

Bogusław Filipowicz\*, Joanna Kwiecień\*

## **Zastosowanie sieci kolejkowych do oceny efektywności jednostek organizacyjnych**

### **1. Wprowadzenie**

Systemy i sieci kolejkowe znajdują szerokie zastosowanie w przygotowaniu optymalnych decyzji dotyczących struktury i organizacji obsługi z punktu widzenia klienta i zarządzającego systemem oraz w opracowaniu metod pozwalających wyznaczyć podstawowe parametry charakteryzujące proces obsługi. Z funkcjonowaniem kolejek mamy do czynienia w wielu dziedzinach życia. Każdy z nas napotyka kolejki w wielu instytucjach, m.in. w urzędach pocztowych, urzędach skarbowych, sklepach, bankach, przychodniach i szpitalach. Sieci kolejkowe składające się z wielu systemów obsługi o wiele lepiej przedstawiają strukturę badanego systemu niż pojedynczy system kolejkowy. W zależności od całkowitej liczby zgłoszeń można je podzielić na sieci otwarte, zamknięte i mieszane. W zależności od liczby klas dzielimy je na jednoklasowe i wieloklasowe. Projektując sieć kolejkową musimy określić całkowitą liczbę odpowiednich systemów wchodzących w jej skład, liczbę kanałów obsługi w poszczególnych systemach i liczbę klas zgłoszeń [2, 4].

Celem artykułu jest przedstawienie zastosowania sieci kolejkowych do oceny efektywności wybranych struktur organizacyjnych. Do analizowania funkcjonowania rzeczywistych jednostek organizacyjnych służby zdrowia i bankowości zastosowane zostaną sieci wieloklasowe BCMP (nazwa pochodzi od nazwisk ich twórców: Baskett, Chandy, Muntz, Palacios), zbudowane z systemów markowskich, w których czasy obsługi zgłoszeń są zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym.

### **2. Sieci kolejkowe BCMP**

W sieciach BCMP istnieje możliwość przebywania jednocześnie wielu zgłoszeń należących do różnych klas. W tego rodzaju sieciach zgłoszenie może zmienić przynależność do klasy w trakcie przebywania wewnątrz sieci. Rozkład czasów obsługi zgłoszeń jest dowolny.

---

\* Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie;  
filip@ia.agh.edu.pl, kwiecień@ia.agh.edu.pl

Systemy występujące w sieciach BCMP można podzielić na cztery typy:

- 1) Typ FIFO: system jedno- lub wielokanałowy, w którym zgłoszenia są obsługiwane według dyscypliny FIFO. Rozkład czasów obsługi wszystkich klas jest identyczny i wykładniczy.
- 2) Typ PS: system jednokanałowy, w którym zgłoszenia obsługiwane są wg dyscypliny *processor sharing*. Zgłoszenia różnych klas mogą mieć inne wymagania odnośnie do obsługi, przy czym rozkład czasów obsługi można przedstawić w postaci rozkładu Coxa.
- 3) Typ IS: w systemie dostępna jest nieograniczona liczba kanałów obsługi, każde zgłoszenie ma swój „własny serwer”.
- 4) Typ LIFO-PR: system, w którym obsługa zgłoszenia przerywana jest w momencie pojawienia się w kolejce zgłoszenia z wyższym priorytetem. Po zakończeniu obsługi tego zgłoszenia, kontynuowana jest przerwana obsługa. Czas obsługi może zależeć od długości kolejki w systemie. Rozkład czasów obsługi można przedstawić w postaci rozkładu Coxa.

Stosowane w pracy sieci BCMP składają się z systemów FIFO i IS, stąd dalsze rozważania będą ograniczone tylko do tych typów. Średnia liczba zgłoszeń w systemie umieszczonym w sieci otwartej wyrażona jest za pomocą zależności (1)

$$\bar{K}_{ir} = \begin{cases} m_i \rho_{ir} + \frac{\rho_{ir}}{1 - \rho_i} \cdot \frac{(m_i \rho_i)^{m_i}}{m_i! (1 - \rho_i)} \cdot \frac{1}{\sum_{k_i=0}^{m_i-1} \frac{(m_i \rho_i)^{k_i}}{k_i!} + \frac{(m_i \rho_i)^{m_i}}{m_i!} \cdot \frac{1}{1 - \rho_i}}, & \text{Typ FIFO} \\ \frac{\lambda_{ir}}{\mu_{ir}}, & \text{Typ IS} \end{cases} \quad (1)$$

gdzie:

