Analízis 3. (B és C szakirány)
Szükséges ismeretek a 4. gyakorlathoz

Jelen dokumentum ekkor lett frissítve: 2019/03/07 13:53
További kidolgozások elérhetőek ide kattintva. A gyakorlatok anyaga ide kattintva érhető el.
Forrás(ok): Dr. Szili László - Analízis 3. gyakorlatok, 2018 őszi kidolgozás

1. Adjon meg olyan függvényt, amelynek *nincs* primitív függvénye.
$f(x) = \text{sign}(x) \quad (x \in (-1, 1))$

2. Adjon meg egy példát *nem integrálható* függvényre.
Legyen

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ekkor $f \notin R[0, 1]$.

3. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények hányadosával kapcsolatban tanult tétel?
Legyen $f, g \in R[a, b]$ tetszőleges és tegyük fel, hogy valamilyen $m > 0$ számmal $|g(x)| \geq m \quad (x \in [a, b])$. Ekkor $\frac{f}{g} \in R[a, b]$.

4. Értelmezze síkidom területét.
Ha a korlátos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon és $f(x) \geq 0 \quad (x \in [a, b])$, akkor az f grafikonja alatti

$$A := \{(x.y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

síkidom területét így *értelmezzük*:

$$t(A) := \int_a^b f(x)dx.$$

5. Hogyan számítja ki forgástest térfogatát?
Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és tegyük fel, hogy $f \geq 0$ az $[a, b]$ intervallumon. Az f grafikonjának az x-tengely körüli forgatásával adódó

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$$

forgástest térfogata:

$$V(H) := \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

6. Mit tud mondani függvénygrafikon hosszának a kiszámításáról?
Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan deriválható az $[a, b]$ intervallumon, akkor f grafikonjának van ívhossza és az egyenlő az

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

határozott integrállal.