

Bogusław Filipowicz\*, Joanna Kwiecień\*

## **Zastosowanie teorii kolejek do modelowania struktur administracyjnych w szkolnictwie**

### **1. Wprowadzenie**

Teoria kolejek jest dziedziną badań operacyjnych, która w ostatnich latach rozwija się bardzo szybko. Pierwotnie była ona ściśle powiązana z techniką, jednak dzięki swojej skuteczności i elastyczności została wykorzystana w wielu innych dziedzinach. Prekursorem teorii kolejek był duński teletechnik A.K. Erlang, który w 1909 r. opublikował swoją pracę dotyczącą modelu centrali telefonicznej. W latach 70. ubiegłego wieku teorię kolejek zaczęto stosować do oceny wydajności komputerów. Na przełomie XX i XXI wieku pojawiło się wiele prac dotyczących zastosowania teorii kolejek do oceny wydajności systemów IT [3, 7]. Obecnie teoria ta, obejmująca zagadnienia systemów i sieci kolejkowych, może być z powodzeniem stosowana do modelowania wielu systemów obsługi, istniejących między innymi w służbie zdrowia czy administracji, i opracowania metod pozwalających na całkowitą charakterystykę procesu obsługi [1, 4, 6]. Pozwala bowiem przygotować optymalne decyzje odnośnie struktury i organizacji obsługi z punktu widzenia klienta i zarządzającego systemem.

Pojedynczy system kolejkowy składa się z wejścia, kolejki i stacji obsługi. Ze względu na typ rozkładu wejściowego strumienia zgłoszeń oraz typ rozkładu czasów obsługi dzielimy je na systemy markowskie i niemarkowskie. Sieć kolejkowa zbudowana z systemów kolejkowych lepiej przedstawia strukturę badanego obiektu niż pojedynczy system kolejkowy. Biorąc pod uwagę całkowitą liczbę zgłoszeń, można je podzielić na sieci otwarte, zamknięte i mieszane. W zależności od liczby klas zgłoszeń dzielimy je na jednoklasowe i wieloklasowe. Projektując sieć kolejkową, należy więc określić typ i liczbę systemów wchodzących w jej skład, liczbę kanałów obsługi w poszczególnych systemach oraz liczbę klas zgłoszeń przebywających w sieci.

Celem artykułu jest przedstawienie zastosowania teorii kolejek do modelowania wybranych struktur administracyjnych w szkolnictwie. Do analizowania ich funkcjonowania

---

\* Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

zastosowane zostaną otwarte sieci kolejkowe, jedno- i wieloklasowe, zbudowane z systemów markowskich, w których czasy obsługi zgłoszeń są zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym.

## 2. Sieci kolejkowe

Sieci Jacksona i BCMP, które zostaną zaprezentowane w tym rozdziale, należą do sieci niewrażliwych, tzn. takich, których rozwiązanie w stanie równowagi mające postać iloczynu prawdopodobieństw granicznych zależy jedynie od pierwszego momentu rozkładu czasów obsługi. Głównym problemem w teorii kolejek jest właściwe określenie prawdopodobieństwa sieci w stanie ustalonym, na podstawie którego można wyznaczyć pozostałe wielkości charakteryzujące sieć.

### 2.1. Sieci Jacksona

Najprostszym rodzajem sieci kolejkowych są jednoklasowe sieci Jacksona, w których liczba zgłoszeń jest nieograniczona [2, 4]. Proces przybywania zgłoszeń z zewnątrz jest procesem Poissona o parametrze  $\lambda$ . Każda stacja obsługi zbudowana z jednego lub wielu kanałów obsługi o współczynniku  $\mu$ , który może zależeć od liczby zgłoszeń w danej stacji, pracuje zgodnie z rozkładem wykładniczym według dyscypliny FIFO. Względna intensywność obsługi w systemie  $m$  kanałowym  $\rho_i$  dana jest zależnością:

