

Joanna Kwiecień\*

## **Modelowanie struktur służby zdrowia za pomocą sieci kolejkowych**

### **1. Wprowadzenie**

Teoria kolejek obejmująca zagadnienia systemów i sieci kolejkowych dostarcza potężnego narzędzia, które pozwala przedstawić charakterystykę procesu obsługi oraz ocenić jakość pracy rzeczywistego systemu. Dzięki stosowaniu teorii kolejek można podejmować optymalne decyzje odnośnie struktury danego systemu z punktu widzenia osób zainteresowanych uzyskaniem obsługi i zarządzających tym systemem. Sieci kolejkowe składające się z wielu systemów obsługi o wiele lepiej przedstawiają strukturę rozważanego systemu niż pojedynczy system kolejkowy. Istnieje kilka rodzajów sieci kolejkowych. W zależności od całkowitej liczby zgłoszeń można je podzielić na sieci otwarte, zamknięte i mieszane, natomiast w zależności od liczby klas wyróżnić można sieci jednoklasowe i wieloklasowe. Istnieją również metody, które pozwalają wyznaczyć podstawowe parametry obsługi w przypadku wprowadzenia priorytetów klas zgłoszeń oraz różnych mechanizmów blokowania [1, 2].

Trudna sytuacja w służbie zdrowia, ciągłe oczekiwanie pacjentów na wizytę u specjalisty czy kolejki oczekujących na zabiegi, zmuszają do poszukiwania coraz to nowszych metod i narzędzi, które pozwolą na sprawną organizację obsługi. Teoria kolejek może być stosowana zarówno do analizy czasów oczekiwania pacjentów i wykorzystania kanałów obsługi (lekarzy, łóżek itd.), jak i do projektowania systemów opieki zdrowotnej. Systemy te mogą obejmować podstawowe jednostki służby zdrowia oraz rozbudowane systemy, takie jak szpitale czy kliniki. Całkowity proces opieki zdrowotnej zawiera szereg czynności i procedur, przez które musi przejść pacjent chcący uzyskać pomoc. Wykwalifikowany personel medyczny oraz sprzęt specjalistyczny stają się wąskim gardłem systemu opieki zdrowotnej. Sieci kolejkowe mogą być z powodzeniem stosowane do modelowania struktur służby zdrowia [2, 3]. Pierwsze prace dotyczące wykorzystania sieci kolejkowych w służbie zdrowia zostały podjęte przez autorów pracy [4]. Zastosowali oni jednoklasowe sieci

---

\* Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

kolejkowe do zamodelowania funkcjonowania przychodni lekarskiej zapewniającej studentom z Rutgers University opiekę medyczną. Istnieją również sytuacje tzw. nagłych przypadkach, szczególnie zagrażającym życiu, kiedy pacjenci przyjmowani są poza kolejnością. W [5] zaproponowano zastosowanie priorytetów dla różnych kategorii pacjentów, przyjmowanych w izbie przyjęć. Teoria kolejek została również wykorzystana do modelowania przepływu pacjentów wymagających leczenia w szpitalu psychiatrycznym [6] oraz na oddziale kardiologii [7].

Celem artykułu jest przedstawienie zastosowania sieci wieloklasowych z priorytetami oraz sieci kolejkowych z blokowaniem do modelowania przykładowych struktur i procesów leczenia pacjentów.

