星の軌道進化に関しても 3 : 2 の場合と同様に議論できるが、27.8 AU 付近のように傾斜角が飛躍的に増加するものもある。

### 3.4 数値計算結果 2

今度は、別のモデルに対してそれぞれ数値計算した結果を示す。

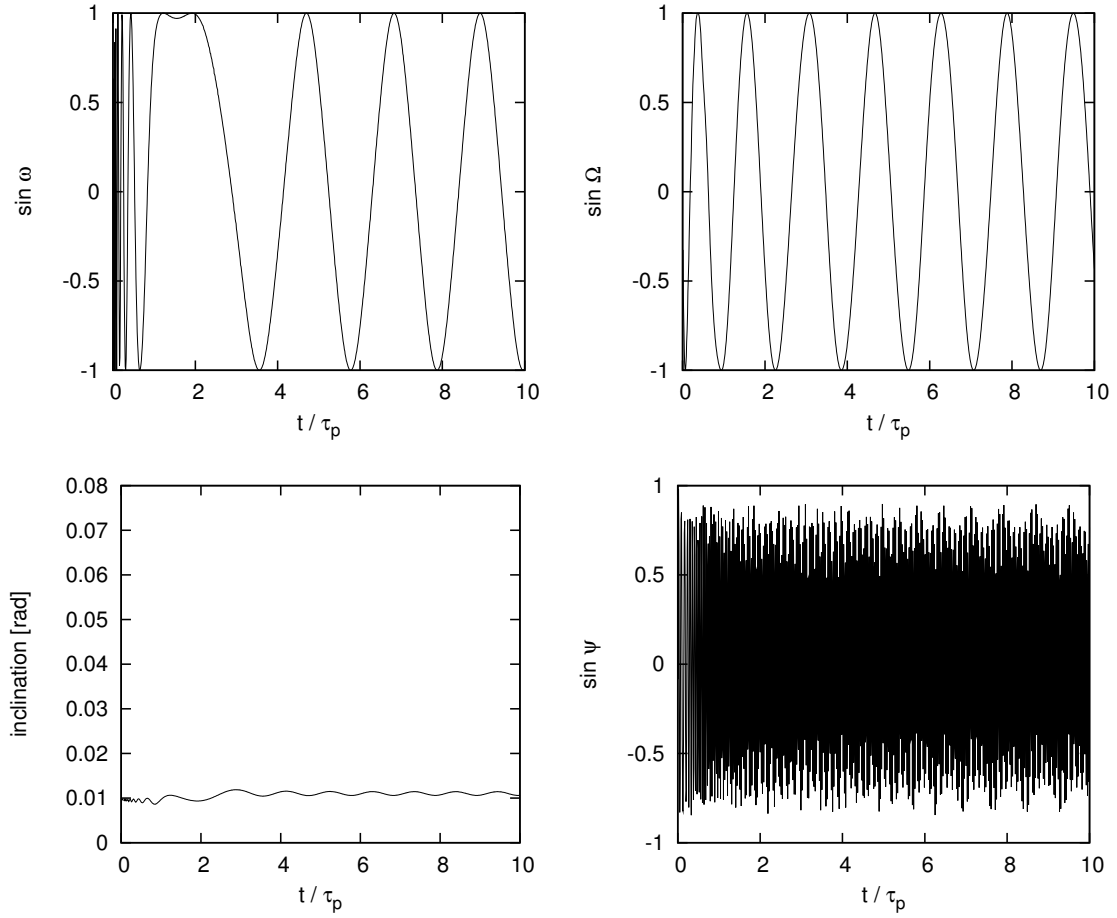


図 4:  $\omega$ 、 $\Omega$ 、傾斜角および共鳴角の時間発展。

### 3.5 考察 II

図7と図8から、マイグレーションが早いほど共鳴軌道に捕えられる微惑星は少なくなる。また捕えられた微惑星の離心率も、早いほど上昇しないことがわかる。図8では 40AU 以上にあった微惑星がすべて外側 2:1 共鳴軌道に捕えられているが、図7では外側 2:1 共鳴軌道に捕えられた微惑星はない。もしも原始海王星と現在の海王星の質量の間にほとんど差がなく一定に保たれてきたなら、現在観測されている太陽系外縁天体の分布を再現するには  $\tau_p$  が  $10^6$  年程度必要となる。

一方、原始海王星の質量を減らした場合はマイグレーションによる捕獲が起こりにくいことがわかり、捕獲されても離心率の増加はモデル S より小さい。この質量のモデルでは外側 3:2 共鳴軌道に捕えられた微惑星もなかった。また傾斜角の増加も起こらなかった。今回のモデルでは、捕獲される確率  $P$  は [1]

$$P \propto \left( \frac{M_p}{M_N} \right)^{4/3} \left( \frac{\tau_p}{1\text{yr}} \right) \quad (3.5)$$

と書けるので、モデル S と同様の捕獲確率を得るためには  $\tau_p$  を長くする必要がある。

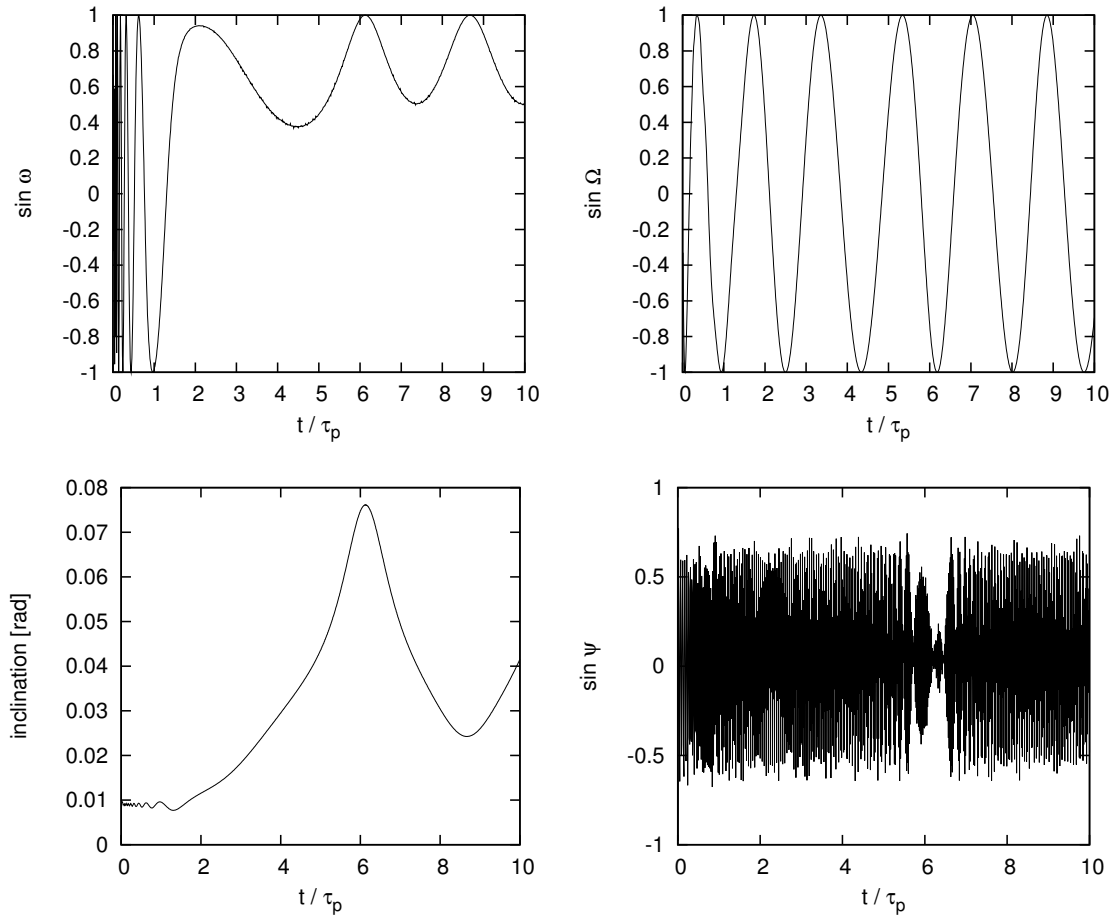


図 5:  $\omega$ 、 $\Omega$ 、傾斜角および共鳴角の時間発展。

微惑星の初期の傾斜角を変化させた場合の数値計算結果によれば、捕獲される微惑星の数に大きな変化はなかった。また、離心率の時間発展では増加中に振動していることが分かり、傾斜角も振動している。これは Kozai 機構によるものと考えられる。また、捕獲された微惑星の傾斜角は振動するだけで平均は一定に保たれたままであった。したがって初期の微惑星の傾斜角の分布を変えることで、最終状態の傾斜角を初期より変化させることはできなかった。

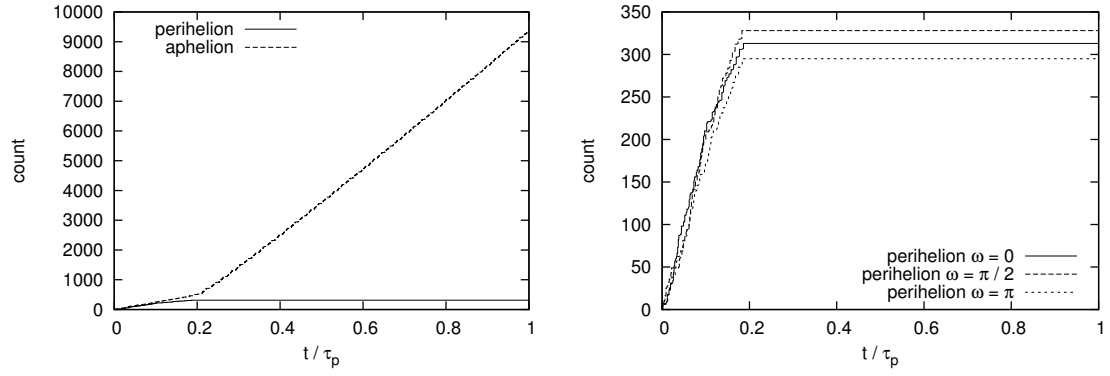


図 6: (左): 34 AU から始めた微惑星が原始海王星に接近したときに、近日点であった場合、遠日点であった場合それぞれを時間とともにカウントしていった。共鳴軌道に捕えられて以降、合になるときは遠日点になることが分かる。(右): 近日点のみを比較した。いずれの場合も共鳴軌道に捕獲されて以降、近日点で合が起こることはなく、遠日点で合が起こるようになっていた。

