

概要

このノートでは、宇宙マイクロ波背景輻射の弱い重力レンズ効果についてまとめる。

宇宙マイクロ波背景輻射の弱い重力レンズ効果

並河俊弥

2016 年 7 月 6 日

1 導入

最終散乱面から我々が観測するまで、CMB光子は様々な二次的效果を受ける。その一つが重力レンズ効果であり、CMBレンズング、CMBの弱い重力レンズなどと呼ばれている。主な重力レンズ源は、最終散乱面と観測者の間の大規模構造である。典型的な曲がり角は数分角で、銀河の重力レンズと比べて高赤方偏移に存在する重力レンズ源からの影響が大きい。CMB光子が重力レンズ効果を受けることで、観測したCMBの揺らぎのパターンは、最終散乱面上のものとは異なったものとなる。現在では、この影響を統計的に解析することで重力レンズ源の情報を引き出し、宇宙論・宇宙物理学への応用が精力的に行われ始めている。

CMBの揺らぎに対する重力レンズ効果の研究は、1980年代まで遡る。1980-1990年代は、CMBの重力レンズ効果が温度揺らぎの2点相関関数にどのような影響を及ぼすかが議論されていた ([13, 103, 131, 35, 107]など)。文献[107]では、角度パワースペクトルの精密な計算が行われ、音響ピークがならされること、小角度スケールの揺らぎの振幅が増幅されるなどが確認された。また、文献[5, 141]では、重力レンズを受けた後のCMBのガウス性の歪みについて計算が行われている。現在、より重要な効果だと考えられているのは重力レンズから生じるBモード偏光である。これは、最終散乱面上のEモード偏光がBモード偏光に変換されたものである[142]。

これらの理論研究は2000年代にはすでに成熟したものとなっていたが、重力レンズ効果の検出は2000年代後半-2010年代前半に入ってからである。重力レンズ効果は、重力レンズを受けたCMBの温度・偏光揺らぎの角度パワースペクトルを見ることで、あるいは重力レンズが作る非等方なCMBの揺らぎを見ることで検出されてきた (例えば[101, 24, ?]。詳細は5章で後述)。Planckプロジェクトによる観測では 40σ 以上の精度で検出されている。今後のCMB観測では 100σ を十分越える精度での観測、その宇宙論への応用が期待されている。同時に、正確な推定方法が要求されてきている。検出された重力レンズ効果から、暗黒エネルギーの存在 [114, 133, 90], 暗黒物質と暗黒エネルギーの相互作用[136]、宇宙ひも[82]、原始揺らぎの非ガウス性[38]が検証されてきた。将来は、以下に列挙するように、ニュートリノ質量や暗黒エネルギーの詳細な性質、重力理論の検証など様々な問題へと応用が期待される。

- **暗黒エネルギー、暗黒物質、ニュートリノ質量** 宇宙加速膨張を支配する暗黒エネルギーの性質は、まだまだ理論的な理解が限られている。宇宙論観測が暗黒エネルギーの正体を探る唯一の手段である。CMBの重力レンズ効果は、暗黒エネルギーが構造形成に与える影響を通じて、その性質を観測的に検証する手段を与える。ニュートリノ質量の決定は素粒子標準模型を越えた物理を理解する上で重要であるが、質量をもつニュートリノも、その構造形成に与える影響から、CMBの重力レンズ効果を観測することで測定できる。その他、暗黒物質の正体、重力理論の検証、原始非ガウス性の測定など、構造形成を通じて様々な問題への応用が可能である。
- **重力波、宇宙ひも、宇宙磁場** 構造形成のような密度（スカラー型）揺らぎから生じる重力レンズに限らず、ベ

クトル型、テンソル型から生じる重力レンズ効果を宇宙論へ応用することもできる（2章で後述）。ベクトル型、テンソル型の重力場によって引き起こされる重力レンズ効果では、曲がり角で構成されるベクトル場に渦状のパターン（カール成分）を形成する。カール成分はスカラー型では作られないので、密度揺らぎに比べて揺らぎの振幅が小さいものの、ベクトル型、テンソル型の重力場を生じる宇宙ひもや重力波、宇宙磁場の検証に利用できる[20, 7, 138, 139]。

- **原始Bモード偏光、原始揺らぎの非等方性** さらに、CMBの重力レンズ効果の研究は、Bモード偏光を用いたインフレーション起源の原始重力波を検出する上でも欠かせないものとなりつつある。これまでのCMB観測の結果から、Bモード偏光における原始重力波の振幅は、重力レンズ効果によるものと比べて同等か、あるいはそれ以下の可能性が非常に高いからである。将来は、原始重力波への感度を向上させるため、重力レンズ起源のBモード偏光を除去するアルゴリズムを発展させる必要がある [68, 135, 117, 118, 1]。インフレーション起源以外で生じるBモード偏光（宇宙ひも、磁場など）も、レンズBモード除去が必要となる。同様に、重力レンズ効果はCMB揺らぎに非ガウス性や非等方性をもたらすため、これらの検証を行う上でも重力レンズ由来のものを除去することが重要となる場合がある。

CMBの観測精度が向上するにつれて、重力レンズを測定する方法も発展させる必要がある。重力レンズの測定では、重力レンズを受ける前のCMBの揺らぎは等方的であると通常仮定する。しかし、現実の観測では、例えば銀河面や点光源のマスク、非一様ノイズ、非等方ビームといった様々な要因で、観測したCMB揺らぎは重力レンズがなくともすでに非等方となっている [3, 49, 48]。宇宙論への応用を念頭に置くと、これらの寄与をうまく抑制することが必要となっている。

ここで、以降の章の簡単な説明をする。2章では、スカラー型だけではなく、ベクトル型、テンソル型までを含めて重力レンズ効果を導出し、暗黒エネルギー、ニュートリノ質量、宇宙ひもなどがどのように観測量に影響を与えるかみる。3章では、重力レンズが作る非ガウス性、非等方性を定式化する。4章では、重力レンズ効果の測定方法について説明する。5章では、現在の観測の現状と将来の展望についてまとめる。

2 レンズポテンシャルとカール成分

最終散乱面から放たれたCMB光子を考える。この光子は、我々に到達するまでに重力場の影響を受けるため、その測地線は曲げられ、最終散乱面上とは少し異なる方角から到達した光子として観測される。到来方向と本来の方向の差は曲がり角と呼ばれる。曲がり角は、観測者から散乱面まで測地線上で積分した重力場の情報をもつ。ここでは、曲がり角が重力場とどのように結びつくか導出する。また、角度パワースペクトルが暗黒エネルギーやニュートリノ質量、宇宙ひもにどのように影響されるか述べる。

2.1 重力レンズの曲がり角

曲がり角を重力場の摂動量で表すため、測地線方程式を解く。重力場の摂動を取り入れた線素は

$$ds^2 = a^2(\eta)(\bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu, \quad (1)$$

で与えられる。ここで a は背景時空でのスケール因子、 $\bar{g}_{\mu\nu}$ は背景時空、 $\delta g_{\mu\nu}$ は摂動時空である。ここでは、背景時空は平坦で一様等方を仮定する：

$$\bar{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -d\eta^2 + \bar{\gamma}_{ij}dx^i dx^j = -d\eta^2 + d\chi^2 + \chi^2\omega_{ab}d\theta^a d\theta^b, \quad (2)$$

ただし $\omega_{ab}d\theta^a d\theta^b = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ は単位球面上の計量である。共形ニュートンゲージでは、摂動時空は^{*1}

$$\delta g_{00} = -2\Phi, \quad \delta g_{0i} = -\sigma_i, \quad \delta g_{ij} = 2\Psi\bar{\gamma}_{ij} + h_{ij}, \quad (3)$$

ただし Φ と Ψ はスカラー型摂動、 σ_i はベクトル型摂動 ($\sigma_i|{}^i = 0$)、 h_{ij} はテンソル型摂動 ($h_{ij}|{}^i = 0$ かつ $h^i{}_i = 0$) である。記号 $(|)$ は空間三次元背景時空 $\bar{\gamma}_{ij}$ での共変微分である。

曲がり角を定義するため、背景時空と摂動時空でのヌル測地線、 \bar{x}^μ と x^μ を考える。背景時空では光子の軌跡は曲げられないので、背景時空での光子の軌跡は $\bar{x}^\mu = (\eta_0 - \chi, \chi\hat{n}^i)$ のようにパラメータ化できる。ここで η_0 は共形時間、 \hat{n}^i は光子の到来方向を表す単位ベクトルである。静的な観測者を考え、曲がり角を、摂動時空と背景時空での光子の軌跡の差 $x^\mu - \bar{x}^\mu$ の角度成分を球面上に射影したものとして定義する[139]：

$$d^a \equiv \frac{[x^i(\chi_s) - \bar{x}^i(\chi_s)]e_i{}^a}{\chi_s} - \theta_O^a, \quad (4)$$

ここで a は角度成分、 θ と φ である。空間3次元のベクトル $e_i{}^a$ は到来方向 \hat{n}^i と直交する基底であり、 χ_s は観測者から最終散乱面までの共動距離、 θ_O^a は観測地点の角度座標である。曲がり角は2次元ベクトルであり、二自由度あるため、パリティによって二成分に分解できる [123, 54, 20, ?]：

$$d^a = \phi{:}^a + \epsilon^a{}_b \varpi{:}^b, \quad (5)$$

ここで $(:)$ は単位球面上の共変微分であり、 $\epsilon^a{}_b$ は二次元のLevi-Civita記号である。以降では、式(5)の右辺第一項と第二項をそれぞれ勾配、カール成分と呼ぶことにする。また、 ϕ はCMB光子に対するlensing potential（レンズポテンシャル）である。

背景時空と摂動時空での軌跡の差分は、測地線方程式を解くことでえられる。ここでは詳細を省き、最終的な結果を述べると[139]

$$\nabla^2\phi = d^a{:}{}_a = \int_0^{\chi_s} \frac{d\chi}{\chi} \left\{ \frac{\chi_s - \chi}{\chi_s} \nabla^2[2\psi + \mathcal{A}] - \mathcal{B}^a{:}{}_a \right\}, \quad (6)$$

$$\nabla^2\varpi = d^a{:}{}_b \epsilon^b{}_a = - \int_0^{\chi_s} \frac{d\chi}{\chi} \mathcal{B}^a{:}{}_b \epsilon^b{}_a. \quad (7)$$

となる。ここで ∇^2 は単位球面上のラプラシアン、 $\psi = (\Phi - \Psi)/2$ 、また

$$\mathcal{A} = \sigma_i \hat{n}^i + h_{ij} \hat{n}^i \hat{n}^j, \quad \mathcal{B}_a = \sigma_i e_a^i - 2h_{ij} e_a^i \hat{n}^j. \quad (8)$$

を定義した。 \mathcal{A} と \mathcal{B} はスカラー型摂動では生じない量である。式(6)と(7)では、右辺の積分は背景時空の測地線に沿ったものであり、ボルン近似と呼ばれている。この補正項に関しては、例えば文献[19]で求められている。文献[61]では、重力レンズによる時間遅延（一般に動系方向の摂動）が、重力レンズを受けたCMB揺らぎに与える影響について議論されているが、主要な寄与と比べて何桁も小さく、無視できる。

まず、ベクトル、テンソル摂動を無視して議論する。このとき、カール成分は消え、勾配成分は

$$\nabla^2\phi = 2 \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{\chi_s - \chi}{\chi_s \chi} \nabla^2\psi = 3\Omega_m H_0^2 \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{(\chi_s - \chi)\chi}{\chi_s} \frac{\delta_m}{a}, \quad (9)$$

で与えられる。最後の変形ではポアソン方程式を使い、物質密度揺らぎ δ_m と関係づけた。また、3次元空間ラプラシアン作用における χ 成分も無視した。上式から、 $\delta_m \propto a$ となる場合、 $\nabla^2\phi$ への寄与は主に $\chi = \chi_s/2$ からである。ま

^{*1} 文献[139]では、線形摂動の範囲で、ゲージ不変量[69]を用いた曲がり角、銀河シアの導出を行っている。

た、観測地点と最終散乱面での重力場の影響はない。最終散乱面の半分の距離は約7000 Mpcである。レンジングの重み関数 $(\chi_s - \chi)\chi/\chi_s$ を z に対する関数として考えると、積分の主要な寄与は $z \sim 2$ であるが、実際は幅広い範囲の赤方偏移 $1 \lesssim z \lesssim 10$ からの寄与がある[72]。線形摂動を考える限りスカラー摂動からカール成分は生成されないが、高次の摂動、例えばスカラー摂動の二次を考えるとカール成分が生じ、小スケールで寄与が大きくなる[54, 102]。

ここで、光源面と結像面を結ぶ写像のヤコビ行列との関係について触れておく。ヤコビ行列は、測地線偏差の方程式を解くことで、重力場を用いた表式が得られる。シア成分 γ_{ab} は、ヤコビ行列のトレース・レス対称成分を最終散乱面までの共動距離 χ_s で割ったもので定義する。このとき、[105, 139]

$$\gamma_{ab} = d_{\langle a;b \rangle} + \frac{1}{2}[h_{\langle ab \rangle}]_0^{\chi_s}, \quad (10)$$

ここで、 $X_{\langle ab \rangle} = (X_{ab} + X_{ba} - X^c{}_c \omega_{ab})/2$ である。右辺第二項はテンソル摂動から生じる。これは、観測地点と光源それぞれにおいて、テンソル摂動が2次元の軸方向を異方的に歪めることでシアをつくるが (metric shear)、それらは曲がり角だけでは表現できない[28]。

2.2 角度パワースペクトル

曲がり角（勾配、カール成分）を測定すれば、その角度パワースペクトルを計算することで、宇宙論的な情報を引き出すことができる。ここでは、式(6)と(7)をもとに、勾配、カール成分の角度パワースペクトルについて議論する。特に、重力摂動量のパワースペクトルと関連付ける。

