Jeśli współczynnik obsługi jest niezależny od ilości zgłoszeń, wtedy:

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{m_i \mu_i} \tag{4.3}$$

4.1.2 Sieci z wieloma klasami zgłoszeń [BM]

•Prawdopodobieństwo marginalne $\pi_i(\mathbf{k})$ jest to prawdopodobieństwo, że system i znajduje się w stanie $S_i = k$ wynosi odpowiednio:

- dla sieci zamkniętej:

$$\pi_i(\mathbf{k}) = \sum_{\substack{\sum_{j=1}^{N} \mathbf{S}_j = \mathbf{K} \\ \mathbf{S}_i = \mathbf{k}}} \pi(\mathbf{S}_1,\ldots,\mathbf{S}_N), \text{ gdzie: } \sum_{\sum_{j=1}^{N} \mathbf{S}_j = \mathbf{K}} \pi(\mathbf{S}_1,\ldots,\mathbf{S}_N) = 1 \tag{4.14}$$

- dla sieci otwartej:

$$\pi_i(\mathbf{k}) = \sum_{S_i = k} \pi(\mathbf{S}_1,\ldots,\mathbf{S}_N), \text{ gdzie: } \sum \pi(\mathbf{S}_1,\ldots,\mathbf{S}_N) = 1 \tag{4.15}$$

•Wykorzystanie systemu i przez zgłoszenia należące do klasy r - ρ_{ir} przedstawia zależność:

$$\rho_{ir} = \frac{1}{m_i} \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ k_r > 0}} \pi_i(\mathbf{k}) \frac{k_{ir}}{k_i} \min(m_i, k_i), \quad k_i = \sum_{r=1}^{R} k_{ir}$$

Jeśli współczynniki obsługi są niezależne od ilości zgłoszeń, wtedy:

$$\rho_{ir} = \frac{\lambda_{ir}}{m_i \mu_{ir}} \tag{4.16}$$

•Przepustowość systemu i λ_{ir} jest to współczynnik z jakim zgłoszenia należące do klasy r są obsługiwane i opuszczają system i. Przyjmuje on postać:

$$\lambda_{ir} = \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ k_r > 0}} \pi_i(\mathbf{k}) \frac{k_{ir}}{k_i} \mu_i(k_i) \tag{4.17}$$

z tym, że:

- dla sieci otwartej:

$$\lambda_{ir} = \lambda_{0,ir} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=1}^{R} \lambda_{js} p_{js,ir} \quad \text{dla } i = 1,\ldots,N \tag{4.18}$$

- dla sieci zamkniętej:

$$\lambda_{ir} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=1}^{R} \lambda_{js} p_{js,ir} \quad \text{dla } i = 1,\ldots,N \tag{4.19}$$

W przypadku, gdy współczynniki obsługi nie zależą od liczby zgłoszeń przepustowość systemu wynosi:

$$\lambda_{ir} = m_i \cdot \rho_{ir} \cdot \mu_{ir}.$$

•Całkowita przepustowość zgłoszeń klasy r w sieci λ_r wynosi odpowiednio:

- w sieci otwartej:

$$\lambda_r = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{0,ir} \tag{4.20}$$

przy czym:

$$\lambda_{0,ir} = \lambda \cdot p_{0,ir}$$

- w sieci zamkniętej:

$$\lambda_r = \frac{\lambda_{ir}}{e_{ir}} \tag{4.21}$$

•Średnią liczbę wizyt zgłoszenia e_{ir} możemy przedstawić w postaci:

- dla sieci otwartej:

$$e_{ir} = p_{0,ir} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=1}^{R} e_{js} p_{js,ir} \quad \text{dla } i = 1,\dots,N;\ r = 1,\dots,R \tag{4.22}$$

- dla sieci zamkniętej:

$$e_{ir} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=1}^{R} e_{js} p_{js,ir} \quad \text{dla } i = 1,\dots,N;\ r = 1,\dots,R \tag{4.23}$$

•Średnia liczba zgłoszeń $\overline{K}_{ir}$ klasy r w systemie i jest postaci:

$$\overline{K}_{ir} = \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ k_r > 0}} k_r \cdot \pi_i(\mathbf{k}) \tag{4.24}$$