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{m_i \mu_i} \quad (1)$$

Jednym z ważniejszych twierdzeń dotyczących sieci otwartych jest *twierdzenie Jacksona* pozwalające, przy założeniu spełnienia warunków ergodyczności przez każdą stację należącą do sieci ( $\rho_i < 1$ ), wyznaczyć prawdopodobieństwo w stanie ustalonym  $\pi(k)$  zdarzenia polegającego na tym, że w systemie istnieje  $k$  zgłoszeń. Dla sieci składającej się z  $N$  systemów  $m$  kanałowych prawdopodobieństwo to określone jest zależnością:

$$\pi(k) = \prod_{i=1}^N \pi_i(k_i)$$

$$\pi_i(k_i) = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{k_i=0}^{m_i-1} \frac{(m_i \rho_i)^{k_i}}{k_i!} + \frac{(m_i \rho_i)^{m_i}}{m_i! (1-\rho_i)}} \cdot \frac{(m_i \rho_i)^{k_i}}{k_i!}, & k_i \leq m_i \\ \frac{1}{\sum_{k_i=0}^{m_i-1} \frac{(m_i \rho_i)^{k_i}}{k_i!} + \frac{(m_i \rho_i)^{m_i}}{m_i! (1-\rho_i)}} \cdot \frac{m_i^{m_i} \rho_i^{k_i}}{m_i!}, & k_i > m_i \end{cases} \quad (2)$$

Średnia liczba zgłoszeń w systemie  $K_i$  oraz średni czas przebywania zgłoszeń w systemie (wyznaczony z reguły Little'a)  $T_i$  dane są zależnościami (3):

$$\bar{K}_i = m_i \rho_i + \frac{\rho_i \cdot (m_i \rho_i)^{m_i}}{m_i! (1 - \rho_i)^2} \cdot \frac{1}{\sum_{k_i=0}^{m_i-1} \frac{(m_i \rho_i)^{k_i}}{k_i!} + \frac{(m_i \rho_i)^{m_i}}{m_i! (1 - \rho_i)}}; \quad \bar{T}_i = \frac{\bar{K}_i}{\lambda_i} \quad (3)$$

## 2.2. Sieci kolejkowe BCMP

W sieci BCMP zgłoszenie może zmienić przynależność do klasy w trakcie przebywania wewnątrz sieci. Rozkład czasów obsługi zgłoszeń jest dowolny. Istnieją 4 typy systemów wchodzących w skład sieci BCMP [2, 4]. Stosowane w pracy otwarte sieci BCMP składają się z systemów FIFO i IS, stąd dalsze rozważania będą ograniczone tylko do tych typów. Typ FIFO reprezentowany jest przez system jedno lub wielokanałowy, w którym zgłoszenia są obsługiwane wg dyscypliny FIFO. Rozkład czasów obsługi wszystkich klas jest identyczny i wykładniczy. W systemach typu IS istnieje nieograniczona liczba kanałów obsługi. Zgłoszenia różnych klas mogą mieć inne wymagania odnośnie obsługi, przy czym rozkład czasów obsługi można przedstawić w postaci rozkładu Coxa.

Średnia liczba zgłoszeń w systemie umieszczonym w sieci otwartej zbudowanej z  $N$  systemów i  $R$  klas zgłoszeń, wyrażona jest za pomocą zależności (4):

$$\bar{K}_{ir} = \begin{cases} m_i \rho_{ir} + \frac{\rho_{ir}}{1 - \rho_i} \cdot \frac{(m_i \rho_i)^{m_i}}{m_i! (1 - \rho_i)} \cdot \frac{1}{\sum_{k_i=0}^{m_i-1} \frac{(m_i \rho_i)^{k_i}}{k_i!} + \frac{(m_i \rho_i)^{m_i}}{m_i! (1 - \rho_i)}} \cdot \frac{1}{1 - \rho_i}, & \text{typ FIFO} \\ \frac{\lambda_{ir}}{\mu_{ir}}, & \text{typ IS} \end{cases} \quad (4)$$

gdzie:

$\mu_{ir}$  – współczynnik obsługi klasy  $r$  w systemie  $i$ ,

$\lambda_{ir}$  – współczynnik strumienia zgłoszeń klasy  $r$  w systemie  $i$ ,

$\rho_{ir}$  – względna intensywność obsługi klasy  $r$  w systemie  $i$ ,  $\rho_{ir} = \lambda_{ir} / (m_i \mu_{ir})$ .

