Analízis 3. (B és C szakirány)
Kidolgozott elméleti kérdéssor

A kidolgozást Tóta Dávid készítette Dr. Weisz Ferenc kérdéssora alapján, a dokumentum végén feltüntetett források segítségével.

Jelen fájl ekkor lett frissítve: 2019/01/04 14:09
A legfrissebb verzió elérhető itt: http://people.inf.elte.hu/totadavid95/Analizis3/Anal3_def.pdf

Kéretik a félév végéig minden vasárnap este ellenőrizni a fenti linket, a folyamatos frissítés és a hibajavítások végett.

Fontos, hogy ez **nem egy hivatalos, tanárok által lektorált és elfogadott kidolgozás!** A készítők, bár a legjobb tudásuk és szándékuk szerint jártak el, **nem vállalnak felelősséget** az itt leírtak helyességéért, következésképpen azért sem, ha valaki emiatt pontot veszít valamilyen számonkérésen.

---

1. Definiálja a primitív függvényt.
Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum. Az $F : I \to \mathbb{R}$ függvény az $f : I \to \mathbb{R}$ egy primitív függvénye, ha $F \in D(I)$ és $F'(x) = f(x) \quad (x \in I)$.

2. Adjon meg olyan függvényt, amelynek *nincs* primitív függvénye.
$f(x) = \operatorname{sign}(x) \quad (x \in (-1, 1))$

3. Definiálja az egy adott pontban eltűnő primitív függvény fogalmát.
Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum és $x_0 \in I$ egy adott pont. Az $F : I \to \mathbb{R}$ függvény az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény x_0 pontban eltűnő primitív függvénye, ha $F(x_0) = 0$ és $F'(x) = f(x) \quad (x \in I)$.

4. A primitív függvény létezésére vonatkozó szükséges feltétel.
Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és az $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye, akkor f Darboux-tulajdonságú az I intervallumon.

5. Milyen elégséges feltételt ismer primitív függvény létezésére?
Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f-nek létezik primitív függvénye.

6. Mit jelent egy függvény határozatlan integrálja?
Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum és $F : I \to \mathbb{R}$ a $f : I \to \mathbb{R}$ függvény egy primitív függvénye. A *f függvény határozatlan integrálja* a következő függvényhalmaz:

$$\int f := \{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

7. Mit ért a határozatlan integrál linearitásán?
Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum. Ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye és

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

8. Milyen állítást ismer hatványsor összegfüggvényének a primitív függvényéről?
Legyen
$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad (x \in K_R(a), R > 0).$$
Ekkor f-nek van primitív függvénye és
$$F(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n+1}(x-a)^{n+1} \quad (x \in K_R(a))$$
a f függvény egy primitív függvénye.

9. Mit mond ki a primitív függvényekkel kapcsolatos *parciális integrálás tétele*?
Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $f, g \in D(I)$ és $f'g$-nek létezik primitív függvénye. Ekkor fg'-nek is van primitív függvénye és
$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

10. Hogyan szól a primitív függvényekkel kapcsolatos *első helyettesítési szabály*?
Legyen $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $g \in D(I)$, $\mathcal{R}_g \subset J$ és $t_0 \in I$. Ha az $f : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye, akkor $(f \circ g) \cdot g'$-nek is van primitív függvénye és
$$\int_{t_0} (f \circ g) \cdot g' = \left(\int_{g(t_0)} f \right) \circ g.$$

11. Fogalmazza meg a primitív függvényekkel kapcsolatos *második helyettesítési szabályt.*
Legyen $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum; $g : I \to J$ bijekció, $g \in D(I)$, $g'(x) \neq 0 (x \in I)$; $f : J \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in J$. Ha az $(f \circ g) \cdot g' : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye, akkor f-nek is van primitív függvénye és
$$\int_{x_0} f = \left(\int_{g^{-1}(x_0)} (f \circ g) \cdot g' \right) \circ g^{-1}.$$

12. Adjon meg legalább három olyan függvényt, amelyiknek a primitív függvénye nem elemi függvény.
$$\int \frac{\sin(x)}{x} dx$$
$$\int \frac{\cos(x)}{x} dx$$
$$\int e^{-x^2} dx$$

13. Definiálja az intervallum egy felosztását.
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ekkor az $[a, b]$ intervallum felosztásán olyan véges $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ halmazt értünk, amelyre $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

14. Mit jelent egy felosztás finomítása?
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek. Ekkor τ_2 finomítása τ_1-nek, ha $\tau_1 \subset \tau_2$.