## 2. Sieci kolejkowe

Sieć kolejkową, do której zgłoszenia mogą wchodzić z zewnątrz, jak również mogą opuszczać sieć, nazywamy otwartą, w przeciwnym przypadku – siecią zamkniętą. W sieci zamkniętej liczba zgłoszeń jest stała. Sieć kolejkową, do której przybywa nowe zgłoszenie, podczas gdy inne zgłoszenie opuszcza sieć, możemy rozważać jako sieć zamkniętą. W przypadku modelowania struktur organizacyjnych lecznictwa otwartego (przychodnie lekarskie) stosuje się otwarte sieci kolejkowe, natomiast sieci zamknięte stosowane są do analizy funkcjonowania szpitali oraz klinik specjalistycznych. Najprostszym rodzajem sieci kolejkowych są sieci Jacksona posiadające nieograniczoną liczbę zgłoszeń należących do jednej klasy. Proces przybywania zgłoszeń z zewnątrz jest procesem Poissona o parametrze  $\lambda$ . Każda stacja obsługi zbudowana z jednego lub wielu kanałów obsługi o współczynniku  $\mu$ , który może zależeć od liczby zgłoszeń w danej stacji, pracuje zgodnie z rozkładem wykładniczym według dyscypliny FIFO. Bardziej złożonymi są sieci wieloklasowe BCMP, w których istnieje możliwość przebywania jednocześnie wielu zgłoszeń należących do różnych klas. Zgłoszenie może zmienić przynależność do klasy w trakcie przebywania wewnątrz sieci. Rozkład czasów obsługi zgłoszeń jest dowolny. Systemy występujące w sieciach BCMP można podzielić na 4 typy: FIFO, PS, IS, LIFO-PR [1, 2]. Głównym problemem w teorii kolejek jest właściwe określenie prawdopodobieństwa sieci w stanie ustalonym, na podstawie którego można wyznaczyć pozostałe wielkości charakteryzujące sieć. Jest to bardzo złożona procedura, w przypadku dużych sieci właściwie niemożliwa do wykonania, dlatego też stosowane są algorytmy aproksymacji takie, jak: algorytm rekurencyjny Bużena, metoda analizy wartości średnich (MVA), metoda serwera zastępczego (FES), metoda sumowania (SUM) i wiele innych. W sieciach kolejkowych mogą również występować różne typy priorytetów zgłoszeń, między innymi priorytety względne i bezwzględne. Często spotykanym zjawiskiem w sieciach kolejkowych jest też blokowanie zgłoszeń [1, 8].

Stosowane w pracy sieci kolejkowe składają się z systemów wykładniczych  $M/M/m$ /FIFO/ $\infty$  (typ FIFO wg klasyfikacji BCMP) i  $M/M/\infty$  (typ IS), stąd dalsze rozważania będą ograniczone tylko do tych typów. Typ FIFO reprezentowany jest przez system jedno- lub

wielokanałowy, w którym zgłoszenia są obsługiwane wg dyscypliny FIFO. Rozkład czasów obsługi wszystkich klas jest identyczny i wykładniczy. W systemach typu IS istnieje nieograniczona liczba kanałów obsługi. Zgłoszenia różnych klas mogą mieć inne wymagania co do obsługi, przy czym rozkład czasów obsługi można przedstawić w postaci rozkładu Coxa [1, 2].

Średnia liczba zgłoszeń w systemie umieszczonym w sieci otwartej składającej się z  $N$  systemów i  $R$  klas, będąca sumą intensywności obsługi w całym systemie ( $mp$ ) oraz średniej liczby zgłoszeń oczekującej na obsługę ( $L$ ), wyrażona jest za pomocą zależności (1):

$$\bar{K}_{ir} = \begin{cases} m_i \rho_{ir} + L_{ir} = m_i \rho_{ir} + \frac{\rho_{ir}}{1 - \rho_i} \cdot P_{m_i}(\rho_i), & \text{Typ FIFO} \\ \frac{\lambda_{ir}}{\mu_{ir}}, & \text{Typ IS} \end{cases} \quad (1)$$

gdzie:

$$P_{m_i}(\rho_i) = \frac{(m_i \rho_i)^{m_i}}{m_i! (1 - \rho_i)} \cdot \frac{1}{\sum_{k_i=0}^{m_i-1} \frac{(m_i \rho_i)^{k_i}}{k_i!} + \frac{(m_i \rho_i)^{m_i}}{m_i!} \cdot \frac{1}{1 - \rho_i}} \quad (2)$$

oraz:

- $m_i$  – liczba kanałów obsługi w systemie  $i$ ,
- $\mu_{ir}$  – współczynnik obsługi klasy  $r$  w systemie  $i$ ,
- $\lambda_{ir}$  – współczynnik strumienia zgłoszeń klasy  $r$  w systemie  $i$ ,
- $\rho_{ir}$  – względna intensywność obsługi klasy  $r$  w systemie  $i$ ,  $\rho_{ir} = \lambda_{ir} / (m_i \mu_{ir})$ ,

W sieciach zamkniętych, w których przebywa  $K$  zgłoszeń, przy zastosowaniu metody SUM opartej na założeniu, że dla każdego systemu umieszczonego w sieci średnia liczba zgłoszeń w systemie jest funkcją przepustowości tego systemu, średnia liczba zgłoszeń wynosi [1]:

$$\bar{K}_{ir} = \begin{cases} m_i \rho_{ir} + \frac{\rho_{ir}}{1 - \frac{K_i - m_i - 1}{K - m_i} \rho_i} \cdot \frac{(m_i \rho_i)^{m_i}}{m_i! (1 - \rho_i)} \cdot \frac{1}{\sum_{k_i=0}^{m_i-1} \frac{(m_i \rho_i)^{k_i}}{k_i!} + \frac{(m_i \rho_i)^{m_i}}{m_i!} \cdot \frac{1}{1 - \rho_i}}, & \text{FIFO} \\ \frac{\lambda_{ir}}{\mu_{ir}}, & \text{IS} \end{cases} \quad (3)$$

Stosując reguły Little'a można wyznaczyć średni czas oczekiwania w kolejce oraz średni czas przebywania zgłoszeń w całym systemie.

### 3. Sieci kolejkowe priorytetowe

W przypadku sieci kolejkowych priorytetowych zakładamy, że przybywające zgłoszenia należą do klasy posiadającej określony priorytet  $h$  ( $h = 1, \dots, H$ ). Wewnątrz klasy priorytetowej obowiązuje dyscyplina FIFO. Jeśli obsługa zgłoszenia z niższym priorytetem nie jest przerywana w chwili nadejścia zgłoszenia z wyższym priorytetem  $h$ , mówimy o systemach z priorytetem względnym. W tym przypadku średni czas oczekiwania w kolejce nowoprzybyłego zgłoszenia składa się z trzech składników: średniego czasu dokończenia obsługi zgłoszenia obsługiwanego w momencie nadejścia rozważanego zgłoszenia, średniego czasu obsługi zgłoszeń stojących w kolejce z tym samym lub wyższym priorytetem oraz średniego czasu obsługi zgłoszeń przybyłych później z wyższym priorytetem [1]. Przykładem takiego systemu może być gabinet dentystyczny, gdzie pacjenci przybywający z bólem zęba (z wyższym priorytetem) są przyjmowani poza kolejnością.

W niektórych przypadkach może się zdarzyć, że przybywające zgłoszenie z wyższym priorytetem przerywa obsługę aktualnie obsługiwanego zgłoszenia (z niższym priorytetem) i odbywa się obsługa zgłoszenia nowoprzybyłego. Po zakończeniu obsługi zgłoszenia z wyższym priorytetem następuje dokończenie przerwanej obsługi zgłoszenia. Mówimy wtedy o systemach z priorytetem bezwzględnym [1]. Przykładem takiego systemu może być izba przyjęć, gdzie obsługa pacjenta jest przerywana, jeśli zostanie przywieziony pacjent w ciężkim stanie (z wyższym priorytetem).

Do analizy zamkniętych sieci kolejkowych z priorytetami można zastosować metodę PRIOSUM [1]. Załóżmy, że klasa pierwsza ma najwyższy priorytet, natomiast klasa  $R$  – najniższy. Niech  $\delta_{ir}$  oznacza sumę względnej intensywności obsługi zgłoszeń z wyższym priorytetem od  $r$  w systemie  $i$ , natomiast  $\delta_{ir+1}$  oznacza całkowitą względną intensywność obsługi zgłoszeń o priorytecie nie niższym od  $r$  w systemie  $i$ .