Średni czas przebywania zgłoszeń klasy  $r$  w systemie  $i$  wyznaczyć można z (5):

$$\bar{T}_{ir} = \frac{\bar{K}_{ir}}{\lambda_{ir}} \quad (5)$$

### **3. Przykładowe modele struktur administracyjnych uczelni wyższych**

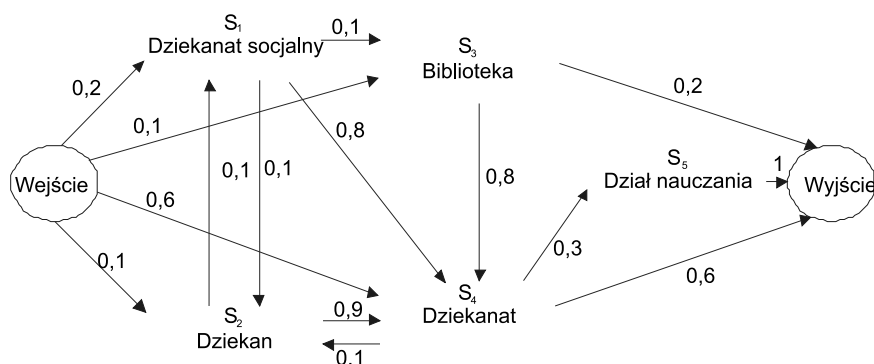
Wśród licznych zastosowań teorii kolejek na szczególną uwagę zasługuje zastosowanie w administracji. W niniejszej pracy otwarte sieci kolejkowe zostaną zastosowane do modelowania struktur administracyjnych uczelni wyższych. Właściwa organizacja pracowników administracyjnych umożliwi bowiem zwiększenie satysfakcji studentów i pracowników uczelni. W pracy [5] przedstawiono przykładową optymalizację strukturalną systemów edukacyjnych. Celem zebrania danych dotyczących strumienia przybywania zgłoszeń oraz czasów obsługi w danej uczelni należałoby przeprowadzić badania chronometryczne, by badana struktura jak najlepiej odwzorowywała rzeczywisty problem. Naszym zadaniem nie jest jednak ocena pracy danej uczelni, lecz próba zamodelowania pewnych standardowych jednostek i sytuacji występujących w uczelniach wyższych.

#### **3.1. Model procesu otrzymywania wpisów na kolejny rok**

Uzyskanie promocji na kolejny rok studiów odnotowywane jest w indeksie studenta oraz odpowiednich komórkach organizacyjnych uczelni. Działania takie mają na celu archiwizację danych o studencie i jego przebiegu studiów, przyznawanie świadczeń otrzymywanych przez studenta oraz wymuszenie rozliczeń z niektórymi jednostkami organizacyjnymi, np. z biblioteką. Studenci chcąc uzyskać promocję na następny rok akademicki, powinni uzyskać pozytywne oceny, złożyć w dziekanacie wypełniony indeks i kartę egzaminacyjną wraz z książeczką zdrowia, rozliczyć się z biblioteką, odebrać indeks i potwierdzenie kontynuacji studiów dla WKU, uzyskać w dziale nauczania pieczętki w legitymacji studenckiej potwierdzającej status studenta. Bardzo ważne są również świadczenia materialne, które towarzyszą zmianie roku akademickiego. W dziekanacie socjalnym studenci składają podania i inne dokumenty w celu otrzymania stypendiów, miejsc w domach studenckich, dopłat do obiadów czy też innych subwencji. Niektórzy również muszą osobiście spotkać się z dziekanem w sprawie uzyskania specjalnych, niekiedy warunkowych, zasad wpisu na następny rok studiów czy uzyskania urlopu dziekańskiego, indywidualnego toku studiów itd. W dziekanacie wykonywane są również inne dodatkowe czynności, takie jak poprawianie błędnych wpisów w indeksie, potwierdzania indywidualnego trybu studiowania, sprawy związane z urlopami dziekańskimi itp.

Proces otrzymywania wpisów na następny rok akademicki można więc zamodelować jako otwartą sieć Jacksona (rys. 1), gdzie studenci bez względu na rodzaj „żądania” reprezentują klientów/zgłoszenia, natomiast systemami kolejkowymi są: dziekanat „dokonujący” wpisów na kolejny rok po sprawdzeniu spełnienia wszystkich wymagań stawianych studentowi, dziekanat socjalny, w którym załatwiane są sprawy socjalne, dziekan, do które-

go studenci udają się w sprawach „nadzwyczajnych”, biblioteka, w której należy otrzymać pieczętkę potwierdzającą zwrot książek, dział nauczania dokonujący m.in. przedłużenia ważności legitymacji studenckiej. Przyjmijmy, że systemy  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_5$  są wykładniczymi systemami jednokanałowymi z dyscypliną FIFO (M/M/1/FIFO/inf), natomiast  $S_4$  jest systemem dwukanałowym (M/M/2/FIFO/inf).