15. Mi az alsó közelítő összeg definíciója?
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ egy felosztása $[a, b]$-nek, $m_i := \inf\{f(x) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1} (i = 0, 1, \ldots, n-1)\}$. Ekkor
$$s(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$$
az f függvény τ-hoz tartozó alsó közelítő összege.

16. Mi a felső közelítő összeg definíciója?
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ egy felosztása $[a, b]$-nek, $M_i := \sup\{f(x) \mid x_i \le x \le x_{i+1} (i = 0, 1, \ldots, n-1)\}$. Ekkor

$$S(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

az f függvény τ-hoz tartozó felső közelítő összege.

17. Mi történik egy alsó közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk?
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ha $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek, $s(f, \tau_1), s(f, \tau_2)$ a megfelelő alsó közelítő összegek és τ_2 finomítása τ_1-nek, akkor $s(f, \tau_1) \le s(f, \tau_2)$.

18. Mi történik egy felső közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk?
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ha $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek, $S(f, \tau_1), S(f, \tau_2)$ a megfelelő felső közelítő összegek és τ_2 finomítása τ_1-nek, akkor $S(f, \tau_1) \ge S(f, \tau_2)$.

19. Milyen viszony van az alsó és a felső közelítő összegek között?
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ha $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek, $s(f, \tau_1), S(f, \tau_2)$ a megfelelő alsó, valamint felső közelítő összegek, akkor $s(f, \tau_1) \le S(f, \tau_2)$.

20. Mi a *Darboux-féle alsó integrál* definíciója?
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és valamely $\tau \subset [a, b]$ felosztás esetén $s(f, \tau)$ az f függvény τ-hoz tartozó alsó közelítő összege. Jelölje $\mathcal{F}([a, b])$ az $[a, b]$ felosztásainak a halmazát. Ekkor az $\{s(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}([a, b])\}$ halmaz felülről korlátos, ezért létezik szuprémuma. Az

$$I_*(f) := \sup\{s(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}([a, b])\}$$

számot az f függvény *Darboux-féle alsó integráljának* nevezzük.

21. Mi a *Darboux-féle felső integrál* definíciója?
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és valamely $\tau \subset [a, b]$ felosztás esetén $S(f, \tau)$ az f függvény τ-hoz tartozó felső közelítő összege. Jelölje $\mathcal{F}([a, b])$ az $[a, b]$ felosztásainak a halmazát. Ekkor az $\{S(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}([a, b))]\}$ halmaz alulról korlátos, ezért létezik infimuma. Az

$$I^*(f) := \inf\{S(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}([a, b])\}$$

számot az f függvény *Darboux-féle felső integráljának* nevezzük.

22. Mikor nevezünk egy függvényt (Riemann)-integrálhatónak?
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $I_*(f)$, ill. $I^*(f)$ az f függvény Darboux-féle alsó, ill. felső integrálja. Ekkor f *Riemann-integrálható* az $[a, b]$ intervallumon (jelekkel: $f \in R[a, b]$), ha $I_*(f) = I^*(f)$.

23. Hogyan értelmezi egy függvény határozott (vagy Riemann-) integrálját?
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, $I_*(f)$, ill. $I^*(f)$ az f függvény Darboux-féle alsó, ill. felső integrálja. Ha $I_*(f) = I^*(f)$, akkor az f függvény határozott (vagy Riemann-) integrálja az $I_* = I^*(f)$ valós szám.

24. Adjon meg egy példát *nem integrálható* függvényre.
Legyen

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ekkor $f \notin R[0, 1]$.

25. Mi az *oszcillációs összeg* definíciója?
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $\tau \subset [a, b]$ egy felosztása $[a, b]$-nek, $s(f, \tau)$, $S(f, \tau)$ az f függvény τ-hoz tartozó alsó, ill. felső közelítő összege. Ekkor $\Omega(f, \tau) := S(f, \tau) - s(f, \tau)$ az f függvény τ felosztásához tartozó oszcillációs összege.

26. Hogyan szól a Riemann-integrálhatósággal kapcsolatban tanult kritérium az oszcillációs összegekkel megfogalmazva?
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és valamely $\tau \subset [a, b]$ felosztás esetén $\Omega(f, \tau)$ az f függvény τ-hoz tartozó oszcillációs összege. Ekkor

$$f \in R[a, b] \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau \in F[a, b] : \quad \Omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

27. Felosztássorozatok segítségével adja meg a Riemann-integrálhatóság egy ekvivalens átfogalmazását.
Egy korlátos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor integrálható $[a, b]$-n és integrálja I, ha az $[a, b]$ intervallumnak van olyan (τ_n) felosztássorozata, amelyre

$$\lim_{n \to + \inf} s(f, \tau_n) = \lim_{n \to + \inf} S(f, \tau_n) = I$$

teljesül.

28. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények összegével kapcsolatban tanult tétel?
Ha $f, g \in R[a, b]$, akkor $f + g \in R[a, b]$.

29. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények szorzatával kapcsolatban tanult tétel?
Ha $f, g \in R[a, b]$, akkor $fg \in R[a, b]$.

30. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények hányadosával kapcsolatban tanult tétel?
Legyen $f, g \in R[a, b]$ tetszőleges és tegyük fel, hogy valamilyen $m > 0$ számmal $|g(x)| \geq m \quad (x \in [a, b])$. Ekkor $\frac{f}{g} \in R[a, b]$.

31. Mit ért a Riemann-integrál intervallum szerinti additivitásán?
Tegyük fel, hogy $f \in R[a, b]$ és $c \in (a, b)$ egy tetszőleges pont. Ekkor

$$f \in R[a, c], f \in R[c, b], \quad \text{és} \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

32. Mi a kapcsolat a folytonosság és a Riemann-integrálhatóság között?
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ekkor $C[a, b] \subset R[a, b]$, de $C[a, b] \neq R[a, b]$.

33. Mi a kapcsolat a monotonitás és a Riemann-integrálhatóság között?
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ha f monoton az $[a, b]$ intervallumon, akkor $f \in R[a, b]$.

34. Milyen tételt tanult Riemann-integrálható függvény megváltoztatását illetően?
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ha az $f \in R[a, b]$ függvény értékét *véges sok* pontban tetszőlegesen megváltoztatjuk, akkor az így kapott $\widetilde{f}$ függvény is Riemann-integrálható és

$$\int_a^b f = \int_a^b \widetilde{f}.$$

35. Mit ért azon, hogy a Riemann-integrál az integrandusban monoton?
Ha $f, g \in R[a, b]$ és $f \leq g$, akkor $\int_a^b f \leq \int_a^b$ g.

36. Mit lehet mondani Riemann-integrálható függvény abszolút értékéről integrálhatóság szempontjából?
Ha $f \in R[a, b]$, akkor $|f| \in R[a, b]$ és $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

37. Mi az integrálszámítás első középértéktétele?
Legyen $f, g \in R[a, b]$, $g \geq 0$, $M = \sup R_f$ és $m = \inf R_f$. Ekkor

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g.$$

38. Mi az integrálszámítás második középértéktétele?
Legyen $f \in C[a,b]$, $g \in R[a,b]$ és $g \geq 0$. Ekkor $\exists \xi \in [a,b]$, hogy

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

39. Hogyan szól a Newton-Leibniz-tétel?
Ha $f \in R[a,b]$ és f-nek létezik primitív függvénye $[a,b]$-n, akkor $\int_a^b f = F(b) - F(a)$, ahol F a f függvény egy primitív függvénye.

40. Definiálja az integrálfüggvényt.
Legyen $f \in R[a,b]$ és $x_0 \in [a,b]$. Ekkor a $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt \quad (x \in [a,b])$ függvényt a f függvény x_0-ban eltűnő integrálfüggvényének nevezzük.

41. Fogalmazza meg a differenciál- és integrálszámítás alaptételét.
Legyen $f \in R[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$, $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt \quad (x \in [a,b])$. Ekkor

1. F folytonos $[a,b]$-n;
2. ha $d \in (a,b)$ és f folytonos d-ben, akkor F differenciálható d-ben és $F'(d) = f(d)$.

42. Mit ért parciális integráláson a Riemann-integrálokkal kapcsolatban?
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ és $f, g \in D$. Ha $f', g' \in R[a,b]$, akkor

$$\int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g'f.$$

43. Mit mond ki a helyettesítéses integrálás tétele Riemann-integrálokra vonatkozóan?
Legyen $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $\alpha < \beta$. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ és f folytonos, g pedig folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \int_\alpha^\beta (f \circ g)g'.$$

44. Definiálja a metrikus teret.
Az (M, ϱ) rendezett párt metrikus térnek nevezzük, ha M tetszőleges nemüres halmaz, $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$ pedig olyan függvény, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- $\forall x, y \in M$ esetén $\varrho(x,y) \geq 0$;
- $\varrho(x,y) = 0 \iff x = y \quad (x, y \in M)$;
- bármely $x, y \in M$ esetén $\varrho(x,y) = \varrho(y,x)$ *(szimmetriatulajdonság)*;
- tetszőleges $x, y, z \in M$ elemekkel fennáll a

$$\varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y)$$

háromszög egyenlőtlenség. A ϱ leképezést *távolságfüggvénynek* (vagy metrikának) mondjuk, a $\varrho(x,y)$ számot az x és az y pontok *távolságának* nevezzük.