W przypadku rozważanych w pracy sieci z priorytetami względnymi (bez przerywania obsługi zgłoszenia aktualnie obsługiwanego), zawierających systemy  $M/M/m/FIFO/\infty$ , średnia liczba zgłoszeń w poszczególnych systemach wynosi:

$$\bar{K}_{ir} = m_i \rho_{ir} + \frac{\lambda_{ir} \sum_{j=1}^R \frac{\rho_{ij}}{\mu_{ij}}}{\left(1 - \frac{K - m_i - 1}{K - m_i} \delta_{ir}\right) \left(1 - \frac{K - m_i - 1}{K - m_i} \delta_{ir+1}\right)} \cdot \frac{P_{m_i}(\rho_i)}{m_i \rho_i} \quad (4)$$

### 4. Sieci kolejkowe z blokowaniem

W niniejszej pracy rozpatrywane są otwarte sieci kolejkowe jednoklasowe, w których zgłoszenia przybywające do systemu są natychmiast obsługiwane lub czekają w kolejce do obsługi. Po obsłudze zgłoszenie przechodzi do następnej stacji, która jest wybierana z pewnym prawdopodobieństwem. Jeśli jednak system następny posiada skończoną pojemność, może wystąpić sytuacja odmowy obsługi zgłoszenia. Jeśli system ten jest zapełniony,

to zgłoszenie będzie blokowane w stacji poprzedniej, dopóki nie zostanie przyjęte do kolejnego systemu. W literaturze opisane są różne mechanizmy blokowania, różniące się momentem blokowania (przed obsługą lub po obsłudze) albo mechanizmem przejść blokowanych zgłoszeń. Opisany mechanizm blokowania znany jest jako *blokowanie po obsłudze* (BAS). Zgłoszenia są odblokowywane według dyscypliny FIFO [8].

Jedną z metod aproksymacji sieci otwartych z blokowaniem jest algorytm dekompozycji przedstawiony w [6, 9], wprowadzający pojęcie efektywnego czasu obsługi systemu  $i$  jako sumy czasu obsługi oraz czasu blokowania  $W_j$  (czasu oczekiwania na wejście do stacji następnej). Jeśli część zgłoszeń po uzyskaniu obsługi w  $i$ -tym systemie opuszcza ten system bez blokowania (z prawdopodobieństwem  $p_{iwy}$ ), wtedy efektywny czas obsługi można wyrazić w postaci:

$$\frac{1}{\mu_{i(ef)}} = p_{iwy} \left( \frac{1}{\mu_i} \right) + \sum_j p_{ij} \left( \frac{1}{\mu_i} + W_j \right) \quad (5)$$

Średnią liczbę blokowanych zgłoszeń w  $i$ -tym systemie kierowanych do  $j$ -tego systemu  $L_{ij}$ , który można wtedy analizować jako system M/M/m/FIFO/ $\infty$ , otrzymamy, podstawiając  $\mu_{ief}$  zamiast  $\mu_i$  w (1) i korzystając z formuły:

$$\begin{aligned} L_{ij} &= p_{ij} L_j, \text{ dla } i\text{-tego systemu na drodze blokowania} \\ L_{ij} &= L_j (\lambda_{ij} / \lambda_j), \text{ dla innych systemów} \end{aligned} \quad (6)$$

## 5. Przykładowe modele struktur służby zdrowia

Stosując sieci kolejkowe, można badać, czy struktury jednostek służby zdrowia są wystarczające do obsługi określonej liczby pacjentów.