**Rys. 1.** Sieć Jacksona modelująca proces otrzymywania wpisów

Uzyskiwanie wpisów przypada zazwyczaj na okres czerwiec–październik. Do obliczeń założmy, że studenci chcący uzyskać wpis, przybywają według rozkładu Poissona średnio co 1,5 minuty. Średnio czas obsługi studentów w systemie  $S_1$  wynosi 2 minuty, w  $S_2$  – 4 minuty, w  $S_3$  – 3 minuty, w  $S_4$  – 2 minuty, w  $S_5$  – 2 minuty. Przyjmijmy, że wszystkie systemy pracują w tych samych godzinach. W przeciwnym przypadku należy przeskalować czasy pracy poszczególnych systemów. Dla tak dobranych danych i prawdopodobieństw podanych na rysunku 1 strumienie zgłoszeń wynoszą odpowiednio:  $\lambda_1 = 0,1115$ ,  $\lambda_2 = 0,1154$ ,  $\lambda_3 = 0,0612$ ,  $\lambda_4 = 0,542$  i  $\lambda_5 = 0,1626$ . Korzystając z równania (3), można wyznaczyć średnie liczby studentów w poszczególnych stacjach i czasy ich przebywania (tab. 1).

**Tabela 1**  
Podstawowe wielkości charakteryzujące systemy

Systemy	Względna intensywność obsługi $\rho$	Średnia liczba studentów	Średni czas przebywania [min]
Dziekanat socjalny $S_1$	0,2974	0,4233	2,8467
Dziekan $S_2$	0,6152	1,5988	10,395
Biblioteka $S_3$	0,2446	0,3238	3,9715
Dziekanat $S_4$	0,7226	3,0247	4,1857
Dział Nauczania $S_5$	0,4336	0,7655	3,5309

Dla danych prezentowanych w artykule struktura okazała się wystarczająca. Z najwyższą intensywnością pracują systemy  $S_2$  i  $S_4$ .

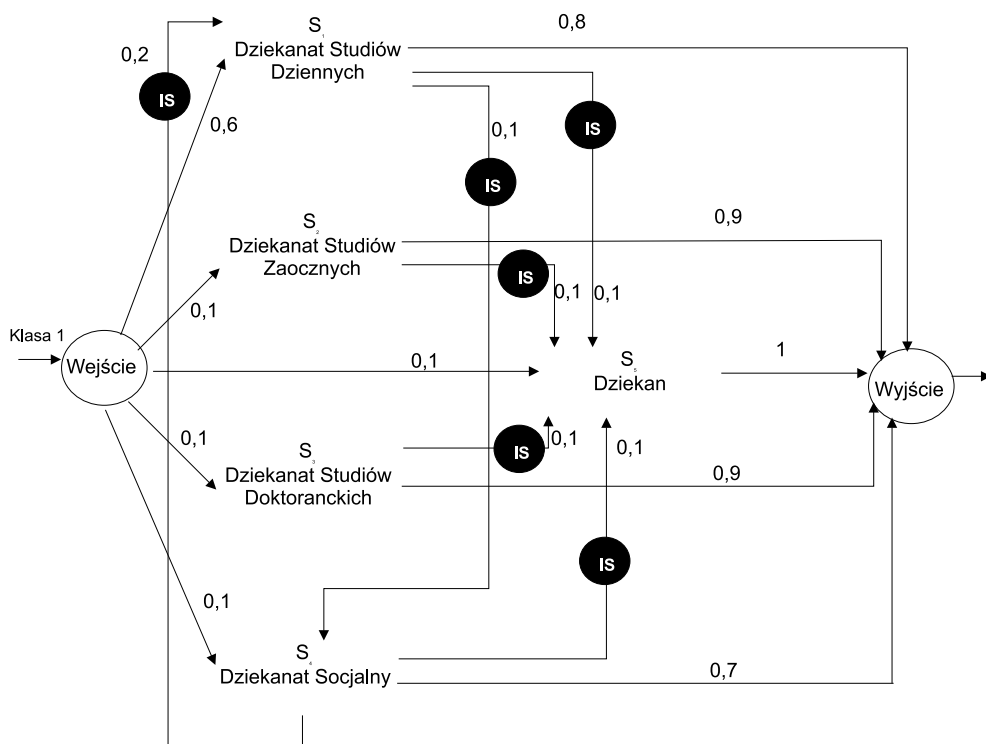
Aby dokładnie odwzorować pracę danej struktury, należy dysponować danymi statystycznymi dotyczącymi liczby studentów przyjmowanych przez odpowiednie systemy oraz prawdopodobieństw przejść. W badaniach dotyczących modelowania procesów obsługi studentów wygodnie jest również rozważać sieć posiadającą wiele klas zgłoszeń. Już na przykładzie bibliotek zauważyć można, że część studentów oczekuje na potwierdzenie rozliczenia z wypożyczonych książek, a inni jeszcze wypożyczają kolejne. W proponowanym modelu student po zakończeniu obsługi w jednym systemie natychmiast przechodzi do kolejnego. Czas przejścia pomiędzy systemami jest więc wliczany w czas oczekiwania w kolejce. Problem ten mógłby być rozwiązany poprzez wprowadzenie fikcyjnych stacji o nieskończonej liczbie kanałów obsługi (brak kolejki) i czasie obsługi równym czasowi przejścia między 2 stacjami.