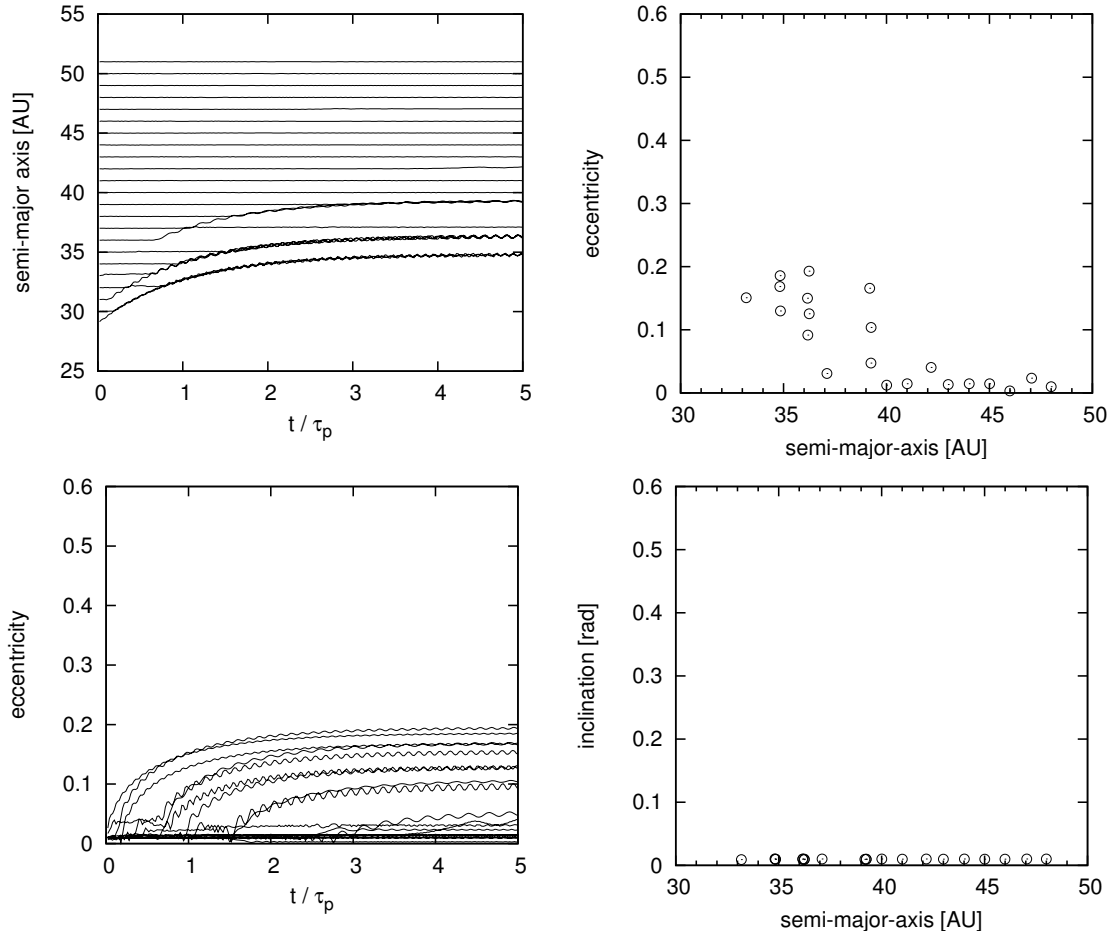


図 7: モデル  $\tau_1$  での軌道長半径の時間発展、最終的な軌道長半径と離心率、離心率の時間発展、最終的な軌道長半径と傾斜角。

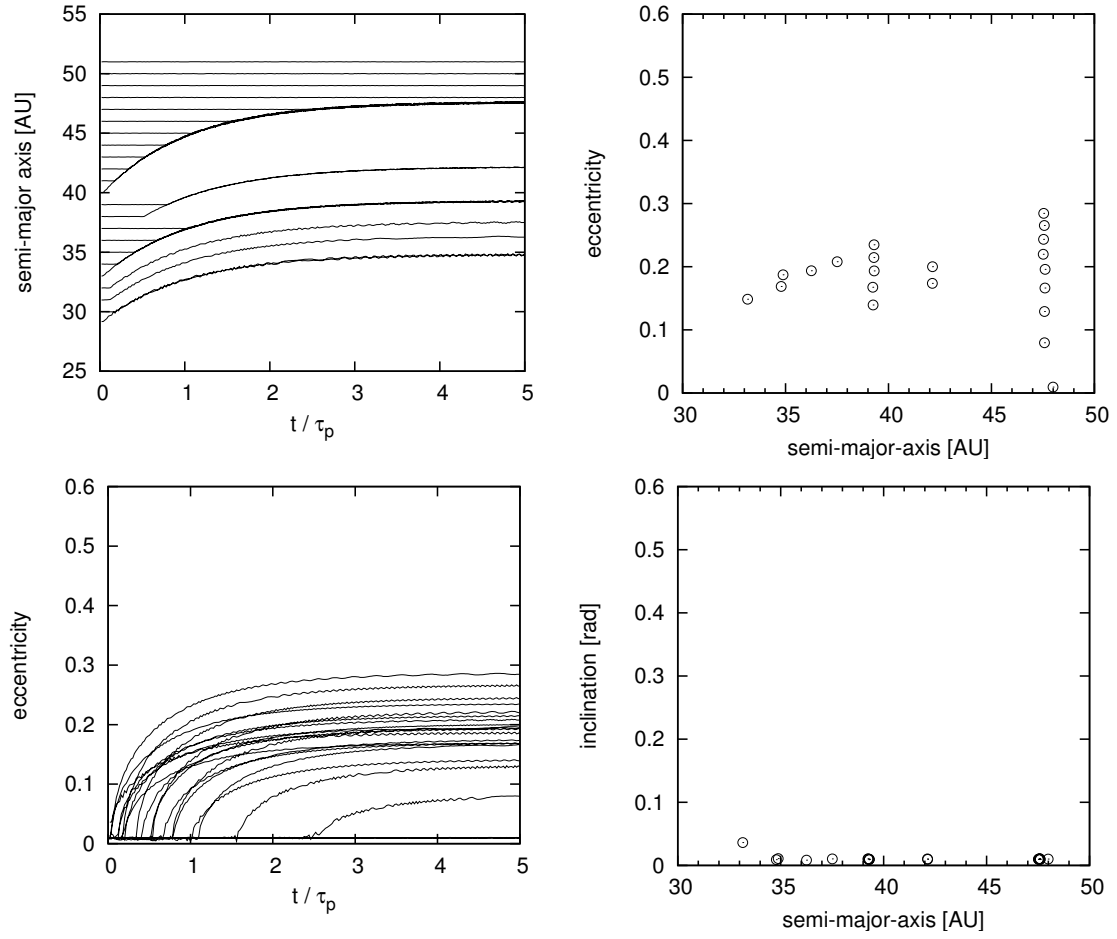


図 8: モデル  $\tau_2$  での軌道長半径の時間発展、最終的な軌道長半径と離心率、離心率の時間発展、最終的な軌道長半径と傾斜角。

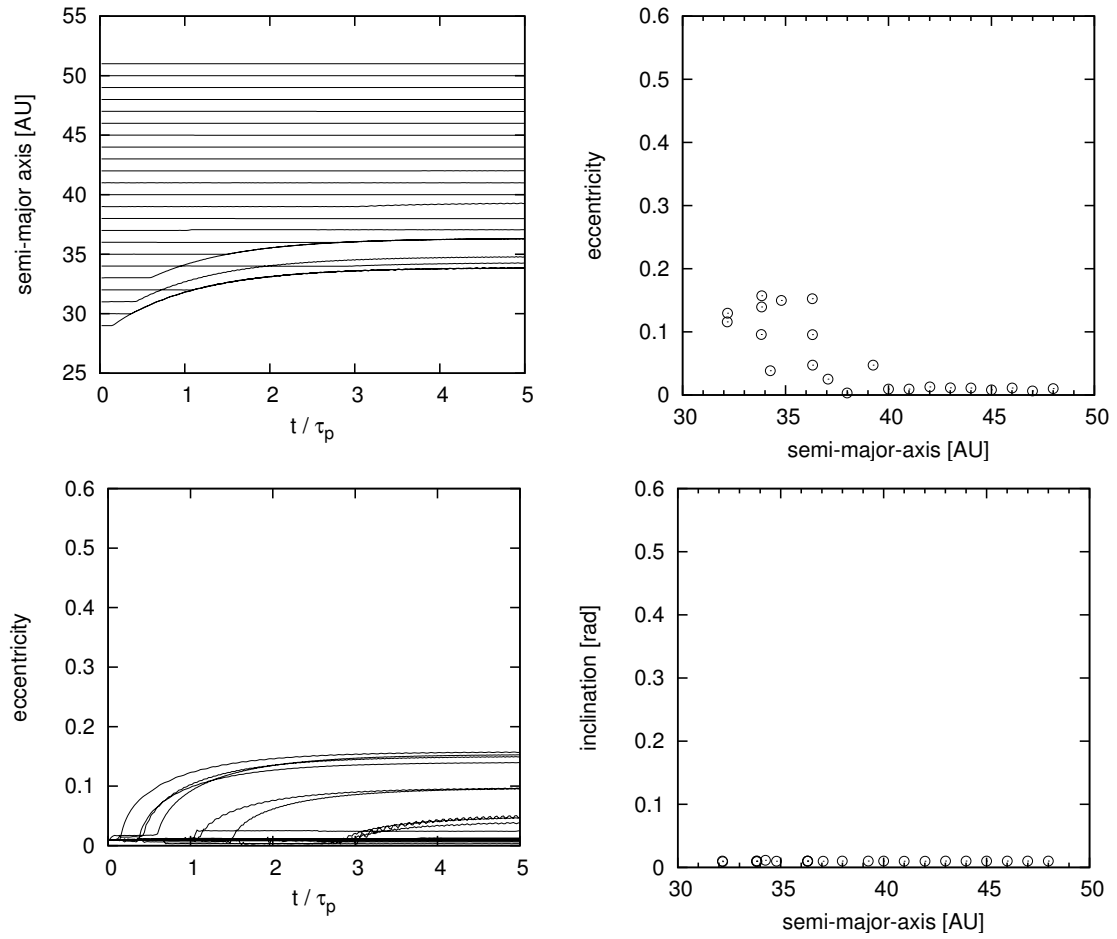


図 9: モデル  $M1$  での軌道長半径の時間発展、最終的な軌道長半径と離心率、離心率の時間発展、最終的な軌道長半径と傾斜角。

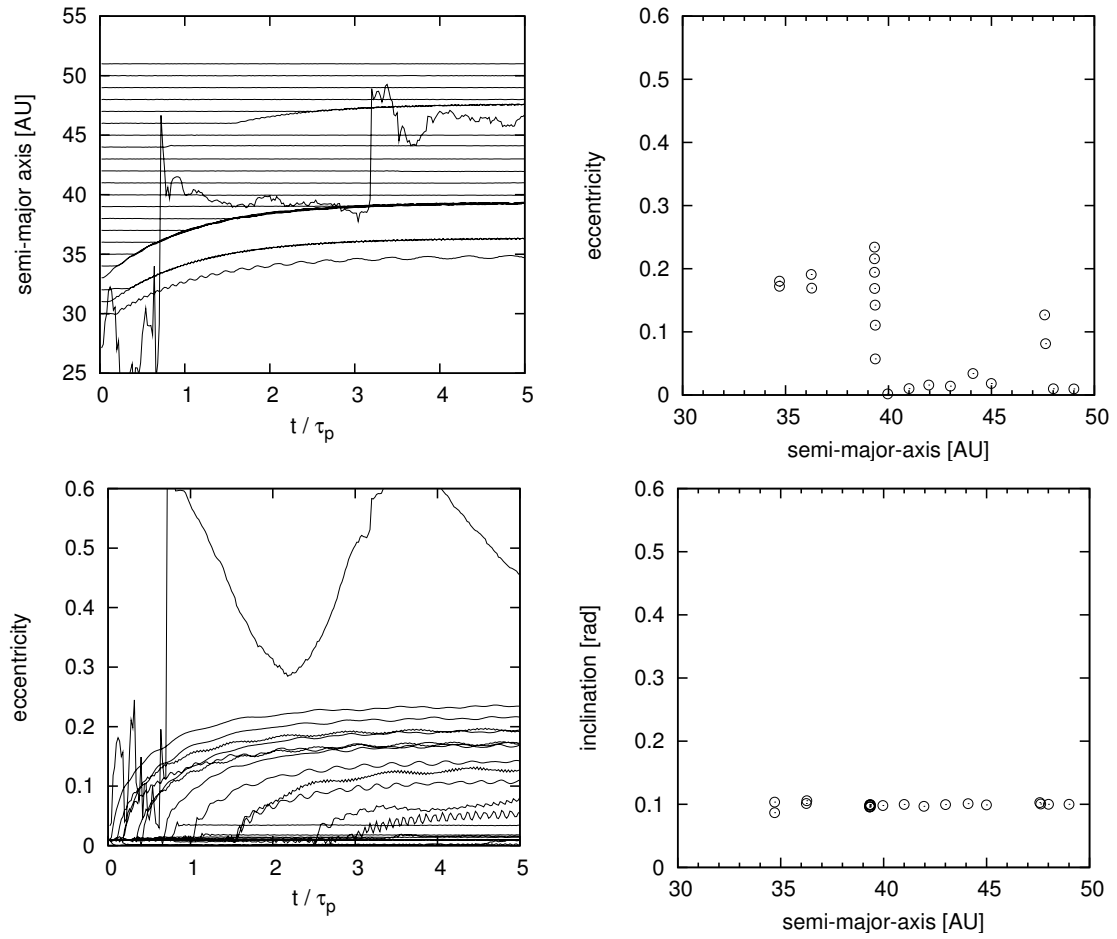


図 10: モデル I1 での軌道長半径の時間発展、最終的な軌道長半径と離心率、離心率の時間発展、最終的な軌道長半径と傾斜角。

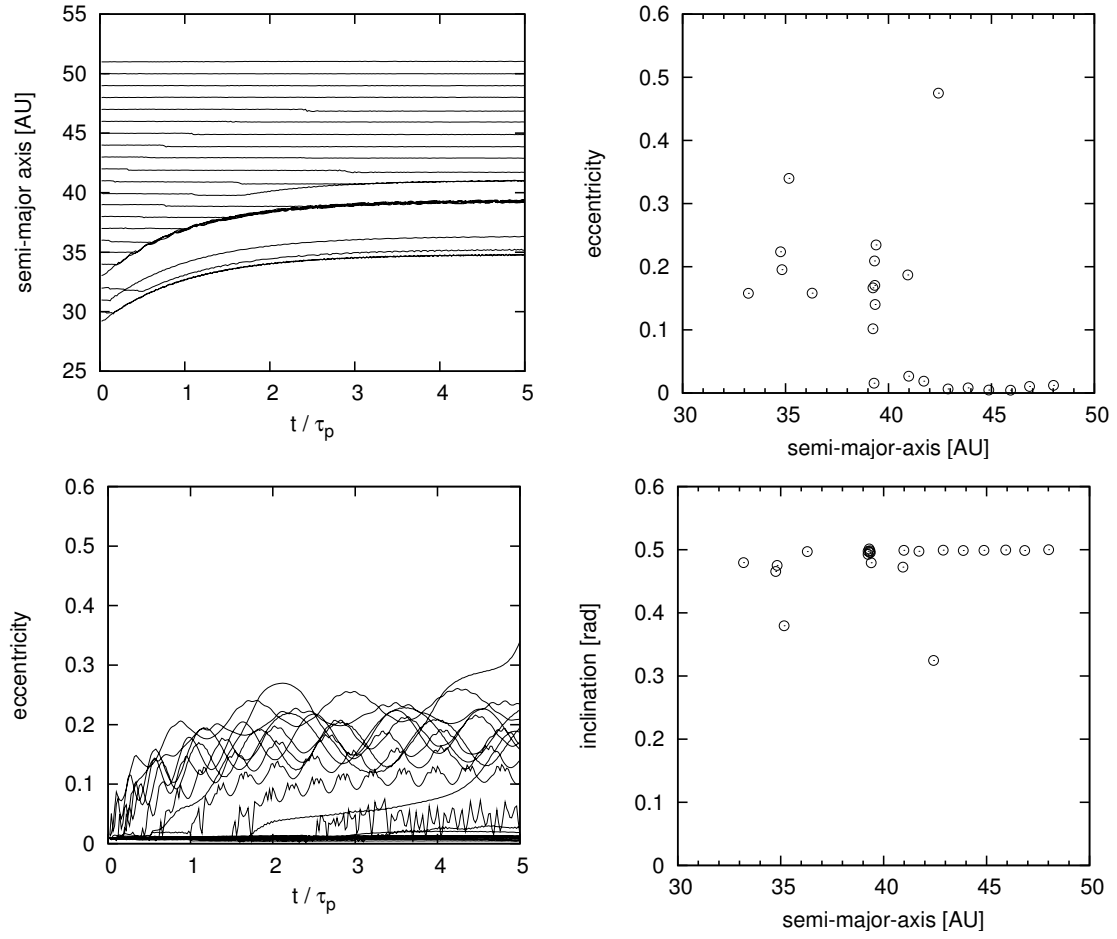


図 11: モデル *I2* での軌道長半径の時間発展、最終的な軌道長半径と離心率、離心率の時間発展、最終的な軌道長半径と傾斜角。



## 第4章 数値計算（円盤ガスを想定）

原始海王星のマイグレーションのさい、まだ太陽系内にはガスが存在していたと考えられている。したがって、微惑星はこのガスによる作用も受けることになる。ここではこのガスによる効果も考慮して微惑星の捕獲されるようすを数値計算で追う。実際にはガスには粘性もあるが、ここでは重力のみを考慮した。

### 4.1 円盤ガスモデル

原始海王星はモデル S でマイグレーションさせ、微惑星の初期の軌道要素は、軌道長半径を 27.5 AU から 28.4 AU まで 0.1 AU ごとに位置させた場合と 34.0 AU から 35.8 AU まで 0.2 AU ごとに位置させた場合の 2 通りで計算させ、どちらの場合も離心率、軌道傾斜角はともに 0.01 とする。それ以外の軌道要素はすべて 0 とした。

ガスの重力場は以下のものを考えた：

$$\Phi(t, r, z) = A \exp(-t/\tau_g) \sqrt{z^2 + \epsilon^2 r^2} \quad (4.1)$$

これから密度は

$$\rho(t, r, z) = A \exp(-t/\tau_g) \frac{r^2 + 2z^2 + \epsilon^2 r^2}{\sqrt{z^2 + \epsilon^2 r^2}^3} \epsilon^2 \quad (4.2)$$

ここで  $A, \epsilon$  はパラメータであるが、これらの式からそれぞれ重力場の強さ、ガス円盤の厚さを表している。 $\epsilon \rightarrow 0$  の極限で  $z = 0$  上の一様な密度分布  $\rho_0 = A \exp(-t/\tau_g) \delta(z)$  になる。さらにガスの消失を考慮し、パラメータとして  $\tau_g$  を考え、ガスを指数関数的に減少させた。以下の数値計算では、 $\epsilon = 0.1$  とし、 $A, \tau_g$  を変化させた。図12には、今回考えたガス密度分布  $\rho(r, z)$  の等高線図を描いた。内側へいくほど密度が高くなり、 $z = 0$  の平面上では  $r$  方向に  $1/r$  で減少する。

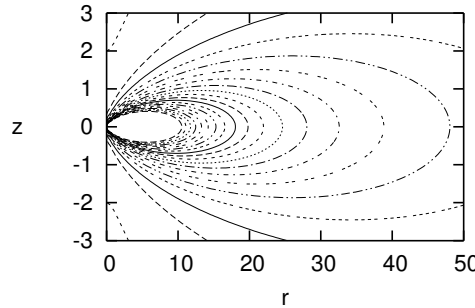


図 12:  $\rho$  の等高線。横軸が動径距離  $r$ 、縦軸が回転ガス円盤からの高さ  $z$ 。

## 4.2 数値計算結果 1

まずは原始海王星のマイグレーションを考慮せず、ガスの重力場のみで軌道要素がどのように変化するか調べてみる。ただし、 $\tau_g = 10^5$  [yr]、 $A = 5 \times 10^{-4}$  [ $M_\odot/(\text{AU})^3$ ]、微惑星の軌道長半径の初期値として  $a = 28.0$  AU を選んだ。

近日点、軌道傾斜角、離心率、および軌道長半径の移動量の数値計算結果を図13示す。図13に描いた結果の振る舞いを以下で考察する。

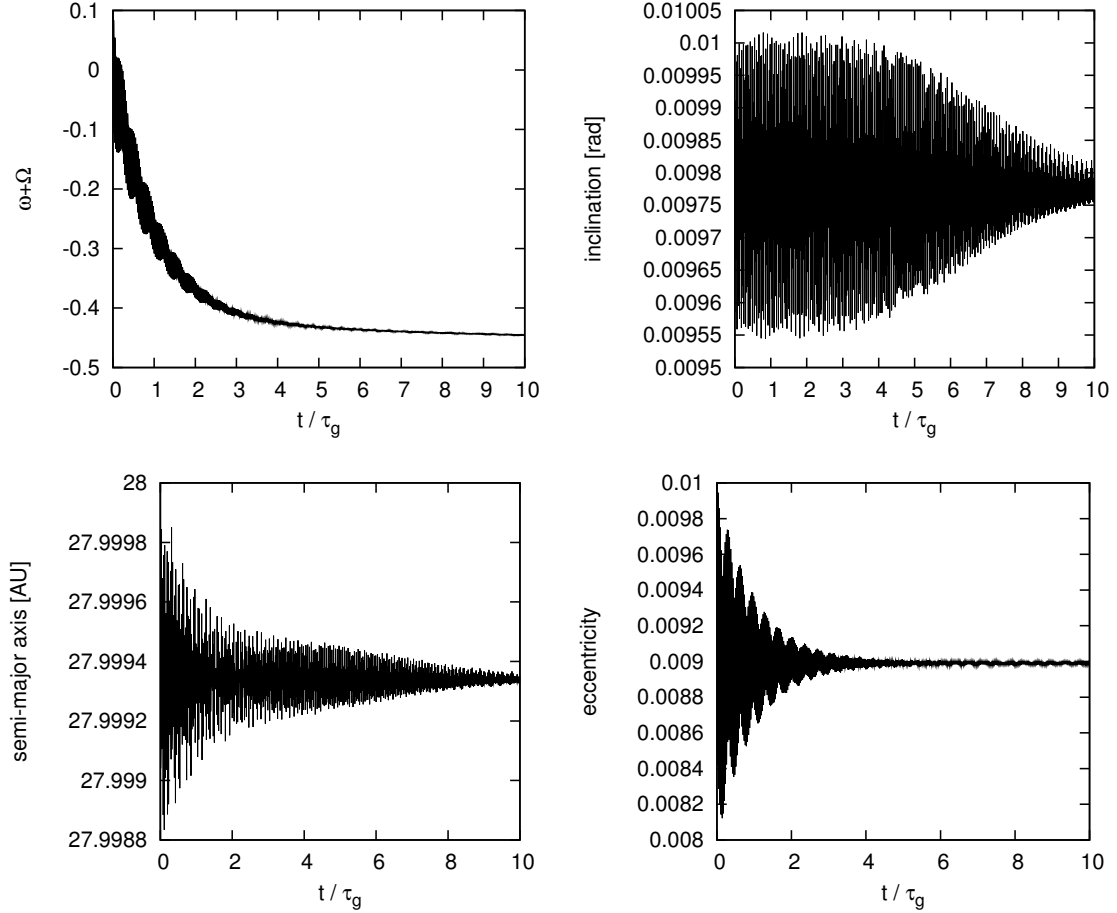


図 13: 近日点方向 ( $\omega + \Omega$ )、傾斜角 ( $I$ )、離心率 ( $e$ )、および軌道長半径 ( $a$ ) の時間発展。角度の場合、縦軸の単位はラジアン。