### 5.1. Proces chemioterapii

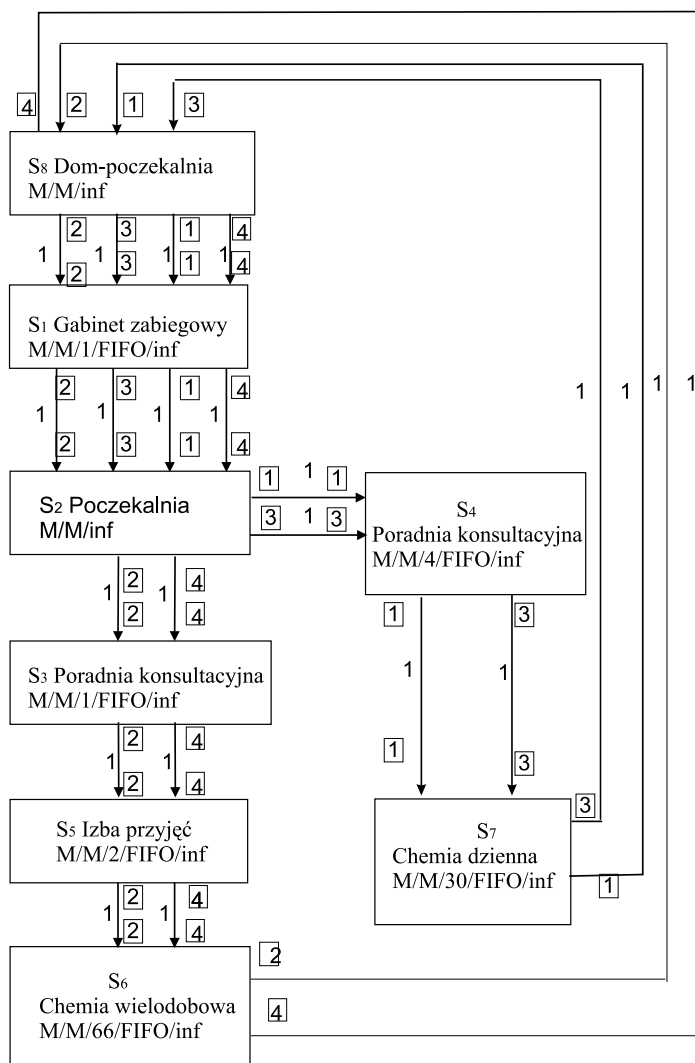
Na oddziale chemioterapii pacjenci poddawani mogą być leczeniu w warunkach pobytu dziennego (tzw. chemia dzienna) bądź w warunkach pobytu szpitalnego (tzw. chemia wielodobowa). Częstotliwość kolejnych kursów chemioterapii i całkowity czas leczenia jest uzależniony m.in. od typu nowotworu, od reakcji guza na stosowane leczenie i stopnia nasilania efektów ubocznych.

W skład modelu oddziału chemioterapii (rys. 1) wchodzi następujące systemy:  $S_1$  – gabinet zabiegowy (1 pielęgniarka,  $\mu_1 = 67$ ),  $S_2$  – poczekalnia ( $\mu_2 = 8$ ),  $S_3$  – poradnia konsultacyjna pacjentów chemii wielodobowej (1 lekarz,  $\mu_3 = 60$ ),  $S_4$  – poradnia konsultacyjna pacjentów chemii dziennej (4 lekarzy,  $\mu_4 = 8,33$ ),  $S_5$  – izba przyjęć (2 pielęgniarki,  $\mu_5 = 12$ ),  $S_6$  – chemioterapia wielodobowa (66 łóżek,  $\mu_6 = 0,218$ ),  $S_7$  – chemioterapia z salami pobytu dziennego (30 łóżek,  $\mu_7 = 1$ ),  $S_8$  – dom pacjenta ( $\mu_{81} = \mu_{83} = 0,092$ ,  $\mu_{82} = \mu_{84} = 0,137$ ).

Głównym ograniczeniem oddziału jest liczba łóżek w systemach chemii dziennej i wielodobowej, dlatego przyjęto, że są one systemami z priorytetami względnymi.

Wprowadzono następujące klasy pacjentów:

- klasa 1 – 250 pacjentów chemii dziennej (wysokiego ryzyka),
- klasa 2 – 150 pacjentów chemii wielodobowej (wysokiego ryzyka),
- klasa 3 – 15 pacjentów chemii dziennej z niższym priorytetem,
- klasa 4 – 25 pacjentów chemii wielodobowej z niższym priorytetem.