### 3.2. Dziekanat jako sieć wieloklasowa

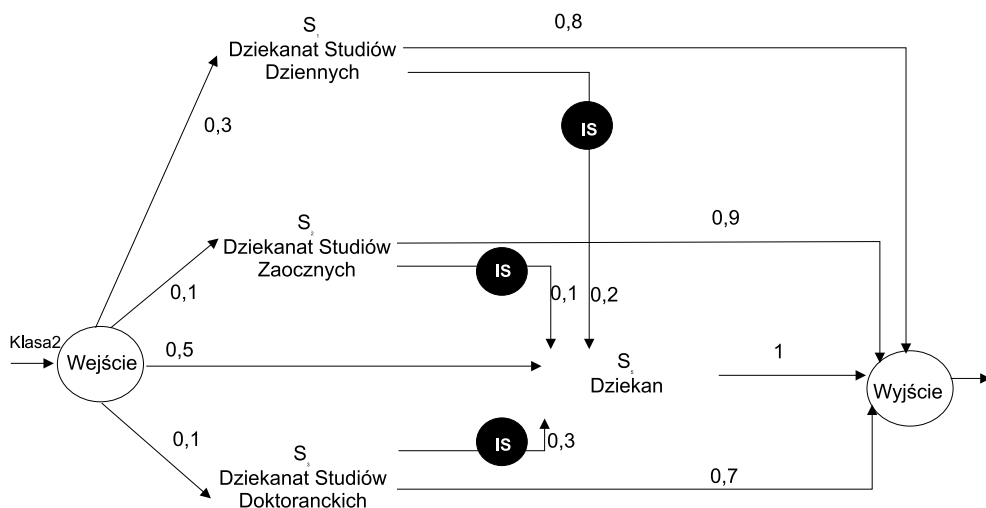
Założmy, że w skład sieci kolejkowej wchodzi 5 systemów: dziekanat studiów dziennych  $S_1$ , dziekanat studiów zaocznych  $S_2$ , dziekanat studiów doktoranckich  $S_3$ , dziekanat socjalny  $S_4$ , dziekanat  $S_5$ . Osoba przybywająca do rozpatrywanego systemu może udać się do każdego z tych systemów w zależności od zaistniałej potrzeby. W zależności od żądania osoba ta może przejść przez wszystkie systemy lub opuścić sieć w dowolnym momencie. Ze względu na zróżnicowane żądania obsługi (potrzeby) wprowadźmy dwie klasy klientów: studenci (klasa 1) oraz pracownicy danej uczelni (klasa 2). Nie ma zmiany przynależności zgłoszeń-osób do klas. Dodatkowo uwzględnimy czas przejścia między tymi systemami w postaci czasu obsługi systemu typu IS (M/M/inf). Niech systemy  $S_1 - S_4$  będą systemami wykładniczymi jednokanałowymi, natomiast  $S_5$  będzie systemem, w którym nie trzeba czekać na obsługę (typ IS według klasyfikacji BCMP). Średni czas obsługi w systemie  $S_1$  wynosi 2 minuty, w  $S_2 - 2$  minuty, w  $S_3 - 4$  minuty, w  $S_4 - 2$  minuty. W systemie  $S_5$  czas obsługi jest zależny od klasy. Dla klasy „studenci” wynosi 2 minuty, dla klasy „pracownicy” – 5 minut. Systemy  $S_1 - S_4$  pracują 4 godziny dziennie, natomiast  $S_5 - 2$  godziny. Dziennie obsługiwanych jest 120 osób (100 studentów, 20 pracowników). Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono model rozważanego dziekanatu dla poszczególnych klas.