$N$  – liczba systemów,

$M$  – liczba klas,

$m_i$  – liczba kanałów obsługi w systemie  $i$ ,

$\mu_{ir}$  – współczynnik obsługi klasy  $r$  w systemie  $i$ ,

$\lambda_{ir}$  – współczynnik strumienia zgłoszeń klasy  $r$  w systemie  $i$ ,

$\rho_{ir}$  – względna intensywność obsługi klasy  $r$  w systemie  $i$ ,  $\rho_{ir} = \lambda_{ir} / (m_i \mu_{ir})$ .

Korzystając z formuły Little’a średni czas przebywania zgłoszeń klasy  $r$  w systemie  $i$  umieszczonym w sieci otwartej dany jest równaniem (2)

$$\bar{T}_{ir} = \frac{\bar{K}_{ir}}{\lambda_{ir}} \quad (2)$$

Do wyznaczenia parametrów sieci zamkniętych BCMP wygodnie jest zastosować metody aproksymacyjne. Jedną z takich metod jest SUM (*summation method*), oparta na założeniu, że dla każdego systemu w sieci średnia liczba zgłoszeń w systemie jest funkcją przepustowości tego systemu [2].

### 3. Przykłady zastosowań sieci kolejkowych

Przykładowym modelem sieci otwartej jest model banku. Wśród licznych zastosowań teorii kolejek na szczególną uwagę zasługuje zastosowanie w służbie zdrowia [1, 3–5]. Za pomocą sieci zamkniętej modelowany będzie oddział chemioterapii szpitala onkologicznego. Celem zebrania danych dotyczących strumienia przybywania pacjentów oraz czasów obsługi przeprowadzono badania chronometryczne. Za pomocą sieci kolejkowych można zbadać, czy struktury tych jednostek organizacyjnych są wystarczające do obsługi określonej liczby klientów/pacjentów.

#### 3.1. Model banku

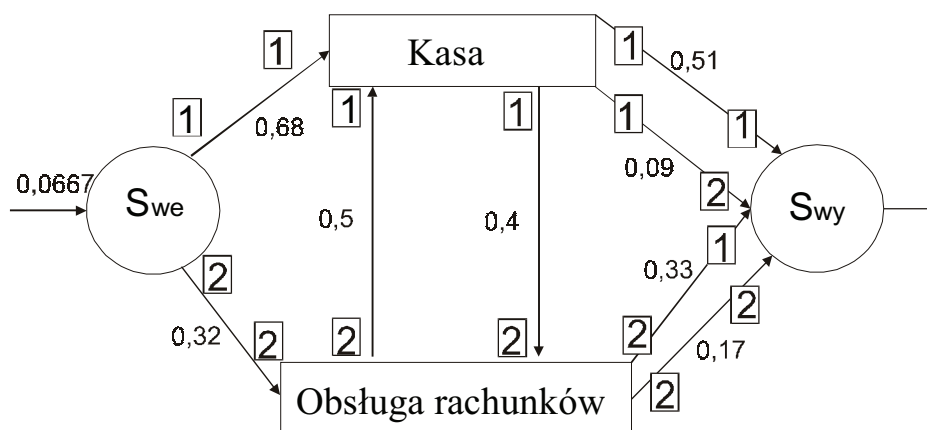
W banku czynne jest jedno okienko kasowe i jedno okienko obsługi rachunków. Na podstawie przeprowadzonych obserwacji stwierdzono, że klienci przybywają do banku wg rozkładu Poissona, średnio co 15 minut (współczynnik rozkładu wynosi 0,0667). Czas obsługi klientów w okienku kasowym podlega rozkładowi wykładniczemu o parametrze równym 0,5, natomiast w okienku obsługi rachunków o parametrze równym 0,095. Klienci obsługiwani są w kolejności: pierwszy przybył, pierwszy obsłużony. Każde okienko można więc modelować jako system markowski M/M/1/FIFO/∞ (typ 1 w klasyfikacji BCMP).

