Analízis 3. (B és C szakirány)

Szükséges ismeretek a 6. gyakorlathoz

Jelen dokumentum ekkor lett frissítve: 2019/03/05 13:23
További kidolgozások elérhetőek ide kattintva. A gyakorlatok anyaga ide kattintva érhető el.
Forrás(ok): Dr. Szili László - Definíciók és tételek az előadásokon

1. Definiálja a normált terek közötti leképezések pontbeli folytonosságát.
Legyen $(X, ||.||_X)$ és $(Y, ||.||_Y)$ normált tér. Az $f \in X \to Y$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban (jelölés: $f \in C\{a\}$), ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists \delta > 0, \quad \forall x \in K_\delta^{||\cdot||_X}(a) \cap \mathcal{D}_f \text{ esetén } f(x) \in K_\varepsilon^{||\cdot||_Y}(f(a)),$$

azaz, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad ||x-a||_X < \delta \text{ esetén } ||f(x) - f(a)||_Y < \varepsilon.$$

2. Mit jelent egy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ függvény pontbeli folytonossága?
Az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad ||x-a|| < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

ahol $||.||$ tetszőleges norma az $\mathbb{R}^2$ lineáris téren.

3. Hogyan szól a folytonosságra vonatkozó átviteli elv?
Legyen $(X, ||.||_X)$ és $(Y, ||.||_Y)$ normált tér, $f \in X \to Y$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor:

1. $f \in C\{a\} \iff \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{||.||_X}{=} a$ sorozatra $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \overset{||.||_Y}{=} f(a)$.
2. Tegyük fel, hogy $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f, \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{||.||_X}{=} a$ és $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \overset{||.||_Y}{\neq} f(a)$. Ekkor az f függvény nem folytonos a-ban.

4. Írja le a torlódási pont definícióját.
Legyen $(X, ||.||)$ normált tér és $\emptyset \neq A \subset X$. Ekkor $a \in X$ torlódási pontja az A halmaznak (jelölés: $a \in A'$), ha

$$\forall K(a) \subset X \text{ környezetre } K(a) \cap A \text{ végtelen halmaz.}$$

5. Írja le normált terek közötti leképezésekre a határérték definícióját.
Legyen $(X, ||.||_X)$ és $(Y, ||.||_Y)$ normált tér. Az $f \in X \to Y$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f'$ pontban van határértéke, ha létezik olyan $A \in Y$, hogy az

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\} \\ A, & \text{ha } x = a \end{cases}$$

függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_{\widetilde{f}}$ pontban. Ha létezik ilyen A, akkor az egyértelmű, és azt az f függvény a-beli határértékének nevezzük. (Jelölés: $\lim\limits_a f = A$).

6. Fogalmazza meg a függvények határértékére vonatkozó átviteli elvet.
Legyen $(X, ||.||_X)$ és $(Y, ||.||_Y)$ normált tér, $f \in X \to Y$ és $a \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor:

1. $\lim\limits_a f = A \iff \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}, x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||.||_X} a$ esetén $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{||.||_Y} A$.
2. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ halmazbeli (x_n) és (u_n) sorozatok mindegyike az $a \in \mathcal{D}_f'$ ponthoz konvergál és

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(u_n).$$

   Ekkor az f függvénynek nincs határértéke a-ban.