Analízis 3. (B és C szakirány)

Szükséges ismeretek a 8. gyakorlathoz

Jelen dokumentum ekkor lett frissítve: 2019/04/01 12:44
További kidolgozások elérhetőek ide kattintva. A gyakorlatok anyaga ide kattintva érhető el.
Forrás(ok): Dr. Szili László - Definíciók és tételek az előadásokon

1. Definiálja $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény parciális deriváltját.
Legyen $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $e_1, \ldots, e_n$ a kanonikus bázis R^n-ben, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in int\mathcal{D}_f$. Az f függvénynek az a pontban létezik az i-edik ($i = 1, 2, \ldots, n$) változó szerinti parciális deriváltja, ha az

$$F : K(0) \ni t \mapsto f(a + te_i)$$

valós-valós függvény deriválható a 0 pontban. Az $F'(0)$ valós számot az f függvény a pontbeli, i-edik változó szerinti parciális deriváltjának nevezzük és a $\partial_i f(a)$ szimbólummal jelöljük.

2. Mi az iránymenti derivált fogalma?
Legyen $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in int\mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy $e \in \mathbb{R}^n$ egy egységvektor: $\|e\|_2 = 1$. Az f függvénynek az a pontban létezik az e irány mentén vett iránymenti deriváltja, ha az

$$F : K(0) \ni t \mapsto f(a + te)$$

valós-valós függvény deriválható a 0 pontban. Az $F'(0)$ valós számot az f függvény a pontbeli e irányú iránymenti deriváltjának nevezzük, és a $\partial_e f(a)$ szimbólummal jelöljük.

3. Milyen állítást ismer lineáris leképezések mátrixreprezentációjával kapcsolatban?
Legyen $n, m \in \mathbb{N}^+$. Tetszőleges $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezéshez egyértelműen létezik olyan $a \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ mátrix, amellyel az

$$L(x) = A \cdot x \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

egyenlőség teljesül.

4. Írja le az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény totális deriválhatóságának a definícióját.
Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad (n, m \in \mathbb{N}^+)$ függvény (totálisan) deriválható az $a \in int\mathcal{D}_f$ pontban, ha

$$\exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \text{ lineáris leképezés és } \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \text{ függvény, hogy}$$

$$f(a + h) - f(a) = L(h) + \varepsilon(h) \cdot \|h\|$$

teljesül minden olyan $h \in \mathbb{R}^n$ vektorra, amelyre $a + h \in \mathcal{D}_f$, ahol $\|.\|$ tetszőleges norma az $\mathbb{R}^n$ lineáris téren. Ekkor $f'(a) := L$ az f függvény a-beli deriváltja.

5. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer mátrixokkal a pontbeli deriválhatóságra?
Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad (n, m \in \mathbb{N}^+)$ és $a \in int\mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in D\{a\} \quad \iff \quad \exists A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \lim_{h \to 0} \frac{\|f(a + h) - f(a) - A \cdot h\|^{(1)}}{\|h\|^{(2)}} = 0,$$

ahol $\|.\|^{(1)}$ tetszőleges $\mathbb{R}^m$-beli és $\|.\|^{(2)}$ tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli norma. Ekkor $f'(a) := A$ az f függvény a pontbeli deriváltja vagy deriváltmátrixa.

6. Milyen tételt ismer a deriváltmátrix előállítására?
Legyen $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ahol $f_i \in \mathbb{R}^n \to R$ az f függvény i-edik ($i = 1, 2, \dots, m$) koordinátafüggvénye. Tegyük fel, hogy f totálisan deriválható az $a \in int\mathcal{D}_f$ pontban. Ekkor f mindegyik koordinátafüggvényének mindegyik változó szerinti parciális deriváltja létezik az a pontban. Az $f'(a)$ deriváltmátrix a parciális deriváltakkal így fejezhető ki:

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \dots & \partial_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \partial_2 f_m(a) & \dots & \partial_n f_m(a) \end{bmatrix}.$$

Az $f'(a)$ deriváltmátrixot az f függvény $a \in int\mathcal{D}_f$ pontbeli Jacobi-mátrixának nevezzük.

7. Fogalmazza meg az összetett függvény pontbeli deriválhatóságára vonatkozó állítást, az ún. általános láncszabályt.
Legyen $n, m, s \in \mathbb{N}^+$. Ha $g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és $g \in D\{a\}$, továbbá $f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ és $f \in D\{g(a)\}$, akkor $(f \circ g) \in D\{a\}$ és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a),$$

ahol $\cdot$ a mátrixok közötti szorzás műveletét jelenti.

8. Milyen elégséges feltételt ismer a totális deriválhatóságra a parciális deriváltakkal?
Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad (n \in \mathbb{N}^+)$ és $a \in int\mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy az a pontnak létezik olyan $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezete, amelyre minden $i = 1, \dots, n$ index esetén a következők teljesülnek:

1. $\exists \partial_i f(x)$ minden $x \in K(a)$ pontban,
2. a $\partial_i f : K(a) \to \mathbb{R}$ parciális deriváltfüggvény folytonos az a pontban.

Ekkor az f függvény totálisan deriválható az a pontban.