Analízis 3. (B és C szakirány)
Szükséges ismeretek a 9. gyakorlathoz

Jelen dokumentum ekkor lett frissítve: 2019/04/08 22:16
További kidolgozások elérhetőek ide kattintva. A gyakorlatok anyaga ide kattintva érhető el.
Forrás(ok): Dr. Szili László - Definíciók és tételek az előadásokon

1. Fogalmazza meg a Lagrange-féle középértéktételt.
Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} (n \in \mathbb{N}^+)$ és $a \in int\mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy $\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f$, hogy $f \in D(K(a))$. Legyen $h \in \mathbb{R}^n$ olyan vektor, amelyre $a + h \in K(a)$. Ekkor

$$\exists \nu \in (0,1) \text{ úgy, hogy } f(a+h) - f(a) = f'(a+\nu h) \cdot h = \langle f'(a+\nu h), h \rangle.$$

2. Mit jelent az, hogy egy függvény kétszer deriválható egy pontban?
Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (2 \leq n \in \mathbb{N})$ függvény kétszer deriválható az $a \in int\mathcal{D}_f$ pontban (jelben: $f \in D^2\{a\}$), ha

1. $\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f$, hogy $f \in D\{x\}$ minden $x \in K(a)$ pontban, és
2. $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ indexre $\partial_i f \in D\{a\}$.

3. Definiálja a Hesse-féle mátrixot.
Ha az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (2 \leq n \in \mathbb{N})$ függvény kétszer deriválható az $a \in int\mathcal{D}_f$ pontban, akkor az

$$f''(a) = \begin{bmatrix} \partial_{11}f(a) & \partial_{12}f(a) & \ldots & \partial_{1n}f(a) \\ \partial_{21}f(a) & \partial_{22}f(a) & \ldots & \partial_{2n}f(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{n1}f(a) & \partial_{n2}f(a) & \ldots & \partial_{nn}f(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

szimmetrikus mátrixot az f függvény a pontbeli Hesse-féle mátrixának nevezzük.

4. Fogalmazza meg a Young-tételt.
Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (2 \leq n \in \mathbb{N})$ és $f \in D^2\{a\}$, akkor

$$\partial_{ij}f(a) = \partial_{ji}f(a) \quad \forall i, j = 1, \ldots, n \text{ indexre.}$$

5. Mit jelent az, hogy egy függvény s-szer deriválható egy pontban?
Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (2 \leq n \in \mathbb{N})$ függvény s-szer $(2 \leq s \in \mathbb{N})$ deriválható az $a \in int\mathcal{D}_f$ pontban (jelben: $f \in D^s\{a\}$), ha

1. $\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f$, hogy $f \in D^{s-1}(K(a))$ és
2. minden $(s-1)$-edrendű
$$\partial_{i_1}\partial_{i_2}\ldots\partial_{i_{s-1}}f \quad (1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{s-1} \leq n)$$
parciális deriváltfüggvény deriválható az a pontban.

6. Adja meg a Taylor-polinom definícióját.
Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (n \in N^+)$ és $a \in int\mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy egy $m \in \mathbb{N}$ számra $f \in D^m\{a\}$. Az f függvény a ponthoz tartozó m-edfokú, n-változós Taylor-polinomját így értelmezzük:

$$(T_{a,m}f)(a+h) := f(a) + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{|i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} h^i \right) \quad (h \in \mathbb{R}^n).$$

Ha $m = 0$, akkor $T_{a,0}f \equiv f(a)$, továbbá $(T_{a,m}f)(a) = f(a)$.

7. Fogalmazza meg a Taylor-formulát a Lagrange-féle maradéktaggal.
Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$ és $a \in int\mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy egy $m \in \mathbb{N}$ számmal $f \in D^{m+1}(K(a))$ teljesül. Ekkor $\forall h \in \mathbb{R}^n \quad (a+h \in K(a))$ vektorhoz $\exists \nu \in (0,1)$, amelyre

$$f(a+h) = (T_{a,m}f)(a+h) + \sum_{|i|=m+1} \frac{\partial^i f(a+\nu h)}{i!} h^i.$$

8. Fogalmazza meg a Taylor-formulát Peano-féle maradéktaggal.
Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$ függvényre az $a \in int\mathcal{D}_f$ pontban egy $m \in \mathbb{N}^+$ számmal $f \in D^m\{a\}$ teljesül. Ekkor: $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a $\lim\limits_0 \varepsilon = 0$ feltételnek eleget tevő függvény, amelyre

$$f(a+h) = (T_{a,m}f)(a+h) + \varepsilon(h) \cdot \|h\|^m \quad (h \in \mathbb{R}^n, a+h \in \mathcal{D}_f)$$

ahol $\|.\|$ tetszőleges norma $\mathbb{R}^n$-en.