45. Mit jelent az, hogy egy normált térbeli halmaz korlátos?
Az $(X, ||.||)$ normált tér $A \subset X$ részhalmazát korlátosnak nevezzük, ha

$$\exists r > 0 \text{ valós szám, hogy } A \subset k_r(\mathbf{0}).$$

46. Definiálja az $(X, ||.||)$ normált térben a konvergens sorozat fogalmát.
Az $(X, ||.||)$ normált tér egy (a_n) sorozata konvergens, ha

$$\exists \alpha \in X, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0 : \quad ||a_n - \alpha|| < \varepsilon.$$

Ha létezik ilyen α, akkor az egyértelmű, és azt az (a_n) sorozat határértékének nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \overset{||.||}{=} \alpha, \qquad \lim(a_n) \overset{||.||}{=} \alpha, \qquad a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||.||} \alpha.$$

(Ha nem okoz félreértést, a norma jelét el lehet hagyni.)

47. Fogalmazza meg a normált térbeli konvergens sorozatok alaptulajdonságait.
Legyen (a_n) az $(X, ||.||)$ normált tér egy tetszőleges konvergens sorozata. Ekkor a következő állítások teljesülnek:

- Az (a_n) sorozat korlátos, azaz az értékkészlete korlátos X-beli halmaz.
- (a_n) minden részsorozata is konvergens, és a határértéke megegyezik (a_n) határértékével.
- Ha az (a_n) sorozatnak van két különböző X-beli elemhez tartozó részsorozata, akkor (a_n) divergens.

48. Mit jelent az, hogy két norma ekvivalens?
Azt mondjuk, hogy az X lineáris téren adott $||.||_1$ és $||.||_2$ norma ekvivalens (jelben $||.|| \sim ||.||_2$), ha léteznek olyan m, M pozitív valós számok, hogy

$$m||x||_1 \leq ||x||_2 \leq M||x||_1$$

minden $x \in X$-re.

49. Milyen állítást ismer $\mathbb{R}^n$-beli normák ekvivalenciájáról?
Ha két norma ekvivalens, akkor konvergencia szempontjából a két norma között nincs különbség: mind a két normában ugyanazok lesznek a konvergens (divergens) sorozatok.

50. Hogyan jellemezhető $\mathbb{R}^n$-beli sorozat konvergenciája a koordinátasorozatokkal?
Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $||.||$ egy tetszőleges norma az $\mathbb{R}^n$ lineáris téren. Ekkor az

$$(a_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n, \qquad a_k := (a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \dots, a_k^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$$

sorozat akkor és csak akkor konvergens az $(\mathbb{R}^n, ||.||)$ normált térben, és

$$\lim_{k\to+\infty} a_k \overset{||.||}{=} \alpha = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}),$$

ha minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén az $(a_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}$ valós sorozat (az i-edik koordinátasorozat) konvergens, és

$$\lim_{k\to+\infty} a_k^{(i)} = \alpha^{(i)}.$$

51. Mit jelent az, hogy egy normált térbeli sorozat Cauchy-sorozat?
Az $(X, ||.||)$ normált térbeli (a_n) sorozat Cauchy-sorozat, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \geq n_0 : \quad ||a_n - a_m|| < \varepsilon. \qquad (\forall n, m \in \mathbb{N})$$

52. Milyen kapcsolat van normált térben a Cauchy-sorozatok és a konvergens sorozatok között?

- Tetszőleges $(X, ||.||)$ normált térben minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat is.
- Az állítás megfordítása általában nem igaz: Van olyan $(X, ||.||)$ normált tér, hogy abban van divergens Cauchy-sorozat.

53. Írja le a Banach-tér definícióját.
Az $(X, ||.||)$ normált teret teljes normált térnek vagy Banach-térnek nevezzük, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens, vagyis a tér teljes, ha igaz benne a Cauchy-féle konvergenciakritérium, azaz

$$(a_n) \subset (X, ||.||) \text{ konvergens} \quad \Longleftrightarrow \quad (a_n) \subset (X, ||.||) \text{ Cauchy-sorozat}.$$

54. Fogalmazza meg $\mathbb{R}^n$-ben a Cauchy-féle konvergenciakritériumot.
Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és minden $\mathbb{R}^n$-en értelmezett $||.||$ norma esetén az $(\mathbb{R}^n, ||.||)$ normált térben igaz a Cauchy-féle konvergenciakritérium tétele, azaz az (a_n) valós sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha (a_n) Cauchy-sorozat.