W rozważanym modelu przyjęto dwie klasy klientów:

klasa 1 – klienci dokonujący wpłat/wypłat;

klasa 2 – klienci zakładający/likwidujący rachunki, lokaty itd.

Klienci przechodząc między okienkami, zmieniają przynależność do klasy. Model banku z zaznaczonymi prawdopodobieństwami przejść klientów między okienkami przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Model sieci otwartej BCMP przedstawiającej działanie banku:

$S_{we}$  – wejście sieci,  $S_{wy}$  – wyjście sieci

Przedstawiony model jest modelem uproszczonym. Dysponując większą liczbą danych, można wprowadzić więcej klas klientów, a tym samym doprowadzić do lepszego odwzorowania działania banku. Dla danych prezentowanych w artykule, wielkości charakteryzujące sieć kolejkową zebrano w tabeli 1.

**Tabela 1**  
Średnia liczba zgłoszeń i średni czas przebywania zgłoszeń w systemach

Wyznaczone parametry	Kasa	Obsługa rachunków
Średnia liczba klientów	0,163	1,083
Średni czas przebywania klientów (min)	2,32	22,11

Dla modelu banku struktura systemu jest wystarczająca. Klienci nie czekają zbyt długo na obsługę.

### 3.2. Model oddziału chemioterapii

Na oddziale chemioterapii pacjenci poddawani mogą być leczeniu w warunkach pobytu dziennego (tzw. chemia dzienna) bądź w warunkach pobytu szpitalnego (tzw. chemia wielodobowa). Leczenie chemioterapią wymaga wielu tygodni (miesiące). Częstotliwość kolejnych kursów i całkowity czas leczenia jest uzależniony m.in. od typu nowotworu, od reakcji guza na stosowane leczenie i stopnia nasilania efektów ubocznych. Po każdym kursie następuje okres odpoczynku umożliwiający cofnięcie się niektórych ubocznych objawów leczenia. Konieczne jest również wykonywanie badań kontrolnych w trakcie leczenia.

W skład modelu działu chemioterapii wchodzi następujące systemy:

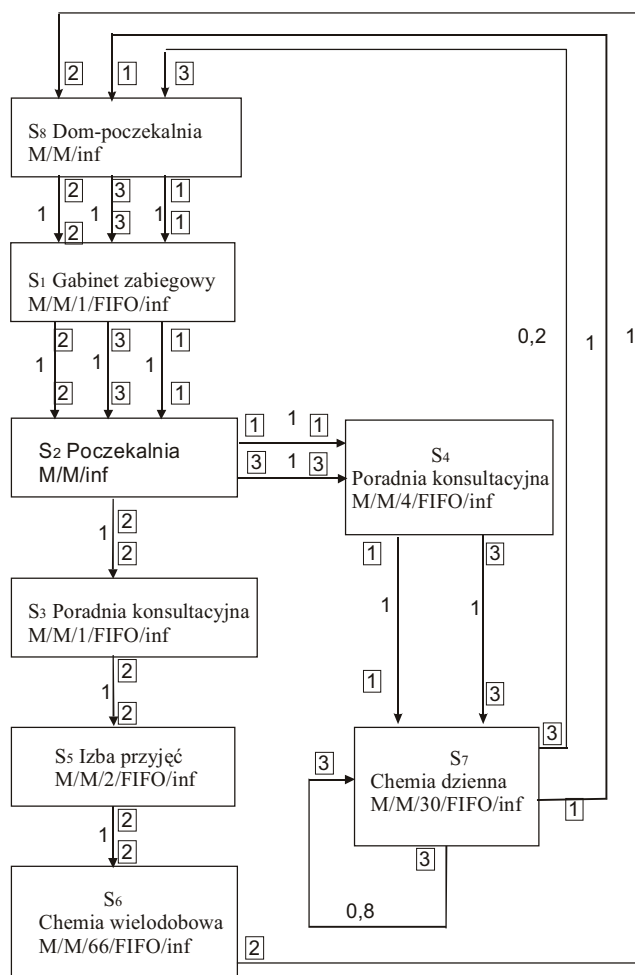
- $S_1$  – gabinet zabiegowy: system jednokanałowy, w którym wykonywane są badania krwi pacjentów, pobranie krwi trwa średnio 2 minuty 40 sekund;
- $S_2$  – poczekalnia: pacjenci przebywają około 3 godzin;
- $S_3$  – poradnia konsultacyjna pacjentów chemii wielodobowej: system jednokanałowy, czas przebywania pacjenta około jednej minuty;
- $S_4$  – poradnia konsultacyjna pacjentów chemii dziennej: system 4-kanałowy, czas przebywania pacjenta 7 minut 12 sekund, pacjenci biorący chemię przyjmowani są około godziny;
- $S_5$  – izba przyjęć: system 2-kanałowy, średnio pacjent przebywa 10 minut;
- $S_6$  – chemioterapia wielodobowa: 66 łóżek, średnio pacjent przebywa 4,6 doby;
- $S_7$  – chemioterapia z salami pobytu dziennego: 30 łóżek, chemioterapia przyjmowana jest średnio przez 4 godziny;
- $S_8$  – „dom-poczekalnia”: nieskończona liczba łóżek-kanałów obsługi, pacjenci chemii wielodobowej przebywają średnio 7,4 dnia, pacjenci chemii jednodniowej przebywają średnio 11 dni, pacjenci chemii jednodniowej, którzy przychodzą 5 dni pod rząd w trakcie trwania jednego cyklu chemioterapii przebywają średnio 19 dni.