Feladatmegoldások (Csörgő István gyakorlata)

1. A definíció alapján lássa be, hogy az f függvény totálisan deriválható az $a \in int\mathcal{D}_f$ pontban, és adja meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot. Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizze a Jacobi-mátrix kiszámításával.

a) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy - y^2 \qquad a = (1,2)$

$$f \in D(a) \Longleftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - A \cdot h}{\|h\|} = 0$$
$$\varepsilon(h) = f(a+h) - f(a) - A \cdot h \quad \longrightarrow \quad \varepsilon(h) + A \cdot h = f(a+h) - f(a)$$

$f(1,2) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2^2 = 2 + 6 - 4 = 4$

$f(a+h)-f(a) = f((1,2)+(h_1,h_2))-f(1,2) = f(1+h_1,2+h_2)-4 = 2(1+h_1)^2+3(1+h_1)(2+h_2)-(2+h_2)^2-4 = 2(1+2h_1+h_1^2)+3(2+h_2+2h_1+h_1h_2)-(4+4h_2+h_2^2)-4 = 2+4h_1+2h_1^2+6+3h_2+6h_1+3h_1h_2-4-4h_2-h_2^2-4 = 10h_1 - h_2 + 2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2 = \begin{bmatrix}10 & -1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}h_1 \\ h_2\end{bmatrix} + \underbrace{2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2}_{\varepsilon(h)}$

$$\left|\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|} - 0\right| = \frac{|\varepsilon(h)|}{\|h\|} = \frac{|2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2|}{\|h\|} \leq \frac{2\|h\|^2 + 3\|h\| \cdot \|h\| + \|h\|^2}{\|h\|} = 6 \cdot \|h\| = 6 \cdot \|h - (0,0)\| \xrightarrow{h\to 0} 0$$

Tehát $f \in D(a)$ és $f'(a) = \begin{bmatrix}10 & -1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

<u>*Ellenőrzés:*</u>

$$\partial_1 f = 4x + 3y \quad \longrightarrow \quad \partial_1 f(1,2) = 4 + 1 + 3 \cdot 2 = 10$$
$$\partial_2 f = 3x - 2y \quad \longrightarrow \quad \partial_2 f(1,2) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -1$$

3. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x\cdot y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Mutassa meg, hogy az f függvény a $(0,0)$ pontban ...

a) ... folytonos

Áll.: $f\in C(0,0)$

Biz.: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$, mivel

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}-0\right| = \frac{|x|\cdot|y|^2}{\|(x,y)\|^2} \le \frac{\|(x,y)\|\cdot\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|^2} = \|(x,y)-(0,0)\| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

c) ... totálisan nem deriválható

Áll.: $f\notin D(0,0)$

Biz.:

$$\partial_1 f(0,0) = \left(\frac{d}{dx}\underbrace{f(x,0)}_{0}\right)_{x=0} = \left(\frac{d}{dx}0\right)_{x=0} = 0 \quad \text{és} \quad \partial_2 f(0,0) = \left(\frac{d}{dy}f(0,y)\right)_{y=0} = \left(\frac{d}{dy}0\right)_{y=0} = 0$$

Ezzel:

$$\frac{f((0,0)+(h_1,h_2)) - \overbrace{f(0,0)}^{0} - \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}}{\|h\|} = \frac{f(h_1,h_2)}{\|h\|} - \frac{h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)=\|h\|} = \frac{h_1h_2^2}{(\sqrt{h_1^2+h_2^2})^3} \overset{h_1=h_2}{=}$$

$$\overset{h_1=h_2}{=} \frac{h_1h_1^2}{(\sqrt{h_1^2+h_1^2})^3} = \frac{h_1^3}{(\sqrt{2h_1^2})^3} = \frac{h_1^3}{\sqrt{8}\cdot|h_1|^3} \overset{h>0}{=} \frac{h_1^3}{\sqrt{8}\cdot h_1^3} = \frac{1}{\sqrt{8}} \overset{h_1\to 0}{\not\longrightarrow} 0$$

HF./1. A definíció alapján lássa be, hogy az $f(x,y)=x^3+xy \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ függvény deriválható az $a:=(2,3)$ pontban, és adja meg $f'(a)$-t. Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizze a Jacobi-mátrix kiszámításával.

$$f\in D(a) \iff \exists A\in\mathbb{R}^{m\times n} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-A\cdot h}{\|h\|} = 0$$

$$\varepsilon(h) = f(a+h)-f(a)-A\cdot h \quad \longrightarrow \quad \varepsilon(h)+A\cdot h = f(a+h)-f(a)$$

$f(a) = f(2,3) = 2^3+6 = 14$

$f(a+h)-f(a) = f(2+h_1,3+h_2)-14 = (1+h_1)^3+(1+h_1)(3+h_2)-14 = 2^3+2\cdot 2h_1+2h_1^2+h_1\cdot 2^2+2\cdot 2h_1^2+h_1^3+6+2h_2+3h_1+h_1h_2-14 = 15h_1+2h_2+6h_1^2+h_1^3+h_1h_2 = \begin{bmatrix}15 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}\underbrace{+6h_1^2+h_1^3+h_1h_2}_{\varepsilon(h)}$

$$\left|\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|}-0\right| = \frac{|\varepsilon(h)|}{\|h\|} = \frac{|6h_1^2+h_1^3+h_1h_2|}{\|h\|} \le \frac{6\|h\|^2+\|h\|^3+3\|h\|\cdot\|h\|}{\|h\|} = \frac{9\|h\|^2+\|h\|^3}{\|h\|} \le$$

$$\le \frac{10\|h\|^3}{\|h\|} = 10\|h\|^2 = 10\|h-(0,0)\|^2 \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Tehát $f\in D(a)$ és $f'(a) = \begin{bmatrix}15 & 2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times 2}$.

Ell.:

$$\partial_1 f = 3x^2+y \quad\to\quad \partial_1 f(2,3) = 3\cdot 2^2+3 = 12+3 = 15$$

$$\partial_2 f = x \quad\to\quad \partial_1 f(2,3) = 2$$