55. Mit állít $\mathbb{R}^n$-ben a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel?
Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és minden $\mathbb{R}^n$-en értelmezett $||.||$ norma esetén az $(\mathbb{R}^n, ||.||)$ normált térben igaz a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel, azaz minden korlátos valós sorozatnak van konvergens részsorozata.

56. Definiálja a normált terek közötti leképezések pontbeli folytonosságát.
Legyen $(X, ||.||_X)$ és $(Y, ||.||_Y)$ normált tér. Azt mondjuk, hogy az $f \in X \to Y$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban (jelben $f \in C\{a\}$), ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in k_\delta^{||\cdot||_X}(a) \cap \mathcal{D}_f : \quad f(x) \in k_\delta^{||\cdot||_Y} f(a),$$

azaz, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad ||x - a||_X < \delta : \quad ||f(x) - f(a)||_Y < \varepsilon.$$

57. Hogyan szól a folytonosságra vonatkozó átviteli elv?
Legyen $(X, ||.||_X)$ és $(Y, ||.||_Y)$ normált tér, $f \in X \to Y$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor

- $f \in C\{a\} \iff \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f$, $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{||\cdot||_X} a$ esetén $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{||\cdot||_Y} f(a)$.
- Tegyük fel, hogy a $\mathcal{D}_f$-beli (x_n) sorozat az $a \in \mathcal{D}_f$ ponthoz konvergál és

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) \neq f(a).$$

Ekkor az f függvény nem folytonos a-ban: $f \notin C\{a\}$.

58. Milyen tételt ismer $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$-típusú függvények folytonosságáról?
Legyen $n, m \in \mathbb{N}$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \in C\{a\} \iff f_i \in C\{a\} \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$.

59. Fogalmazza meg a Weierstrass abszolút szélsőértékekre vonatkozó tételét.
Legyen $n \in \mathbb{N}$ és tegyük fel, hogy

- $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$,
- $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és zárt halmaz,
- f folytonos $\mathcal{D}_f$-en.

Ekkor f-nek vannak abszolút szélsőértékei, azaz

$$\exists x_1 \in \mathcal{D}_f : f(x) \leq f(x_1) \quad (\forall x \in \mathcal{D}_f) \quad (x_1 \text{ abszolút maximumhely});$$

$$\exists x_2 \in \mathcal{D}_f : f(x) \geq f(x_2) \quad (\forall x \in \mathcal{D}_f) \quad (x_2 \text{ abszolút minimumhely}).$$

60. Definiálja a normált térben a torlódási pont fogalmát.
Legyen $(X, ||.||)$ normált tér. Az $a \in X$ pont az $A \subset X$ halmaz torlódási pontja (jelben $a \in A'$), ha

$$\forall k(a) \text{ esetén } (A \cap (k(a) \setminus a)) \neq \emptyset,$$

azaz a minden környezete tartalmaz a-tól különböző A-beli pontot.

61. Írja le normált terek közötti leképezésekre a határérték definícióját.
Legyen $(X, ||.||_X)$ és $(Y, ||.||_Y)$ normált tér. Azt mondjuk, hogy az $f \in X \to Y$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}'_f$ pontban *van határértéke*, ha létezik olyan $A \in Y$, hogy az

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\} \\ A, & \text{ha } x = a \end{cases}$$

függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_{\widetilde{f}}$ pontban. Ha létezik ilyen A, akkor az egyértelmű, és azt az f függvény a-beli határértékének nevezzük (jelölése: $\lim_a f = A$).

62. Fogalmazza meg a határértékekre vonatkozó átviteli elvet.
Legyen $(X, ||.||_X)$ és $(Y, ||.||_Y)$ normált tér, $f \in X \to Y$ és $a \in \mathcal{D}'_f$. Ekkor

- $\lim_a f = A \iff \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}, x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||.||_X} a$ esetén $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{||.||_Y} A$.
- Tegyük fel, hogy a $\mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ halmazbeli (x_n) és (u_n) sorozatok mindegyike az $a \in \mathcal{D}'_f$ ponthoz konvergál és
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(u_n).$$
Ekkor az f függvénynek *nincs határértéke* a-ban: $\nexists \lim_a f$.

63. Definiálja $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény parciális deriváltját.
Legyen $n \in \mathbb{N}, e_1, \ldots, e_n$ a kanonikus bázis $\mathbb{R}^n$-ben, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ és $a \in int\mathcal{D}_f$. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban létezik az i-edik változó szerinti parciális deriváltja, ha az

$$F : k(0) \ni t \mapsto f(a + te_i) \quad (\in \mathbb{R} \to \mathbb{R})$$

függvény deriválható a 0 pontban. Az $F'(0)$ valós szám az f függvény i-edik változó szerinti parciális deriváltja az a pontban.