### 4.2.1 近日点の時間発展

今回用いたガス重力のように動径方向の重力  $\partial_r \Phi$  が 0 でない場合は一般に近日点の移動が起こる。より内側に重力を及ぼしているので、近日点は回転方向と逆方向に移動している。近日点の移動の定量的な部分に関しては、付録??の式 (D.22) から

$$\tilde{\omega} = -A\tau_g \epsilon \sqrt{\frac{r_0}{\mu}} \exp(-t/\tau_g) \simeq 0.9 \times 10^4 \times A \exp(-t/10^5) \quad (4.3)$$

であり、数値計算結果と一致する。

#### 4.2.2 軌道傾斜角の時間発展

傾斜角の時間発展は、Gauss の惑星方程式 (A.72) を用いて表すことができる。今の場合、

$$W = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \sin \omega \sin I - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos I \quad (4.4)$$

と書けるが、 $z$  の 2 次以上を無視して

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \simeq A\epsilon \exp(-t/\tau_g), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \simeq \frac{A \exp(-t/\tau_g)}{\epsilon} \sin(f + \omega) \sin I \quad (4.5)$$

となるから、 $\epsilon, I \ll 1$  を考慮して近似すると

$$W \simeq -\frac{A \exp(-t/\tau_g)}{\epsilon} I \sin(f + \omega) \quad (4.6)$$

となり、 $I$  の時間発展は

$$\frac{dI}{dt} \simeq -\frac{A \exp(-t/\tau_g)}{2na\epsilon} I \sin 2(f + \omega) \quad (4.7)$$

と表すことができる。ただし  $e \ll 1$  を考慮した。 $I$  を評価するには、さらに Gauss の惑星方程式 (A.75) から同様に得られる

$$\frac{d\Omega}{dt} \simeq -\frac{A \exp(-t/\tau_g)}{na\epsilon} \sin^2(f + \omega) \quad (4.8)$$

を考える必要がある。今の場合、微惑星は近似的に Kepler 回転しているので  $(f + \dot{\omega} + \Omega) \simeq n \simeq \text{const}$  と考えられるから、式 (4.8) は  $\theta = f + \omega$  の式

$$\frac{d\theta}{dt} \simeq n + \frac{A \exp(-t/\tau_g)}{na\epsilon} \sin^2 \theta \quad (4.9)$$

に書き換えられる。これから  $\theta$  の時間発展が決まるが複雑な微分方程式になっている。しかし今の場合、 $n \gg A/na\epsilon$  が成り立つので、式 (4.9) の右辺第 2 項は無視できる。これから  $\theta \simeq nt$  と考えられ、

$$\frac{dI}{dt} \simeq -\frac{A \exp(-t/\tau_g)}{2na\epsilon} I \sin 2nt \quad (4.10)$$

が得られる。さらに  $a$  の時間変化を無視してこの式を解くことで  $I$  は

$$I = I_0 \exp(-\gamma) \exp \left[ \frac{\gamma}{2n} \exp(-t/\tau_g) \left( \frac{1}{\tau_g} \sin 2nt + 2n \cos 2nt \right) \right] \quad (4.11)$$

$$\simeq I_0 \exp(-\gamma) \exp [\gamma \exp(-t/\tau_g) \cos 2nt] \quad (4.12)$$

となる。ただし  $\gamma = A\tau_g^2/a\epsilon(1 + 4\tau_g^2n^2) \simeq A/4a\epsilon n^2$  とおいた。これから、 $t \ll \tau_g$  では振動し、 $t \gg \tau_g$  では初期値よりも小さな値  $I_0 \exp(-\gamma)$  になることも分かる。

#### 4.2.3 離心率・軌道長半径の時間発展

$a, e$  などもガスの重力によって変化を受けていることがわかる。これらの時間発展についても傾斜角のときと同様の計算を行うことで、この数値計算結果と同じ結論を得ることができる。

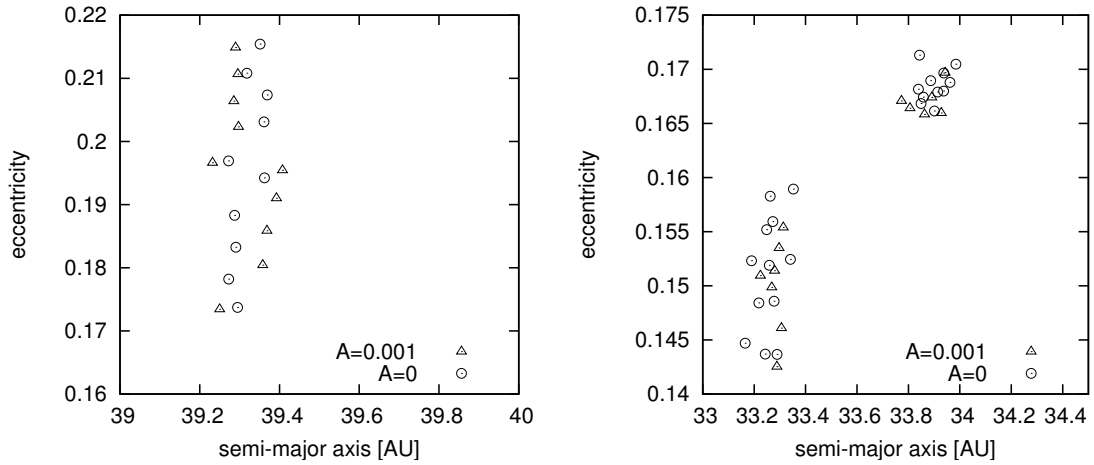


図 14: 34 AU から 35.8 AU まで 0.2 AU 間隔で微惑星を置いた場合の最終的な  $a-e$  分布。27.5 AU から 28.5 AU に 0.1 AU 間隔で微惑星を置いた場合の  $a-e$  分布。ただし共鳴軌道に捕えられる個数を増やすため、初期の微惑星の  $\omega$  の値として  $\omega = 0, \pi/2, \pi$  の場合も同時に plot した。

#### 4.3 数値計算結果 2

今度はガス重力と原始海王星からの摂動を同時に考慮して数値計算を行った。その結果を以下に示す。

まずは  $A$  を変えた場合について計算結果の比較を行う。ここで  $\tau_g/\tau_p = 0.01$  として計算し、計算時間は  $\tau_p$  の 10 倍とした。はじめに軌道長半径  $a$  と離心率  $e$  に関する結果を示す。

28 AU 付近の計算結果では、 $e$  が減少することがわかった。実際離心率の分布は Fig 14 のようになる。 $e$  は時間とともに振動しているが、その振動の幅は  $1 \times 10^{-3}$  程度で、Fig 14 での  $e$  の減少量  $5 \times 10^{-5}$  よりも小さいので、減少したと考えられる。

34 AU から始めた場合にも Fig 14 においてわずかな変化を見ることができるが、個々の微惑星の時間発展を調べると変化がもう少しはっきりとする。 $a, e$  の時間発展の結果を以下に示す。

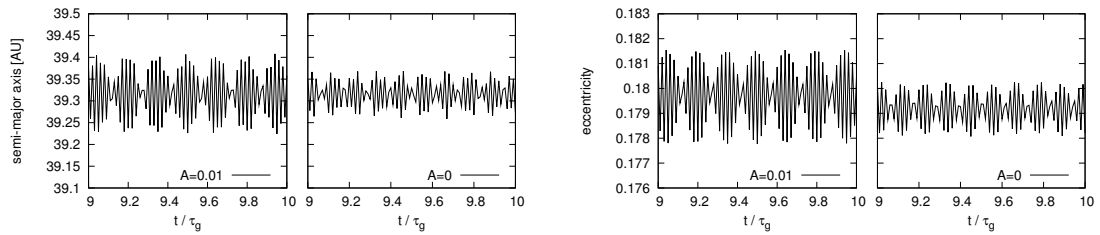


図 15: 34 AU から 35.8 AU まで 0.2 AU 間隔で微惑星を置いた場合の  $a, e$  の時間発展。

これ以外の微惑星についても調べたが、 $a$  については振動の幅が増えるだけで、その中心は変化していなかった。これは 28 AU 付近から始めた場合にも同様にあてはまる。また、 $e$  については振動の中心が変化し、すべての微惑星に対し増加していた。図14で増加しているように見えるものがあるのは振動によるずれである。

次に傾斜角  $I$  の分布に対し、計算結果を示す。

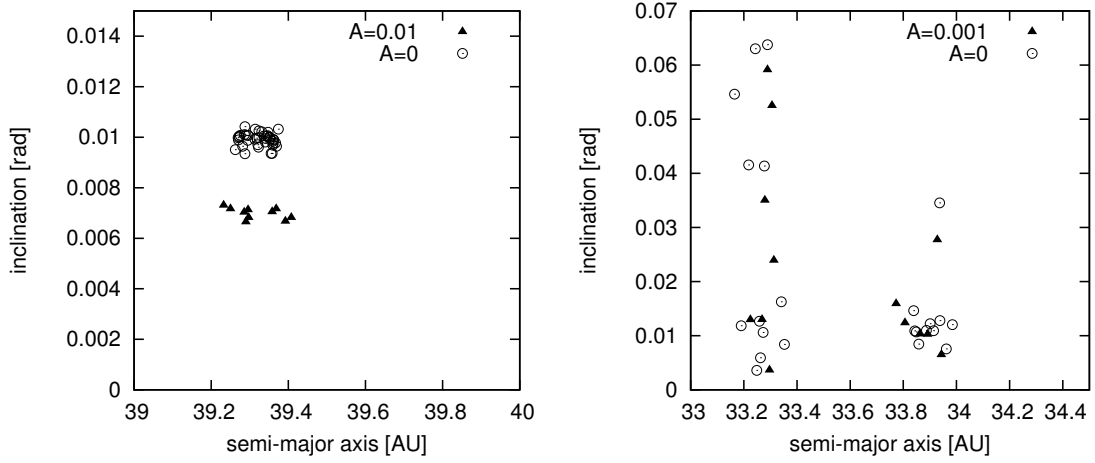


図 16: 34 AU から 35.8 AU に 0.2 AU 間隔で微惑星を置いた場合の傾斜角の分布。27.5 AU から 28.5 AU に 0.1 AU 間隔で微惑星を置いた場合の傾斜角の  $t = 10\tau_p$  における分布。ただし共鳴軌道に捕えられる個数を増やすため、初期の微惑星の  $\omega$  の値として  $\omega = 0, \pi/2, \pi$  の場合も同時に描いた。

34 AU 以上から始めた微惑星の場合、ガスを考慮したことで傾斜角の増加したものはなかったがその分布に変化が見られた。

同様に 28 AU 付近から始めた場合にも分布全体としては傾斜角の減少が見られるが、各微惑星の傾斜角の時間発展を調べると、ガスを考慮したことにより傾斜角が増加したものもあった。ただしこのような比率はその逆の場合よりも少なく、分布としては減少したと考えることができる。また、傾斜角の増加していた 27.8 AU から始めた微惑星については、傾斜角の時間発展が以下ようになった。このときの  $\omega$  の時間発展は以下ようになっていた。

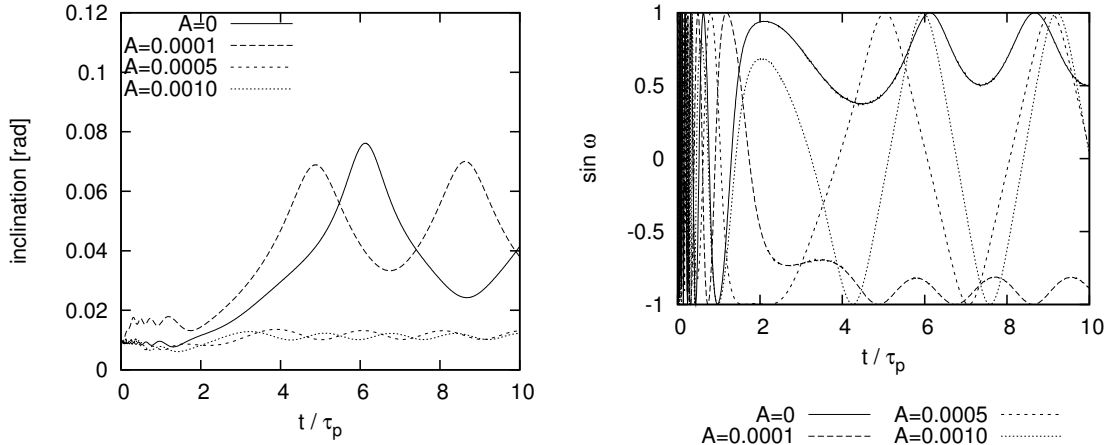


図 17: 傾斜角  $I$  と  $\omega$  の時間発展。

次に、 $\tau_g$  を変化させた場合に対し、計算結果の比較を行う。 $A = 0.001$  とした。

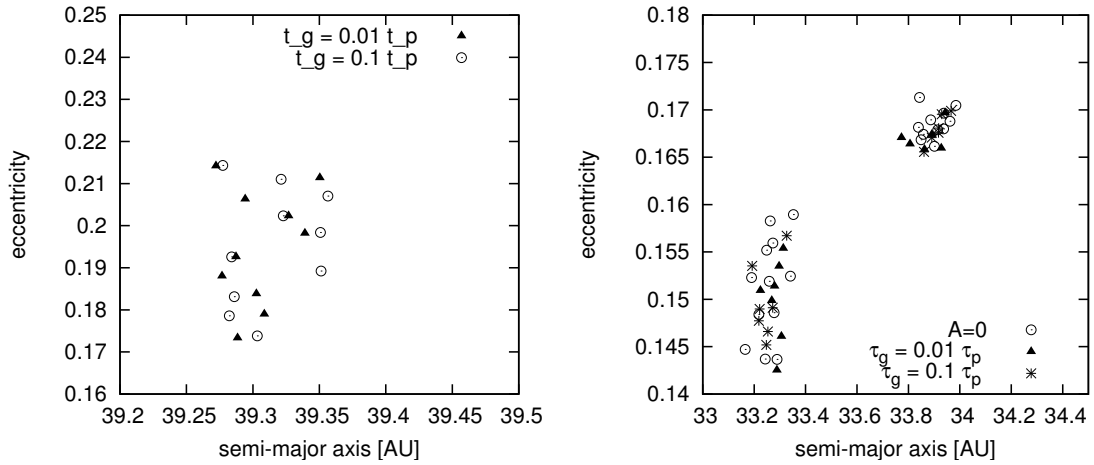


図 18: (左): 34 AU から 35.8 AU まで 0.2 AU 間隔で微惑星を置いた場合の最終的な  $a - e$  分布。(右): 27.5 AU から 28.5 AU に 0.1 AU 間隔で微惑星を置いた場合の  $a - e$  分布。ただし共鳴軌道に捕えられる個数を増やすため、初期の微惑星の  $\omega$  の値として  $\omega = 0, \pi/2, \pi$  の場合も同時に描いた。