**Rys. 1.** Model sieci zamkniętej BCMP przedstawiającej proces leczenia na oddziale chemioterapii

Korzystając z metod SUM i PRIOSUM, można wyznaczyć podstawowe wielkości charakteryzujące sieć. Z punktu widzenia pacjenta najważniejszymi parametrami sieci kolejkowej modelującej działanie oddziału są średnie czasy przebywania w systemach i średnie czasy oczekiwania w poszczególnych systemach (tab. 1). Dla tak dobranych danych można jeszcze przyjąć, że struktura oddziału chemioterapii jest wystarczająca (mimo dość długiego czasu oczekiwania pacjentów klasy 4 do systemu  $S_6$ ).

**Tabela 1**  
Wybrane podstawowe parametry systemów

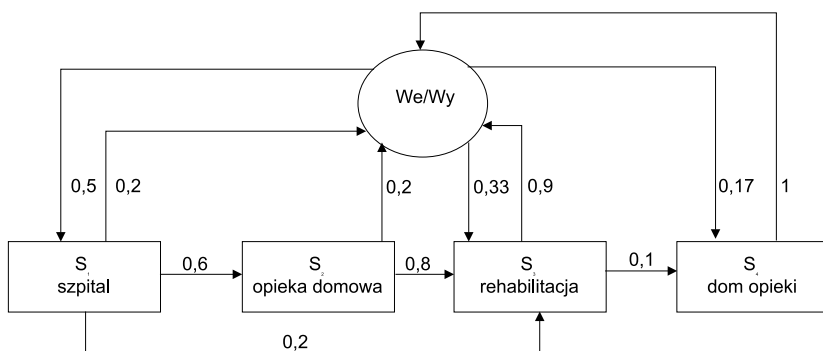
System	Średni czas oczekiwania [doba]				Średnia liczba pacjentów			
	Klasa 1	Klasa 2	Klasa3	Klasa 4	Klasa 1	Klasa 2	Klasa3	Klasa 4
$S_1$	0,0157	0,0157	0,0157	0,0157	0,6291	0,3657	0,0377	0,0240
$S_2$	0	0	0	0	2,5648	1,4909	0,1537	0,0979
$S_3$	0	0,0045	0	0,0045	0	0,2521	0	0,0166
$S_4$	0,0308	0	0,0308	0	3,0961	0	0,1855	0
$S_5$	0	0,0324	0	0,0324	0	1,3804	0	0,0906
$S_6$	0	0,0955	0	0,8031	0	55,8523	0	4,2219
$S_7$	0,0068	0	0,0248	0	20,6584	0	1,2597	0
$S_8$	0	0	0	0	223,0222	87,0617	13,3616	5,7171

## 5.2. Proces opieki medycznej pacjentów po udarach

Interesującym przypadkiem, który można modelować za pomocą sieci kolejkowych, jest proces leczenia osób, u których wystąpił niedowład po udarze mózgu. Bardzo ważnym etapem leczenia jest rehabilitacja, prowadzona w celu przywrócenia pacjentowi zdolności do funkcjonowania w społeczeństwie i ograniczenia jego niepełnosprawności. Leczenie kontynuowane jest również w domu pacjenta poprzez wyspecjalizowane zespoły opieki medycznej. Do tzw. hospitalizacji domowej pacjenci kierowani są ze szpitala. Ważną rolę w procesie leczenia pacjentów, szczególnie osób starszych, odgrywają również domy opieki długoterminowej (zakłady opiekuńczo-lecznicze, zakłady opiekuńczo-pielęgniacyjne), w których pacjenci mają dostęp do opieki lekarskiej oraz zabiegów pielęgnacyjnych i rehabilitacyjnych.