64. Mi az iránymenti derivált fogalma?
Legyen $n \in \mathbb{N}$, $e \in \mathbb{R}^n$ egy adott vektor, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in int\mathcal{D}_f$. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban létezik az e irányban vett iránymenti deriváltja, ha az

$$F : k(0) \ni t \mapsto f(a + te)$$

valós-valós függvény deriválható a 0 pontban. Az $F'(0)$ valós számot az f függvény e iránymenti deriváltjának nevezzük az a pontban, és a $\partial_e f(a)$ szimbólummal jelöljük.

65. Milyen tételt ismer az iránymenti derivált kiszámítására?
Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény mindegyik változója szerinti parciális deriváltak léteznek és azok folytonosak az $a \in int\mathcal{D}_f$ pont egy környezetében. Ekkor f-nek minden a-ból induló $e \in \mathbb{R}^n$ irányban létezik az iránymenti deriváltja és

$$\partial_e f(a) = \langle f'(a), e\rangle = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(a) \cdot e^k,$$

ahol $e = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ egy egységvektor a $||.||_2$ normában, azaz

$$||e||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |e^{(k)}|^2} = 1.$$

66. Írja le az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény totális deriválhatóságának definícióját.
Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad (n, m \in \mathbb{N})$ vektor-függvény totálisan deriválható az $a \in int\mathcal{D}_f$ pontban, ha

$$\exists A \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ mátrix és } \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \lim_{h\to 0} \varepsilon(a + h) = 0 \text{ függvény, hogy}$$

$$f(a + h) - f(a) = A \cdot h + \varepsilon(a + h) \cdot ||h||$$

teljesül minden olyan $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektorra, amelyre $a + h \in \mathcal{D}_f$, ahol $||.||$ tetszőleges norma az $\mathbb{R}^n$ lineáris téren. Ha létezik ilyen A mátrix, akkor az egyértelmű. A-t az f függvény a-beli deriváltmátrixának nevezzük, és az $f'(a)$ szimbólummal jelöljük.

67. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra?
Legyen $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad (n, m \in \mathbb{N})$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in D\{a\} \Longleftrightarrow \forall i = 1, 2, \dots, m : f_i \in D\{a\}.$$

68. Milyen tételt ismer a deriváltmátrix előállítására?
Tegyük fel, hogy az $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény totálisan deriválható az $a \in int\mathcal{D}_f$ pontban. Ekkor f mindegyik koordinátafüggvényének mindegyik változó szerinti parciális deriváltja létezk és véges az a pontban. Az $f'(a)$ deriváltmátrix a parciális deriváltakkal így fejezhető ki:

$$A = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \dots & \partial_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \partial_2 f_m(a) & \dots & \partial_n f_m(a) \end{bmatrix}$$

Az $f'(a)$ deriváltmátrixot az f függvény $a \in int\mathcal{D}_f$ pontbeli Jacobi-mátrixának nevezzük.

69. Milyen kapcsolat van a pontbeli deriválhatóság és a folytonosság között?
Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad (n, m \in \mathbb{N})$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor

- $f \in D\{a\} \Rightarrow f \in C\{a\}$
- $f \in C\{a\} \not\Rightarrow f \in D\{a\}$.

70. Fogalmazza meg a láncszabályt.
Legyen $n, m, s \in \mathbb{N}$. Ha $g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és $g \in D\{a\}$, továbbá $f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ és $f \in D\{g(a)\}$, akkor $f \circ g \in D\{a\}$ és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a),$$

ahol $\cdot$ a mátrixok közötti szorzás műveletét jelöli.

71. A deriválhatóság és a koordinátafüggvények deriválhatósága közötti kapcsolat.
Legyen $n, m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in int\mathcal{D}_f$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ koordinátafüggvény. Ekkor

$$f \in D\{a\} \Longleftrightarrow f_i \in D\{a\} \quad (i = 1, \dots, m) \text{ és } f'(a) = (f_1'(a), \dots, f_m'(a)).$$

72. A totális- és a parciális derivált közötti kapcsolat.
Legyen $n, m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in int\mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in D\{a\} \begin{smallmatrix} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{smallmatrix} \forall i = 1, 2, \dots, n : \quad \exists \partial_i f(a) : \quad f'(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)).$$