$A$  を変化させた時と同様に時間発展についても調べたが、今回は  $\tau_g$  の変化によって離心率はその振動の中心を変化させることはなかった。

さらに傾斜角  $I$  の分布に対し計算結果を示す。

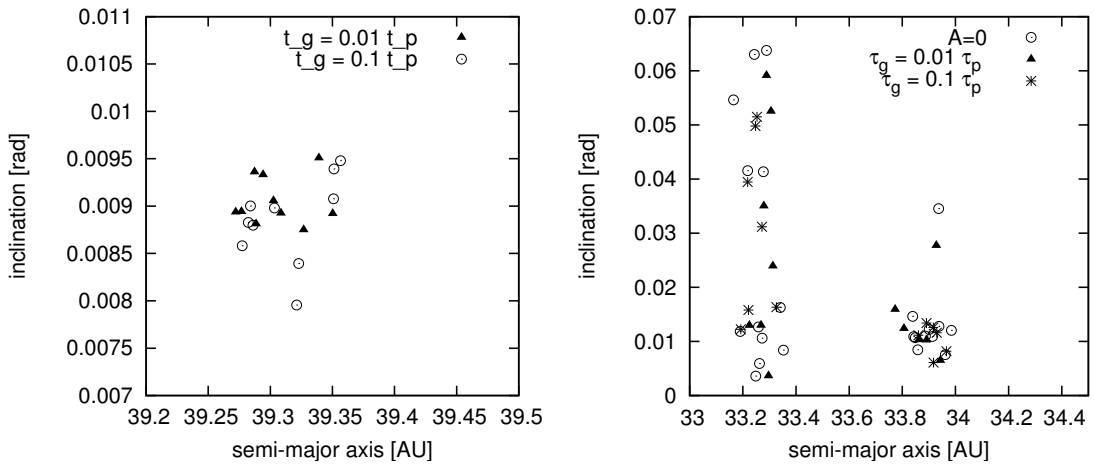


図 19: (左): 34 AU から 35.8 AU に 0.2 AU 間隔で微惑星を置いた場合の傾斜角の分布。(右): 27.5 AU から 28.5 AU に 0.1 AU 間隔で微惑星を置いた場合の傾斜角の  $t = 10\tau_p$  における分布。ただし共鳴軌道に捕えられる個数を増やすため、初期の微惑星の  $\omega$  の値として  $\omega = 0, \pi/2, \pi$  の場合も同時に描いた。

この結果、ガスの減少に時間がかかるほど傾斜角を下げていることがわかる。

## 第5章 海王星の摂動による軌道要素の変化

前章までは、海王星のマイグレーション中に捕獲された天体の軌道を数値計算によって明らかにした。ここでは、それらの軌道要素の変化を式変形をもとに考察する。

### 5.1 最低次での軌道要素の変化

軌道要素の時間発展を表す式

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= f_n(n, \lambda, e, \tilde{\omega}, s, \Omega) & \frac{d\lambda}{dt} &= f_\lambda(n, \lambda, e, \tilde{\omega}, s, \Omega) \\ \frac{de}{dt} &= f_e(n, \lambda, e, \tilde{\omega}, s, \Omega) & \frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= f_{\tilde{\omega}}(n, \lambda, e, \tilde{\omega}, s, \Omega) \\ \frac{ds}{dt} &= f_s(n, \lambda, e, \tilde{\omega}, s, \Omega) & \frac{d\Omega}{dt} &= f_\Omega(n, \lambda, e, \tilde{\omega}, s, \Omega) \end{aligned}$$

の右辺は一般に複雑である。しかし今考えようとしている状況では  $e, s (= \sin I/2)$  が 1 に比べて十分小さいので、これらで右辺を展開して最低次の軌道要素の変化を議論しよう。

海王星の軌道面を基準面にとり、海王星の軌道要素には下付きの  $N$ 、微惑星の軌道要素は  $'$  をつけないで表すことにする。摂動関数を微惑星の軌道要素  $e, s$  に対し 2 次まで展開した式 (B.1) ~ (B.13) から 3 : 2 共鳴摂動項と永年項を取り出すと

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \frac{\mu_N}{a} (C_0 + C_1 e^2 + C_2 s^2 + C_3 e \cos \psi + C_4 e^2 \cos 2\psi + C_5 s^2 \cos 2\phi + \mathcal{O}(3)) \quad (5.1)$$

と与えられ、また  $\mathcal{O}(3)$  のうち  $s, \Omega$  を含む項は

$$C_6 e s^2 \cos(\psi - 2\phi) + C_7 e s^2 \cos(\psi + 2\phi) \quad (5.2)$$

と書ける。ここで、 $\psi = 3\lambda - 2\lambda_N - \tilde{\omega}$ 、 $\phi = 3\lambda - 2\lambda_N - \Omega$  である。また  $C_i$  は  $\alpha$  のみに依存する関数となっている。この摂動関数の展開式を参考にして、 $e, s \ll 1$  としたときの、Lagrange の惑星方程式の右辺を最低次だけ求める。

このとき、 $e, \tilde{\omega}, s, \Omega$  の時間発展を書き下すよりも、計算の都合上以下の変数を用いることにする：

$$\tilde{h} = e \sin \psi \quad \tilde{k} = e \cos \psi \quad (5.3)$$

$$\tilde{p} = s \sin \phi \quad \tilde{q} = s \cos \phi \quad (5.4)$$

を使う。また、 $\lambda, \tilde{p}, \tilde{q}$  に関しては最低次だけでなく一次まで求めておく。 $3n \simeq 2n_N$  を考慮す

れば、これらの変数の時間変化は近似的に

$$\frac{dn}{dt} = 9\gamma n^2 C_3 \tilde{h} \quad (5.5)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + \gamma n (\partial_\alpha \alpha C_0 + \tilde{k} \partial_\alpha \alpha C_3) + \frac{\gamma n}{2} C_3 \tilde{k} \quad (5.6)$$

$$\frac{d\tilde{h}}{dt} = -\gamma n C_3 \quad (5.7)$$

$$\frac{d\tilde{k}}{dt} = -\gamma n B_0 \tilde{h} \quad (5.8)$$

$$\frac{d\tilde{p}}{dt} = -\frac{\gamma n}{2} (B_1 \tilde{q} + B_2 \tilde{k} \tilde{q} + B_3 \tilde{h} \tilde{p}) \quad (5.9)$$

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = -\frac{\gamma n}{2} (-B_1 \tilde{p} - B_2 \tilde{k} \tilde{p} + B_3 \tilde{h} \tilde{q}) \quad (5.10)$$

と表される。ただし  $\gamma = \mu_N / \mu$  であり、

$$B_0 = 2C_4 - 2C_1 + 3\partial_\alpha \alpha C_0 \quad B_1 = C_2 + C_5 + 6\partial_\alpha \alpha C_0 \quad (5.11)$$

$$B_2 = 3C_3 - C_6 - C_7 + 6\partial_\alpha \alpha C_0 \quad B_3 = 2C_3 - C_6 + C_7 \quad (5.12)$$

と置いた。特に 3 : 2 共鳴軌道に捕えられている場合、 $\alpha$  は定数であるから、 $B_i, C_i, \partial_\alpha \alpha C_0$  はすべて定数となる。

では、この連立微分方程式から各軌道要素の時間発展を計算しよう。 $n$  の時間発展は既知であるから、 $e$  の時間発展が式 (5.5) と (5.7) から得られる。具体的には、まず  $e^2$  の時間発展の最低次が

$$\frac{de^2}{dt} = 2\tilde{h} \frac{d\tilde{h}}{dt} + 2\tilde{k} \frac{d\tilde{k}}{dt} \simeq -2\gamma n C_3 \tilde{h} = -\frac{2}{9} \frac{1}{n} \frac{dn}{dt} \quad (5.13)$$

と書け、 $3n \simeq 2n_N$  であるから、上式は

$$\frac{de^2}{dt} \sim -\frac{2}{9} \frac{1}{n_N} \frac{dn_N}{dt} = \frac{1}{3} \frac{1}{a_N} \frac{da_N}{dt} \quad (5.14)$$

と書き換えられ、これを解くことで

$$e^2(t) = e_0^2 + \frac{1}{3} \ln \frac{a_N(t)}{a_{N,0}} \quad (5.15)$$

となる。式 (5.15) は Malhotra [5] でも述べてあった。そしてこの式から、 $e$  の増加が説明できる。例えば、式 (5.15) が成立する範囲で海王星が 25 AU から 30 AU までマイグレーションした場合、 $e_0 = 0.01$  として計算すると、最終的な離心率は  $e_f \sim 0.25$  となる。ちなみに  $e^2$  の時間発展をさらに次数をあげて計算すると、一次はなく、二次以上からきき始める。共鳴角  $\psi$  に関しては、式 (5.5) から

$$\sin \psi = \frac{1}{9\gamma C_3} \frac{1}{en^2} \frac{dn}{dt} \quad (5.16)$$

となり、十分時間がたったあとでは  $\dot{n} \rightarrow 0$  より、最低次の考察で  $\psi \rightarrow 0, \pm\pi$  になる。

次に  $s$  の変化を計算してみる。式 (5.9) と (5.10) から、 $s^2$  の時間発展の最低次は

$$\frac{ds^2}{dt} = 2\tilde{p} \frac{d\tilde{p}}{dt} + 2\tilde{q} \frac{d\tilde{q}}{dt} \simeq -\gamma n B_3 \tilde{h} s^2 = -s^2 \frac{B_3}{9C_3} \frac{1}{n} \frac{dn}{dt} \simeq s^2 \frac{B_3}{3C_3} \frac{1}{a_N} \frac{da_N}{dt} \quad (5.17)$$



で与えられる。これから、両辺を  $s^2$  で割り、積分を行うと

$$s = s_0 \left( \frac{a_N}{a_{N,0}} \right)^\beta, \quad \left( \beta = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{C_6}{2C_3} + \frac{C_7}{2C_3} \right) \right) \quad (5.18)$$

が得られる。

## 5.2 傾斜角の変化

前小節では摂動関数を用い、 $e, I$  に関して最低次数を考えた場合の、軌道要素の変化を考えた。ここでは摂動を永年摂動に限るが、今度は海王星と微惑星の動径距離の比で展開して、傾斜角が大きく変動する場合があることを示す。

今までのように太陽、海王星、微惑星のような系を考えたとき、この系における保存量として

$$H_k = \sqrt{1 - e^2} \cos I \quad (5.19)$$

というものがある。これから、 $e$  が最小になれば  $I$  は最大、 $e$  が最大であれば  $I$  は最小となる。これは発見者にちなんで Kozai 機構と呼ばれているが、まずはこの保存量の導出を行う。

この3体系において、微惑星のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \frac{G(m_s + m + m')}{|\mathbf{r}|} - Gm' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|^3} - \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) \quad (5.20)$$

$$= -\frac{\hat{\mu}}{2a} - Gm' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|^3} - \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) \quad (5.21)$$

と書ける。ただし  $\hat{\mu} = G(m_s + m + m')$  であり、微惑星の質量を  $m + m'$  に置き換えて考察することになる。また海王星の量については「 $'$ 」をつけて表してある。 $1/r$  をわざわざ付け加えたのは、次に Legendre 展開を行ったときに0次が消えるようにするためである。

さて、付録Bでは式(5.21)右辺の第2項を  $e, I$  の2次まで展開したのであった。しかし  $r' \ll r$  であれば、 $r'/r$  で展開することも考えられる。この場合は Legendre 多項式を用いて

$$\mathcal{H} = -\frac{\hat{\mu}}{2a} + Gm' \left[ \frac{r}{r'^2} \cos \psi - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^i P_i(\cos \psi) \right] \quad (5.22)$$

と表現できる。ここで  $\psi$  は微惑星の位置  $\mathbf{r}$ 、海王星の位置  $\mathbf{r}'$  のなす角である。また、Legendre 多項式で以下の計算に必要なものを書いておくと

$$P_0(x) = 1 \quad (5.23)$$

$$P_1(x) = x \quad (5.24)$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad (5.25)$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \quad (5.26)$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} \quad (5.27)$$

となっている。Σの中で、 $r'/r$ の5次以上は無視するという近似を考えると、考えるべきハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -\frac{\hat{\mu}}{2a} + Gm' \left[ \frac{r}{r'^2} \cos \psi - \frac{r'}{r^2} \cos \psi - \frac{r'^2}{r^3} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \psi \right) \right] \quad (5.28)$$

$$+ Gm' \left[ -\frac{r'^3}{r^4} P_3(\cos \psi) - \frac{r'^4}{r^5} \left( \frac{35}{8} \cos^4 \psi - \frac{15}{4} \cos^2 \psi + \frac{3}{8} \right) \right] \quad (5.29)$$

となる。

さて、これから式(5.29)第2項以降の永年項を取り出すことが次の目的となるが、そのためにまずは $\cos \psi$ の展開を考えよう。Descartes座標 $(x, y, z)$ を用いれば

$$\cos \psi = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'} \quad (5.30)$$

と書ける。ここで

$$\frac{x}{r} = \cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos I \quad (5.31)$$

$$\frac{y}{r} = \sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos I \quad (5.32)$$

$$\frac{z}{r} = \sin(\omega + f) \sin I \quad (5.33)$$

であり、「 $'$ 」の量に対しても同様である。しかし以下で簡単に計算を行うために $e' = I' = 0$ の場合を考えよう。このとき、

$$\cos \psi = \cos(\omega + f) \cos(l' - \Omega) + \sin(\omega + f) \cos I \sin(l' - \Omega) \quad (5.34)$$

と書き下せる。

摂動関数は

$$\mathcal{R} = \sum f(a, a', e, e', I, I')_{j_1, j_2, j_3, j_1', j_2', j_3'} \cos(j_1 \lambda + j_2 \omega + j_3 \Omega + j_1' \lambda' + j_2' \omega' + j_3' \Omega') \quad (5.35)$$

の形に書けるが、永年項は $\lambda, \lambda'$ を含まない項、つまり $j_1 = j_1' = 0$ の項である。したがって永年項を求めるには

$$\hat{A} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda d \quad \hat{A}' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{2\pi} d\lambda d \quad (5.36)$$

を両方作用させて計算したものになる。今の場合、 $\lambda' = l'$ であり、 $n$ を整数として $\hat{A}' r^n \cos \psi = 0$ である。したがって、永年項のみを考える限り、

$$\frac{r}{r'^2} \cos \psi - \frac{r'}{r^2} \cos \psi \quad (5.37)$$

は無視してよい(今の場合 $r' = a'$ )。  $\cos^n \psi$  に対し、 $n$ が奇数なら三角関数内に $j_1' l'$ の形をした項の和で書けるので、同様に $P_3(\cos \psi)$ の項も無視できる。

残りの項に関して永年項を取り出すには、 $\cos^2 \psi / r^3$ 、 $\cos \psi / r^5$ 、 $\cos^4 \psi / r^5$ における永年項を考える必要がある。まずは $\hat{A}' \cos^2 \psi$ を計算すると

$$\hat{A}' \cos^2 \psi = \frac{1}{2} - \frac{\sin^2 I}{4} (1 - \cos 2\omega \cos 2f + \sin 2\omega \sin 2f) \quad (5.38)$$

となる。これから  $\hat{A} \cos^2 \psi / r^3$  を計算する。まず、軌道の式  $r = a\eta^2 / (1 + e \cos f)$  から

$$\hat{A} \frac{a^3}{r^3} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^3}{r^3} dl = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^3}{r^3} \frac{r^2}{a^2 \eta} df \quad (5.39)$$

$$= \frac{1}{2\pi\eta^3} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e \cos f) df = \frac{1}{\eta^3} \quad (5.40)$$

同様にして

$$\hat{A} \frac{a^3}{r^3} \cos 2f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^3}{r^3} \cos 2f \frac{r^2}{a^2 \eta} df \quad (5.41)$$

$$= \frac{1}{2\pi\eta^3} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e \cos f) \cos 2f df = 0 \quad (5.42)$$

$$\hat{A} \frac{a^3}{r^3} \sin 2f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^3}{r^3} \sin 2f \frac{r^2}{a^2 \eta} df \quad (5.43)$$

$$= \frac{1}{2\pi\eta^3} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e \cos f) \sin 2f df = 0 \quad (5.44)$$

が得られる。したがって

$$\hat{A} \frac{r'^2}{r^3} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \psi \right) = \frac{a'^2}{a^3 \eta^3} \left( \frac{1}{4} - \frac{3 \sin^2 I}{8} \right) \quad (5.45)$$

となる。

さらに今度は  $\cos^4 \psi$  の計算を行わなければならない。これに対しても同様に  $\hat{A}'$  を作用させれば

$$\hat{A}' \cos^4 \psi = \frac{3}{8} \left[ \left( 1 - \sin^2 I + \frac{3}{8} \sin^4 I \right) + \cos 2(\omega + f) \left( \sin^2 I - \frac{1}{2} \sin^4 I \right) + \frac{1}{8} \sin^4 I \cos 4(\omega + f) \right] \quad (5.46)$$