2.2.1 スカラー摂動のみ

まず、スカラー摂動だけの場合を考える。こうすることで、一般的な場合の議論を見通しやすくする。

重力ポテンシャルの揺らぎを、スカラーのモード関数 $Q^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ を使って以下のようにフーリエ分解する：

$$\psi(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \psi_{\mathbf{k}}(\eta) Q^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}). \quad (11)$$

これを式(6)に代入すると

$$\nabla^2 \phi = 2 \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{\chi_s - \chi}{\chi_s \chi} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \psi_{\mathbf{k}}(\eta) \nabla^2 Q^{(0)}(\chi \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{k}). \quad (12)$$

が得られる。

角度パワースペクトルは

$$\delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_\ell^{\phi\phi} = \langle \phi_{\ell m} \phi_{\ell' m'}^* \rangle, \quad (13)$$

と定義される。ここで $\phi_{\ell m}$ はレンズポテンシャルを球面調和関数 $Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}})$ で展開した場合の展開係数であり、

$$\phi(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell, m} \phi_{\ell m} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}). \quad (14)$$

で与えられる。これを式(12)に代入し、球面調和関数の直交性を使うことで、^{*2}

$$\phi_{\ell m} = \frac{2}{\ell(\ell+1)} \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{\chi_s - \chi}{\chi_s \chi} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \psi_{\mathbf{k}}(\eta) \int d^2 \hat{\mathbf{n}} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}) \nabla^2 Q^{(0)}(\chi \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{k}), \quad (15)$$

^{*2} ここでは、 $\ell = 0$ を無視する。このモードは勾配成分の平均量を生成するが、曲がり角の測定では観測できない。

ただし $\nabla^2 Y_{\ell,m} = \ell(\ell+1)Y_{\ell,m}$ を用いた。カール成分の自己相関 $C_\ell^{\varpi\varpi}$ 、勾配とカール成分の対相関 $C_\ell^{\phi\varpi}$ も、式 (13) から同様に定義される。上式を簡単化するため、部分波展開

$$\int d^2\hat{\mathbf{n}} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}) \nabla^2 Q^{(0)}(\chi\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{k}) = 4\pi(-i)^\ell j_\ell(k\chi)\ell(\ell+1)Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}), \quad (16)$$

を用いる。ここで $j_\ell(x)$ は球ベッセル関数である。これを式 (15) に代入することで、

$$\phi_{\ell m} = 2 \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{\chi_s - \chi}{\chi_s \chi} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\pi^2} (-i)^\ell j_\ell(k\chi) \psi_{\mathbf{k}}(\eta_0 - \chi) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}), \quad (17)$$

With the dimensionless power spectrum defined as

$$\langle \psi_{\mathbf{k}}(\eta) \psi_{\mathbf{k}'}^*(\eta') \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{2\pi^2}{k^3} \Delta_\psi(k, \eta, \eta'), \quad (18)$$

the angular power spectrum of the gradient mode defined in Eq. (13) is given by

$$C_\ell^{\phi\phi} = 16\pi \int \frac{dk}{k} \int_0^{\chi_s} d\chi \int_0^{\chi_s} d\chi' \frac{\chi_s - \chi}{\chi_s \chi} \frac{\chi_s - \chi'}{\chi_s \chi'} j_\ell(k\chi) j_\ell(k\chi') \Delta_\psi(k, \eta_0 - \chi, \eta_0 - \chi'). \quad (19)$$

2.2.2 一般の場合

次に、すべての摂動が含まれる一般の場合について考える。式 (11) と同様に、ベクトル、テンソル摂動をフーリエ分解する。このさい、ベクトル、テンソルに対するモード関数、 $Q_i^{(\pm 1)}(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ および $Q_{ij}^{(\pm 2)}(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ を用いて [63]

$$\sigma_i(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{s=\pm 1} \sigma_{\mathbf{k}}^{(s)}(\eta) Q_i^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}), \quad (20)$$

$$h_{ij}(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{s=\pm 2} h_{\mathbf{k}}^{(s)}(\eta) Q_{ij}^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}), \quad (21)$$

ただし、モード関数の具体的な表式は [63]

$$Q_i^{(\pm 1)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \frac{\pm i}{\sqrt{2}} e_{\pm, i}(\hat{\mathbf{k}}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (22)$$

$$Q_{ij}^{(\pm 2)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \frac{-1}{\sqrt{2}} e_{\pm, i}(\hat{\mathbf{k}}) e_{\pm, j}(\hat{\mathbf{k}}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (23)$$

ここで $e_\pm(\hat{\mathbf{k}}) = e_\theta(\hat{\mathbf{k}}) \pm i e_\varphi(\hat{\mathbf{k}})$ は偏光ベクトルで、波数 \mathbf{k} と垂直である。スカラー摂動の場合と同様に、まずは式 (20) と (21) を式 (6) と (7) に代入する。次に、式 (8) より、式 (16) と同様だが、ベクトル、テンソル摂動のモード関数について求める。我々が計算すべきは、以下で定義される全角運動量波展開の系数 $\mathcal{J}_\ell^{(G)}(k\chi)$ である：

$$\int d^2\hat{\mathbf{n}} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}) G(\chi\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{k}) = \mathcal{J}_\ell^{(G)}(k\chi) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}), \quad (24)$$

ここで、全角運動量波展開の基底 G は、例えば $\nabla^2 \hat{n}^i Q_i^{(\pm 1)}$ などである。文献 [63, 22, 139] では、 $\mathcal{J}^{(G)}$ の具体的な表式が計算されており、CMB の角度パワースペクトルの計算に応用されている。文献 [139] で示されているように、式 (24) は重力レンズにおける勾配・カール成分の計算でも便利である。勾配・カール成分の角度パワースペクトルを重力場の無次元パワースペクトルと結びつけるため、ベクトル、テンソル摂動の統計量を以下のように与える：

$$\langle [\sigma_{\mathbf{k}}^{(s)}(\eta)]^* \sigma_{\mathbf{k}'}^{(s')}(\eta') \rangle = \delta_{ss'} \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{2\pi^2}{k^3} \Delta^{(s)}(k; \eta, \eta') \quad (s, s' = \pm 1), \quad (25)$$

$$\langle [h_{\mathbf{k}}^{(s)}(\eta)]^* h_{\mathbf{k}'}^{(s')}(\eta') \rangle = \delta_{ss'} \frac{1}{8} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{2\pi^2}{k^3} \Delta^{(s)}(k; \eta, \eta') \quad (s, s' = \pm 2). \quad (26)$$

最終的な表式では、スカラー、ベクトル、テンソル角成分を分解することで以下ようになる[139]：

$$C_\ell^{xx} = 4\pi \int_0^\infty \frac{dk}{k} k^2 \int_0^{\chi_s} d\chi \int_0^{\chi_s} d\chi' \times \sum_{s=-2}^2 S_{x,\ell}^{(s)}(k\chi_s, k\chi) S_{x,\ell}^{(s)}(k\chi_s, k\chi') \Delta^{(s)}(k; \eta_0 - \chi, \eta_0 - \chi'), \quad (27)$$

また $C_\ell^{\phi\varpi} = 0$ であり、 $x = \phi$ あるいは ϖ とした。遷移関数 $S_{x,\ell}^{(s)}(\lambda, \lambda')$ は以下のようにまとめられる：

- スカラー摂動

$$S_{\phi,\ell}^{(0)}(\lambda, \lambda') = 2 \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda\lambda'} j_\ell(\lambda'), \quad (28)$$

$$S_{\varpi,\ell}^{(0)}(\lambda, \lambda') = 0. \quad (29)$$

- ベクトル摂動

$$S_{\phi,\ell}^{(\pm 1)}(\lambda, \lambda') = \sqrt{\frac{(\ell+1)!}{2(\ell-1)!}} \left[\frac{\lambda - \lambda'}{\lambda\lambda'} \frac{j_\ell(\lambda')}{\lambda'} - \frac{1}{\ell(\ell+1)} \frac{1}{(\lambda')^2} \frac{d[\lambda' j_\ell(\lambda')]}{d\lambda'} \right], \quad (30)$$

$$S_{\varpi,\ell}^{(\pm 1)}(\lambda, \lambda') = \pm \sqrt{\frac{1}{2\ell(\ell+1)}} j_\ell(\lambda'), \quad (31)$$

- テンソル摂動

$$S_{\phi,\ell}^{(\pm 2)}(\lambda, \lambda') = \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{32(\ell-2)!}} \left[\frac{\lambda - \lambda'}{\lambda\lambda'} \frac{j_\ell(\lambda')}{\lambda'} - \frac{2}{\ell(\ell+1)} \frac{1}{(\lambda')^3} \frac{d[\lambda' j_\ell(\lambda')]}{d\lambda'} \right] + \frac{\delta_{\ell,2}}{10\sqrt{3}} \delta(\lambda'), \quad (32)$$

$$S_{\varpi,\ell}^{(\pm 2)}(\lambda, \lambda') = \pm \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \frac{1}{2\ell(\ell+1)} \frac{j_\ell(\lambda')}{\lambda'}. \quad (33)$$

2.2.3 角度パワースペクトル

図1に、密度揺らぎで生じるレンズポテンシャルの角度パワースペクトルを示す。異なる3つの線は、密度揺らぎのパワースペクトルの計算において、線形理論、あるいは非線形進化のフィッティング公式であるハローフィット[121]、またはその改良版[129]を用いた場合を表す。これらは公開コードCAMB [74]で計算した。線形理論は、振幅が大きいスケール ($\ell \sim 10 - 100$) で非線形のフィッティング公式を用いた場合とよく一致している。一方で、非線形成長の影響で、線形理論と比べ、 $\ell \sim 2000$ での振幅は20-30%増幅される。しかし、非線形成長のモデルに含まれる不定性は、 $C_\ell^{\phi\phi}$ にそこまで大きい影響は与えないと考えられる。実際、ハローフィットとその改良版を比較しても、 $\ell \lesssim 2000$ であれば振幅はせいぜい数%程度の違いしかない。

$C_\ell^{\phi\phi}$ の近似式を用いて、ピークが何で決まっているか見てみる。 $\ell \gg 1$ のとき、物質揺らぎのパワースペクトルに比べてベッセル関数は激しく振動する。このとき、式(19)は

$$\begin{aligned} \frac{\ell^4}{2\pi} C_\ell^{\phi\phi} &\simeq 8\ell^4 \int_0^{\chi_s} d\chi \int_0^{\chi_s} d\chi' \frac{\chi_s - \chi}{\chi_s \chi} \frac{\chi_s - \chi'}{\chi_s \chi'} \Delta_\psi(\ell/\chi, \eta_0 - \chi, \eta_0 - \chi') \int \frac{dk}{k} j_\ell(k\chi) j_\ell(k\chi') \\ &= 4\pi\ell \int_0^{\chi_s} d\chi \chi \left(\frac{\chi_s - \chi}{\chi_s \chi} \right)^2 \Delta_\psi(\ell/\chi, \eta_0 - \chi, \eta_0 - \chi). \end{aligned} \quad (34)$$

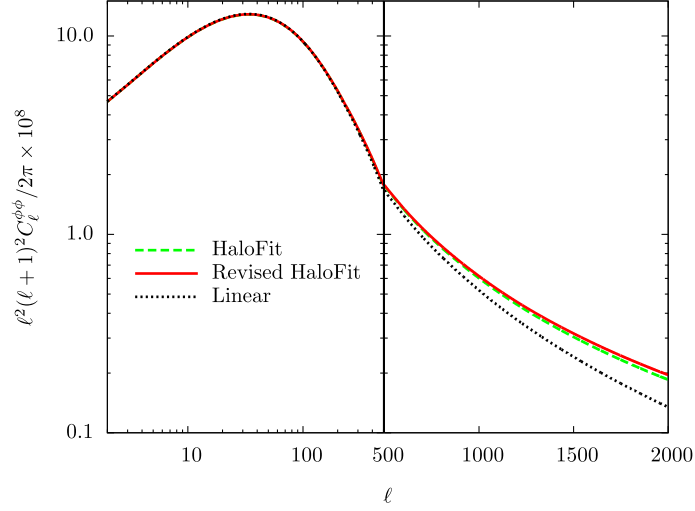


図1 密度揺らぎによるレンズポテンシャルの角度パワースペクトル。線形理論（黒点線）、および非線形進化のフィッティング公式[121]（緑破線）あるいは[129]（赤実線）を用いた場合。

重力ポテンシャルの無次元パワースペクトルは、大スケール（ $k \lesssim 0.01 \text{ Mpc}^{-1}$ ）で一定であり、小スケールで減衰する。角度パワースペクトルへの寄与の大部分は、共動距離 $\chi_s/2 \sim 7000 \text{ Mpc}$ にある揺らぎからくる。したがって、 $\ell^4 C_\ell^{\phi\phi}/2\pi$ のピークは $\ell \sim 70$ であり、これは大雑把に図のピークと一致する。

図2左図では、角度パワースペクトルが標準宇宙論を越えた物理にどのように依存するか示すため、暗黒エネルギーの状態方程式を特徴づけるパラメータ（ $w_0, w_a; w = w_0 + (1-a)w_a$ ）と全ニュートリノ質量 $\sum m_\nu$ に対する $C_\ell^{\phi\phi}$ の対数微分を図示した。比較のため、物質のエネルギー密度（ $\Omega_m h^2$ ）に対する微分も示してある。微分は $\ell = 2$ の値で規格化してある。全ニュートリノ質量に対する微分は ℓ に強く依存している。これは、質量を持ったニュートリノが現在に近づくにつれ非相対論的粒子として振る舞うようになると、自身の自由拡散スケール以下の小スケールの揺らぎを成長させないからである[?]。一方で、 w_0 と w_a に対する微分はほぼ角度スケールに依存しない振る舞いをする。暗黒エネルギーの性質が変化すると、線形摂動の範囲内では、物質揺らぎの成長は宇宙のスケール因子の変化を通じて影響を受けるため、空間（角度）スケールに依存しない変化となる。これらの振る舞いから、 $C_\ell^{\phi\phi}$ を用いることで、CMBの角度パワースペクトルにおいて存在する暗黒エネルギーと全ニュートリノ質量の間の縮退を解くことができる[64]。ただし、全ニュートリノ質量は、例えば物質エネルギー密度と縮退する[?]。図2に示すように、物質エネルギー密度と全ニュートリノ質量の対数微分は互いに似た振る舞いをしている。物質エネルギー密度が変化すると、物質揺らぎのパワースペクトルの振幅に加えて輻射物質等密度期（radiation-matter equality）で決まるピークの位置も変えるため、全体としては小スケールの物質揺らぎのパワースペクトルが大きな影響を受ける。CMBのデータだけでは縮退を解くことが難しいが、バリオン音響振動を用いた距離測定によって縮退が解ける。また、大角度スケール（ $\ell < 10$ ）のCMB揺らぎが測定できない場合、再イオン化の光学的厚みと全ニュートリノ質量の間にも原始スカラー摂動の振幅を通じて間接的に（非物理的な）縮退が生じる。