73. Milyen elégséges feltételt ismer a totális deriválhatóságra a parciális deriváltakkal?
Legyen $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in int\mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy $\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f : \exists \partial_i f(x), \forall x \in K(a) \quad (\forall i = 1, \dots, n)$ és $\partial_i f \in C\{a\} \quad (\forall i = 1, \dots, n)$. Ekkor

$$f \in D\{a\} \quad \text{és} \quad f'(a) = (\partial_1 f(a), \partial_2 f(a), \dots, \partial_n f(a)), \quad \partial_i f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

74. A totális- és az iránymenti derivált közötti kapcsolat.
Legyen $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in int\mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in D\{a\} \begin{smallmatrix} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{smallmatrix} \forall e \in \mathbb{R}^n \quad \exists \partial_e f(a).$$

75. Fogalmazza meg a Lagrange-féle középértéktételt.
Legyen $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in int\mathcal{D}_f$, $f \in D\{K(a)\}$. Ekkor

$$\forall h \in \mathbb{R}^n : \quad a + h \in K(a), \quad \exists \nu \in (0, 1) : \quad f(a+h) - f(a) = f'(a + \nu h) - h.$$

76. Mit jelent az, hogy egy függvény kétszer deriválható egy pontban?
Legyen $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in int\mathcal{D}_f$. Ekkor f kétszer deriválható (jelölés: $f \in D^2\{a\}$), ha

- $\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f : f \in D\{K(a)\}$,
- $\partial_i f \in D\{a\} \quad (\forall i = 1, \ldots, n)$.

77. Definiálja a Hesse-féle mátrixot.
Ha az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható az $a \in int\mathcal{D}_f$ pontban (röviden $f \in D^2\{a\}$), akkor az

$$f''(a) = \begin{bmatrix} \partial_{11}f(a) & \partial_{21}f(a) & \ldots & \partial_{n1}f(a) \\ \partial_{12}f(a) & \partial_{22}f(a) & \ldots & \partial_{n2}f(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{1n}f(a) & \partial_{2n}f(a) & \ldots & \partial_{nn}f(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

szimmetrikus mátrixot (lásd Young tételét) az f függvény $a \in int\mathcal{D}_f$ pontbeli *Hesse-féle mátrixának* nevezzük.

78. Mit jelent az, hogy egy függvény $(s + 1)$-szer deriválható egy pontban?
Legyen $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in int\mathcal{D}_f$. Ekkor az f függvény $(s + 1)$-szer deriválható a-ban, ha

- $\exists K(a)$, hogy $f \in D^{(s)}\{K(a)\}$,
- Minden s-edrendű parciális derivált $\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \ldots, \partial_{i_s} f \in D\{a\}$.

79. Fogalmazza meg a Young-tételt.
Legyen $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in int\mathcal{D}_f$, $f \in D^2\{a\}$. Ekkor

$$\partial_i\partial_j f(a) = \partial_j\partial_i f(a) \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

80. Adja meg a Taylor-polinom definícióját.
Legyen $n, m \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in int\mathcal{D}_f$ és $f \in D^m\{a\}$. Ekkor az f a ponthoz tartozó m-edfokú, n-változós Taylor polinomján a következőt értjük:

$$T_{m,a}f(x) \overset{x=a+h\in\mathbb{R}^n}{=} T_{m,a}f(a + h) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{|i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} \cdot h^i \right).$$

81. Milyen képletet ismer az elsőfokú, n-változós Taylor-polinomra?
Legyen $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in int\mathcal{D}_f$, $f \in D\{a\}$, $h \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

$$T_1 f(a + h) = f(a) + \langle f'(a), h\rangle.$$

82. Milyen képletet ismer a másodfokú, n-változós Taylor-polinomra?
Legyen $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in int\mathcal{D}_f$, $f \in D^2\{a\}$, $h \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

$$T_2 f(a + h) = f(a) + \langle f'(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f''(a) \cdot h, h\rangle.$$

83. Fogalmazza meg a Taylor-formulát a Lagrange-féle maradéktaggal.
Legyen $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in int\mathcal{D}_f$, $f \in D^{m+1}(K(a))$. Ekkor $\forall h \in \mathbb{R}^n, a + h \in K(a), \exists \nu \in (0, 1) :$

$$f(a + h) = \underbrace{f(a) + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{|i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} \cdot h^i \right)}_{(T_{m,a}f)(a+h)} + \sum_{|i|=m+1} \frac{\partial^i f(a + \nu h)}{i!} \cdot h^i.$$