となる。あるいは、より一般に

$$\hat{A}' \cos^{2m} \psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dl' [\cos(\omega + f) \cos(l' - \Omega) + \sin(\omega + f) \cos I \sin(l' - \Omega)]^{2m} \quad (5.47)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dl' (\cos^2(\omega + f) + \cos^2 I \sin^2(\omega + f))^m \cos^{2m}(l' - \Omega - \theta) \quad (5.48)$$

$$= \frac{(2m)!}{4^m m! m!} (\cos^2(\omega + f) + \cos^2 I \sin^2(\omega + f))^m \quad (5.49)$$

$$= \frac{(2m)!}{4^m m! m!} (1 - \sin^2 I \sin^2(\omega + f))^m \quad (5.50)$$

が成り立つ。ここで先ほどと同様の計算を行うと

$$\hat{A} \frac{a^5}{r^5} \cos 2f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^5}{r^5} \cos 2f \frac{r^2}{a^2 \eta} df \quad (5.51)$$

$$= \frac{1}{2\pi \eta^7} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e \cos f)^3 \cos 2f df \quad (5.52)$$

$$= \frac{1}{2\pi \eta^7} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 3e \cos f + 3e^2 \cos^2 f + e^3 \cos^3 f) \cos 2f df \quad (5.53)$$

$$= \frac{1}{2\pi \eta^7} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{3e^2}{4} + (\cos mf \text{ の項}) \right) df \quad (5.54)$$

$$= \frac{3e^2}{4\eta^7} \quad (5.55)$$

これ以外にも同様に計算して

$$\hat{A} \frac{a^5}{r^5} = \frac{1}{2\pi \eta^7} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 3e \cos f + 3e^2 \cos^2 f + e^3 \cos^3 f) df \quad (5.56)$$

$$= \frac{1}{\eta^7} \left( 1 + \frac{3e^2}{2} \right) \quad (5.57)$$

$$\hat{A} \frac{a^5}{r^5} \cos 4f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^5}{r^5} \cos 4f \frac{r^2}{a^2 \eta} df \quad (5.58)$$

$$= \frac{1}{2\pi \eta^7} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 3e \cos f + 3e^2 \cos^2 f + e^3 \cos^3 f) \cos 4f df \quad (5.59)$$

$$= 0 \quad (5.60)$$

$$\hat{A} \frac{a^5}{r^5} \sin 2f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^5}{r^5} \sin 2f \frac{r^2}{a^2 \eta} df = 0 (\text{奇関数}) \quad (5.61)$$

$$\hat{A} \frac{a^5}{r^5} \sin 4f = 0 (\text{上と同様}) \quad (5.62)$$

が成立する。以上より、

$$\hat{A} \frac{r'^4}{r^5} P_4(\cos \psi) = \frac{9a'^4}{64a^5 \eta^7} \left[ \left( 1 + \frac{3e^2}{2} \right) \left( 1 - 5 \sin^2 I + \frac{35}{8} \sin^4 I \right) + \frac{5}{4} e^2 \cos 2\omega \sin^2 I \left( 3 - \frac{7}{2} \sin^2 I \right) \right] \quad (5.63)$$

と求められる。以上より、この系における摂動関数の永年項は、 $\sin I = i$  と置いて

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \frac{Gm' a'^2}{8a^3 \eta^3} \left[ 2 - 3i^2 + \frac{9a'^2}{8a^2 \eta^4} \left[ \left( 1 + \frac{3e^2}{2} \right) \left( 1 - 5i^2 + \frac{35}{8} i^4 \right) + \frac{5}{4} e^2 i^2 \left( 3 - \frac{7}{2} i^2 \right) \cos 2\omega \right] \right] \quad (5.64)$$

となる。

これから、本来の目的であった保存量  $H_k$  を導くには、正準変数である Delaunay 変数を用いて容易に導ける。上記の永年項を用いてハミルトニアン  $\mathcal{H}$  を Delaunay 変数で書き換えるが、そのとき  $\mathcal{H}$  は  $l$  に依存しないので  $L = \sqrt{\hat{\mu} a}$  が保存する。さらに  $h = \Omega$  にも依存していないことから  $H = \sqrt{\hat{\mu} a} \eta \cos I$  も保存する。したがって

$$H_k = \sqrt{1 - e^2} \cos I \quad (5.65)$$

は保存量である。しかし  $g = \omega$  は含んでいることから  $G = \sqrt{\mu a} \eta$  は保存量ではないので、 $e, I$  は上式を満たすように変動する。

これまでの議論では、微惑星は外側にいると仮定していたが、内側にいる場合にも同様の結果を示すことができる。しかもこの場合には、 $r/r'$  の3次以上を無視することで得られるので、計算はこちらのほうが楽である。その結果だけを示すと、永年項を用いた最終的なハミルトニアンは、 $e' = I' = 0$  として

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu}{2a} - \frac{Gm'a^2}{8a'^3} [2 + 3e^2 - (3 + 12e^2 - 15e^2 \cos^2 \omega) i^2] \quad (5.66)$$

となる。これから同様に保存量  $H_k$  が導かれ、 $e, I$  は変動する。

•  $\omega$  と  $I, e$  の振る舞い

さて、ここで傾斜角の変動と  $\omega$  の振る舞いにはある関係があることが示される。実際にそれを確かめるには、Lagrange の惑星方程式から各軌道要素の時間発展を表す式を導けばよい。ここでは外側の微惑星に対して考察しよう。 $\omega, e, I$  の時間変化を求めるため、 $\partial_e \langle \mathcal{R} \rangle, \partial_I \langle \mathcal{R} \rangle, \partial_\omega \langle \mathcal{R} \rangle$  を求めると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial e} &= \frac{3Gm'ea'^2}{8a^3\eta^5} \left\{ 2 - 3i^2 + \frac{15a'^2}{16a^2\eta^4} \left[ \left( 1 - 5i^2 + \frac{35}{8}i^4 \right) (4 + 3e^2) + \left( 1 + \frac{5}{2}e^2 \right) \left( 3i^2 - \frac{7}{2}i^4 \right) \cos 2\omega \right] \right\} \\ \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial I} &= \frac{3Gm'a'^2 \cos I}{8a^3\eta^3} \left\{ -2i + \frac{15a'^2}{16a^2\eta^4} \left[ \left( -2i + \frac{7}{2}i^3 \right) (2 + 3e^2) + e^2 (3i - 7i^3) \cos 2\omega \right] \right\} \\ \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial \omega} &= -\frac{45Gm'a'^4}{128a^5\eta^7} e^2 i^2 \left( 3 - \frac{7}{2}i^2 \right) \sin 2\omega \end{aligned} \quad (5.67)$$

となる。これらを式 (A.55) (A.56) (A.58) に代入して整理すれば

$$\frac{de}{dt} = -\frac{45na'^4}{128a^4\eta^6} e^2 i^2 \left( 3 - \frac{7}{2}i^2 \right) \sin 2\omega \quad (5.68)$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{45na'^4}{128a^4\eta^8} e^2 i \sqrt{1 - i^2} \left( 3 - \frac{7}{2}i^2 \right) \sin 2\omega \quad (5.69)$$

および

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{3na'^2}{8a^2\eta^4} \left\{ 4 - 5i^2 + \frac{15a'^2}{16a^2\eta^4} \left[ i^2(-6 + 7i^2)(1 + \sin^2 \omega) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^2 i^2 \left( -1 + \frac{7}{8}i^2 \right) - e^2 \left( 6 - 5i^2 - \frac{7}{2}i^4 \right) \sin^2 \omega \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.70)$$

$$(5.71)$$

となる。

ここで外側の微惑星についてこれらの式をもとに軌道要素の変化を考察しよう。まず微惑星が海王星から離れている場合、すなわち  $r' \ll r$  のときは、 $\omega$  の時間微分は近似的に

$$\frac{d\omega}{dt} \simeq \frac{3na'^2}{8a^2\eta^4} (4 - 5i^2) \quad (5.72)$$

となり、 $i^2 < 4/5$  である限り常に正である。すなわち角度  $\omega$  は回転する。 $I$  の時間変化の式 (5.69) を見ると、このようなときには微小な振動しかしないことが分かる。さらに  $e$  の時間変化も同様である。 $i^2 > 4/5$  が常に成り立つ場合も同様のことが言える。また、 $i_c^2 = 4/5$  付近を振動するなら、 $\omega$  も振動し、 $I$  の変化は  $\sin 2\omega$  がほぼ一定であることから大きな変化になる。

さらに  $r'/r$  の高次をとって計算した場合にはどうなるだろうか。簡単のため、 $e = 0$  とし  $\omega$  の時間微分を書き下すと、

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3na'^2}{8a^2\eta^4} \left( 4 - 5i^2 + i^2 \frac{15a'^2}{16a^2} (-6 + 7i^2)(1 + \sin^2 \omega) \right) \quad (5.73)$$

となるが、 $\omega$  の時間微分の正、負が入れ替わる  $i_c$  の値は先ほどより小さくなっていて、 $a'^2/a^2 \simeq 1, \omega = \pi/2$  のとき  $i_c^2 \simeq 1/3$  である。したがって、 $i^2 \simeq 1/3$  付近を振動することで  $\omega$  は振動し、 $I$  は大きな変化になる。

逆に  $I = 0$  で考えると、 $\omega$  の時間発展は

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3na'^2}{8a^2\eta^4} \left( 4 - \frac{45a'^2}{8a^2} \frac{e^2}{(1 - e^2)^2} \sin^2 \omega \right) \quad (5.74)$$

と表され、正、負が入れ替わるのは  $a'^2/a^2 \simeq 1, \omega = \pi/2$  のとき  $e_c^2 \simeq 1/3$  である。したがって  $e = e_c$  付近で  $e, I$  は大きな変化になる。

微惑星と海王星が離れている場合には、低次の項だけで十分だが、近い場合にはさらに高次の項を考える必要がある。そして高次を考えるほど  $i_c, e_c$  は小さくなり、より小さな初期値  $e_0, i_0$  で大きな変動になる。

このような現象は数値計算においてもみられた。7 : 6 共鳴軌道では傾斜角が大きく変動するものがあり、そのような微惑星に対してのみ  $\omega$  が振動していたこと、それに対して 3 : 2 共鳴軌道など海王星から遠く離れると傾斜角はほとんど変化がなかったことはこれにより説明できる。

## 第6章 まとめ

原始海王星のマイグレーションだけを考慮すると確かに離心率を増加させることはできるが、傾斜角を変化させることはほとんどできなかった。また、現在の太陽系外縁天体の軌道要素を再現するということもできていない。実際、図1と図2などを比較すると明らかである。少なくとも、傾斜角の分布が再現できないということで、原始海王星のマイグレーションのほかに別の要因を考慮しなければならない。ただし、海王星に近い7:6 共鳴軌道に捕えられた微惑星は傾斜角を増加させた。この傾斜角が増加した微惑星の場合に限って $\omega$ が振動することも分かった。したがってこの傾斜角の変動は Kozai 機構によるものと考えられる。

分布の再現、とくに傾斜角の増加を目的としてガスを考慮したが、今回用いたガスによる重力は傾斜角を減少させることが分かった。特に、重力場の強さ  $A$  が大きいほど、ガスの散逸が遅いほど傾斜角は減少する。このようになるのは、ガス重力のみによる効果で傾斜角が減少したと考えられる。また、ガス重力を含めた場合にも合になる位置が遠日点か近日点かどうか調べたが、ガスのない場合と同様の結果になった。本論文では  $A = 0.001$  までの数値計算結果を載せているが、さらに  $A$  を大きくしていった場合には共鳴軌道に捕えられることはなくなることもさらなる数値計算で分かった。

実際には原始海王星のマイグレーション以外に、木星、土星、天王星といった巨大惑星のマイグレーションを考慮するとどうなるか、またガスのモデルについて変えてみてどう変わるか調べたかった。

傾斜角の再現に関しては、Kozai 機構による永年摂動を考慮することで実現できるかもしれない。ただし海王星より外側ではこの Kozai 機構の効果が海王星軌道付近でないとほとんど働かない。逆に内側ではこれより働きやすい。このことから、ある程度の質量をもった惑星を海王星より外側に存在させれば傾斜角は増加したかもしれない。海王星より外側には惑星が現在までのところ観測されていないが、このような仮定をして数値計算をすることも考えられる。

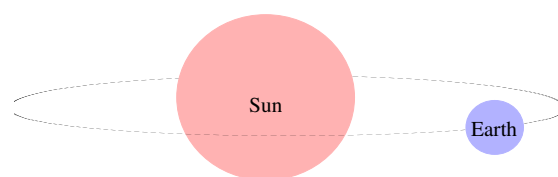


図 20: 太陽と地球

今回の卒業研究において、犬塚修一郎先生には大変お世話になりました。特に海王星のマイグレーションという課題に取り組むことができ、研究というものを少しではありましたが体験することができました。また、多くの研究における助言、コメントをいただき、この場を借りて感謝申し上げます。ともに議論に参加してくれた渡辺くん、高橋くんにもお礼申し上げます。

## 第 A 章 天体と軌道の力学

この章では、ゼミで行った「天体と軌道の力学」の内容のうち、Kepler 運動と摂動論の部分を簡単にまとめた。

### A.1 Kepler 運動

よく知られているように、Johanes Kepler は Tycho Brahe の観測データを注意深く調べることで、惑星の運動に関する 3 つの法則を発見した：

第 1 法則 惑星の軌道は、太陽を一つの焦点とする楕円である。

第 2 法則 面積速度は一定である。

第 3 法則 公転周期の 2 乗と軌道長半径の 3 乗の間に比例関係がある。

そしてこの法則は、Isac Newton による古典力学の中で説明されることになった。Kepler 運動は次の微分方程式

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{A.1})$$

に従う。ここで  $\mu = G(m_{\text{sun}} + m_{\text{planet}})$  であり、 $\mathbf{r}$  は惑星へ向かう相対ベクトルである。上記の微分方程式 (A.1) から 5 つの独立な第一積分<sup>1</sup>

$$E = \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \text{const} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{const} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{e} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r} = \text{const} \quad (\text{A.4})$$

<sup>1</sup>式は 7 つあるが、 $\mathbf{h} \cdot \mathbf{e} = 0$ ,  $\mu^2(e^2 - 1) = 2h^2 E$  から独立なものは 5 つになる。



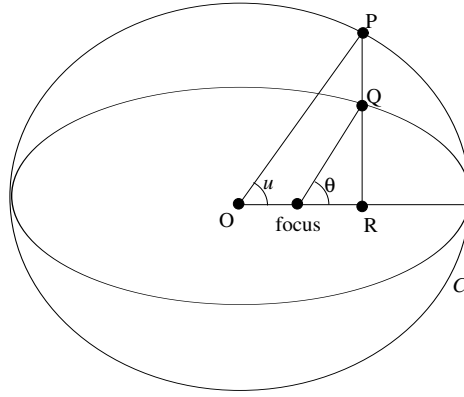


図 21: 離心近点離角  $u$  の幾何学的な定義。楕円に外接する円  $C$  を描き、物体のいる点  $Q$  を通り近日点方向に垂直な直線を引く。このときの  $C$  との交点  $P$ 、近日点方向を向く軸との交点  $R$  を用いて、 $u = \angle POR$  と定義される。

を導くことができるが、式 (A.3) から角運動量に垂直な面上で運動することがわかり、その面上では一般に 2 次曲線を描く。解が楕円軌道であれば、極座標  $(r, \theta)$  を用いて

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \omega)} \quad (\text{A.5})$$

と表せる。ここで、 $a$  は軌道長半径 (semi-major axis)、 $e$  は離心率 (eccentricity)、 $\omega$  は近日点方向 (argument of pericenter) を表す定数である。また、天体力学では  $\theta$  のことを真近点離角 (true anomaly) と呼ぶ。

楕円軌道の式 (A.5) は時間発展を含んでいないが、実際には Kepler 方程式と呼ばれるもう一つの式

$$u = n(t - t_0) + e \sin u \quad (\text{A.6})$$

が時間発展を決める。ここで  $t_0$  は近日点を通過する時刻、 $n = \sqrt{\mu/a^3}$  は平均運動 (mean motion)、 $u$  は離心近点離角 (eccentric anomaly) と呼ばれ、幾何学的には Fig A.1 のように定義される角度である。

上図から  $r = a(1 - e \cos u)$  の関係がある。また、 $l = n(t - t_0)$  は平均近点離角 (mean anomaly) と呼ばれている。

この Kepler 方程式は時間発展を決めるが、超越方程式であるために有限の代数操作で解くことができない。この解を表現するだけなら、 $l$  に関して Fourier 展開すれば、Bessel 関数を用いることで

$$u = 1 + 2 \sum_j \frac{1}{j} J_j(je) \sin jl \quad (\text{A.7})$$

のように表せる<sup>2</sup>。しかし数値的に解く場合にはこれが直接役に立つわけではない。そこで、この方程式を近似的に解くためのいくつかの方法をここで述べる。