図2右図では、テンソル・スカラー比 $r = 0.1$ の原始重力波、および張力 $G\mu$ 、組み換え確率 P で特徴づけられる特定の宇宙ひものモデル[137]から生じるカール成分の角度パワースペクトルを示した。揺らぎは地平線内に入ると抑制されるので、角度パワースペクトルは小角度スケールで小さくなる。カール成分から原始重力波や宇宙ひものを検証するためには、大角度スケールが重要となる。

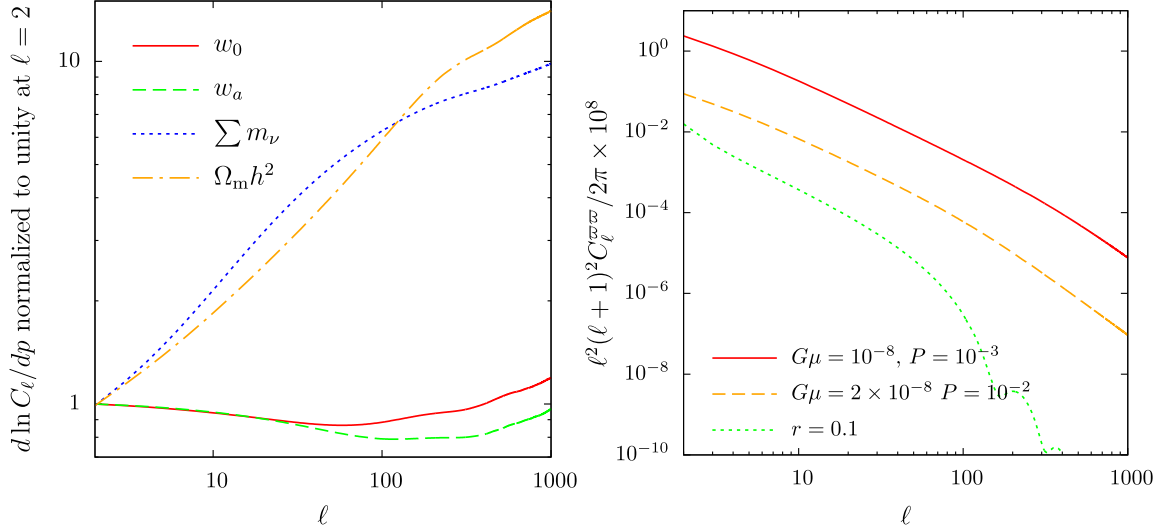


図2 (左図) レンズポテンシャルの角度パワースペクトルを対数微分したもの $d \ln C_\ell^{\phi\phi} / dp$. ここで p は、暗黒エネルギーの状態方程式を $w_0 + (1-a)w_a$ とした場合の $p = w_0$ (赤実線)、あるいは w_a (緑破線)、ニュートリノ質量和 $\sum m_\nu$ (青点線)、 $\Omega_m h^2$ (橙長破線) である。 ℓ 依存性を見やすくするため、微分は $\ell = 2$ での値で企画化されている。微分の符号は、 $p = \Omega_m h^2$ の場合は正、それ以外は負である。(右図) カール成分の角度パワースペクトル。線種はそれぞれ、テンソル・スカラー比 $r = 0.1$ の原始重力波 $r = 0.1$ (緑点線)、あるいは宇宙ひもネットワークの特定のモデルを仮定した場合 (赤実線、橙破線) を表す。

3 重力レンズを受けたCMB揺らぎの性質

重力レンズ効果は、等方でガウス場と考えられる原始CMB揺らぎの統計的性質を変化させる。特に重力レンズによって生じる非等方性は、観測データからレンズポテンシャルを推定する上で重要な性質である。ここでは、重力レンズを受けた温度・偏光揺らぎの角度パワースペクトル、および非ガウス性によって生じる統計量であるバイスペクトル、トリスペクトルについて見ていく。

3.1 重力レンズを受けたCMB揺らぎの角度パワースペクトル

重力レンズを受けた温度揺らぎ $\tilde{\Theta}(\hat{n})$ は、重力レンズを受ける前の温度揺らぎ $\Theta(\hat{n})$ をレンズ曲がり角で再配置したものとして得られる ([13] など) :

$$\tilde{\Theta}(\hat{n}) = \Theta(\hat{n} + \mathbf{d}(\hat{n})). \quad (35)$$

ただし、実際には各赤方偏移ごとに再配置されるので、厳密には上式のようには書けない。偏光揺らぎの場合も、 $Q \pm iU$ に対して同様の再配置を行うことになる。

レンズを受けた角度パワースペクトルの振る舞いは、平面 (flat-sky) 近似での角度パワースペクトルを用いるのが便利である。単位球面上のある小さいパッチを考え、球の曲率は無視することになると、CMB揺らぎは二次元平面上に与えられる。この極限では、温度揺らぎは以下のように平面波でフーリエ分解できる :

$$\tilde{\Theta}(\hat{n}) = \int \frac{d^2 \ell}{(2\pi)^2} \tilde{\Theta}_\ell e^{i\ell \cdot \hat{n}}. \quad (36)$$

一方で、偏光揺らぎ $\tilde{Q} \pm i\tilde{U}$ はスピン2を持つ（回転不変でない）ため、座標回転に対して不変な量 \tilde{E}_ℓ 、 \tilde{B}_ℓ （EとBモード）を用いる：

$$[\tilde{Q} \pm i\tilde{U}](\hat{n}) = - \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} (\tilde{E}_\ell \pm i\tilde{B}_\ell) e^{\pm i2\varphi_\ell} e^{i\ell \cdot \hat{n}}. \quad (37)$$

ここで φ_ℓ は平面の x 座標からの角度である。重力レンズを受ける前の揺らぎも同様にフーリエモード Θ_ℓ 、 E_ℓ 、 B_ℓ が得られる。重力レンズを受けた揺らぎの角度パワースペクトル \tilde{C}_ℓ （同様に重力レンズを受ける前の揺らぎの角度パワースペクトル C_ℓ ）は、フーリエモードを用いて

$$\langle \tilde{X}_\ell \tilde{Y}_{\ell'} \rangle = (2\pi)^2 \delta(\ell - \ell') \tilde{C}_\ell^{XY} \quad (X, Y = \Theta, E, B). \quad (38)$$

と定義される。

\tilde{C}_ℓ^{XY} を重力レンズを受ける前の量で書き直す。レンズ曲がり角の二次まで展開すると[57]

$${}_s\tilde{\Xi}(\hat{n}) = {}_s\Xi(\hat{n}) + d^a {}_s\Xi_{;a}(\hat{n}) + \frac{d^a d^b}{2} {}_s\Xi_{;ab}(\hat{n}), \quad (39)$$

ここで、 $s = 0$ あるいは ± 2 であり、揺らぎは ${}_0\Xi = \Theta$ および ${}_{\pm 2}\Xi = Q \pm iU$ のように統一的な表記にした。このフーリエ分解を行うと[57, 20]

$$\begin{aligned} {}_s\tilde{\Xi}_\ell &= {}_s\Xi_\ell - \sum_{x=\phi, \varpi} \int \frac{d^2\mathbf{L}}{(2\pi)^2} [(\ell - \mathbf{L}) \odot_x \mathbf{L}] x_{\ell-\mathbf{L}} {}_s\Xi_{\mathbf{L}} e^{is\varphi_{\mathbf{L}, \ell}} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{x,y=\phi, \varpi} \int \frac{d^2\mathbf{L}}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2\mathbf{L}'}{(2\pi)^2} [\mathbf{L}' \odot_x \mathbf{L}] [(\ell - \mathbf{L} - \mathbf{L}') \odot_y \mathbf{L}'] x_{\mathbf{L}'} y_{\ell-\mathbf{L}-\mathbf{L}'} {}_s\Xi_{\mathbf{L}} e^{is\varphi_{\mathbf{L}, \ell}}, \end{aligned} \quad (40)$$

ここで $\varphi_{\mathbf{L}, \ell} = \varphi_{\mathbf{L}} - \varphi_\ell$ である。任意の二次元ベクトル \mathbf{a} 、 \mathbf{b} に対し、内積 \odot_ϕ と \odot_ϖ を

$$\mathbf{a} \odot_\phi \mathbf{b} \equiv a_\theta b_\theta + a_\varphi b_\varphi, \quad \mathbf{a} \odot_\varpi \mathbf{b} \equiv a_\varphi b_\theta - a_\theta b_\varphi. \quad (41)$$

と定義した。式（40）を用いると、平面近似での重力レンズを受けたCMB角度パワースペクトルは

$$\tilde{C}_\ell^{\Theta\Theta} = b_\ell C_\ell^{\Theta\Theta} + \sum_{x=\phi, \varpi} \int \frac{d^2\mathbf{L}}{(2\pi)^2} [\mathbf{L} \odot_x (\ell - \mathbf{L})]^2 C_{|\ell-\mathbf{L}|}^{xx} C_L^{\Theta\Theta}, \quad (42)$$

$$\tilde{C}_\ell^{\Theta E} = b_\ell C_\ell^{\Theta E} + \sum_{x=\phi, \varpi} \int \frac{d^2\mathbf{L}}{(2\pi)^2} [\mathbf{L} \odot_x (\ell - \mathbf{L})]^2 C_{|\ell-\mathbf{L}|}^{xx} C_L^{\Theta E} \cos 2\varphi_{\mathbf{L}, \ell}, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\ell^{EE} &= b_\ell C_\ell^{EE} + \sum_{x=\phi, \varpi} \int \frac{d^2\mathbf{L}}{(2\pi)^2} [\mathbf{L} \odot_x (\ell - \mathbf{L})]^2 C_{|\ell-\mathbf{L}|}^{xx} \\ &\times \frac{1}{2} [(C_L^{EE} + C_L^{BB}) + (C_L^{EE} - C_L^{BB}) \cos 4\varphi_{\mathbf{L}, \ell}], \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\ell^{BB} &= b_\ell C_\ell^{BB} + \sum_{x=\phi, \varpi} \int \frac{d^2\mathbf{L}}{(2\pi)^2} [\mathbf{L} \odot_x (\ell - \mathbf{L})]^2 C_{|\ell-\mathbf{L}|}^{xx} \\ &\times \frac{1}{2} [(C_L^{EE} + C_L^{BB}) - (C_L^{EE} - C_L^{BB}) \cos 4\varphi_{\mathbf{L}, \ell}], \end{aligned} \quad (45)$$

で与えられる[57, 20]。ただし、レンズポテンシャルとカールの相関はないとし、またレンズ効果による鈍され具合 (smearing) を表す

$$b_\ell = 1 - \ell^2 \sum_{x=\phi, \varpi} \int \frac{d \ln L}{4\pi} L^4 C_L^{xx} = 1 - \frac{\ell^2}{2} \langle |d|^2 \rangle. \quad (46)$$

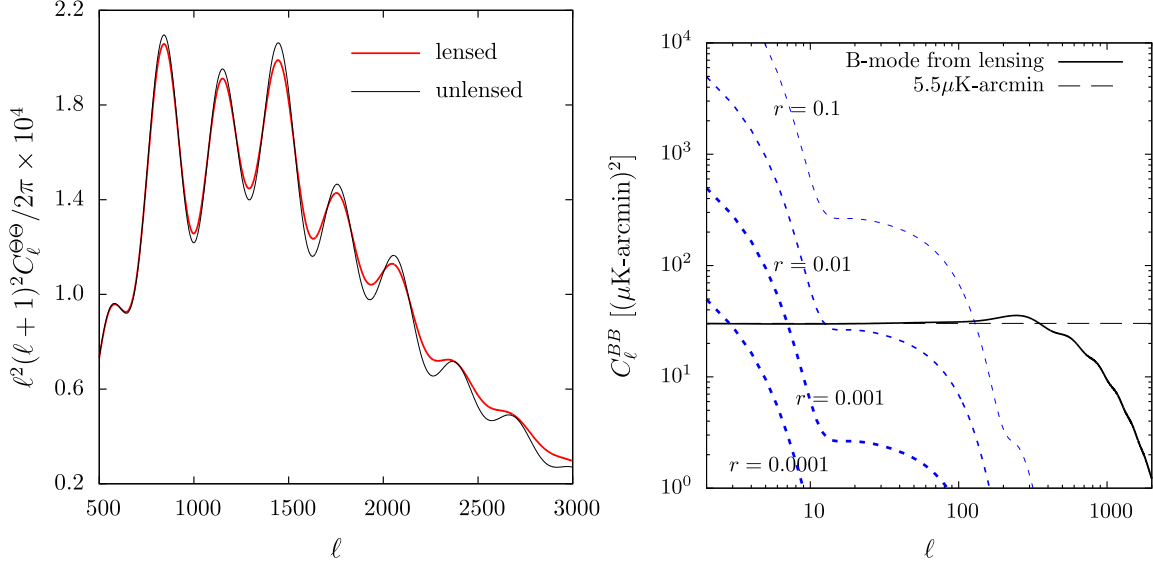


図3 重力レンズを受ける前、受けた後の温度・偏光揺らぎの角度パワースペクトル。左図：温度揺らぎの場合。重力レンズの影響が見やすいように $\ell^2(\ell+1)^2 \times 10^4/2\pi$ をかけている。右図：Bモード偏光の角度パワースペクトル。青は重力波起源で、テンソル・スカラー比 r を0.1から 0.0001の間で変化させた場合。黒破線は $5.5 \mu\text{K-arcmin}$ に相当する白色ノイズ。

