Analízis 3. (B és C szakirány)
Szükséges ismeretek az 5. gyakorlathoz

Jelen dokumentum ekkor lett frissítve: 2019/03/12 21:38
További kidolgozások elérhetőek ide kattintva. A gyakorlatok anyaga ide kattintva érhető el.
Forrás(ok): Dr. Szili László - Definíciók és tételek az előadásokon

1. Definiálja a metrikus teret.
Az (M, ϱ) rendezett pár metrikus tér, ha $M \neq \emptyset$ halmaz, és

$$\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$$

olyan függvény, melyre $\forall x, y, z \in M$ esetén

1. $\varrho(x, y) \geq 0$,
2. $\varrho(x, y) = 0 \iff x = y$,
3. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ (szimmetria),
4. $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ (háromszög-egyenlőtlenség).

A $\varrho(x, y)$ az x, y pontok távolsága, a ϱ pedig a távolságfüggvény (vagy metrika).

2. Hogyan értelmezzük $\mathbb{R}^n$-ben a ϱ_2 euklideszi metrikát?
Ha $1 \leq n \in \mathbb{N}$ és $x(x_1, \ldots, x_n)$,$y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$\varrho_2(x, y) := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}.$$

3. Írja le a normált tér definícióját.
Az $(X, ||.||)$ rendezett pár normált tér, ha

1. $X \neq \emptyset$ lineáris tér (v. vektortér) az $\mathbb{R}$ számtest felett;
2. $||.|| : X \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre $\forall x, y \in X$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
   - $||x|| \geq 0$,
   - $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ az X lin. tér nulleleme)
   - $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$,
   - $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (háromszög-egyenlőtlenség)

A $||.||$ leképezést normának, az $||x||$ számot pedig az x elem normájának mondjuk.

4. Definiálja $\mathbb{R}^n$-en a $||.||_p$ normákat.
Ha $1 \leq n \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq +\infty$ és $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$||x||_p := \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{ha } 1 \leq p < +\infty \\ \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| & \text{ha } p = +\infty. \end{cases}$$

5. Definiálja normált térben a konvergens sorozat fogalmát.
Az $(X, ||.||)$ normált tér egy $(a_n) : \mathbb{N} \to X$ sorozata konvergens, ha

$$\exists \alpha \in X, \text{ hogy } \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \quad \forall n \geq n_0 \text{ indexre } ||a_n - \alpha|| < \varepsilon.$$

Ekkor α az (a_n) határértéke.

6. Mit jelent az, hogy két norma ekvivalens?
Az X lineáris téren adott $||.||^{(1)}$ és $||.||^{(2)}$ normák ekvivalensek, ha léteznek olyan m, M pozitív valós számok, hogy

$$m \cdot ||x||^{(1)} \le ||x||^{(2)} \le M \cdot ||x||^{(1)} \qquad (x \in X).$$

Jelölés: $||.||^{(1)} \sim ||.||^{(2)}$.

7. Milyen állítást ismer ekvivalens normák esetén sorozatok konvergenciájára?
Tegyük fel, hogy az X lineáris téren értelmezett $||.||^{(1)}$ és $||.||^{(2)}$ normák ekvivalensek. Ekkor tetszőleges $(a_n) : \mathbb{N} \to X$ sorozatra

$$\lim(a_n) \overset{||.||^{(1)}}{=} \alpha \Longleftrightarrow \lim(a_n) \overset{||.||^{(2)}}{=} \alpha.$$