Analízis 3. (B és C szakirány)
Szükséges ismeretek a 3. gyakorlathoz

Jelen dokumentum ekkor lett frissítve: 2019/03/05 13:28
További kidolgozások elérhetőek ide kattintva. A gyakorlatok anyaga ide kattintva érhető el.
Forrás(ok): Dr. Szili László - Analízis 3. gyakorlatok, 2018 őszi kidolgozás

1. Milyen *elégséges* feltételt ismer primitív függvény létezésére?
Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f-nek létezik primitív függvénye.

2. Adjon meg olyan függvényt, amelynek *nincs* primitív függvénye.
$f(x) = \operatorname{sign}(x) \quad (x \in (-1, 1))$

3. Milyen állítást ismer a primitív függvények számával kapcsolatban?
Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ adott függvény. Ekkor

1. Ha $F : I \to \mathbb{R}$ a f függvény egy primitív függvénye, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén az $F + c$ függvény is primitív függvénye f-nek.
2. Ha $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ primitív függvényei a f függvénynek, akkor
$$\exists c \in \mathbb{R} : F_1(x) = F_2(x) + c \quad (x \in I),$$
azaz a primitív függvények konstansban különböznek egymástól.

4. Mit ért a határozatlan integrál linearitásán?
Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum. Ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye és
$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

5. Fogalmazza meg a primitív függvényekkel kapcsolatos *második helyettesítési szabályt.*
Legyen $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum; $g : I \to J$ bijekció, $g \in D(I)$, $g'(x) \neq 0 (x \in I)$; $f : J \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in J$. Ha az $(f \circ g) \cdot g' : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye, akkor f-nek is van primitív függvénye és
$$\int_{x_0} f = \left(\int_{g^{-1}(x_0)} (f \circ g) \cdot g' \right) \circ g^{-1}.$$

6. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a Riemann-integrálhatóságra a Riemann-féle közelítő összegekkel?
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ekkor $f \in R[a, b]$ és $\int_a^b f = I \iff \forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists \delta > 0 : \forall \tau \in \mathcal{F}[a, b], ||\tau|| := \max\limits_{k=0,\ldots,n-1} (x_{k+1} - x_k) < \delta$ esetén az
$$|\sigma(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$$
egyenlőtlenség teljesül a ξ közbülső helyek tetszőleges megválasztása mellett.

7. Írja le az integrálfüggvénnyel kapcsolatban tanult tételt.
Legyen $f \in R[a, b], x_0 \in [a, b], F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt \quad (x \in [a, b])$. Ekkor

1. a F integrálfüggvény folytonos $[a, b]$-n;
2. ha $d \in (a, b)$ és f folytonos d-ben, akkor F differenciálható d-ben és $F'(d) = f(d)$.