を用いた。

偏光揺らぎに対する重力レンズ効果は以下の点で特に重要である。原始Bモード揺らぎがない場合でも $C_\ell^{BB} = 0$ 、重力レンズによってBモード偏光が生じる[142]。これは、もともと渦なしの偏光パターンであっても、各点で非等方にマッピングされた結果でてくるものである。極端には、各点で偏光面を45度傾けるとBモードしか含まないパターンとなる。注意として、上式は小スケール $\ell > 1000$ では精度が悪い。これを見るために、曲がり角は数分角 ($\langle |\mathbf{d}|^2 \rangle \sim \mathcal{O}(10^{-7})$) であることを利用する[72]。このとき、 $\ell \sim 2500$ では $\ell^2 \langle |\mathbf{d}|^2 \rangle / 2 \sim \mathcal{O}(1)$ となって、角度パワースペクトルは負の値をもってしまう。これは、式(42)-(45)で $\mathcal{O}(C_\ell^{xx})$ の高次の項を無視しているためで、文献[107, 142]などで示されている方法で計算する必要がある。これらの方法では、高次の寄与を指数関数として展開せずに取り込むことで精度を向上させている[18]。

図3では、重力レンズを受けた温度揺らぎ（左）およびBモード偏光（右）の角度パワースペクトルをプロットした。いずれもCAMB [74]を利用した。重力レンズによって音響振動のピークがなまされているが、これは以下のようにして理解できる。音響ピークの角度スケール $\theta = \pi/\ell$ は、局所的に温度の高い・低い部分の典型的なサイズで決まる。これらのサイズのばらつきが小さいほどピークは際立って見える。重力レンズは、増光・減光と同じ原理である部分のサイズを大きく、またある部分のサイズを小さく変化させる。この結果、サイズの分布をばらつかせ、音響ピークはなまされる。無衝突減衰によって揺らぎがかき消されている小スケールでは、大スケールの温度揺らぎが流れ込んでくる。Eモードに対する影響は温度揺らぎと同様である。

Bモード偏光は、線形のスカラー摂動しかない場合には最終散乱面では存在しない。しかし観測者に到達するまでに、重力レンズによってEモード偏光の一部はBモード偏光に変換される。レンズ起源Bモードは大角度スケール ($\ell \lesssim 100$) で ℓ に依存せず、 $5\text{--}6 \mu\text{K-arcmin}$ の白色ノイズと同じ振る舞いをする。 ℓ に依存しない理由は以下のとおりである。Eモードの勾配は、数度 ($\ell \sim 100$) を越える距離にある二点の揺らぎの相関は強くない ([118])。重力レンズはこの揺らぎを各点において典型的に数分角で再配置するので、この過程で生成された大スケールでのBモード偏

光はほとんど相関を持たず、ほぼ無相関のランダム場だと考えてよい。これは、フーリエ空間において白色ノイズである（ ℓ 依存しない）ことを意味する。数式を用いると以下ようになる。レンズ起源Bモードの角度パワースペクトルは

$$\tilde{C}_\ell^{BB} = \int \frac{d^2 \mathbf{L}}{(2\pi)^2} [\mathbf{L} \cdot (\ell - \mathbf{L})]^2 C_{|\ell - \mathbf{L}|}^{\phi\phi} C_L^{EE} \sin^2 2\varphi_L. \quad (47)$$

である。大角度スケールでは、積分を $\ell \ll L$ として評価できるので

$$\tilde{C}_\ell^{BB} \simeq \int \frac{d^2 \mathbf{L}}{(2\pi)^2} L^2 C_L^{\phi\phi} C_L^{EE} \sin^2 2\varphi_L. \quad (48)$$

が得られる。これは ℓ に依存しない。

図3に示すように、再結合ピーク（ $\ell \sim 10$ -100）において、原始重力波起源のBモードは、もし $r = 0.01$ 以下であればレンズ起源Bモードと比べて小さい。また再イオン化ピーク（ $\ell < 10$ ）では、もし $r \lesssim 0.0001$ であればレンズ起源Bモードが重力波起源Bモードより大きくなる。現在の制限は $r < 0.07$ であり、重力波起源Bモードを検出する上で、すでにレンズ起源Bモードが障害になっており、レンズ起源の除去が必要となっている（[108, 130, 118]）。

3.2 重力レンズを受けたCMBの非ガウス性

3.2.1 バイスペクトル

最終散乱面での温度揺らぎがガウス統計に従うとすると、三点相関 $\langle \Theta_{\ell_1} \Theta_{\ell_2} \Theta_{\ell_3} \rangle$ は消える。しかし、式（40）で示すように、重力レンズは異なるモードの相関を生じ、ISW-レンズポテンシャルの相関 $C_\ell^{\Theta\phi}$ を通じて三点相関が生まれる[40]：

$$\langle \tilde{\Theta}_{\ell_1} \tilde{\Theta}_{\ell_2} \tilde{\Theta}_{\ell_3} \rangle = (2\pi)^2 \delta(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) [C_{\ell_1}^{\Theta\phi} C_{\ell_2}^{\Theta\phi} \ell_1 \odot_\phi \ell_2 + (\text{perms})] + \mathcal{O}(|d^a|^2). \quad (49)$$

ISW-レンズ相関は暗黒エネルギーが支配的となる $z < 1$ での大角度スケールの密度揺らぎから生成されるため、この時期の密度揺らぎの性質を調べるのに使うことができる[109, 40, 141]。

再結合後に宇宙ひもが存在すると、 $C_\ell^{\Theta\phi}$ が生じてバイスペクトルを作る[140]。一方で、宇宙ひもはカール成分も作るため、 $C_\ell^{B\phi}$ を通じて偏光バイスペクトルなども作ることができる。

重力レンズによって生じるバイスペクトルは、原始非ガウス性を推定するうえでバイアスとして影響する。特にスクイーズド極限（ $\ell_1 \sim \ell_2 \gg \ell_3$ ）では $f_{\text{NL}} \sim \mathcal{O}(1)$ に相当する非ガウス性を生み、完全には無視できない[111, 21, 44]。

偏光バイスペクトルは、再イオン化での重力ポテンシャルを通じてEモード偏光とレンズポテンシャルが相関することで生じる[73]。

3.2.2 トライスペクトル

重力レンズを受けた揺らぎの4点相関は[5, 141, 58]において調べられてきた。特に、レンズポテンシャル、カール成分の角度パワースペクトルを推定するさいに利用する。

CMB揺らぎの4点相関は、一般に、ダイアグラム上で非結合項（disconnected part）と結合項（connected part）に分解できる：

$$\langle \tilde{\Theta}_{\ell_1} \tilde{\Theta}_{\ell_2} \tilde{\Theta}_{\ell_3} \tilde{\Theta}_{\ell_4} \rangle = \langle \tilde{\Theta}_{\ell_1} \tilde{\Theta}_{\ell_2} \tilde{\Theta}_{\ell_3} \tilde{\Theta}_{\ell_4} \rangle_d + \langle \tilde{\Theta}_{\ell_1} \tilde{\Theta}_{\ell_2} \tilde{\Theta}_{\ell_3} \tilde{\Theta}_{\ell_4} \rangle_c, \quad (50)$$

第1項は非結合項で、以下のように2点相関に分解できる：

$$\langle \tilde{\Theta}_{\ell_1} \tilde{\Theta}_{\ell_2} \tilde{\Theta}_{\ell_3} \tilde{\Theta}_{\ell_4} \rangle_d = \langle \tilde{\Theta}_{\ell_1} \tilde{\Theta}_{\ell_2} \rangle \langle \tilde{\Theta}_{\ell_3} \tilde{\Theta}_{\ell_4} \rangle + (\ell_2 \leftrightarrow \ell_3) + (\ell_2 \leftrightarrow \ell_4), \quad (51)$$

第2項は結合項で、純粋に重力レンズから生じ、このような分解ができない。温度の場合、結合項は[66]

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Theta}_{\ell_1} \tilde{\Theta}_{\ell_2} \tilde{\Theta}_{\ell_3} \tilde{\Theta}_{\ell_4} \rangle_c &\simeq (2\pi)^2 \delta(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4) \\ &\times \sum_{x=\phi, \varpi} \left\{ C_{|\ell_1+\ell_2|}^{xx} f_{\ell_1+\ell_2, \ell_1}^x f_{\ell_3+\ell_4, \ell_3}^x + (\ell_2 \leftrightarrow \ell_3) + (\ell_2 \leftrightarrow \ell_4) \right\}, \end{aligned} \quad (52)$$

ここで、重み関数

$$f_{\mathbf{L}, \mathbf{L}'}^x = (\mathbf{L} \odot_x \mathbf{L}') C_{\mathbf{L}'}^{\Theta\Theta} + (\mathbf{L}' \leftrightarrow \mathbf{L} - \mathbf{L}'). \quad (53)$$

を定義した。式(52)を導くさい、重力レンズを受けた温度揺らぎはレンズポテンシャル、カール成分の一次まで展開した。偏光トリスベクトルも同様にして得られる[84]。

3.2.3 その他の統計量

多点統計以外の非ガウス性を特徴づける統計量についても調べられている。文献[104, 126]ではミンコフスキー汎関数などの幾何学的な統計量、[128, 127]では局所的に高温な領域どうしの二点相関が扱われている。しかし、トリスベクトルに比べると、これらの統計量は重力レンズ効果の検出には有効ではない。

また、パラメータ推定のさいに必要となるCMB揺らぎの角度パワースペクトルの共分散は、重力レンズによって生じる項が新たに加わる。この影響は、小スケールにおけるBモードの角度パワースペクトルを使うさいに特に顕著となる[122, 119, 75, 4]。

4 重力レンズ効果の測定

初期の研究では、レンズポテンシャル・カール成分の推定を行うために、CMB揺らぎの2点相関を利用したものが提案された。文献[143, 110]では、実空間での温度揺らぎの2点相関を用いることでレンズポテンシャルが推定できることを示した。これは文献[41]によって偏光を用いた場合に拡張された。現在よく利用されるものはフーリエ空間で定式化した2点推定法であり、文献[59, 62]によって、温度・偏光を含み平面近似で導出された。また全天は文献[85]によって導かれた。カール成分は文献[20]において平面近似で考察され、文献[81]において平面近似なしで導出された。さらに文献[53, 54]では、2点推定の枠組みを越え、最尤推定での定式化が行われた。これらすべての方法に共通するのは、この宇宙のレンズポテンシャル・カール成分が統計的に等方なCMB揺らぎを統計的に非等方に歪め、CMB揺らぎとその勾配の間に相関を作ることを利用している。十分なCMB揺らぎのフーリエモードを観測することで、この相関はレンズポテンシャル・カール成分の推定量として機能する。レンズポテンシャル・カール成分の推定量は、角度パワースペクトルの推定に使われ、宇宙論解析へとつながる。

この章では、レンズポテンシャル・カール成分の推定方法、およびそれらの角度パワースペクトル ($C_\ell^{\phi\phi}$ と $C_\ell^{\varpi\varpi}$) の推定方法についてまとめる。文献[43]では、これらの推定法について基本事項がまとめられている。

4.1 レンズポテンシャルの推定

4.1.1 二点推定量

簡単のため、温度揺らぎだけを使い、カール成分のない場合を考える。以下では、観測した温度揺らぎとその角度パワースペクトルを $\hat{\Theta}_\ell$ および $\hat{C}_\ell^{\Theta\Theta}$ と表記する。観測された温度揺らぎは、一様なノイズ成分 n_ℓ を用いて $\hat{\Theta}_\ell = \tilde{\Theta}_\ell + n_\ell$ と書けるとする。

統計的に等方な揺らぎでは、天球上にある2点間の揺らぎの相関はその間の距離にしか依存せしない。別の2点間をとったとしても、同じ距離間隔であれば同じ相関をもつ。これを統計的に揺らぎが等方であるという。しかし、重力レンズを受けた揺らぎではこの性質が成り立たなくなる。なぜなら、CMB光子の到来方向はもとの方向と曲がり角だけ異なるので、天球の2点間の距離は最終散乱面上と比べて各々それぞれの変更を受ける。最終散乱面上では統計的等方性が成り立つとしても、観測された天球面上では距離だけでなくどの天球面上の点であるかにも依存し、統計的に非等方である。

フーリエ空間では、この統計的非等方性は異なるフーリエモードの相関として表現される。この宇宙のレンズポテンシャルによって重力レンズを受けた揺らぎに対し、その統計平均を考えると

$$\langle \hat{\Theta}_{\mathbf{L}} \hat{\Theta}_{\mathbf{\ell-L}} \rangle_{\text{CMB,n}} = \phi_{\mathbf{\ell}} f_{\mathbf{\ell,L}}^{\phi}, \quad (\ell \neq 0) \quad (54)$$

ここで $f_{\mathbf{\ell,L}}^{\phi}$ は式 (53) で与えられたものである。我々が推定すべきこの宇宙のレンズポテンシャルは一つなので、統計平均は重力レンズを受ける前の揺らぎ（およびノイズ成分）に対してのみ行う。 $\langle \cdots \rangle_{\text{CMB,n}}$ はこれに対応する統計平均である。

式 (54) に基づくと、レンズポテンシャルの推定量 $\hat{\phi}_{\mathbf{\ell,L}}$ として

$$f_{\mathbf{\ell,L}}^{\phi} \hat{\phi}_{\mathbf{\ell,L}} = \hat{\Theta}_{\mathbf{L}} \hat{\Theta}_{\mathbf{\ell-L}}. \quad (55)$$

