Analízis 3. (B és C szakirány)

Szükséges ismeretek a 9. gyakorlathoz

Jelen dokumentum ekkor lett frissítve: 2019/04/05 21:18
További kidolgozások elérhetőek ide kattintva. A gyakorlatok anyaga ide kattintva érhető el.
Forrás(ok): Dr. Szili László - Definíciók és tételek az előadásokon

1. Fogalmazza meg a Lagrange-féle középértéktételt.
Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} (n \in \mathbb{N}^+)$ és $a \in int\mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy $\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f$, hogy $f \in D(K(a))$. Legyen $h \in \mathbb{R}^n$ olyan vektor, amelyre $a + h \in K(a)$. Ekkor

$$\exists \nu \in (0,1) \text{ úgy, hogy } f(a+h) - f(a) = f'(a+\nu h) \cdot h = \langle f'(a+\nu h), h \rangle.$$

2. Mit jelent az, hogy egy függvény kétszer deriválható egy pontban?
Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (2 \leq n \in \mathbb{N})$ függvény kétszer deriválható az $a \in int\mathcal{D}_f$ pontban (jelben: $f \in D^2\{a\}$), ha

1. $\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f$, hogy $f \in D\{x\}$ minden $x \in K(a)$ pontban, és
2. $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ indexre $\partial_i f \in D\{a\}$.

3. Definiálja a Hesse-féle mátrixot.
Ha az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (2 \leq n \in \mathbb{N})$ függvény kétszer deriválható az $a \in int\mathcal{D}_f$ pontban, akkor az

$$f''(a) = \begin{bmatrix} \partial_{11} f(a) & \partial_{12} f(a) & \ldots & \partial_{1n} f(a) \\ \partial_{21} f(a) & \partial_{22} f(a) & \ldots & \partial_{2n} f(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{n1} f(a) & \partial_{n2} f(a) & \ldots & \partial_{nn} f(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

szimmetrikus mátrixot az f függvény a pontbeli Hesse-féle mátrixának nevezzük.

4. Fogalmazza meg a Young-tételt.
Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (2 \leq n \in \mathbb{N})$ és $f \in D^2\{a\}$, akkor

$$\partial_{ij} f(a) = \partial_{ji} f(a) \quad \forall i, j = 1, \ldots, n \text{ indexre.}$$

5. Mit jelent az, hogy egy függvény s-szer deriválható egy pontban?
Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (2 \leq n \in \mathbb{N})$ függvény s-szer $(2 \leq s \in \mathbb{N})$ deriválható az $a \in int\mathcal{D}_f$ pontban (jelben: $f \in D^s\{a\}$), ha

1. $\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f$, hogy $f \in D^{s-1}(K(a))$ és
2. minden $(s-1)$-edrendű
$$\partial_{i_1} \partial_{i_2} \ldots \partial_{i_{s-1}} f \quad (1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{s-1} \leq n)$$
parciális deriváltfüggvény deriválható az a pontban.

6. Adja meg a Taylor-polinom definícióját.
Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (n \in N^+)$ és $a \in int\mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy egy $m \in \mathbb{N}$ számra $f \in D^m\{a\}$. Az f függvény a ponthoz tartozó m-edfokú, n-változós Taylor-polinomját így értelmezzük:

$$(T_{a,m} f)(a+h) := f(a) + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{|i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} h^i \right) \quad (h \in \mathbb{R}^n).$$

Ha $m = 0$, akkor $T_{a,0} f \equiv f(a)$, továbbá $(T_{a,m} f)(a) = f(a)$.

7. Fogalmazza meg a Taylor-formulát a Lagrange-féle maradéktaggal.
Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$ és $a \in int\mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy egy $m \in \mathbb{N}$ számmal $f \in D^{m+1}(K(a))$ teljesül. Ekkor $\forall h \in \mathbb{R}^n \quad (a + h \in K(a))$ vektorhoz $\exists \nu \in (0, 1)$, amelyre

$$f(a+h) = (T_{a,m}f)(a+h) + \sum_{|i|=m+1} \frac{\partial^i f(a+\nu h)}{i!} h^i.$$

8. Fogalmazza meg a Taylor-formulát Peano-féle maradéktaggal.
Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$ függvényre az $a \in int\mathcal{D}_f$ pontban egy $m \in \mathbb{N}^+$ számmal $f \in D^m\{a\}$ teljesül. Ekkor: $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$ feltételnek eleget tevő függvény, amelyre

$$f(a+h) = (T_{a,m}f)(a+h) + \varepsilon(h) \cdot \|h\|^m \quad (h \in \mathbb{R}^n, a+h \in \mathcal{D}_f)$$

ahol $\|.\|$ tetszőleges norma $\mathbb{R}^n$-en.