Dla tak dobranych danych strumienie zgłoszeń klasy „studenci” wynoszą odpowiednio:  $\lambda_1 = 0,25833$ ,  $\lambda_2 = 0,041667$ ,  $\lambda_3 = 0,041667$ ,  $\lambda_4 = 0,041667$  i  $\lambda_5 = 0,06875$ . Dla klasy „pracownicy” strumienie zgłoszeń wynoszą:  $\lambda_1 = 0,025$ ,  $\lambda_2 = 0,00833$ ,  $\lambda_3 = 0,00833$ ,  $\lambda_4 = 0$  i  $\lambda_5 = 0,04999$ . Niech średni czas przejścia między systemami wynosi 6 sekund. Czas ten można modelować jako czas przebywania w systemie IS.

W tabeli 2 przedstawiono średnie liczby osób poszczególnych klas w systemach oraz średnie czasy ich przebywania.



Rys. 2. Sieć wieloklasowa BCMP modelująca pracę dziekanatu dla klasy „studenci”



Rys. 3. Sieć wieloklasowa BCMP modelująca pracę dziekanatu dla klasy „pracownicy”

**Tabela 2**  
Podstawowe wielkości charakteryzujące systemy

Systemy	Względna intensywność obsługi $\rho$		Średnia liczba		Średni czas przebywania [min]	
	studentów	pracowników	studentów	pracowników	studentów	pracowników
S <sub>1</sub>	0,5167	0,1	1,3478	0,2609	5,2174	5,2174
S <sub>2</sub>	0,0833	0,0333	0,0943	0,0377	2,2642	2,2642
S <sub>3</sub>	0,1667	0,0667	0,2174	0,087	5,2174	5,2174
S <sub>4</sub>	0,0833	–	0,0909	–	2,1818	–
S <sub>5</sub>	0,275	1	0,275	1	2	5

#### 4. Podsumowanie

W artykule zaprezentowano modele sieci kolejkowych, które mogą być zastosowane do modelowania struktur administracyjnych w szkolnictwie wyższym. W omawianych modelach wielkości charakteryzujące sieć są zadowalające. W przypadku mało efektywnych struktur, sieci kolejkowe pozwalają znaleźć wąskie gardło. Kolejnym krokiem może być optymalizacja badanych struktur uwzględniająca koszty funkcjonowania. Dzięki zastosowaniu modeli sieci kolejkowych można porównać różne warianty rozwiązań i wykorzystać najlepsze rozwiązanie w praktyce. Usprawnienie działania struktur administracyjnych można uzyskać, wykorzystując Internet do obsługi petentów, co niektóre z uczelni już zaczęły wdrażać. Istotne byłoby więc również badanie wydajności systemów informatycznych w uczelniach i ocena pracy dziekanatów wykorzystujących te systemy.

#### Literatura

- [1] Albin S.L, Barrett J., Ito D., Mueller J.E., *A queueing network analysis of a health center*. Queueing Systems, 7, 1990.
- [2] Bolch G., Greiner S., Meer H., Trivedi K.S., *Queueing networks and Markov chains. Modeling and performance evaluation with computer science application*. John Wiley&Sons, INC, 1998.
- [3] Czachórski T., *Modele kolejkowe w ocenie efektywności sieci i systemów komputerowych*. Gliwice, Pracownia Komputerowa Jacka Skalmierskiego 1999.
- [4] Filipowicz B., *Modelowanie i analiza sieci kolejkowych*. Kraków, Wydawnictwa AGH 1997.
- [5] Filipowicz B., *Modelowanie i optymalizacja systemów kolejkowych. Część I, Systemy markowskie*. Kraków, FHU Poldex 1999.
- [6] Kwiecień J., *Zastosowanie sieci kolejkowych z wieloma klasami zgłoszeń w zagadnieniach organizacyjnych służby zdrowia*. Praca doktorska (niepublikowana), 2004.
- [7] Zgrzywa A., *Ocena wydajności systemów informacyjnych metodami kolejkowymi*. Wrocław, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej 1998.