で定義される量は不偏性を満たす： $\langle \hat{\phi}_{\mathbf{\ell,L}} \rangle_{\text{CMB,n}} = \phi_{\mathbf{\ell}}$ 。ここで \mathbf{L} は $f_{\mathbf{\ell,L}}^{\phi} \neq 0$ となるように選ぶ。この推定では、重力レンズを受ける前の揺らぎの宇宙論的分散、およびノイズが統計的分散として寄与する。推定における統計的分散を抑制するため、 $\hat{\phi}_{\mathbf{\ell,L}}$ を \mathbf{L} に対して足し上げる[59]：

$$\hat{\phi}_{\mathbf{\ell}} = A_{\mathbf{\ell}}^{\phi} \int \frac{d^2 \mathbf{L}}{(2\pi)^2} g_{\mathbf{\ell,L}}^{\phi} \hat{\Theta}_{\mathbf{L}} \hat{\Theta}_{\mathbf{\ell-L}}. \quad (56)$$

ここで規格化 $A_{\mathbf{\ell}}^{\phi}$ と各 \mathbf{L} に対する重み関数 $g_{\mathbf{\ell,L}}^{\phi}$ は

$$A_{\mathbf{\ell}}^{\phi} = \frac{1}{[g^{\phi}, f^{\phi}]_{\mathbf{\ell}}}; \quad g_{\mathbf{\ell,L}}^{\phi} = \frac{f_{\mathbf{\ell,L}}^{\phi}}{2 \hat{C}_{\mathbf{L}}^{\Theta\Theta} \hat{C}_{|\mathbf{\ell-L}|}^{\Theta\Theta}}, \quad (57)$$

である。便宜上、以下の内積を定義しておく：

$$[g^x, f^y]_{\mathbf{\ell}} \equiv \int \frac{d^2 \mathbf{L}}{(2\pi)^2} g_{\mathbf{\ell,L}}^x f_{\mathbf{\ell,L}}^y. \quad (58)$$

カール成分が存在する場合、式 (54) はさらにカール成分の寄与を含む：

$$\langle \hat{\Theta}_{\mathbf{L}} \hat{\Theta}_{\mathbf{\ell-L}} \rangle_{\text{CMB,n}} = \phi_{\mathbf{\ell}} f_{\mathbf{\ell,L}}^{\phi} + \varpi_{\mathbf{\ell}} f_{\mathbf{\ell,L}}^{\varpi}. \quad (59)$$

しかしこの場合でも、高次の寄与を考えない限りは、レンズポテンシャルの推定量 (56) は変更を受けない。なぜなら、レンズポテンシャルとカール成分はことなるパリティを持ち、レンズポテンシャルの推定量にバイアスを生じうる内積 $[f^{\phi}, f^{\varpi}]_{\mathbf{\ell}}$ が消えるからである[?].

偏光を用いた推定量も同様に導くことができる。温度、偏光を組み合わせた二点推定量は、各二点推定量 ($\Theta\Theta$ 、 ΘE 、 ΘB 、 EE 、 EB 、 BB) に適当な重みをつけて得られる[62].

4.1.2 実用的な場合

実際には、マスク[?, 79, 3]、非一様ノイズ[49]、点光源、ビーム形状の変化[48]といった様々な要因で、観測されたCMB揺らぎは一般に非等方に歪められている。この結果、レンズ二点推定量はバイアスされる（すなわち $\langle \hat{x}_\ell \rangle_{\text{CMB,n}} \neq 0$ ）。偏光の場合、温度から偏光への漏れだし、偏光面の回転なども問題となる[115]。

この影響を見るため、温度揺らぎにおける変化を見てみる：

$$\hat{\Theta}(\hat{n}) = (1 + \epsilon(\hat{n}))(\tilde{\Theta}(\hat{n}) + n(\hat{n})), \quad (60)$$

ここで $\epsilon(\hat{n})$ は非一様な再イオン化[39, 83]、地球の固有運動によるドップラー効果[?, 47]などによる変更を表す。 ϵ の一次では、温度揺らぎの異なるモードどうしの相関は

$$\langle \hat{\Theta}_L \hat{\Theta}_{\ell-L} \rangle_{\text{CMB,n}} = f_{\ell,L}^\phi \phi_\ell + f_{\ell,L}^\epsilon \epsilon_\ell. \quad (61)$$

ここで $f_{\ell,L}^\epsilon = \hat{C}_L^{\Theta\Theta} + \hat{C}_{|\ell-L|}^{\Theta\Theta}$ である。上式を式(56)に代入すると

$$\langle \hat{\phi}_\ell \rangle_{\text{CMB,n}} = \phi_\ell + R_{\ell}^{\phi,\epsilon} \epsilon_\ell, \quad (62)$$

ここで応答関数 $R_{\ell}^{\phi,\epsilon}$ 、より一般に $R_{\ell}^{a,b}$ は

$$R_{\ell}^{a,b} = \frac{A_{\ell}^{a,a}}{A_{\ell}^{a,b}}; \quad A_{\ell}^{a,b} = \frac{1}{[g^a, f^b]_{\ell}}. \quad (63)$$

で定義される。式(62)第二項は平均場バイアスであり、何かしらの方法で見積もる必要がある。

ここでは、 ϵ_ℓ を推定することを考える。レンズ場と同様に、 ϵ_ℓ の二点推定量は重み関数 $f_{\ell,L}^\phi$ を $f_{\ell,L}^\epsilon$ に置き換えればよい。しかし、 ϵ_ℓ も同様に平均場バイアスをもつ：

$$\langle \hat{\epsilon}_\ell \rangle_{\text{CMB,n}} = \epsilon_\ell + R_{\ell}^{\epsilon,\phi} \phi_\ell, \quad (64)$$

ここで $R_{\ell}^{\epsilon,\phi}$ は式(63)で定義したものである。式(62)と(64)を組み合わせて ϵ_ℓ に比例する項を消すと、レンズ場に対する不偏推定量が得られる：

$$\hat{\phi}'_\ell = \frac{\hat{\phi}_\ell - R_{\ell}^{\phi,\epsilon} \hat{\epsilon}_\ell}{1 - R_{\ell}^{\phi,\epsilon} R_{\ell}^{\epsilon,\phi}}. \quad (65)$$

上記の推定量は、 ϕ_ℓ と ϵ_ℓ を同時推定するさいの最小分散推定量でもある。

仮に ϵ_ℓ が既知の場合（窓関数、点光源マスクなど）であっても、式(65)で得られた推定量によって求められたレンズ場が、通常の推定量で得られた結果と矛盾しないかどうか調べることで、データを用いたクロスチェックを行うことができる。もしこれらの結果が一致しない場合は、シミュレーションで捉えきれていない効果が観測されたCMB揺らぎに存在することを意味する[79]。実際、Planck実験によるレンズ場推定では、 $L < 10$ においてはこれらの二つの結果が一致していない。

ϵ 以外にも、非一様ノイズ、分解できない点光源の寄与、ビームの時間変化の影響など、種々の効果に対して同様の推定量を用いることでクロスチェックが可能となる[79, ?, 80]。

4.1.3 最尤推定

ここで、文献[53, 54]で提案されている最尤推定法について述べておく。観測されたCMB揺らぎから、適当な尤度関数を仮定することで形式的にレンズ場の最尤推定を行うことができる。最尤推定法は（その計算コストから）いま

だ実用化されていないが、レンズポテンシャル、カール成分の推定精度を飛躍的に向上させられる。温度揺らぎの場合は、これまで述べてきた二点推定とほぼ同じ結果となる[53]。一方で、Bモード偏光を取り入れた解析ではレンズ場に対する感度が飛躍的に向上する[54]。これは、二点推定では「重力レンズを受けた」CMB揺らぎの宇宙論的分散が推定量のノイズ成分に寄与するのに対し、最尤推定では「重力レンズを受ける前の」CMB揺らぎの宇宙論的分散が原理的限界を決めるからである。これはカール成分に対しても同様である。現在の実験感度では、二点推定で十分であり、最尤推定を用いるメリットはほぼない。しかし、将来的には最尤推定法を実用化する必要がある。

4.2 角度パワースペクトルの推定

レンズポテンシャル・カール成分の角度パワースペクトルは、レンズ場推定量の角度パワースペクトルから見積もることができる。ただし、重力レンズを受けたCMB揺らぎやノイズが作る「ノイズバイアス」を除去しなければならない。

これを見るため、式(56)から、レンズ場推定量の角度パワースペクトルを書き下す：

$$\langle |\hat{x}_\ell|^2 \rangle = (A_\ell^x)^2 \int \frac{d^2 \mathbf{L}}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 \mathbf{L}'}{(2\pi)^2} \frac{f_{\ell, \mathbf{L}}^x}{2\hat{C}_L^{\Theta\Theta} \hat{C}_{|\ell-\mathbf{L}|}^{\Theta\Theta}} \frac{f_{\ell, \mathbf{L}'}^x}{2\hat{C}_{L'}^{\Theta\Theta} \hat{C}_{|\ell-\mathbf{L}'|}^{\Theta\Theta}} \langle \hat{\Theta}_L \hat{\Theta}_{\ell-L} (\hat{\Theta}_{L'} \hat{\Theta}_{\ell-L'})^* \rangle. \quad (66)$$

この量はレンズを受けたCMB揺らぎの4点相関の情報を引き出している。式(50)に従い、この量を結合・非結合部に分解する：

$$\langle |\hat{x}_\ell|^2 \rangle = \langle |\hat{x}_\ell|^2 \rangle_d + \langle |\hat{x}_\ell|^2 \rangle_c. \quad (67)$$

非結合部 ($\langle \cdots \rangle_d$) は式(51)に由来し、観測された温度揺らぎ $\hat{\Theta}_L$ がガウス場であるとして得られる項である。一方で結合部 ($\langle \cdots \rangle_c$) は式(52)に由来し、重力レンズが作る非ガウス性の情報をもつ。以下で示すように、結合部は近似的にレンズポテンシャル・カール成分の角度パワースペクトルで書ける。非結合部の正確な除去を行うことで、非結合部の角度パワースペクトルが測れる。非結合部は、角度パワースペクトルを推定する上でのノイズ成分（あるいはバイアス）であるため、N0バイアス (C_ℓ^{xx} の0次のノイズ) やガウシアンノイズなどと呼ばれる。

結合、非結合部の計算をもう少し進める。

- 非結合部：

式(51)を使うと、N0バイアスは

$$\langle \hat{\Theta}_L \hat{\Theta}_{\ell-L} (\hat{\Theta}_{L'} \hat{\Theta}_{\ell-L'})^* \rangle_d = (2\pi)^2 [\delta_D(\mathbf{L} + \mathbf{L}') + \delta_D(\mathbf{L} + \mathbf{L}' - \ell)] \hat{C}_L^{\Theta\Theta} \hat{C}_{|\ell-L|}^{\Theta\Theta}. \quad (68)$$

式(68)を式(66)に代入し、規格化 A_ℓ^x の表式を用いると、N0バイアスの角度パワースペクトルは

$$N_\ell^{x,(0)} \equiv \langle |\hat{x}_\ell|^2 \rangle_d = \left\{ \int \frac{d^2 \mathbf{L}}{(2\pi)^2} \frac{(f_{\ell, \mathbf{L}}^x)^2}{2\hat{C}_L^{\Theta\Theta} \hat{C}_{|\ell-L|}^{\Theta\Theta}} \right\}^{-1} = A_\ell^x. \quad (69)$$

- 結合部：

式(52)を式(66)に代入すると、非結合部は[66]

$$\langle |\hat{x}_\ell|^2 \rangle_c = C_\ell^{xx} + N_\ell^{x,(1)} + \mathcal{O}[(C_\ell^{xx})^2]. \quad (70)$$

ここで C_ℓ^{xx} は我々が求めたいレンズポテンシャル（あるいはカール成分）の角度パワースペクトルである。一方で、 $N_\ell^{x,(1)}$ はトリスペクトルに含まれる「二次的な」結合部分からくるものであり[58]、N1バイアス (C_ℓ^{xx} の1次のノイズという意味で) と呼ばれている。

式 (69)、(70)、(67) を組み合わせると

$$\langle |\hat{x}_\ell|^2 \rangle = C_\ell^{xx} + N_\ell^{x,(0)} + N_\ell^{x,(1)} + \mathcal{O}[(C_\ell^{xx})^2]. \quad (71)$$

この式より、レンズ場推定量の角度パワースペクトルからバイアス項 ($N_\ell^{x,(0)}$ 、 $N_\ell^{x,(1)}$) を引くことで目的のレンズポテンシャル・カール成分の角度パワースペクトルが得られる。

これまでの多くの重力レンズ観測では、N0バイアスは C_ℓ^{xx} と比べ大きい振幅をもっている。N0バイアスを求める方法として、これまでいくつかの提案がされてきた。文献[29]では式 (69) の観測されたCMB揺らぎを実データに置き換えることを提案した。このような実データを (一部で) 使う方法は、非対角成分 $\langle \hat{C}_\ell^{\phi\phi} \hat{C}_{\ell'}^{\phi\phi} \rangle$ を抑制し、最終的なS/Nが向上する[45]。さらに、単純な実データへの置き換えではなく、一部分を実データに置き換えることで、シミュレーションモデルと実データの不一致に影響を受けづらい推定が可能である[79]：

$$\hat{N}_\ell^{x,(0)} = (A_\ell^x)^2 \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{L}}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2\mathbf{L}'}{(2\pi)^2} f_{\ell,L}^x f_{\ell,L'}^x \left(2\overline{\mathbf{C}}_{L,\ell-L'} \overline{\Theta}_{\ell-L} \overline{\Theta}_{L'}^* - \overline{\mathbf{C}}_{L,\ell-L'} \overline{\mathbf{C}}_{\ell-L,L'} \right). \quad (72)$$