<sup>2</sup>歴史的には、Kepler 方程式の解を表現するときに用いたこの  $J_j$  を Bessel 関数と呼ぶようになった。

- 一次収束解法

$e$  が 1 に比べて十分小さいなら、Kepler 方程式から  $u \sim l$  である。そこでこれを第 0 近似と考え、これを右辺に代入して得られた値を第 1 近似とする。つまり

$$u_1 = l + e \sin l$$

を得る。さらに右辺に  $u_1$  を代入して得られた値を第 2 近似  $\dots$  というように計算していく。すると、真の解を  $\bar{u}$ 、第  $n$  近似との差を  $\epsilon_n = u_n - \bar{u}$  とすれば、

$$\epsilon_{n+1} = (e \cos \bar{u}) \epsilon_n$$

となり、計算回数を重ねることで精度が  $e \cos \bar{u}$  だけ向上していくことが分かる。つまりこの数値解法は 1 次の収束解法である。

- Newton-Raphson 法

Kepler 方程式は  $f(u) = u - l - e \sin u = 0$  と書くこともできるが、こうしておくと Newton-Raphson 法が使える。つまり、 $f(u) = 0$  に対する第 0 近似  $u_0$  を与え、 $(u_0, f(u_0))$  での接線と  $u$  軸との交点の  $u$  座標

$$u_1 = u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)}$$

を第 1 近似とする。同様にして、

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

と順に求めていくことで、真の解  $\bar{u}$  に近づける。ただし、 $f'(u_n) \neq 0$  はもちろん仮定しておく。第  $n$  近似での誤差  $\epsilon_n$  は

$$\epsilon_{n+1} = \frac{f''(\bar{u})}{2f'(\bar{u})} \epsilon_n^2$$

から、2 次で収束していくことがわかり、この数値解法は 2 次の収束解法である。

さて、式 (A.5) および式 (A.6) から  $r(t), \theta(t)$  を求めることができ、粒子の位置を決めることができる。しかし Kepler 運動する粒子は実際には 3 次元空間内を運動しているので、この軌道面を特徴づける座標が必要となる。それには普通、基準面からの軌道面の傾きである軌道傾斜角 (inclination)  $I$ 、昇交点の方向を表す昇交点経度 (ascending node)  $\Omega$  を用いる。

こうすることで 5 つの定数  $a, e, I, \omega, \Omega$  から空間内の楕円が一つに定まり、さらに  $t_0$  によって時刻  $t$  における天体の位置を指定できる。天体の位置を決めるこれら 6 つの定数  $a, e, I, \omega, \Omega, t_0$  は Kepler 要素 (あるいは軌道要素) と呼ばれる。これらが天体の位置を一意的に定める数学的な理由は、これらがもとの微分方程式 (A.1) の 6 個の積分定数ということにある。

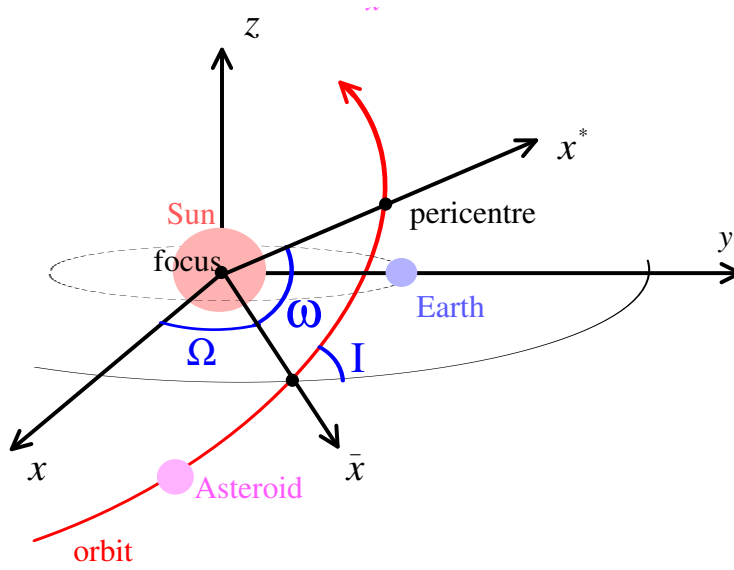


図 22: 空間内の軌道。昇交点方向を  $\bar{x}$  としている。

具体的に、 $a, e, I, \omega, \Omega, t_0$  が与えられたとして、位置  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  および速度  $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  を求めるには、以下の関係式を用いる：

$$\begin{aligned} x^* &= a(\cos u - e) & \dot{x}^* &= -\frac{an \sin u}{1 - e \cos u} \\ y^* &= a\sqrt{1 - e^2} \sin u & \dot{y}^* &= -\frac{an\sqrt{1 - e^2} \cos u}{1 - e \cos u} \end{aligned}$$

および

$$\mathbf{r} = \mathcal{O}_z(-\Omega)\mathcal{O}_x(-I)\mathcal{O}_z(-\omega)\mathbf{r}^*$$

ここで、 $\mathcal{O}_i(\theta)$  は  $i$  軸周りに  $\theta$  回転させる行列を表す。また、 $n = \sqrt{\mu/a^3}$  であることと、 $u$  は Kepler 方程式から求めることに注意する。

これとは逆に、ある時刻の位置と速度が分かればその Kepler 運動の軌道要素は以下のようにして計算できる。まず、 $a$  はエネルギー積分

$$\frac{\mu}{a} = \frac{2\mu}{r} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (\text{A.8})$$

から得られ、 $e, \Omega, I$  は角運動量積分

$$y\dot{z} - z\dot{y} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \sin \Omega \sin I \quad (\text{A.9})$$

$$z\dot{x} - x\dot{z} = -\sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos \Omega \sin I \quad (\text{A.10})$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos I \quad (\text{A.11})$$

から求められる。また、昇交点方向  $\bar{x}$  と軌道面内でそれに垂直な軸  $\bar{y}$  から位置と速度を計算すると

$$\bar{x} = x \cos \Omega + y \sin \Omega \quad (\text{A.12})$$

$$\bar{y} = (-x \sin \Omega + y \cos \Omega) \cos I + z \sin I \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \dot{x} \cos \Omega + \dot{y} \sin \Omega \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = (-\dot{x} \sin \Omega + \dot{y} \cos \Omega) \cos I + \dot{z} \sin I \quad (\text{A.15})$$

となるから、離心積分と呼ばれる式 (A.4) より

$$e \cos \omega = \frac{h}{\mu} \frac{d\bar{y}}{dt} - \frac{\bar{x}}{r} \quad (\text{A.16})$$

$$e \sin \omega = -\frac{h}{\mu} \frac{d\bar{x}}{dt} - \frac{\bar{y}}{r} \quad (\text{A.17})$$

となつて  $\omega$  を得ることができる。さらに、

$$\bar{x} = r \cos(f + \omega) \quad (\text{A.18})$$

$$\bar{y} = r \sin(f + \omega) \quad (\text{A.19})$$

から  $f$  を計算し、

$$r \cos f = a(\cos u - e) \quad (\text{A.20})$$

$$r \sin f = a\sqrt{1 - e^2} \sin u \quad (\text{A.21})$$

から  $u$  を計算すれば、これを Kepler 方程式に代入して  $t_0$  が計算できる。このようにして軌道要素は計算できる<sup>3</sup>。

すでに紹介した軌道要素を用いるよりも都合のよい軌道要素の組み合わせもある。 $t_0$  の代わりに元期近点離角  $\sigma = nt_0$  を用いることもある。また、 $\sigma, \omega$  の代わりに

$$\epsilon = \sigma + \omega + \Omega \quad \tilde{\omega} = \omega + \Omega \quad (\text{A.22})$$

を使うこともある。 $\epsilon$  は元期近点経度、 $\tilde{\omega}$  は近日点経度と呼ばれる。このときは  $l$  の代わりに平均経度  $\lambda \equiv nt + \epsilon = l + \tilde{\omega}$  を使うことが多い。

## A.2 制限3体問題

地球、あるいはその他の惑星、人工衛星などの運動を正確に論じるときは、太陽以外の天体の運動も考慮しなければいけない。つまり、互いに Newton 重力を及ぼしあう多体系となる。こうなると運動は複雑になり、よく知られているように3体以上の運動は "解析的に" 解くことができない。しかしある程度の条件をつけることで解に対するいくつかの情報を得ることができる。以下で説明する制限3体問題がその例である。

<sup>3</sup>数値計算を行う際、 $e$  が小さいと角運動量積分から  $e$  を求めるときに桁落ちが起きる。したがって、実際には離心積分から  $e$  を求めることになる。

3 体問題の例として、太陽、海王星、微惑星を考え、これらの運動について考察しよう。それぞれの量には下にそれぞれ  $s, n, p$  の添え字をつけておく。これらの運動方程式は

$$m_s \frac{d^2 \mathbf{r}_s}{dt^2} = -Gm_s m_n \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_n|^3} - Gm_s m_p \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_p}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_p|^3} \quad (\text{A.23})$$

$$m_n \frac{d^2 \mathbf{r}_n}{dt^2} = -Gm_n m_s \frac{\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_s}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_s|^3} - Gm_n m_p \frac{\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p|^3} \quad (\text{A.24})$$

$$m_p \frac{d^2 \mathbf{r}_p}{dt^2} = -Gm_p m_s \frac{\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s|^3} - Gm_p m_n \frac{\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n|^3} \quad (\text{A.25})$$

で与えられる。これを太陽原点の座標系で考えれば、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s, \mathbf{r}' = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_s$  として、これらの相対ベクトルの運動方程式は

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} - Gm_n \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \right) \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = -\mu' \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} - Gm_s \left( \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (\text{A.27})$$

となる。右辺第 2 項と第 3 項を合わせて潮汐力と呼び、第 3 天体の存在による効果を表す。特に第 2 項は第 3 天体による重力の効果、第 3 項は間接ポテンシャル (indirect potential) と呼ばれ、第 3 天体が中心の太陽を揺らす効果である。いま、微惑星の質量は、太陽や海王星に比べれば無視できるくらい小さいと考えられるから、式 (A.27) の第二項は第一項に比べ無視できる。すると海王星の運動は Kepler 運動になることが分かる。このように 3 体のうち、一体の質量を無視できる 3 体問題を特に制限 3 体問題と呼ぶ。簡単のため、以下では特に海王星が円運動をしているとして考える。

#### • Jacobi 積分

今度は太陽原点の座標系ではなく、重心を原点とし、太陽・海王星とともに回転する系で微惑星の方程式 (A.25) を書き直す。各速度ベクトル  $\Omega$  は常に一定であるから、慣性力としてコリオリ力、遠心力を考えると、微惑星の運動方程式は

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_p}{dt^2} + 2\Omega \times \frac{d\mathbf{R}_p}{dt} - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}_p) = -\mathbf{F}_p \quad (\text{A.28})$$

となる。ここで力  $\mathbf{F}_p$  は  $\Omega$  のまわりにもとの力を回転させたもので

$$\mathbf{F}_p = -Gm_s \frac{\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_s}{|\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_s|^3} - Gm_n \frac{\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_n}{|\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_n|^3} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}_p} \quad (\text{A.29})$$

と表せる。ただし  $\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_n$  はそれぞれ回転座標系での太陽、および海王星の位置ベクトルで、 $U$  は

$$U = -Gm_s \frac{1}{|\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_s|} - Gm_n \frac{1}{|\mathbf{R}_p - \mathbf{R}_n|} \quad (\text{A.30})$$

と書ける。さて、式 (A.28) の両辺を  $\dot{\mathbf{R}}_p$  で内積して時間で積分すると

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}}_p^2 - \frac{1}{2} (\Omega \times \mathbf{R}_p)^2 + U = C_J \quad (\text{A.31})$$

となる関係式が得られる。 $C_J$  は定数であり、これが円制限 3 体問題の保存量となるが、この量は Jacobi 積分と呼ばれている。

次に Jacobi 積分を他の座標系で表現していこう。まずは Jacobi 積分を、太陽中心の回転座標系における微惑星の位置ベクトル  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_p - \mathbf{R}_s$  で書き換えるには、

$$\Omega^2 = \frac{G(m_s + m_n)}{|\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_s|^3}, \quad \mathbf{R}_s = -\frac{m_n}{m_s + m_n}(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_s) \quad (\text{A.32})$$

の関係をを用いることですぐに導ける。これらを考慮して導いた結果は  $\mathbf{R}' = \mathbf{R}_n - \mathbf{R}_s$  を用いて

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})^2 + U + \frac{Gm_n \mathbf{R}' \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|'^3} = C_{J'} \quad (\text{A.33})$$

となる。ただし  $C_{J'} = C_J + \mathbf{R}_s^2/2$  である。新たに加わった左辺の最後の項は木星が太陽を揺らすことによる indirect potential である。さらに太陽中心の非回転系で表すには、位置ベクトルを  $-\boldsymbol{\Omega}$  のまわりに回転すればよく、距離や内積は変化を受けず、結果は

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) + U + \frac{Gm_n \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|'^3} = C_{J'} \quad (\text{A.34})$$

となる。

非回転系における Jacobi 積分 (A.34) を微惑星の軌道要素で表現した場合にはどうなるか計算しよう。微惑星の位置と速度が与えられればそれから軌道要素を求めることができる。とすでに述べた。それらを用いて Jacobi 積分を書き換えると

$$\frac{r'}{2a} + \sqrt{\left(1 + \frac{m_n}{m_s}\right) \frac{a}{r'}(1 - e^2)} \cos I + \frac{m_n}{m_s} r' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r'^3} \right) = \text{const.} \quad (\text{A.35})$$

となる。 $m_n/m_s \sim 5 \times 10^{-5}$  のように、 $m_n$  が  $m_s$  に比べて十分小さいなら、これらの一次以上は無視して

$$\frac{r'}{2a} + \sqrt{\frac{a}{r'}(1 - e^2)} \cos I = \text{const.} \quad (\text{A.36})$$

が得られる。これから、2つの異なる時刻において軌道要素を観測した場合、それらの間に

$$\frac{r'}{2a_1} + \sqrt{\frac{a_1}{r'}(1 - e_1^2)} \cos I_1 = \frac{r'}{2a_2} + \sqrt{\frac{a_2}{r'}(1 - e_2^2)} \cos I_2 \quad (\text{A.37})$$

という関係式が成立することになる。この関係式は Tisserand の判定式と呼ばれ、彗星の同定に使うことができる。しかし第3天体に非常に接近している場合には、式 (A.35) の右辺が非常に大きくなるので、上記の関係式は成立しなくなる。

### A.3 軌道要素の運動方程式

ここでは、摂動力による軌道要素の変化を直接表した Gauss の惑星方程式、および Lagrange の惑星方程式を紹介し、数値計算に有用となるように修正する。

Kepler 運動に摂動力  $\mathbf{F}$  が働いたときの運動方程式は

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{F}$$

と書ける。ただし、 $\mathbf{r}$  は相対ベクトル、 $\mu = G(m_1 + m_2)$  である。もし  $\mathbf{F} = \nabla \mathcal{R}$  となる関数  $\mathcal{R}$  がとれば、解析力学の手法を以下で用いることができる。この  $\mathcal{R}$  は摂動関数 (disturbing function) とよばれる。

ここでは摂動力が摂動関数から導かれるとして、摂動が働いた場合の運動方程式を導く。その際、変数  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  および  $\dot{\mathbf{r}} = (v_x, v_y, v_z)$  の時間変化を求めるのではなく、軌道要素  $a, \lambda, e, \tilde{\omega}, I, \Omega$  の時間変化を追うことにする。つまり、軌道要素はもともと時間の関数であるが、変数  $x, y, z, v_x, v_y, v_z$  とは式 ( ) で結びついているために、その時間微分は 0、つまり Kepler 運動においては一定値をとりつづける変数と考える。こうすると、軌道要素によって表された Hamiltonian からすぐに時間発展の方程式が導けそうだが、軌道要素は正準変数の組にはなっていない。そこで、正準変数を選びなおし、それらの正準方程式を利用して求めるべき式を導く。正準変数の代表的なものとしては以下のような組が知られている。

- Delaunay variables

$$\begin{aligned} l, & \quad g = \omega, & \quad h = \Omega, \\ L = \sqrt{\mu a}, & \quad G = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, & \quad H = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos I \end{aligned}$$

- Poincaré variables

$$\begin{aligned} \lambda, & \quad \gamma = -\tilde{\omega}, & \quad \zeta = -\Omega, \\ \Lambda = \sqrt{\mu a}, & \quad \Gamma = \sqrt{\mu a(1 - \sqrt{1 - e^2})}, & \quad Z = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}(1 - \cos I) \end{aligned}$$

ここでは Poincaré variables を使って計算を行う。このとき Hamiltonian は

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2\Lambda^2} - \mathcal{R} \quad (\text{A.38})$$

と書ける。したがって、時間発展を記述する正準方程式は

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\mu^2}{\Lambda^3} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Lambda} \quad \frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Gamma} \quad \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \gamma} \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial Z} \quad \frac{dZ}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \zeta} \quad (\text{A.41})$$

である。

この連立方程式 (A.39) ~ (A.41) をもとにして軌道要素の時間発展を表す方程式を得ることができるが、まずは  $n, \lambda, e, \tilde{\omega}, s, \Omega$  に対する時間発展の方程式を求めておく。それには変数変換

$$(\lambda, \gamma, \zeta, \Lambda, \Gamma, Z) \mapsto (n, \lambda, e, \tilde{\omega}, s, \Omega)$$

