volumen

April 17, 2023

1 Volumen de la hiperesfera de n-dimensiones

Autor: David Duran Año: 2023

1.1 Derivación

1.1.1 Caso bidimensional

Partimos del área de la función gaussiana: e^{-x^2}. Integremos, por ahora elevemos la integral al cuadrado:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} dx_1\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} dx_2\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2)} dx_1 dx_2 = \pi$$

Trabajando con coordenadas polares (r, θ) en vez de cartesianas (x_1, x_2). Reemplazando con:

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2; \quad x_1 = r\sin\theta; \quad x_2 = r\cos\theta$$

Obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2)} dx_1 dx_2 = \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_{u=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-u}\frac{1}{2} du d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{\infty} e^{-u} du = \frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot \left(-e^{-u}\right)_0^{\infty} =$$

Por lo tanto:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \pi$$

La integral de la gaussiana es $\sqrt{\pi}$.

1.1.2 Caso tridimensional

Elevemos la integral al cubo esta vez.

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^3 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx_1\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} dx_2\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} dx_3\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2+x_1^2+x_3^2)} dx_1 dx_2 dx_3$$

Pasemos de trabajar en coordenadas polares $(x_1, x_2, x_3)_0$ a coordenadas esféricas (r, θ, φ)

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = r^2; \quad dx_1 dx_2 dx_3 = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = r^2 dr d\Omega_2$$

Reemplazando

$$\iiint e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)} dx_1 dx_2 dx_3 = \underbrace{\int e^{-r^2} r^2 dr}_{\frac{\sqrt{\pi}}{4}} \underbrace{\int d\Omega_2}_{4\pi} = (\sqrt{\pi})^3$$

1.1.3 Caso n-dimensional

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_n^2} dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n$$

Notemos que:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$$

.

Ahora, reescribiendo la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} \int_{\text{n-esfera}} d\Omega_{n-1}$$

Veámoslo por partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

Para área de la superficie S_n:

$$S_n \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \pi^{n/2} \Rightarrow S_n = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Rightarrow S_n(r) = \frac{\pi^{n/2} r^{n-1}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Para el volumen V_n:

$$V_n(r) = \int S_n(r) dr = S_n \int r^{n-1} dr = \frac{S_n r^n}{n} = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

Finalmente, para el caso de una esfera n-dimensional con $r = 1$. El volumen será $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

1.2 Cálculo numérico

[ ]:
```
# Importar paquetes
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import numba as nb
from ipywidgets import interact, IntSlider
```

[ ]:
```
@nb.jit(nopython=True)
def volumen_hiperesfera(dim, Nsample=1000000):
    hits = 0
    for n in range(Nsample):
        punto = np.random.uniform(-1.0, 1.0, dim)
        radio_cuadrado = np.sum(punto**2)
        if radio_cuadrado <= 1.0:
            hits += 1
    return hits * (2.0 ** dim / Nsample)
```

[ ]:
```
@nb.jit(nopython=True)
def calcular_volumenes(dim, sample_sizes):
    volumes = np.zeros(len(sample_sizes))
    for i, Nsample in enumerate(sample_sizes):
        volumes[i] = volumen_hiperesfera(dim, Nsample)
    return volumes
```

[ ]:
```
def plot_volumen(dim, Nsample):
    plt.figure(figsize=(8, 6))
    samples = np.array([10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000])
    volumes = calcular_volumenes(dim, samples)
    plt.plot(samples, volumes, marker="o")
    plt.xscale("log")
    plt.xlabel("Número de muestras (escala logarítmica)")
    plt.ylabel("Volumen estimado")
    plt.title(f"Volumen de la hiperesfera {dim}-dimensional")
    plt.grid()
    plt.show()
```

[ ]:
```
interact(plot_volumen,
         dim=IntSlider(min=2, max=10, step=1, value=4,␣
 ↪description="Dimensiones"),
         Nsample=IntSlider(min=1000, max=1000000, step=1000, value=10000,␣
 ↪description="Muestras"))
```

```
interactive(children=(IntSlider(value=4, description='Dimensiones', max=10,␣
 ↪min=2), IntSlider(value=10000, des…
```

[ ]:
```
<function __main__.plot_volumen(dim, Nsample)>
```