ここで $\overline{\Theta}_\ell \equiv \sum_{\ell'} \mathbf{C}_{\ell,\ell'}^{-1} \hat{\Theta}_{\ell'}$ は共分散逆行列によりフィルタリングされた揺らぎで、 $\overline{\mathbf{C}}_{\ell,\ell'}$ は $\overline{\Theta}$ の共分散である。この推定量は最小分散トリスペクトル推定量[100]を C_ℓ^{xx} に対して適用することで自然に得られる[79]。偏光への拡張も同様である[80]。

式 (72) は以下の点において、 C_ℓ^{xx} を推定するうえで有利である。もし共分散行列のモデルが $\overline{\mathbf{C}}_{\ell,\ell'} \rightarrow \overline{\mathbf{C}}_{\ell,\ell'} + \Sigma_{\ell,\ell'}$ のように真の共分散と $\Sigma_{\ell,\ell'}$ だけ異なるとする。このとき、通常の方法では $\Sigma_{\ell,\ell'}$ の1次までを含むのに対し、式 (72) は $\Sigma_{\ell,\ell'}$ の2次までしか含まない。

文献[58, 112]で示されているように、 $N_\ell^{x,(0)}$ をほぼゼロにする方法もある。この方法では、互いに相関しない温度揺らぎを使って二つのレンズ場推定量を作り、それらの相関をとることで C_ℓ^{xx} を求める。このとき、ノイズ成分に含まれるCMB揺らぎやノイズは相関しないように選ばれているため、上述のN0バイアスは生じない。ただし、S/Nが悪くなるというデメリットがある。偏光を使った場合であれば、 EE と EB 推定量の相関をとれば、同じ理由でN0バイアスは生じない。これらはクロスチェックとして利用できる。

観測精度が向上すると、 $N_\ell^{x,(1)}$ も補正する必要がある。カール成分がない場合でも、 $N_\ell^{x,(1)}$ はレンズポテンシャルによって生じる[3, 133]。さらに、文献[45]で指摘されているように、式 (71) において $C_\ell^{\phi\phi}$ の二次を含むバイアスも無視できなくなる (N2バイアス)。N2バイアスは、レンズ場推定量の重み関数において、重力レンズを受ける前の角度パワースペクトルを、重力レンズを受けたものに置き換えれば抑制することができる[73, 2]。 A_ℓ を対角としているが、窓関数などで非対角成分が生じる可能性がある。温度揺らぎだけを用いた推定ではこの非対角成分は無視できる[79]。しかし、偏光を用いた場合はある程度の大きさを持っている。

レンズ場推定量の角度パワースペクトルはトリスペクトルであるため、重力レンズ以外が作るトリスペクトルの寄与もバイアスを生じる。例えば、点光源は大きなバイアスを生じることが知られており [?]、文献[87]では、点光源の統計的性質を仮定することで点光源由来のトリスペクトルを推定し、それを除去するといった方法が考案されている。一方で、文献[132]ではシミュレーションを用いた方法がとられている。原始非ガウス性の存在でも角度パワースペクトルの推定はバイアスされうるが、 $f_{\text{NL}} \sim \mathcal{O}(10)$ でも影響は無視できる[71]。

レンズポテンシャルの角度パワースペクトルを使って宇宙論パラメータを推定することで、多くの宇宙論パラメータの縮退が解ける。ただし、 \hat{C}_ℓ^{xx} とCMB揺らぎの角度パワースペクトル ($\hat{C}_\ell^{\theta\theta}$ など) の間の相関を考慮する必要がある。Planck実験を想定した場合、この相関は無視できる[106]。 $\hat{C}_\ell^{\phi\phi}$ の共分散はほぼ対角である[66, 45]。

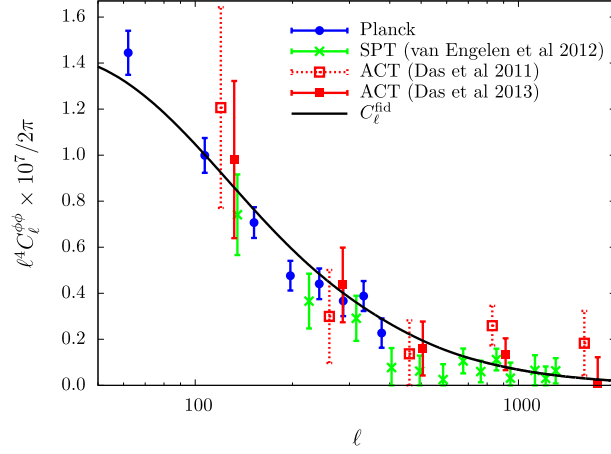


図4 レンズポテンシャルの角度パワースペクトル $C_\ell^{\phi\phi}$ の測定結果をまとめたもの（ACT[24, 25]、Planck[90]、SPT [133]）。実線はPlanckで得られた宇宙論パラメータをもとに計算した理論曲線。

表1 これまで得られてきた観測結果をまとめたもの。レンズポテンシャルの角度パワースペクトルを用いた場合。BICEP2/Keck ArrayおよびPOLARBEARは偏光データのみが利用されている。BICEP2/Keck Arrayは大角度スケール、それ以外は小スケールの揺らぎを用いている。Planck 2015は偏光も使われているが、S/Nのほとんどは温度揺らぎからくる。SPTpolでは、文献[46]においてconsistency checkとして測定された A_L の値も引用している。 A_L の測定値は基準となる理論 $C_\ell^{\phi\phi}$ に依存するため、 $C_\ell^{\phi\phi}$ の計算で仮定された宇宙論モデルを併記してある。大きな違いはないが、WMAPと比べてPlanckで示唆される宇宙モデルのほうが $C_\ell^{\phi\phi}$ が若干大きい。エラーは 1σ の統計エラーを表す。

実験データ	A_L の測定値	検出の統計的有意性
ACT ($\Theta\Theta$) [24]	1.16 ± 0.29 (WMAP+ACT)	4σ
ACT ($\Theta\Theta$) [25]	1.06 ± 0.23 (WMAP+ACT)	4.6σ
BICEP2 / Keck Array (EB) [12]	1.15 ± 0.36 (Planck)	3.2σ (5.8σ)
Planck 2013 ($\Theta\Theta$) [90]	0.99 ± 0.05 (Planck)	26σ
Planck 2015 (all) [93]	0.987 ± 0.025 (Planck)	40σ
POLARBEAR ($EE + EB$) [97]	1.06 ± 0.47 (WMAP9)	$\sim 2\sigma$ (4.6σ)
SPT ($\Theta\Theta$) [133]	0.86 ± 0.16 (WMAP7)	6.3σ
SPTpol [46]	—	$\sim 3\sigma$, consistency test
SPTpol (all) [125]	0.92 ± 0.14 (Planck)	6.6σ (14σ)
WMAP7 ($\Theta\Theta$) [32]	1.27 ± 0.98 (WMAP7)	$\sim 1\sigma$

5 観測の現状と今後の展望について

5.1 観測の現状

CMB観測による重力レンズ効果の測定は近年（2010年頃以降）急速に進展してきた（表1、2、3、4を参照）。CMB揺らぎにおける重力レンズ効果の測定方法は、これまでのところ大きく分けて3つある。一つは、温度、偏光揺

表2 これまで得られてきた観測結果をまとめたもの。CMBと密度揺らぎの観測を組み合わせた場合。 A_L^c は期待される角度パワースペクトルに対する相対的振幅である。銀河数密度揺らぎとの相関では A_L^c が銀河バイアスのモデルに強く依存する。

実験データ	A_L^c の測定値	検出の統計的有意性
WMAP1 + SDSS-LRGs [51]	1.0 ± 1.1	$\sim 1\sigma$
WMAP3 + NVSS [120]	1.15 ± 0.34	3.4σ
WMAP3 + SDSS-LRGs/quasars + NVSS [52]	1.06 ± 0.42	2.5σ
WMAP7 + NVSS [31]	–	$> 3\sigma$
ACT + SDSS-quasars [113]	1.02 ± 0.24	3.8σ
Planck 2013 + NVSS [90]	1.03 ± 0.05	
Planck 2013 + SDSS-LRGs [90]	0.96 ± 0.10	
Planck 2013 + MaxBCG-Clusters [90]	1.54 ± 0.21	
Planck 2013 + WISE [90]	0.97 ± 0.13	
SPT + BCS/WISE/Spitzer [14]	–	$> 4\sigma$
SPT + WISE [36]	–	$\sim 7\sigma$
Planck 2013 + WISE/SDSS-quasars [27]	–	$> 10\sigma$
Planck 2013/2015 + CFHTLenS-galaxy [86]	–	$> 5\sigma$
Planck 2013 + CFHTLenS-galaxy [70]	1.05 ± 0.15	
Planck 2015 + CFHTLenS-galaxy [70]	$0.85^{+0.15}_{-0.16}$	
Planck 2013 + Herschel-ATLAS [6]	–	10σ (20σ)
Planck 2015 + Herschel-ATLAS [7]	–	22σ
Planck 2015 + DES-galaxy [37]	–	4σ
SPT + DES-galaxy [37]	–	6σ
ACTPol + SDSS-III/BOSS-CMASS [77]	–	3.2σ

表3 これまで得られてきた観測結果をまとめたもの。CMBと銀河の重力レンズ観測を組み合わせた場合。 A_L^c は期待される角度パワースペクトルに対する相対的振幅である。

実験データ	A_L^c の測定値	検出の統計的有意性
ACT + CFHTLenS [42]	0.92 ± 0.22 (WMAP)	4.2σ
Planck 2013 + CFHTLenS [76]	0.48 ± 0.26 (Planck)	2σ
Planck 2015 + CFHTLenS [76]	0.44 ± 0.22 (Planck)	2σ
SPT + DES [67]	0.88 ± 0.30 (Planck)	2.9σ
Planck 2015 + DES [67]	0.86 ± 0.39 (Planck)	2.2σ
Planck 2015 + SDSS-shear [116]	0.76 ± 0.23 (Planck)	$> 3\sigma$

表4 これまで得られてきた観測結果をまとめたもの。宇宙赤外線背景輻射、ISW効果、SZ効果との相関。 A_L^c は期待される角度パワースペクトルに対する相対的振幅である。

実験データ	A_L^c の測定値	検出の統計的有意性
宇宙赤外線背景輻射マップ		
ACTPol + Planck 2013 (545 GHz) [134]	–	9.1σ
Planck 2013 (545 GHz) [91]	–	42σ
POLARBEAR + Herschel [96]	–	2.3σ (4.0σ)
SPT + Herschel [55]	–	8.8σ
SPTpol + Herschel [46]	–	7.7σ
ISW効果		
WMAP5 [17]	–	$\lesssim 2\sigma$ (ISW+tSZ)
Planck 2013 (lensing paper) [90]	0.78 ± 0.32 (Planck)	$\sim 2\sigma$
Planck 2013 (ISW paper) [88]	0.70 ± 0.28 (Planck)	2.5σ
Planck 2015 (lensing paper) [93]	0.90 ± 0.28 (Planck)	3σ
Planck 2015 (ISW paper) [94]	1.06 ± 0.33 (Planck)	3σ
SZ効果		
Planck 2013 + WISE [50]	–	6.2σ (tSZ)

らぎの角度パワースペクトルを測定し、重力レンズを含んだ宇宙モデルと無矛盾かどうか調べるものである。二つ目は、レンズポテンシャルの角度パワースペクトルを直接測ることである。三つ目は、CMBとは別の観測量（銀河の重力レンズなど）と相関させる方法である。

5.1.1 方法1：CMB揺らぎの角度パワースペクトルを用いた場合

まず、CMB揺らぎの角度パワースペクトルを用いた観測結果について述べる。文献[101]は、Arcminute Cosmology Bolometer Array Receiver (ACBAR) と Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) のデータを組み合わせて温度揺らぎの角度パワースペクトルを測定し、重力レンズを受けた温度揺らぎと無矛盾であることを報告した。そのさい、重力レンズを特徴づけるパラメータ q を $C_\ell^{\text{lens}} = C_\ell^{\text{no-lens}} + q(C_\ell^{\text{lens}} - C_\ell^{\text{no-lens}})$ のように導入し、 q の制限を行った。一方、文献[16]は $C_\ell^{\phi\phi} \rightarrow AC_\ell^{\phi\phi}$ のように A を導入し、 $A = 3.0^{+0.9}_{-0.9}$ を得た。その後、文献[101]は $A = 1.60^{+0.55}_{-0.26}$ と報告している。その後、さらに精度のよいCMB実験によって (ACT[23]、Planck[89, 92]、SPT[65, 124])、温度揺らぎの角度パワースペクトルにおける重力レンズの存在が確認されてきた。もっとも精度のよいPlanckの場合、 $A_L = 1.22 \pm 0.10$ である[92]。偏光の角度パワースペクトルを使った重力レンズの測定も行われている。POLARBEAR実験では、測定されたBモードの角度パワースペクトルは、標準宇宙モデルから期待される重力レンズBモードと無矛盾であることを報告した[98]。BICEP2/Keck Array実験[9, 10, 8, 11]、SPTpol実験[?]でも同様の結果が得られている。

5.1.2 方法2：レンズポテンシャルの角度パワースペクトルを用いた場合

レンズポテンシャルの角度パワースペクトルも各CMB実験で観測されてきた。図4はこれまでの観測結果をまとめたものである。初期の頃の測定では、精度のよい温度揺らぎが用いられていた (ACT[24, 25]、Planck[90]、

SPT[133])。 *³ その後、CMB揺らぎに対する感度が向上し、偏光データも組み合わせた、あるいは偏光データだけで測定が行われてきた (BICEP2/Keck Array[12]、Planck[93]、POLARBEAR[97]、SPTpol[46])。カール成分の角度パワースペクトルも測定されており、これまでの観測ではゼロと無矛盾である (ACTのデータに関しては[80]でカール成分のテストが行われている)。