を考える必要がある。この変数変換によって、摂動関数の偏微分は以下ようになる：

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Lambda} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial n} - \frac{\eta e}{na^2(1 + \eta)} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{s}{2na^2\eta} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial s} \quad (\text{A.42})$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Gamma} = \frac{\eta}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{s}{2na^2\eta} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial s} \quad (\text{A.43})$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial Z} = \frac{1}{4na^2\eta s} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial s} \quad (\text{A.44})$$

これ以外はせいぜい符号の違いだけである。さらに左辺の時間微分も以下のように変更される：

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -\frac{a^2}{3} \frac{dn}{dt} \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\frac{a^2(1-\eta)}{3} \frac{dn}{dt} + \frac{na^2e}{\eta} \frac{de}{dt} \quad (\text{A.46})$$

$$\frac{dZ}{dt} = -\frac{2a^2\eta s^2}{3} \frac{dn}{dt} - \frac{2na^2es^2}{\eta} \frac{de}{dt} + na^2\eta s \frac{ds}{dt} \quad (\text{A.47})$$

残りはせいぜい符号の違いのみとなる。以上より、 $n, \lambda, e, \tilde{\omega}, s, \Omega$  の時間発展を表す方程式は

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + \frac{3}{a^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial n} + \frac{\eta e}{na^2(1+\eta)} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{s}{2na^2\eta} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial s} \quad (\text{A.49})$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\eta e}{na^2(1+\eta)} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} - \frac{\eta}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \tilde{\omega}} \quad (\text{A.50})$$

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{\eta}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{s}{2na^2\eta} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial s} \quad (\text{A.51})$$

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{s}{2na^2\eta} \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \tilde{\omega}} \right) - \frac{1}{4na^2\eta s} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{4na^2\eta s} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial s} \quad (\text{A.53})$$

となる。Kepler 要素  $a, e, I, \sigma, \omega, \Omega$  に関して計算するには、変数変換による微分を修正すればよく、結果は

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma} \quad (\text{A.54})$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\eta^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma} - \frac{\eta}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{na^2\eta \tan I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\eta \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \quad (\text{A.56})$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \frac{\eta^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \quad (\text{A.57})$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\eta}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{1}{na^2\eta \tan I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} \quad (\text{A.58})$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\eta \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} \quad (\text{A.59})$$

のようになる。この連立微分方程式は Lagrange の惑星方程式と呼ばれている。軌道要素として  $a, e, I, \sigma, \omega, \Omega$  以外を用いた場合の式も同様に計算できる。しかし Lagrange の惑星方程式 (A.54)~(A.56) をそのまま数値計算に適用することはできない。そこでこれを確かめるために少し考察を試みる。例として、近似的に Kepler 運動しているような状況を考えよう。 $a$  がほとんど変化せず、したとしても周期的だとすると、 $n$  も周期的となる。ここで

$$\frac{d\sigma}{dt} + t \frac{dn}{dt} = \frac{dl}{dt} - n \quad (\text{A.60})$$



の関係と、右辺が高々振動するということから、式 (A.57) の右辺に  $-tn$  が存在していなければ、式 (A.60) の関係が成り立たない。実際、右辺第一項は

$$-\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} = -\frac{2}{na} \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \right)_{\neq l} - t \frac{dn}{dt} \quad (\text{A.61})$$

と書ける。そしてこのような状況で何百万年も数値計算を行うと桁落ちなどの困難を引き起こす。しかしこれは式 (A.60) から分かるように、単に  $\sigma$  という変数を選んだことに起因する。したがって新たに

$$\frac{d\sigma^I}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + t \frac{dn}{dt}$$

を満たす変数  $\sigma^I$  を用いれば解決する。

$e$  や  $I$  が小さい場合も、Lagrange の方程式をそのまま使うことは数値計算には都合が悪い。実際、 $e \rightarrow 0$  や  $I \rightarrow 0$  で発散する項が存在する。これは単に、それぞれの極限で近日点方向  $\omega$ 、軌道傾斜角  $I$  が定義できないことに起因する。そこで新たに変数を定義しなおす必要がある。例として、 $\epsilon = \sigma + \tilde{\omega}$  および

$$h = e \sin \tilde{\omega} \quad k = e \cos \tilde{\omega} \quad (\text{A.62})$$

$$p = \sin \frac{I}{2} \sin \Omega \quad q = \sin \frac{I}{2} \cos \Omega \quad (\text{A.63})$$

を使うと、Lagrange の惑星方程式は

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} \quad (\text{A.64})$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} + \frac{\eta}{na^2(1+\eta)} \left( h \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial h} + k \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial k} \right) + \frac{1}{2na^2\eta} \left( p \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p} + q \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} \right) \quad (\text{A.65})$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{h\eta}{na^2(1+\eta)} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} + \frac{\eta}{na^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial k} + \frac{k}{2na^2\eta} \left( p \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p} + q \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} \right) \quad (\text{A.66})$$

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{k\eta}{na^2(1+\eta)} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} - \frac{\eta}{na^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial h} - \frac{h}{2na^2\eta} \left( p \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p} + q \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} \right) \quad (\text{A.67})$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{4na^2\eta} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} - \frac{p}{2na^2\eta} \left( k \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial h} - h \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial k} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} \right) \quad (\text{A.68})$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{4na^2\eta} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p} - \frac{q}{2na^2\eta} \left( k \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial h} - h \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial k} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} \right) \quad (\text{A.69})$$

となる。

摂動計算を行う際、軌道 6 要素の変化を直接表す方程式として Lagrange の惑星方程式以外に Gauss の惑星方程式（あるいは Gauss 型運動方程式）とよばれるものがある<sup>4</sup>。この式は摂動力による軌道要素の変化が見やすいが、式自体は複雑である。しかし、 $x, y, z$  などで表現した運動方程式より、数値計算などに必要な有効桁数は少なくすむという利点がある。

<sup>4</sup>導出方法については、[11] を参照。

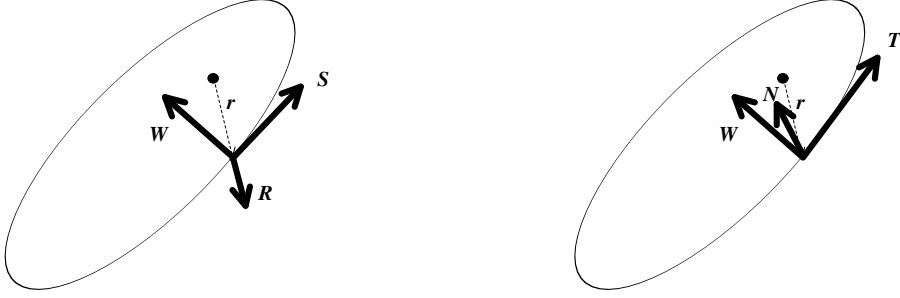


図 23:  $R, S, W$  の定義。動径ベクトル  $r$  方向の力を  $R$ 、軌道面内で  $R$  に垂直な力を  $S$ 、軌道面に垂直な力を  $W$  と表す。また、右図は  $T, N$  の定義で、 $T$  は速度方向、 $N$  は軌道面で  $T$  に垂直な力。

さて、Gauss の惑星方程式は以下の連立方程式である。

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \left( R \frac{ae}{\eta} \sin f + S \frac{a^2 \eta}{r} \right) \quad (\text{A.70})$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\eta}{na} \{ R \sin f + S(\cos f + \cos u) \} \quad (\text{A.71})$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{r}{na^2 \eta} W \cos(f + \omega) \quad (\text{A.72})$$

$$\frac{d\sigma^I}{dt} = -\frac{1}{na} \left( \frac{2r}{a} - \frac{\eta^2}{e} \cos f \right) R - \frac{\eta^2}{nae} \left( 1 + \frac{r}{a\eta^2} \right) S \sin f \quad (\text{A.73})$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\eta}{nae} \left\{ -R \cos f + S \left( 1 + \frac{r}{a\eta^2} \right) \sin f \right\} - \frac{r \sin(f + \omega)}{na^2 \eta} W \cot I \quad (\text{A.74})$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin(f + \omega)}{na^2 \eta \sin I} W \quad (\text{A.75})$$

ここで  $R, S, W$  は Fig 23のように定義される力の成分である。

$R, S, W$  ではなく、 $T, N, W$  を使った場合には以下ようになる。

$$\frac{da}{dt} = \frac{2A}{n\eta} T \quad (\text{A.76})$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\eta}{naA} \left\{ 2(e + \cos f)T - \frac{r}{a} \sin f N \right\} \quad (\text{A.77})$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{r}{na^2 \eta} W \cos(f + \omega) \quad (\text{A.78})$$

$$\frac{d\sigma^I}{dt} = \frac{r}{na^2 e A} - 2(1 + e^2 + e \cos f)T \sin f - \eta^2 N \cos f \quad (\text{A.79})$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\eta}{naeA} 2T \sin f + (\cos u + e)N - \frac{r \sin(f + \omega)}{na^2 \eta} W \cot I \quad (\text{A.80})$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin(f + \omega)}{na^2 \eta \sin I} W \quad (\text{A.81})$$

ここで、

$$A = \sqrt{1 + 2e \cos f + e^2} \quad (\text{A.82})$$

である。

Gauss の惑星方程式も、Lagrange の惑星方程式と同様の修正をしないといけない。ただし Gauss の惑星方程式の場合には  $f, u$  も式に直接含まれており、 $\tilde{f} = f + \tilde{\omega}$ 、 $\tilde{u} = u + \tilde{\omega}$  という新しい変数で書き換えなければいけない。このようにして修正した Gauss の惑星方程式を変数  $a, \lambda, h, k, p, q$  に対し書き下せば以下ようになる。

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\varsigma} [(\tilde{u} - \lambda)R + \eta S] \quad (\text{A.83})$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = n - \left[ \frac{2\varsigma}{na} + \eta \frac{k \cos \tilde{f} + h \sin \tilde{f}}{na(1 + \eta)} \right] R + \frac{k \sin \tilde{f} - h \cos \tilde{f}}{na(1 + \eta)} \left( \eta + \frac{\varsigma}{\eta} \right) S + \frac{\varsigma(q \sin \tilde{f} - p \cos \tilde{f})}{na\eta\rho} W \quad (\text{A.84})$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\eta \cos \tilde{f}}{na} R + \frac{\eta}{na} \left[ \sin \tilde{f} + \sin \tilde{u} - \frac{k(k \cos \tilde{u} - h \sin \tilde{u})}{1 + \eta} \right] S + \frac{k\varsigma}{na\eta} \frac{q \sin \tilde{f} - p \cos \tilde{f}}{\rho} W \quad (\text{A.85})$$

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\eta \sin \tilde{f}}{na} R + \frac{\eta}{na} \left[ \cos \tilde{f} + \cos \tilde{u} + \frac{h(k \cos \tilde{u} - h \sin \tilde{u})}{1 + \eta} \right] S - \frac{h\varsigma}{na\eta} \frac{q \sin \tilde{f} - p \cos \tilde{f}}{\rho} W \quad (\text{A.86})$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\varsigma\rho}{2na\eta} \left[ \sin \tilde{f} + \frac{q(q \sin \tilde{f} - p \cos \tilde{f})}{\rho^2} \right] W \quad (\text{A.87})$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\varsigma\rho}{2na\eta} \left[ \cos \tilde{f} - \frac{p(q \sin \tilde{f} - p \cos \tilde{f})}{\rho^2} \right] W \quad (\text{A.88})$$

ここで

$$\varsigma = \frac{r}{a} = 1 - k \cos \tilde{u} - h \sin \tilde{u} \quad (\text{A.89})$$

$$\rho = \sqrt{1 - p^2 - q^2} \quad (\text{A.90})$$

と置いた。また、 $\tilde{u}$  を決める Kepler 方程式は

$$\tilde{u} = \lambda + k \sin \tilde{u} - h \cos \tilde{u} \quad (\text{A.91})$$

である。さらに  $\tilde{f}$  を求める式は以下の連立方程式である。

$$k \cos \tilde{f} + h \sin \tilde{f} = \frac{k \cos \tilde{u} + h \sin \tilde{u} - h^2 - k^2}{\varsigma} \quad (\text{A.92})$$

$$k \sin \tilde{f} - h \cos \tilde{f} = \frac{k \sin \tilde{u} - h \cos \tilde{u}}{\varsigma} \eta \quad (\text{A.93})$$

## 第 B 章 摂動関数の展開

太陽系内の惑星などの運動を議論するときは  $e$  や  $s$  が小さい場合が多く、ここでは第三天体からの摂動関数をあらかじめ  $e, s$  で展開しておく。展開方法は Murray and Dermott [6] を参照した。

### B.1 $e, s$ に関する 2 次までの展開

さて、外側の天体の量については「 $'$ 」を用いて表すことにすると、 $\alpha = a/a'$  として摂動関数はそれぞれ

$$\mathcal{R} = \frac{\mu'}{a} (\mathcal{R}_D + \alpha \mathcal{R}_E) \quad (\text{B.1})$$

$$\mathcal{R}' = \frac{\mu}{a} \left( \alpha \mathcal{R}_D + \frac{1}{\alpha} \mathcal{R}_I \right) \quad (\text{B.2})$$

と表される。ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D &= \frac{a'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left( \frac{1}{2} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \Psi \right)^i \frac{a^i a'^{i+1}}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{m} \epsilon^k \epsilon'^{l-k} \hat{A}_{i,j,k,l-k} \right] \cos j(\tilde{f} - \tilde{f}') \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

および

$$\mathcal{R}_E = -\frac{r}{a} \left( \frac{a'}{r'} \right)^2 \cos \psi \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{R}_I = -\frac{r'}{a'} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \cos \psi \quad (\text{B.5})$$

$$(\text{B.6})$$

ただし

$$\Psi = \cos \psi - \cos(\tilde{f}' - \tilde{f}) \quad (\text{B.7})$$

$$\epsilon = \frac{r}{a} - 1 \quad (\text{B.8})$$

$$\epsilon' = \frac{r'}{a'} - 1 \quad (\text{B.9})$$

$$\hat{A}_{i,j,k,l} = a^k a'^l \frac{\partial^{k+l}}{\partial^k a \partial^l a'} (a'^{(-2i+1)} b_{i+1/2}^{(j)}) \quad (\text{B.10})$$

$\psi$  は摂動天体と被摂動天体の位置ベクトルがなす角度である。 $\mathcal{R}_D, \mathcal{R}_E, \mathcal{R}_I$  に対し  $e, s$  について 2 次までの項を取り出すと、 $j$  については  $-\infty$  から  $\infty$  までの和をとるとして

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_D = & \left\{ \frac{1}{2}b_{1/2}^{(j)} + \frac{1}{8}(e^2 + e'^2)[-4j^2 + \hat{D}\alpha^2\hat{D}]b_{1/2}^{(j)} + \frac{1}{4}(s^2 + s'^2)[- \alpha](b_{3/2}^{(j-1)} + b_{3/2}^{(j+1)}) \right\} \cos(j\lambda' - j\lambda) \\
& + \frac{1}{4}ee'[2 + 6j + 4j^2 - \hat{D}\alpha^2\hat{D}]b_{1/2}^{(j+1)} \cos(j\lambda' - j\lambda + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \\
& + ss'[\alpha]b_{3/2}^{(j+1)} \cos(j\lambda' - j\lambda + \Omega' - \Omega) \\
& + \frac{1}{2}e[-2j - \alpha\hat{D}]b_{1/2}^{(j)} \cos(j\lambda' + (1-j)\lambda - \tilde{\omega}) \\
& + \frac{1}{2}e'[\alpha^{-2j}\hat{D}\alpha^{2j+1}]b_{1/2}^{(j)} \cos((j+1)\lambda' - j\lambda - \tilde{\omega}') \\
& + \frac{1}{8}e^2[-5j + 4j^2 - 2\alpha\hat{D} + 4j\alpha\hat{D} + \alpha^2\hat{D}^2]b_{1/2}^{(j)} \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \\
& + \frac{1}{4}ee'[-2 + 6j - 4j^2 + 2\alpha\hat{D} - 4j\alpha\hat{D} - \alpha^2\hat{D}^2]b_{1/2}^{(j-1)} \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \\
& + \frac{1}{8}e'^2[2 - 7j + 4j^2 - 2\alpha\hat{D} + 4j\alpha\hat{D} + \alpha^2\hat{D}^2]b_{1/2}^{(j-2)} \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\tilde{\omega}') \\
& + \frac{1}{2}s^2[\alpha]b_{3/2}^{(j-1)} \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\Omega) \\
& + ss'[-\alpha]b_{3/2}^{(j-1)} \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - \Omega' - \Omega) \\
& + \frac{1}{2}s'^2[\alpha]b_{3/2}^{(j-1)} \cos(j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\Omega')
\end{aligned} \tag{B.11}$$