Na rysunku 2 przedstawiono model procesu opieki osób po udarach mózgu, składający się z 4 systemów:  $S_1$  – szpital,  $S_2$  – opieka domowa (20 specjalistów),  $S_3$  – rehabilitacja (42 miejsca),  $S_4$  – dom opieki (100 miejsc). Pacjenci w momencie podejrzenia czy stwierdzenia udaru kierowani są natychmiast do najbliższego szpitala, dlatego można założyć, że  $S_1$  jest systemem wykładniczym  $M/M/\infty$ , pozostałe są systemami  $M/M/m/FIFO/\infty$ . Niech czas przebywania pacjenta w systemach  $S_1$ ,  $S_2$  i  $S_3$  wynosi jeden miesiąc, w systemie

$S_4$  – pół roku, natomiast współczynnik  $\lambda$  wynosi 60 pacjentów miesięcznie. Mechanizm blokowania występuje pomiędzy opieką domową i rehabilitacją oraz między rehabilitacją i przyjęciem do domu opieki. Blokowani pacjenci pozostają w systemie  $S_2$  oraz  $S_3$ . Kanały obsługi w tych systemach spełniają więc rolę poczekalni dla blokowanych pacjentów.



**Rys. 2.** Model otwartej sieci jednoklasowej przedstawiającej proces leczenia osób po udarach mózgu

Z zależności (1), (5) i (6) można wyznaczyć wielkości charakteryzujące systemy wchodzące w skład sieci, takie jak średnie liczby blokowanych pacjentów i ich czasy oczekiwania (tab. 2).

**Tabela 2**  
Wybrane podstawowe parametry systemów

Wielkość	System			
	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
Średnia liczba zablokowanych pacjentów do systemów	0	4,96	15,63	0,47
Średni czas oczekiwania zablokowanych pacjentów[miesiąc]	0	0,28	0,39	0,03

## 6. Podsumowanie

W artykule przedstawiono zastosowanie sieci kolejkowych do modelowania leczenia na oddziale chemioterapii oraz procesu leczenia osób po udarze. Uwzględnienie mechanizmu blokowania oraz priorytetów pacjentów pozwala na wierniejsze odzwierciedlenie realnej sytuacji. Dzięki zastosowaniu sieci kolejkowych można ocenić efektywność badanych struktur oraz znaleźć wąskie gardło całego systemu. Kolejnym krokiem, wartym podjęcia, wydaje się połączenie mechanizmu blokowania i priorytetyzacji do modelowania pacjentów z grupy wysokiego ryzyka, uwzględniające tzw. reguły odstępowania.



## Literatura

- [1] Bolch G., Greiner S., Meer H., Trivedi K.S., *Queueing networks and Markov chains. Modeling and performance evaluation with computer science application*. John Wiley&Sons, INC, 1998.
- [2] Filipowicz B., *Modelowanie i analiza sieci kolejkowych*. Wydawnictwa AGH, Kraków 1997.
- [3] Kwiecień J., *Zastosowanie sieci kolejkowych z wieloma klasami zgłoszeń w zagadnieniach organizacyjnych służby zdrowia*. Praca doktorska (niepublikowana), 2004.
- [4] Albin S.L, Barrett J., Ito D., Mueller J.E., *A queueing network analysis of a health center*. Queueing Systems, 7, 1990.
- [5] Siddhartan K., Jones W.J., Johnson J.A., *A priority queueing model to reduce waiting times in emergency care*. International Journal of Health Care Quality Assurance, 9, 1996, 10–16.
- [6] Koizumi N., Kuno E., Smith T. E., *Modeling patient flows using a queueing network with blocking*, Health Care Management Sci., 8(1), 2005, 49–60.
- [7] Bruin de A.M., Rossum van A.C., Visser M.C., Koole G.M., *Modeling the emergency cardiac in-patient flow*. Health Care Management Sci., 10, 2007, 125–137.
- [8] Peros H., *Queueing networks with blocking: Exact and Approximate Solutions*, Oxford University Press, 1994.
- [9] Takahashi Y., Miyahara H., Hasegawa T., *An approximation method for open restricted queueing networks*. Operations Research, 28, 1980, 594–602.