5.1.3 方法3 : CMB揺らぎ以外の観測量と相関をとった場合

まず、銀河・クエーサーなどの数密度揺らぎとの相関についてまとめる。文献[?, 52]では、Sloan Digital Sky Survey (SDSS)、NRAO VLA Sky Survey (NVSS) で得られた物質密度揺らぎと、WMAPから得られたレンズポテンシャルの相関パワースペクトルを $\sim 3\sigma$ の統計的有意性で検出した。この方法によるCMB重力レンズの検出は、上記の方法 (CMB揺らぎの角度パワースペクトルやレンズポテンシャルの直接測定) よりも前に行われている。その後も、各CMB実験が同様の信号の検出を行ってきた (ACT[113]、Planck[90]、SPT[14])。

次に、銀河の重力レンズとの相関について述べる。文献[42]は、ACTで得られたレンズポテンシャルと、Canada-France-Hawaii Telescope (CFHT) Stripe 82 Survey (CS82) で測定された銀河の重力レンズの相関の検出について報告している。

宇宙赤外線背景輻射 (CIB) は宇宙のダスト成分によって作られると考えられており、レンズポテンシャルとの相関も検出されている (ACT[134]、Planck[91, 93]、POLARBEAR[96]、SPT[55]、SPTpol[46])。この相関を使うことで、ダスト成分に対するバイアス係数や星形成率への制限が行われている[91] 銀河や銀河の重力レンズと比べ、CIBとの相関は検出しやすい。なぜなら、CIBの光源は $z \sim 2$ かそれ以上の高赤方偏移に分布しており、CMBの重力レンズを生み出す重力ポテンシャルの源でもあるので、相関が強いからである。重力レンズBモードの最初の検出では、HerschelのCIB揺らぎとSPTpolのレンズポテンシャルの相関が利用された[46]。

積分Sachs-Wolfe (ISW) 効果とレンズポテンシャルの相関は、Planck実験によって検出されている[90, 88]。SZ効果との相関は文献[50]で報告されている。文献[34]でFermi-LATの γ 線光源のマップとレンズポテンシャルの相関も報告されている。

5.2 宇宙論への応用

以下のように、観測された重力レンズ信号を用いた宇宙論への応用が行われている。CMB揺らぎとレンズポテンシャルを組み合わせることで、最終散乱面上の各径距離における宇宙論パラメータの縮退が解ける[60] (Ω_Λ と Ω_K などは、CMB揺らぎだけでは縮退が強い [144, 15, 30])。数値誤差の縮退への影響も議論されている[56]。文献[114, 133, 90, 92]で示されているように、CMB観測のデータのみから暗黒エネルギーの存在が示唆されている。

レンズポテンシャル以外のデータとの相関を使った研究も行われている：

- レンズポテンシャルと銀河数密度の相関を使うことで、原始非ガウス性への制限が行われている[38]。
- カール成分は宇宙ひもの制限に利用されている[80]。
- 文献[33]はPlanckのレンズポテンシャルを使ってWISEの銀河バイアスを制限し、ISW効果の測定に使っている。
- 文献[99]では、レンズポテンシャルと銀河速度場の相関から重力理論へ制限を行った。
- 文献[93, 95]では、レンズポテンシャルから重力レンズBモードを構成している。

*³ 文献[?]は $2-3\sigma$ での検出を主張したが、統計エラーを過小評価しており、実際は $< 2\sigma$ 程度である

- 文献[78]では、レンズポテンシャルと銀河クラスタリングの相関、さらにレンズポテンシャルと銀河の重力レンズの相関から、文献[26]で提案された銀河バイアスに依存しない量を測定し、宇宙論に応用している。

Acknowledgments

参考文献

- [1] K. N. Abazajian et al. Inflation physics from the cosmic microwave background and large scale structure. *Astropart. Phys.*, 63:55–65, 2015.
- [2] E. Anderes. Decomposing cmb lensing power with simulation. *Phys. Rev. D*, 2013.
- [3] A. Benoit-Levy et al. Full-sky cmb lensing reconstruction in presence of sky-cuts. *Astron. Astrophys.*, 555:10, 2013.
- [4] A. Benoit-Levy, K. M. Smith, and W. Hu. Non-gaussian structure of the lensed cmb power spectra covariance matrix. *Phys. Rev. D*, 86:123008, 2012.
- [5] F. Bernardeau. Weak lensing detection in cmb maps. *Astron. Astrophys.*, 324:15–26, 1997.
- [6] F. Bianchini et al. Cross-correlation between the cmb lensing potential measured by planck and high-z sub-mm galaxies detected by the herschel-atlas survey. *Astrophys. J.*, 802:64, 2015.
- [7] Federico Bianchini et al. Toward a tomographic analysis of the cross-correlation between planck cmb lensing and h-atlas galaxies. *Astrophys. J.*, 825:24, 2016.
- [8] BICEP2 and *Planck* Collaborations. Joint analysis of bicep2/keck array and planck data. *Phys. Rev. Lett.*, 114:101301, 2015.
- [9] BICEP2 Collaboration I. Detection of b-mode polarization at degree angular scales by bicep2. *Phys. Rev. Lett.*, 112(24):241101, 2014.
- [10] BICEP2 / *Keck Array* Collaborations V. Bicep2 / keck array v: Measurements of b-mode polarization at degree angular scales and 150 ghz by the keck array. *Astrophys. J.*, 126:811, 2015.
- [11] BICEP2 / *Keck Array* Collaboration VI. BICEP2 / keck array vi: Improved constraints on cosmology and foregrounds when adding 95 ghz data from keck array. *Phys. Rev. Lett.*, 116:031302, 2015.
- [12] BICEP2 / *Keck Array* Collaboration VIII. BICEP2 / keck array viii: Measurement of gravitational lensing from large-scale b-mode polarization. 2016.
- [13] A. Blanchard and J. Schneider. Gravitational lensing effect on the fluctuations of the cosmic background radiation. *Astron. Astrophys.*, 184:1–6, 1987.
- [14] L. E. Bleem et al. A measurement of the correlation of galaxy surveys with cmb lensing convergence maps from the south pole telescope. *Astrophys. J.*, 753:L9, 2012.
- [15] J. R. Bond, G. Efstathiou, and M. Tegmark. Forecasting cosmic parameter errors from microwave background anisotropy experiments. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 291:L33–L41, 1997.
- [16] E. Calabrese et al. Cmb lensing constraints on dark energy and modified gravity scenarios. *Phys. Rev. D*, 80:103516, 2009.
- [17] E. Calabrese et al. Non-gaussianity in wmap data due to the correlation of cmb lensing potential with secondary anisotropies. *Phys. Rev. D*, 81:043529, 2010.

- [18] A. Challinor and A. Lewis. Lensed cmb power spectra from all-sky correlation functions. *Phys. Rev. D* , 71:103010, 2005.
- [19] A. Cooray and W. Hu. Second order corrections to weak lensing by large-scale structure. *Astrophys. J.* , 574:19, 2002.
- [20] A. Cooray, M. Kamionkowski, and R. R. Caldwell. Cosmic shear of the microwave background: The curl diagnostic. *Phys. Rev. D* , 71:123527, 2005.
- [21] A. Cooray, D. Sarkar, and P. Serra. Weak lensing of the primary cmb bispectrum. *Phys. Rev. D* , 77:123006, 2008.
- [22] L. Dai, M. Kamionkowski, and D. Jeong. Total angular momentum waves for scalar, vector, and tensor fields. *Phys. Rev. D* , 86:125013, 2012.
- [23] S. Das et al. The atacama cosmology telescope: A measurement of the cosmic microwave background power spectrum at 148 and 218 ghz from the 2008 southern survey. *Astrophys. J.* , 729:62, 2011.
- [24] S. Das et al. Detection of the power spectrum of cosmic microwave background lensing by the atacama cosmology telescope. *Phys. Rev. Lett.* , 107:021301, 2011.
- [25] S. Das et al. The atacama cosmology telescope: Temperature and gravitational lensing power spectrum measurements from three seasons of data. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* , 04:014, 2014.
- [26] S. Das and D. N. Spergel. Measuring distance ratios with cmb-galaxy lensing cross-correlations. *Phys. Rev. D* , 79:043509, 2009.
- [27] M. A. DiPompeo, A. D. Myers, R. C. Hickox, J. E. Geach, G. Holder, K. N. Hainline, and S. W. Hall. Weighing obscured and unobscured quasar hosts with the cosmic microwave background. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* , 446:3492–3501, 2015.
- [28] S. Dodelson, E. Rozo, and A. Stebbins. Primordial gravity waves and weak lensing. *Phys. Rev. Lett.* , 91:021301, 2003.
- [29] C. Dvorkin, W. Hu, and K. M. Smith. B-mode cmb polarization from patchy screening during reionization. *Phys. Rev. D* , 79:107302, 2009.
- [30] G. Efstathiou and J. R. Bond. Cosmic confusion: Degeneracies among cosmological parameters derived from measurements of microwave background anisotropies. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* , 304:75–97, 1999.
- [31] C. Feng, G. Aslanyan, A. V. Manohar, B. Keating, H. P. Paar, and O. Zahn. Measuring gravitational lensing of the cosmic microwave background using cross correlation with large scale structure. *Phys. Rev. D* , 86:063519, 2012.
- [32] C. Feng et al. Reconstruction of gravitational lensing using wmap 7-year data. *Phys. Rev. D* , 85:043513, 2012.
- [33] Simone Ferraro, Blake D. Sherwin, and David N. Spergel. Wise measurement of the integrated sachs-wolfe effect. *Phys. Rev.*, D91(8):083533, 2015.
- [34] N. Fornengo, L. Perotto, M. Regis, and S. Camera. Evidence of cross-correlation between the cmb lensing and the γ -ray sky. *Astrophys. J.* , 802:L1, 2015.
- [35] T. Fukushige, J. Makino, and T. Ebisuzaki. The effect of gravitational scattering on the anisotropy of the cosmic background radiation. *Astrophys. J.* , 436:L107–L110, 1994.
- [36] J.E. Geach et al. A direct measurement of the linear bias of mid-infrared-selected quasars at $z \sim 1$ using cosmic microwave background lensing. *Astronomical Journal*, 776:L41, 2013.

- [37] T. Giannantonio et al. Cmb lensing tomography with the des science verification galaxies. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* , 456:3213–3244, 2015.
- [38] T. Giannantonio and W. J. Percival. Using correlations between cmb lensing and large-scale structure to measure primordial non-gaussianity. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* , 441:L16, 2014.
- [39] V. Gluscevic, M. Kamionkowski, and D. Hanson. Patchy screening of the cosmic microwave background by inhomogeneous reionization. *Phys. Rev. D* , 87:047303, 2013.
- [40] D. M. Goldberg and D. N. Spergel. Microwave background bispectrum. 2. a probe of the low redshift universe. *Phys. Rev. D* , 59:103002, 1999.
- [41] J. Guzik, U. Seljak, and M. Zaldarriaga. Lensing effect on polarization in the microwave background: Extracting the convergence power spectrum. *Phys. Rev. D* , 62:043517, 2000.
- [42] N. Hand et al. First measurement of the cross-correlation of cmb lensing and galaxy lensing. *Phys. Rev. D* , 91:062001, 2015.
- [43] D. Hanson, A. Challinor, and A. Lewis. Weak lensing of the cmb. *Gen. Rel. Grav.*, 42:2197–2218, 2010.
- [44] D. Hanson et al. Cmb lensing and primordial non-gaussianity. *Phys. Rev. D* , 80:083004, 2009.
- [45] D. Hanson et al. Cmb temperature lensing power reconstruction. *Phys. Rev. D* , 83:043005, 2011.
- [46] D. Hanson et al. Detection of b-mode polarization in the cosmic microwave background with data from the south pole telescope. *Phys. Rev. Lett.* , 111:141301, 2013.
- [47] D. Hanson and A. Lewis. Estimators for cmb statistical anisotropy. *Phys. Rev. D* , 80:063004, 2009.
- [48] D. Hanson, A. Lewis, and A. Challinor. Asymmetric beams and cmb statistical anisotropy. *Phys. Rev. D* , 81:103003, 2010.
- [49] D. Hanson, G. Rocha, and K. Gorski. Lensing reconstruction from planck sky maps: inhomogeneous noise. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* , 400:2169–2173, 2009.
- [50] J. C. Hill and D. N. Spergel. Detection of thermal sz – cmb lensing cross-correlation in planck nominal mission data. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* , 02:030, 2014.
- [51] C. M. Hirata et al. Cross-correlation of cmb with large-scale structure: Weak gravitational lensing. *Phys. Rev. D* , 70:103501, 2004.
- [52] C. M. Hirata et al. Correlation of cmb with large-scale structure: Ii. weak lensing. *Phys. Rev. D* , 78:043520, 2008.
- [53] C. M. Hirata and U. Seljak. Analyzing weak lensing of the cosmic microwave background using the likelihood function. *Phys. Rev. D* , 67:043001, 2003.
- [54] C. M. Hirata and U. Seljak. Reconstruction of lensing from the cosmic microwave background polarization. *Phys. Rev. D* , 68:083002, 2003.
- [55] G. P. Holder et al. A cosmic microwave background lensing mass map and its correlation with the cosmic infrared background. *Astrophys. J.* , 771:L16, 2013.
- [56] C. Howlett et al. Cmb power spectrum parameter degeneracies in the era of precision cosmology. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* , 1204:027, 2012.
- [57] W. Hu. Weak lensing of the cmb: A harmonic approach. *Phys. Rev. D* , 62:043007, 2000.
- [58] W. Hu. Angular trispectrum of the cmb. *Phys. Rev. D* , 64:083005, 2001.
- [59] W. Hu. Mapping the dark matter through the cosmic microwave background damping tail. *Astrophys. J.* , 557:L79–L83, 2001.