•Średnia długość kolejki $\overline{Q}_{ir}$ zgłoszeń klasy r w systemie i wyliczona na podstawie reguły Little'a wynosi:

$$\overline{Q}_{ir} = \lambda_{ir} \overline{W}_{ir} \tag{4.25}$$

•Średni czas przebywania $\overline{T}_{ir}$ zgłoszenia klasy r w systemie i przedstawia zależność:

$$\overline{T}_{ir} = \frac{\overline{K}_{ir}}{\lambda_{ir}} \tag{4.26}$$

•Średni czas oczekiwania $\overline{W}_{ir}$ zgłoszeń klasy r w systemie i przy założeniu, że współczynniki obsługi są niezależne od liczby zgłoszeń:

$$\overline{W}_{ir} = \overline{T}_{ir} - \frac{1}{\mu_{ir}} \tag{4.27}$$

4.5.4 Metoda SUM

Istnieją algorytmy opierające się na założeniu, że średnią liczbę zgłoszeń w systemie umieszczonym w sieci można wyliczyć przy znanym ρ_i tego systemu [BM]. Do nich zaliczamy metodę SUM (ang. *summation method*), która oparta jest na prostym założeniu, że dla każdego systemu w sieci, średnia liczba zgłoszeń w systemie jest funkcją przepustowości tego systemu λ:

$$\overline{K}_{ir} = f_{ir}(\lambda_{ir}) \qquad (4.53)$$

Własności funkcji $f_{ir}(\lambda_{ir})$:

- $0 \le \lambda_{ir} \le \mu_{ir} m_i$
- $f_{ir} \le f_{ir}(\lambda_{ir} + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$
- $f_{ir}(0) = 0$

Dla sieci kolejkowych wieloklasowych funkcja ta ma postać:

$$f_{ir}(\lambda_{ir}) = \overline{K}_{ir} = \begin{cases} \dfrac{\rho_{ir}}{1 - \dfrac{K-1}{K}\rho_i}, & Typ\,1,2,4\,(m_i = 1) \\ m_i \rho_{ir} + \dfrac{\rho_{ir}}{1 - \dfrac{K - m_i - 1}{K - m_i}\rho_i} \cdot P_{m_i}, & Typ\,1\,(m_i > 1) \\ \dfrac{\lambda_{ir}}{\mu_{ir}}, & Typ\ 3 \end{cases} \qquad (4.54)$$

gdzie:

$$\rho_i = \sum_{r=1}^{R} \rho_{ir}; \quad K = \sum_{r=1}^{R} K_r$$

oraz:

$$P_{mi} = \frac{(m_i \rho_i)^{m_i}}{m_i!(1 - \rho_i)} \cdot \frac{1}{\sum_{k_i=0}^{m_i-1} \dfrac{(m_i \rho_i)^{k_i}}{k_i!} + \dfrac{(m_i \rho_i)^{m_i}}{m_i!} \cdot \dfrac{1}{1-\rho}}$$

Sumując wszystkie funkcje f_{ir} otrzymujemy równanie dla przepustowości λ_r:

$$\sum_{i=1}^{N} \overline{K}_{ir} = \sum_{i=1}^{N} f_{ir}(\lambda_{ir}) = K_r, \qquad (r = 1,\dots,R)$$

Dla $\lambda_{ir} = \lambda_r e_{ir}$ otrzymujemy równanie:

$$\sum_{i=1}^{N} f_{ir}(\lambda_r e_{ir}) = g_r(\lambda_r) = K_r, \qquad (r = 1,\dots,R)$$

Jeśli nie znamy wielkości λ_r, możemy (dla sieci wieloklasowych) zastosować *metodę iteracyjną*:

1. Inicjalizacja: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_R = 0.00001$, $\varepsilon = 0.00001$
2. Wyliczamy λ_r dla r = 1,...,R według wzoru:

$$\lambda_r = \frac{K_r}{\sum_{i=1}^{N} fix_{ir}(\lambda_1,\ldots,\lambda_R)} \tag{4.55}$$

przy czym:

$$fix_{ir} = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{e_{ir}}{\mu_{ir}}}{1 - \dfrac{K-1}{K}\rho_i}, & Typ\,1,2,4\,(m_i = 1) \\[2ex] \dfrac{e_{ir}}{\mu_{ir}} + \dfrac{\dfrac{e_{ir}}{m_i \mu_{ir}}}{1 - \dfrac{K - m_i - 1}{K - m_i}\rho_i} \cdot P_{m_i}(\rho_i), & Typ\,1\,(m_i > 1) \\[2ex] \dfrac{e_{ir}}{\mu_{ir}}, & Typ\ 3 \end{cases}$$

3. Wyliczamy błąd:

$$e = \sqrt{\sum_{r=1}^{R} (\lambda_{r_n} - \lambda_{r_{n+1}})^2}$$

Jeśli e > ε wracamy do punktu 2.

4. Wyliczamy wielkości charakterystyczne sieci.

[BM] G.Bolch, S. Greiner, H. de Meer, K.S. Trivedi: Queueing *networks and Markov chains. Modeling and performance evaluation with computer science applications.* John Wiley&Sons, INC. 1998.