Wprowadzono następujące klasy pacjentów:

- klasa 1 – pacjenci chemii dziennej „jednodniowej”, którzy przychodzą na chemioterapię jeden raz w trakcie trwania jednego cyklu chemioterapii;
- klasa 2 – pacjenci chemii wielodobowej, przy czym czas pobytu w szpitalu wynosi średnio 4,6 doby;
- klasa 3 – pacjenci chemii dziennej „pięciodniowej”, którzy przychodzą na chemioterapię 5 dni pod rząd w trakcie trwania jednego cyklu chemioterapii.

Łączna liczba pacjentów oddziału chemioterapii (przebywających na oddziale i w domu) wynosi 414, przy czym chemię dzienną „jednodniową” przyjmuje 250 pacjentów, „pięciodniową” – 20 pacjentów, chemię wielodobową – 144 pacjentów.

Rysunek 2 przedstawia model oddziału chemioterapii.



Rys.2. Model sieci zamkniętej BCMP przedstawiającej działanie oddziału chemioterapii

Zakładając, że jednostką czasu jest jedna doba, należy przeskalować do jednej doby wartości czasów obsługi i czasów pracy stacji, które nie są czynne całą dobę (systemy 1, 3, 4, 5, 7). W rozpatrywanym modelu oddziału chemioterapii nie ma zmiany przynależności zgłoszeń-pacjentów do klasy. Na podstawie przeprowadzonych obserwacji stwierdzono, że pacjenci w trakcie kolejnych kursów byli poddawani „stałemu” rodzajowi chemii. Oczywiście istnieje możliwość wprowadzenia podziału na inne klasy, jednak wprowadzone sklasyfikowanie pacjentów wydaje się być najodpowiedniejszym odzwierciedleniem działania oddziału z punktu widzenia osoby zarządzającej.

W tabeli 2 zestawiono wyniki względnego wykorzystania systemów przez poszczególne klasy.

**Tabela 2**  
Względne wykorzystanie systemów  $p_{ir}$

System	Klasa 1	Klasa 2	Klasa 3
S <sub>1</sub>	0,3056	0,1761	0,0123
S <sub>2</sub>	2,5591	1,4752	0,1026
S <sub>3</sub>	0	0,1967	0
S <sub>4</sub>	0,6144	0	0,0246
S <sub>5</sub>	0	0,4917	0
S <sub>6</sub>	0	0,8202	0
S <sub>7</sub>	0,6824	0	0,1368
S <sub>8</sub>	222,5316	86,1423	15,4870

Tabela 3 przedstawia średnie liczby pacjentów wszystkich klas w systemach.