および

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_E = & \left( -1 + \frac{1}{2}(e^2 + e'^2) + (s^2 + s'^2) \right) \cos(\lambda' - \lambda) \\
& - ee' \cos(2\lambda' - 2\lambda - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}) \\
& - 2ss' \cos(\lambda' - \lambda - \Omega' + \Omega) \\
& - \frac{1}{2}e \cos(\lambda' - 2\lambda + \tilde{\omega}) + \frac{3}{2}e \cos(\lambda' - \tilde{\omega}) - 2e' \cos(2\lambda' - \lambda - \tilde{\omega}') \\
& - \frac{3}{8}e^2 \cos(\lambda' - 3\lambda + 2\tilde{\omega}) - \frac{1}{8}e^2 \cos(\lambda' + \lambda - 2\tilde{\omega}) \\
& + 3ee' \cos(2\lambda - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \frac{1}{8}e'^2 \cos(\lambda' + \lambda - 2\tilde{\omega}') \\
& - \frac{27}{8}e'^2 \cos(3\lambda' - \lambda - 2\tilde{\omega}') - s^2 \cos(\lambda' + \lambda - 2\Omega) \\
& + 2ss' \cos(\lambda' + \lambda - \Omega' - \Omega) - s'^2 \cos(\lambda' + \lambda - 2\Omega')
\end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_I = & \left( -1 + \frac{1}{2}(e^2 + e'^2) + (s^2 + s'^2) \right) \cos(\lambda' - \lambda) \\
& - ee' \cos(2\lambda' - 2\lambda - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}) \\
& - 2ss' \cos(\lambda' - \lambda - \Omega' + \Omega) \\
& - \frac{1}{2}e' \cos(\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}') + \frac{3}{2}e' \cos(\lambda - \tilde{\omega}') - 2e \cos(2\lambda - \lambda' - \tilde{\omega}) \\
& - \frac{3}{8}e'^2 \cos(\lambda - 3\lambda' + 2\tilde{\omega}') - \frac{1}{8}e'^2 \cos(\lambda' + \lambda - 2\tilde{\omega}') \\
& + 3ee' \cos(2\lambda' - \tilde{\omega} - \tilde{\omega}') - \frac{1}{8}e^2 \cos(\lambda' + \lambda - 2\tilde{\omega}) \\
& - \frac{27}{8}e^2 \cos(3\lambda - \lambda' - 2\tilde{\omega}) - s^2 \cos(\lambda' + \lambda - 2\Omega) \\
& + 2ss' \cos(\lambda' + \lambda - \Omega' - \Omega) - s'^2 \cos(\lambda' + \lambda - 2\Omega')
\end{aligned} \tag{B.13}$$

ただし摂動関数の展開に用いた Laplace 係数は

$$b_s^{(j)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\psi \cos j\psi}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \psi)^s} \tag{B.14}$$

で与えられる。ただし  $s$  は半整数とする。これは級数の形に書くことができ、

$$\frac{1}{2}b_s^{(j)} = \frac{(s)_j}{j!} \alpha^j F(s, s+j, j+1, \alpha^2) \tag{B.15}$$

$$= (s)_j \alpha^j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(s)_m (s+j)_m}{m!(j+m)!} \alpha^{2m} \tag{B.16}$$

ここで

$$(n)_0 = 1, \quad (n)_l = n(n+1) \cdots (n+l-1) = \frac{(n-1+l)!}{(n-1)!} \tag{B.17}$$

また、 $F$  は Gauss の超幾何関数で

$$F(a, b, c, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} \frac{z^m}{m!} \tag{B.18}$$

と表される。

## 第 C 章 Symplectic Integrators

数値積分の一つの方法として、今回使ったシンプレクティック法を説明する。これを使うと解析力学の正準形式を利用して、保存するべきエネルギーが数値積分の繰り返りで増加しないようにできる。

### C.1 四次のシンプレクティック法

一次のシンプレクティック法は、時刻  $t$  での正準共役量  $(q_i^{(0)}, p_i^{(0)})$  と

$$q_i^{(1)} = q_i^{(0)} + \tau \frac{\partial \mathcal{H}(q_i^{(1)}, p_i^{(0)})}{\partial p_i^{(0)}}, \quad p_i^{(1)} = p_i^{(0)} - \tau \frac{\partial \mathcal{H}(q_i^{(1)}, p_i^{(0)})}{\partial q_i^{(1)}} \quad (\text{C.1})$$

から  $(q_i^{(1)}, p_i^{(1)})$  を求め、これを時刻  $t + \tau$  の値とする。ただし  $\mathcal{H}$  は本来のハミルトニアンである。四次なら

$$q_i^{(1)} = q_i^{(0)} + c_1 \tau \frac{\partial \mathcal{H}(q_i^{(1)}, p_i^{(0)})}{\partial p_i^{(0)}}, \quad p_i^{(1)} = p_i^{(0)} - d_1 \tau \frac{\partial \mathcal{H}(q_i^{(1)}, p_i^{(0)})}{\partial q_i^{(1)}} \quad (\text{C.2})$$

$$q_i^{(2)} = q_i^{(1)} + c_1 \tau \frac{\partial \mathcal{H}(q_i^{(2)}, p_i^{(1)})}{\partial p_i^{(1)}}, \quad p_i^{(2)} = p_i^{(1)} - d_1 \tau \frac{\partial \mathcal{H}(q_i^{(2)}, p_i^{(1)})}{\partial q_i^{(2)}} \quad (\text{C.3})$$

$$q_i^{(3)} = q_i^{(2)} + c_1 \tau \frac{\partial \mathcal{H}(q_i^{(3)}, p_i^{(2)})}{\partial p_i^{(2)}}, \quad p_i^{(3)} = p_i^{(2)} - d_1 \tau \frac{\partial \mathcal{H}(q_i^{(3)}, p_i^{(2)})}{\partial q_i^{(3)}} \quad (\text{C.4})$$

$$q_i^{(4)} = q_i^{(3)} + c_1 \tau \frac{\partial \mathcal{H}(q_i^{(4)}, p_i^{(3)})}{\partial p_i^{(3)}}, \quad p_i^{(4)} = p_i^{(3)} - d_1 \tau \frac{\partial \mathcal{H}(q_i^{(4)}, p_i^{(3)})}{\partial q_i^{(4)}} \quad (\text{C.5})$$

から  $(q_i^{(4)}, p_i^{(4)})$  を求め、これを時刻  $t + \tau$  の値とする。ここで  $\beta = 2^{1/3}$  として

$$c_1 = c_4 = \frac{1}{2(2 - \beta)}, \quad c_2 = c_3 = \frac{1 - \beta}{2(2 - \beta)} \quad (\text{C.6})$$

$$d_1 = d_3 = \frac{1}{2 - \beta}, \quad d_2 = \frac{-\beta}{2 - \beta}, \quad d_4 = 0 \quad (\text{C.7})$$

である。

この計算の間

$$\mathcal{H}'(q_i^{(1)}, p_i^{(1)}) = \mathcal{H}'(q_i^{(0)}, p_i^{(0)}) \quad (\text{C.8})$$

となる量  $\mathcal{H}'$  がとれ、

$$\mathcal{H}'(q_i, p_i) = \mathcal{H}(q_i, p_i) + \tau \mathcal{H}_1(q_i, p_i) + \tau^2 \mathcal{H}_2(q_i, p_i) + \cdots \quad (\text{C.9})$$

のような形で求めることができる。というのは、式 (C.1) が

$$W(q_i^{(1)}, p_i^{(0)}) = q_i^{(1)} p_i^{(0)} - \tau \mathcal{H}(q_i^{(1)}, p_i^{(0)}) \quad (\text{C.10})$$

を母関数とした正準変換は時刻  $t$  に陽に依存していない。つまりこの正準変換の間、正準変数  $(q_i^{(1)}, p_i^{(1)})$  の時間発展を記述するハミルトニアンは、 $(q_i^{(0)}, p_i^{(0)})$  の時間発展を表すハミルトニアン  $\mathcal{H}$  の  $q_i^{(0)}, p_i^{(0)}$  の部分をそれぞれ  $q_i^{(1)}, p_i^{(1)}$  で置き換えるだけで得られる。このハミルトニアンが  $\mathcal{H}'$  である。

具体例として、調和振動子の場合を考察する。ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{p^2 + q^2}{2} \quad (\text{C.11})$$

で与えられる。これから、式 (C.1) は

$$q_i^{(1)} = q_i^{(0)} + \tau p_i^{(0)}, \quad p_i^{(1)} = p_i^{(0)} - \tau q_i^{(0)} \quad (\text{C.12})$$

また、

$$\mathcal{H}' = \frac{p^2 + q^2}{2} + \tau pq \quad (\text{C.13})$$

と求められる。



## 第 D 章 epicyclic motion

Kepler 運動は近日点移動が起こらないが、それに第三天体や gas の影響が加わると近日点は一般に移動することになる。近日点の移動は軌道が閉じないことが原因だが、epicyclic motion の方法を用いるとこの移動量を定量的に求めることができる。以下でそのことについてまとめておく。

### D.1 近日点の移動

太陽の周りを地球が Kepler 回転しているとき、太陽原点、黄道面に極座標  $(r, \theta)$ 、それに垂直に  $z$  方向をとった円柱座標を用いると、この系の Euler-Lagrange 方程式は

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{\mu}{r^2} \quad (\text{D.1})$$

$$(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (\text{D.2})$$

$$\ddot{z} = 0 \quad (\text{D.3})$$

であるが、これに太陽からの中心力以外の摂動ポテンシャル  $U(r, \theta, z)$  が加わると、

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{\mu}{r^2} - \frac{\partial U}{\partial r} \quad (\text{D.4})$$

$$(r^2\dot{\theta}) = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \quad (\text{D.5})$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (\text{D.6})$$

となる。

まずは角運動量に対して考察しよう。摂動ポテンシャルが軸対称である場合を考えれば  $z$  軸まわりの角運動量  $h$  が保存し、式 (D.4) から

$$\ddot{r} = \frac{h^2(r, z)}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} - \frac{\partial U(r, z)}{\partial r} \quad (\text{D.7})$$

を得る。この式は任意の時刻で成立するので、たとえば  $\ddot{r} = 0$  となる時間で考えれば、そのときの動径座標および  $z$  座標を  $r^*, z^*$  として

$$h^2(r^*, z^*) = \mu r^{*3} + r^{*3} \frac{\partial U(r^*, z^*)}{\partial r} \quad (\text{D.8})$$

と書ける。さらに  $h$  が時刻に依存しないことから、角運動量  $h$  は結局上式で与えられることになり、 $r, z$  には依存しない。

さて、次にこのような摂動ポテンシャルが働いた場合に、全ポテンシャルの底での軌道  $r_0(t), z_0(t)$  からのずれ  $\delta r(t), \delta z(t)$  に対して運動方程式を導こう。角運動量を  $h$  と書き、ずれを微小量と思って一次まで残すと、

$$\ddot{r}_0 + \ddot{\delta r} = \frac{h^2}{r_0^3} - \frac{\mu}{r_0^2} - \frac{\partial U(r_0, z_0)}{\partial r} + \left( -3\frac{h^2}{r_0^4} + 2\frac{\mu}{r_0^3} - \frac{\partial^2 U(r_0, z_0)}{\partial r^2} \right) \delta r - \frac{\partial^2 U(r_0, z_0)}{\partial r \partial z} \delta z \quad (\text{D.9})$$

$$\ddot{z}_0 + \ddot{\delta z} = -\frac{\partial U(r_0, z_0)}{\partial z} - \frac{\partial^2 U(r_0, z_0)}{\partial r \partial z} \delta r - \frac{\partial^2 U(r_0, z_0)}{\partial z^2} \delta z \quad (\text{D.10})$$

が得られるが、 $r_0, z_0$  は  $\dot{r}_0 = \dot{z}_0 = 0$  から

$$0 = \frac{h^2}{r_0^3} - \frac{\mu}{r_0^2} - \frac{\partial U(r_0, z_0)}{\partial r} \quad (\text{D.11})$$

$$0 = -\frac{\partial U(r_0, z_0)}{\partial z} \quad (\text{D.12})$$

の解であり、結局、式 (D.9) 及 (D.10) は

$$\ddot{\delta r} = -\left(3\frac{h^2}{r_0^4} - 2\frac{\mu}{r_0^3} + \frac{\partial^2 U(r_0, z_0)}{\partial r^2}\right)\delta r - \frac{\partial^2 U(r_0, z_0)}{\partial r \partial z}\delta z \quad (\text{D.13})$$

$$\ddot{\delta z} = -\frac{\partial^2 U(r_0, z_0)}{\partial r \partial z}\delta r - \frac{\partial^2 U(r_0, z_0)}{\partial z^2}\delta z \quad (\text{D.14})$$

と書きなおせる。さらに角運動量  $h$  は式 (D.11) から求めることができる。また、 $h$  を使って式 (D.13) を書きなおすと

$$\ddot{\delta r} = -\left(\frac{1}{r_0^3} \frac{\partial h^2}{\partial r_0}\right)\delta r - \frac{\partial^2 U(r_0, z_0)}{\partial r \partial z}\delta z \quad (\text{D.15})$$

となる。

近日点の移動量を以下で求めよう。簡単のため、ポテンシャルに関して以下の条件

$$\frac{\partial^2 U(r_0, z_0)}{\partial r \partial z} = 0 \quad (\text{D.16})$$

を加える。このとき、 $r$  方向の振動数  $\kappa(r_0)$  は

$$\kappa^2(r_0) = \frac{1}{r_0^3} \frac{\partial h^2}{\partial r_0} \quad (\text{D.17})$$

で与えられる。一方、 $\theta$  方向の回転の角速度  $\Omega(r_0)$  は

$$\Omega(r_0) \simeq \frac{h^2}{r_0^2} \quad (\text{D.18})$$

となる。近似的に  $z$  方向の運動を無視できるくらい  $\delta z$  が十分小さいとすると、近日点の移動はこれらの振動数差で表すことができる。つまり、 $\theta$  方向一周あたりの近日点の移動量は

$$\Delta\tilde{\omega} = 2\pi - \kappa \frac{2\pi}{\Omega} \quad (\text{D.19})$$

となるから、これを時間平均して、単位時間当たりの近日点の移動量

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \Omega - \kappa \quad (\text{D.20})$$

が得られる。

具体例として、まずは Kepler 運動を考えよう。つまり  $U = 0$  となる場合である。このときはすぐに  $\kappa = \Omega$  となることがわかり、近日点の移動は起こらない。次に今回用いた gas

の重力場  $U(t, r, z) = A \exp(-t/\tau_g) \sqrt{z^2 + \epsilon^2 r^2}$  による近日点の移動量を求めよう。  $z_0 = 0$  であるから式 (D.16) は満たされるので、式 (D.17) と (D.18) から

$$\kappa = \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3} + \frac{3A\epsilon}{r_0} \exp(-t/\tau_g)} \quad \Omega = \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3} + \frac{A\epsilon}{r_0} \exp(-t/\tau_g)} \quad (\text{D.21})$$

と求められる。ルートの中の第2項が第1項に比べて十分小さければ、近日点の移動量は最終的に

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = A\epsilon \sqrt{\frac{r_0}{\mu}} \exp(-t/\tau_g) \quad (\text{D.22})$$

となる。

## 参考文献

- [1] Ida, S. Bryden, G. Lin, D.N.C. and Tanaka, H. 2000, "Orbital migration of Neptune and orbital distribution of trans-neptunian objects", *ApJ*, 534, 428-445
- [2] Lynden-Bell, D. and Pringle, J.E. 1974, "The evolution of viscous discs and the origin of the nebular variables", *M. N. R. A. S.*, 168, 603-637
- [3] Goldreich, P. and Tremaine, S. 1980, "Disc-satellite interactions", *AJ*, 241, 425-441
- [4] Lin, D.N.C. and Papaloizou, J. 1986, "On the tidal interaction between protoplanets and the primordial Solar Nebula. II. self-consistent nonlinear interaction", *AJ*, 307, 395-409
- [5] Malhotra, R. 1995, "The origin of Pluto's orbit: Implication for the Solar System beyond Neptune", *AJ*, 110, 420
- [6] Murray, D. Dermott, S. "Solar System Dynamics", *Cambridge Univ.*
- [7] Kinosita, H. Yoshida, H. and Nakai, H. 1991, "Symplectic integrators and their application to Dynamical Astronomy", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 50, 59-71
- [8] Lykawka, P.S. Mukai, T. 2007, "Dynamical classification of trans-neptunian objects: Probing their origin, evolution, and interrelation", *Icarus*, 189, 213-232
- [9] Innanen, K.A. Zheng, J.Q. Mikkola, S. and Valtonen, M.J. 1997, "The Kozai mechanism and the stability of planetary orbits in binary star systems", *AJ*, 113, 1915
- [10] Fernandez, J.A. and Ip, W.H. 1984, "some dynamical aspects of the accretion of Uranus and Neptune: The exchange of orbital angular momentum with planetesimals", *Icarus*, 58, 109-120
- [11] 木下 宙 『天体と軌道の力学』（東京大学出版会）