- [60] W. Hu. Dark synergy: Gravitational lensing and the cmb. *Phys. Rev. D* , 65:023003, 2002.
- [61] W. Hu and A. Cooray. Gravitational time delay effects on cosmic microwave background anisotropies. *Phys. Rev. D* , 63:023504, 2001.
- [62] W. Hu and T. Okamoto. Mass reconstruction with cmb polarization. *Astrophys. J.* , 574:566–574, 2002.
- [63] W. Hu and M. J. White. Cmb anisotropies: Total angular momentum method. *Phys. Rev. D* , 56:596–615, 1997.
- [64] M. Kaplinghat, L. Knox, and Y.-S. Song. Determining neutrino mass from the cmb alone. *Phys. Rev. Lett.* , 91:241301, 2003.
- [65] R. Keisler, C. L. Reichardt, et al. A measurement of the damping tail of the cosmic microwave background power spectrum with the south pole telescope. *Astrophys. J.* , 743:28, 2011.
- [66] M. H. Kesden, A. Cooray, and M. Kamionkowski. Lensing reconstruction with cmb temperature and polarization. *Phys. Rev. D* , 67:123507, 2003.
- [67] D. Kirk, Y. Omori, A. Benoit-Levy, R. Cawthon, C. Chang, P. Larsen, et al. Cross-correlation of gravitational lensing from des science verification data with spt and planck lensing. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* , 459:21, 2016.
- [68] L. Knox and Y.-S. Song. A limit on the detectability of the energy scale of inflation. *Phys. Rev. Lett.* , 89:011303, 2002.
- [69] H. Kodama and M. Sasaki. Cosmological perturbation theory. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 78:1, 1984.
- [70] Adrien Kuntz. Cross-correlation of cfhtlens galaxy catalogue and planck cmb lensing using the halo model prescription. *Astron. Astrophys.* , 584:A53, 2015.
- [71] J. Lesgourgues, L. Perotto, S. Pastor, and M. Piat. Probing neutrino masses with cmb lensing extraction. *Phys. Rev. D* , 73:045021, 2006.
- [72] A. Lewis and A. Challinor. Weak gravitational lensing of the cmb. *Phys. Rep.*, 429:1–65, 2006.
- [73] A. Lewis, A. Challinor, and D. Hanson. The shape of the cmb lensing bispectrum. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* , 1103:018, 2011.
- [74] A. Lewis, A. Challinor, and A. Lasenby. Efficient computation of cmb anisotropies in closed frw models. *Astrophys. J.* , 538:473–476, 2000.
- [75] C. Li, T. L. Smith, and A. Cooray. Non-gaussian covariance of cmb b-modes of polarization and parameter degradation. *Phys. Rev. D* , 75:083501, 2007.
- [76] Jia Liu and J. Colin Hill. Cross-correlation of planck cmb lensing and cfhtlens galaxy weak lensing maps. *Phys. Rev. D* , 92:063517, 2015.
- [77] Mathew Madhavacheril et al. Evidence of Lensing of the Cosmic Microwave Background by Dark Matter Halos. *Phys. Rev. Lett.*, 114:151302, 2015.
- [78] Hironao Miyatake, Mathew S. Madhavacheril, Neelima Sehgal, An?e Slosar, David N. Spergel, Blake Sherwin, and Alexander van Engelen. Measurement of a cosmographic distance ratio with galaxy and cmb lensing. 2016.
- [79] T. Namikawa, D. Hanson, and R. Takahashi. Bias-hardened cmb lensing. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* , 431:609–620, 2013.
- [80] T. Namikawa and R. Takahashi. Bias-hardened cmb lensing with polarization. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*

- , 438:1507–1517, 2014.
- [81] T. Namikawa, D. Yamauchi, and A. Taruya. Full-sky lensing reconstruction of gradient and curl modes from cmb maps. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* , 1201:007, 2012.
 - [82] T. Namikawa, D. Yamauchi, and A. Taruya. Constraining cosmic string parameters with curl mode of cmb lensing. *Phys. Rev. D* , 88:083525, 2013.
 - [83] J. O’Bryan et al. Constraints on spatial variations in the fine-structure constant from planck. 2013.
 - [84] T. Okamoto and W. Hu. The angular trispectra of cmb temperature and polarization. *Phys. Rev. D* , 66:063008, 2002.
 - [85] T. Okamoto and W. Hu. Cmb lensing reconstruction on the full sky. *Phys. Rev. D* , 67:083002, 2003.
 - [86] Y. Omori and G. Holder. Cross-correlation of cfhtlens galaxy number density and planck cmb lensing. 2015.
 - [87] S. J. Osborne, D. Hanson, and O. Dore. Extragalactic foreground contamination in temperature-based cmb lens reconstruction. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* , 03:024, 2014.
 - [88] *Planck* Collaboration. Planck 2013 results. xix. the integrated sachs-wolfe effect. *Astron. Astrophys.* , 571:A19, 2014.
 - [89] *Planck* Collaboration. Planck 2013 results. xvi. cosmological parameters. *Astron. Astrophys.* , 571:A16, 2014.
 - [90] *Planck* Collaboration. Planck 2013 results. xvii. gravitational lensing by large-scale structure. *Astron. Astrophys.* , 571:A17, 2014.
 - [91] *Planck* Collaboration. Planck 2013 results. xviii. the gravitational lensing-infrared background correlation. *Astron. Astrophys.* , page A18, 2014.
 - [92] *Planck* Collaboration. Planck 2015 results. xiii. cosmological parameters. 2015.
 - [93] *Planck* Collaboration. Planck 2015 results. xv. gravitational lensing. 2015.
 - [94] *Planck* Collaboration. Planck 2015 results. xxi. the integrated sachs-wolfe effect. 2015.
 - [95] *Planck* Collaboration. Planck intermediate results. xli. a map of lensing-induced b-modes. 2016.
 - [96] POLARBEAR Collaboration. Evidence for gravitational lensing of the cosmic microwave background polarization from cross-correlation with the cosmic infrared background. *Phys. Rev. Lett.* , 112:131302, 2014.
 - [97] POLARBEAR Collaboration. Measurement of the cosmic microwave background polarization lensing power spectrum with the polarbear experiment. *Phys. Rev. Lett.* , 113:021301, 2014.
 - [98] POLARBEAR Collaboration. Measurement of the cosmic microwave background polarization lensing power spectrum with the polarbear experiment. *Astrophys. J.* , 794:171, 2014.
 - [99] Anthony R. Pullen, Shadab Alam, Siyu He, and Shirley Ho. Constraining gravity at the largest scales through cmb lensing and galaxy velocities. 2015.
 - [100] D. M. Regan, E. P. S. Shellard, and J. R. Fergusson. General cmb and primordial trispectrum estimation. *Phys. Rev. D* , 82:023520, 2010.
 - [101] C. L. Reichardt, P. A. R. Ade, J. J. Bock, J. R. Bond, J. A. Brevik, C. R. Contaldi, M. D. Daub, J. T. Dempsey, J. H. Goldstein, W. L. Holzapfel, C. L. Kuo, A. E. Lange, M. Lueker, M. Newcomb, J. B. Peterson, J. Ruhl, M. C. Runyan, and Z. Staniszewski. High resolution cmb power spectrum from the complete acbar data set. *Astrophys. J.* , 694:1200–1219, 2009.

- [102] D. Sarkar et al. Cosmic shear from scalar-induced gravitational waves. *Phys. Rev. D* , 77:103515, 2008.
- [103] M. Sasaki. Gravitational lens effect on anisotropies of the cosmic microwave background. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* , 240:415–420, 1989.
- [104] J. Schmalzing, M. Takada, and T. Futamase. Effects of weak lensing on topology of cosmic microwave background maps. *Astrophys. J.* , 544:L83–L86, 2000.
- [105] F. Schmidt and D. Jeong. Large-scale structure with gravitational waves ii: Shear. *Phys. Rev. D* , 86:083513, 2012.
- [106] M. M. Schmittfull et al. Joint analysis of cmb temperature and lensing-reconstruction power spectra. *Phys. Rev. D* , 88:063012, 2013.
- [107] U. Seljak. Gravitational lensing effect on cosmic microwave background anisotropies: A power spectrum approach. *Astrophys. J.* , 463:1, 1996.
- [108] U. Seljak and C. M. Hirata. Gravitational lensing as a contaminant of the gravity wave signal in cmb. *Phys. Rev. D* , 69:043005, 2004.
- [109] U. Seljak and M. Zaldarriaga. Direct signature of evolving gravitational potential from cosmic microwave background. *Phys. Rev. D* , 60:043504, 1999.
- [110] U. Seljak and M. Zaldarriaga. Measuring dark matter power spectrum from cosmic microwave background. *Phys. Rev. Lett.* , 82:2636–2639, 1999.
- [111] P. Serra and A. Cooray. Impact of secondary non-gaussianities on the search for primordial non-gaussianity with cmb maps. *Phys. Rev. D* , 77:107305, 2008.
- [112] B. D. Sherwin and S. Das. Cmb lensing - power without bias. 2010.
- [113] Blake D. Sherwin, Sudeep Das, Amir Hajian, Graeme Addison, J. Richard Bond, et al. The atacama cosmology telescope: Cross-correlation of cmb lensing and quasars. *Phys. Rev. D* , 86:083006, 2012.
- [114] Blake D. Sherwin et al. Evidence for dark energy from the cosmic microwave background alone using the atacama cosmology telescope lensing measurements. *Phys. Rev. Lett.* , 107:021302, 2011.
- [115] M. Shimon et al. Cmb polarization systematics due to beam asymmetry: Impact on inflationary science. *Phys. Rev. D* , 77:083003, 2008.
- [116] Sukhdeep Singh, Rachel Mandelbaum, and Joel R. Brownstein. Cross-correlating planck cmb lensing with sdss: Lensing-lensing and galaxy-lensing cross-correlations. 2016.
- [117] K. M. Smith et al. Cmbpol mission concept study: Gravitational lensing. *AIP Conf. Proc.*, 1141:121, 2009.
- [118] K. M. Smith et al. Delensing cmb polarization with external datasets. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* , 1206:014, 2012.
- [119] K. M. Smith, W. Hu, and M. Kaplinghat. Cosmological information from lensed cmb power spectra. *Phys. Rev. D* , 74:123002, 2006.
- [120] K. M. Smith, O. Zahn, and O. Dore. Detection of gravitational lensing in the cosmic microwave background. *Phys. Rev. D* , 76:043510, 2007.
- [121] R. E. Smith et al. Stable clustering, the halo model and nonlinear cosmological power spectra. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* , 341:1311, 2003.
- [122] S. Smith, A. Challinor, and G. Rocha. What can be learned from the lensed cosmic microwave background b-mode polarization power spectrum? *Phys. Rev. D* , 73:023517, 2006.

- [123] A. Stebbins. Weak lensing on the celestial sphere. 1996.
- [124] K. T. Story et al. A measurement of the cosmic microwave background damping tail from the 2500-square-degree spt-sz survey. *Astrophys. J.* , 779:86, 2013.
- [125] K. T. Story et al. A measurement of the cosmic microwave background gravitational lensing potential from 100 square degrees of sptpol data. *Astrophys. J.* , 810:50, 2015.
- [126] M. Takada. Lensing-induced non-gaussian signatures in the cosmic microwave background. *Astrophys. J.* , 558:29–41, 2001.
- [127] M. Takada and T. Futamase. Detectability of the gravitational lensing effect on the two-point correlation of hot-spots in cosmic microwave background maps. *Astrophys. J.* , 546:620–634, 2001.
- [128] M. Takada, E. Komatsu, and T. Futamase. Gravitational lensing effect on the two-point correlation of hot-spots in the cosmic microwave background. *Astrophys. J.* , 533:L83–L87, 2000.
- [129] R. Takahashi et al. Revising the halofit model for the nonlinear matter power spectrum. *Astrophys. J.* , 761:152, 2012.
- [130] W.-H. Teng, C.-L. Kuo, and J.-H. P. Wu. Cosmic microwave background delensing revisited: Residual biases and a simple fix. 2011.
- [131] K. Tomita and K. Watanabe. Gravitational lens effect on the cosmic background radiation\due to nonlinear inhomogeneities. *Prog. Theor. Phys.* , 82:563–580, 1989.
- [132] A. van Engelen, S. Bhattacharya, N. Sehgal, G. P. Holder, O. Zahn, and D. Nagai. Cmb lensing power spectrum biases from galaxies and clusters using high-angular resolution temperature maps. *Astrophys. J.* , 786:14, 2014.
- [133] A. van Engelen et al. A measurement of gravitational lensing of the microwave background using south pole telescope data. *Astrophys. J.* , 756:142, 2012.
- [134] A. van Engelen et al. The atacama cosmology telescope: Lensing of cmb temperature and polarization derived from cosmic infrared background cross-correlation. *Astrophys. J.* , 808:9, 2015.
- [135] L. Verde, H. Peiris, and R. Jimenez. Optimizing cmb polarization experiments to constrain inflationary physics. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* , 0601:019, 2006.
- [136] R. J. Wilkinson, J. Lesgourgues, and C. Boehm. Using the cmb angular power spectrum to study dark matter-photon interactions. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* , 04:026, 2014.
- [137] D. Yamauchi et al. Weak lensing of cmb by cosmic (super-)strings. *Phys. Rev. D* , 85:103515, 2012.
- [138] D. Yamauchi, T. Namikawa, and A. Taruya. Weak lensing generated by vector perturbations and detectability of cosmic strings. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* , 1210:030, 2012.
- [139] D. Yamauchi, T. Namikawa, and A. Taruya. Full-sky formulae for weak lensing power spectra from total angular momentum method. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* , 1308:051, 2013.
- [140] D. Yamauchi, Y. Sendouda, and K. Takahashi. Cmb isw-lensing bispectrum from cosmic strings. 2013.
- [141] M. Zaldarriaga. Lensing of the cmb: Non-gaussian aspects. *Phys. Rev. D* , D62:063510, 2000.
- [142] M. Zaldarriaga and U. Seljak. Gravitational lensing effect on cosmic microwave background polarization. *Phys. Rev. D* , 58:023003, 1998.
- [143] M. Zaldarriaga and U. Seljak. Reconstructing projected matter density from cosmic microwave background. *Phys. Rev. D* , 59:123507, 1999.
- [144] M. Zaldarriaga, D. N. Spergel, and U. Seljak. Microwave background constraints on cosmological param-

eters. *Astrophys. J.* , 488:1–13, 1997.