Să se arate că

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-x_0)(z-x_1)\dots(z-x_n)}\,dz$$

unde $\mathcal{C}$ este curba simplă, închisă, parcursă în sens direct, frontieră a domeniului D în care se află punctele $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Rezolvare:

Pt $n=0$ obținem formula integrală Cauchy pentru funcții analitice

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-x}\,dz \qquad \forall\, x \in \operatorname{int} \mathcal{C}$$

Presupunem că egalitatea este valabilă pentru $n-1$ și o vom demonstra pt. n. Ne vom folosi de

$$[x_0, x_1, \dots, x_k; f] = \frac{[x_1, x_2, \dots, x_k; f] - [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}; f]}{x_k - x_0}$$

și de faptul că $[x_0, x_1, \dots, x_k; f] = [x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}; f]$ pentru orice permutare $(i_0, i_1, \dots, i_k)$ a lui $(0, 1, \dots, k)$

Obținem

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{[x_1, x_2, \dots, x_n; f] - [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; f]}{x_n - x_0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-x_1)\dots(z-x_n)}\,dz - \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-x_0)\dots(z-x_{n-1})}\,dz}{x_n - x_0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\,(z - x_0 - z + x_n)}{(z-x_0)\dots(z-x_n)\,(x_n - x_0)}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-x_0)(z-x_1)\dots(z-x_n)}\,dz$$

$$\Rightarrow [x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-x_0)(z-x_1)\dots(z-x_n)}\,dz.$$