84. Fogalmazza meg a Taylor-formulát a Peano-féle maradéktaggal.
Legyen $n, m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in int\mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy $f \in D^m\{a\}$. Ekkor:

$$\exists \varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \lim_{h \to 0} \varepsilon(a+h) = 0 : f(a+h) = \underbrace{f(a) + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{|i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} \cdot h^i \right)}_{T_{m,a}f(a+h)} + \varepsilon(h) \cdot ||h||^m \quad (\forall h \in K(a)).$$

85. Fogalmazza meg a Taylor-formulát a Peano-féle maradéktaggal másodfokú Taylor-polinomokra.
Legyen $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in int\mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy $f \in D^2\{a\}$. Ekkor:

$$\exists \varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \lim_{h \to 0} \varepsilon(a+h) = 0 : f(a+h) = f(a) + \partial f(a) \cdot h + \frac{\partial^2 f(a)}{2} \cdot h^2 + \varepsilon(h) \cdot ||h||^2 \quad (\forall h \in K(a)).$$

86. Adja meg a kvadratikus alak definícióját.
Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix. Ekkor a kvadratikus alak alatt az alábbi függvényt értjük:

$$Q(h) = \langle A \cdot h, h \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} h_j \right) h_i.$$

87. Milyen szükséges és elégséges feltételt ismer arra vonatkozóan, hogy egy kvadratikus alak pozitív definit legyen? (Sylvester-kritérium)
Legyen

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1}f(a) & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}f(a) & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ szimmetrikus mátrix és } \Delta_i = det \begin{bmatrix} a_{1,1}f(a) & \dots & a_{1,i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}f(a) & \dots & a_{i,i} \end{bmatrix}.$$

Ekkor A kvadratikus alakja ($Q(h) = \langle A \cdot h, h \rangle$) pozitív definit $\iff \Delta_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n)$.

88. Milyen szükséges és elégséges feltételt ismer arra vonatkozóan, hogy egy kvadratikus alak nagatív definit legyen? (Sylvester-kritérium)
Legyen

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1}f(a) & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}f(a) & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ szimmetrikus mátrix és } \Delta_i = det \begin{bmatrix} a_{1,1}f(a) & \dots & a_{1,i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}f(a) & \dots & a_{i,i} \end{bmatrix}.$$

Ekkor A kvadratikus alakja ($Q(h) = \langle A \cdot h, h \rangle$) negatív definit $\iff \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$

89. Fogalmazza meg az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény lokális szélsőértékeire vonatkozó elsőrendű szükséges feltételt.
Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in int\mathcal{D}_f$, $f \in D\{a\}$. Ha f-nek lokális szélsőértéke van a-ban, akkor $f'(a) = 0$.

90. Fogalmazza meg az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény lokális szélsőértékeire vonatkozó másodrendű elégséges feltételt.
Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in int\mathcal{D}_f$, $f \in D^2\{a\}$. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a)$ pozitív (negatív) definit, akkor f-nek létezik lokális minimuma (maximuma) a-ban.

91. Fogalmazza meg az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény lokális szélsőértékeire vonatkozó másodrendű szükséges feltételt.
Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in int\mathcal{D}_f$, $f \in D^2\{a\}$. Ha f-nek lokális minimuma (maximuma) van a-ban, akkor $f'(a) = 0$ és $f''(a)$ pozitív (negatív) szemidefinit.

Felhasznált források

A kidolgozáshoz az alábbi anyagok lettek felhasználva a mellettük hivatkozott forrásból:

- Dr. Weisz Ferenc kérdéssora Link
- Dr. Weisz Ferenc keddi előadásai
- Umann Kristóf LaTeX dokumentumai kiindulási alapnak Link
- Dr. Szili László oktatási anyagai (a kidolgozás jelentős része ezekből az anyagokból származik) Link
- Dr. Szili László - Többváltozós analízis Link
- Szánthó József kidolgozása Link
- Lanka Máté kidolgozása Link
- Kuti Bence, Magyarkúti Barna kidolgozásai Link
- Balogh Tamás kidolgozása Link
- Borbély Bálint jegyzetei

Köszönetnyilvánítás

A fenti források készítőin túl köszönet illeti a következő személyeket is az általuk nyújtott segítségért, közreműködésért, tanácsadásért, elírások, hibák jelentéséért:

- Zatureczki Marcell
- Tűri Erik
- Mosi Zoltán
- Tóth Bálint
- Hegedüs Norbert
- Kuti Bence
- Ménes Márk
- Emese András
- Kovács Kristóf

Közreműködés, forráskód

A LaTeX forráskód elérhető a következő linken:
`https://github.com/totadavid95/Analizis3/blob/master/Anal3_def.tex`

Szívesen várom, várjuk a közreműködéseket! :)