**Tabela 3**  
Średnie liczby pacjentów  $K_{ir}$

System	Klasa 1	Klasa 2	Klasa 3
S <sub>1</sub>	0,6024	0,3473	0,0242
S <sub>2</sub>	2,5591	1,4752	0,1026
S <sub>3</sub>	0	0,2447	0
S <sub>4</sub>	3,0325	0	0,1216
S <sub>5</sub>	0	1,2964	0
S <sub>6</sub>	0	54,4942	0
S <sub>7</sub>	21,2744	0	4,2647
S <sub>8</sub>	222,5316	86,1423	15,4870

Osoba odpowiedzialna za sprawne funkcjonowanie danej struktury organizacyjnej, w tym przypadku oddziału chemioterapii, powinna przede wszystkim mieć na uwadze dobro pacjenta. Z punktu widzenia chorego najważniejszymi parametrami sieci kolejkowej modelującej działanie oddziału są średnie czasy przebywania w systemach (tab. 4) i średnie czasy oczekiwania w poszczególnych systemach (tab. 5).

**Tabela 4**  
Średnie czasy przebywania pacjentów  $T_{ir}$   
(przeskalowane do jednej doby)

System	Klasa 1	Klasa 2	Klasa 3
S <sub>1</sub>	0,0294	0,0294	0,0294
S <sub>2</sub>	0,1250	0,1250	0,1250
S <sub>3</sub>	0	0,0207	0
S <sub>4</sub>	0,1481	0	0,1481
S <sub>5</sub>	0	0,1098	0
S <sub>6</sub>	0	4,6176	0
S <sub>7</sub>	1,0391	0	1,0391
S <sub>8</sub>	10,8696	7,2993	18,8679

**Tabela 5**  
Średnie czasy oczekiwania pacjentów  
(przeskalowane do jednej doby)

System	Klasa 1	Klasa 2	Klasa 3
S <sub>1</sub>	0,0145	0,0145	0,0145
S <sub>2</sub>	0	0	0
S <sub>3</sub>	0	0,0041	0
S <sub>4</sub>	0,0281	0	0,0281
S <sub>5</sub>	0	0,0265	0
S <sub>6</sub>	0	0,0304	0
S <sub>7</sub>	0,0391	0	0,0391
S <sub>8</sub>	0	0	0

Na podstawie wyliczonych danych stwierdzić można, że struktura oddziału chemioterapii jest wystarczająca. Pacjenci wymagający leczenia są właściwie od razu kierowani na oddział, nie muszą długo oczekiwać na niezbędne leczenie (44 minuty na przyjęcie do  $S_6$ ; 56,3 minut na przyjęcie do  $S_7$ ). Sieci kolejkowe mogą również pomóc poprawić strukturę oddziału w sytuacji, gdy liczba pacjentów wzrośnie [5].

#### 4. Podsumowanie

W artykule zaprezentowano modele sieci kolejkowych, które mogą być stosowane do oceny efektywności działania jednostek organizacyjnych. W przedstawionych modelach wielkości charakteryzujące sieć są satysfakcjonujące. W przypadku mało efektywnych struktur sieci kolejkowe pozwalają znaleźć wąskie gardło i zbadać zachowanie rozpatrywanych jednostek przy różnych parametrach działania. Kolejnym krokiem może być optymalizacja badanych struktur uwzględniająca koszty funkcjonowania. W oparciu o sieci kolejkowe możliwe jest stworzenie systemu informatycznego, który byłby narzędziem wspomagającym podejmowanie decyzji przez managerów.

#### Literatura

- [1] Albin S.L., Barrett J., Ito D., Mueller J.E.: *A queueing network analysis of a health center*. Queueing Systems, 7, 1990
- [2] Bolch G., Greiner S., Meer H., Trivedi K.S.: *Queueing networks and Markov chains. Modeling and performance evaluation with computer science application*. John Wiley&Sons, INC, 1998
- [3] Doi M., Chen Y.M., Osawa H.: *A queueing model in which arrival times are scheduled*. Operations Research Letters, 21, 1997
- [4] Filipowicz B.: *Modelowanie i analiza sieci kolejkowych*. Wydawnictwa AGH, Kraków, 1997
- [5] Kwiecień J.: *Zastosowanie sieci kolejkowych z wieloma klasami zgłoszeń w zagadnieniach organizacyjnych służby zdrowia*. Praca doktorska (niepublikowana), 2004