MN - 4

(1) Dacă $a \le x_0 < \dots < x_n \le b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ şi $B_n(f)$ este coeficientul lui x^{n-1} din $L_n(f; x_0 \dots x_n)$

Să se arate că

a) B_n este o funcţională liniară

b) $B_n(f) = [x_0,\dots x_n; e_n f] - [x_0 \dots x_n; e_{n+1}]\,[x_0 \dots x_n; f]$

c) Să se afle gradul de exactitate

c) Să se determine nucleul lui Peano.

(2) Fie $A: C[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţională liniară şi pozitivă. Să se arate că, pentru orice f convexă pe $[a,b]$, are loc inegalitatea

$$A(f) \ge A(e_0)\, f\left(\frac{A(e_1)}{A(e_0)}\right).$$

(3) Dacă $A: C[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcţională liniară şi pozitivă să se arate că pentru $\forall f\in C^{(2)}[a,b]$ avem, dacă $A(e_0)=1$

$$(A(e_2)-a_1^2)\min_{x\in[a,b]}|f''(x)| \le A(f) - f(a_1) \le (A(e_2)-a_1^2)\,\|f''\|_\infty,$$

unde $a_1 = A(e_1)$.

(4) Fie $x_i \in [a,b]$, $i=\overline{0,n}$ puncte distincte, $A(f)$ definită prin $A(f)=\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$, $\alpha_i\in[0,1]$ şi $A(e_0)=1$. Dacă $f\in C^2[a,b]$, $a_1 = A(e_1)$ să se determine nucleul lui Peano pentru funcţionala

$R(f) = A(f) - f(a_1)$

şi să se studieze semnul acestuia.

(5) Să se determine formulele de cuadratură de grad maxim de exactitate şi pentru $f\in C^2[a,b]$ să se determine nucleul lui Peano, semnul acestuia şi o evaluare a restului cu ajutorul $\|f''\|_\infty$: a) $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = A_0 f(x_0)+R_a(f)$; b) $\int_0^1 e^x f(x)\,dx = A_0 f(x_0)+R_b(f)$, c) $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1+x}}\,dx = A_0 f(x_0)+R_c(f)$

6) Să se determine ~~[illegible]~~ coeficienții formulelor de cuadratură de grad maxim de exactitate în funcție de noduri, în următoarele cazuri

a) $\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$

b) $\int_0^1 x f(x)dx = \sum_{k=0} A_k f(x_k) + R(f)$

c) $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$

c) $\int_0^1 e^x f(x)dx = \sum_{k=0}^{3} A_k f(x_k) + R(f)$

d) $\int_{-1}^1 \sqrt{x+1}\, f(x)dx = \sum_{k=0}^{3} A_k f(x_k) + R(f)$