Să se calculeze diferența divizată

$$[t_0, t_1, \dots, t_n ; x^{n+3}]$$

dacă $t_0, t_1, \dots, t_n$ sunt cele $n+1$ soluții ale ecuației

$$t^{n+1} - t^n + 1 = 0 \qquad (t_i^{n+1} - t_i^n + 1 = 0, \ \forall i = \overline{0,n})$$

<u>Rezolvare</u>:

Vom scrie pe x^{n+3} a.î. să aibă legătură cu ecuația $x^{n+1} - x^n + 1$. Anume

$$x^{n+3} - x^{n+2} + x^2 + x^{n+2} - x^2 = x^2(x^{n+1} - x^n + 1) + x^{n+2} - x^2$$

$$\Rightarrow [t_0, t_1, \dots, t_n ; x^{n+3}] = [t_0, t_1, \dots, t_n ; x^2(x^{n+1} - x^n + 1)] + [t_0, t_1, \dots, t_n ; x^{n+2}] -$$
$$- [t_0, t_1, \dots, t_n ; x^2]$$

Dar $[t_0, t_1, \dots, t_n ; x^2] = 0$

$$[t_0, t_1, \dots, t_n ; x^2(x^{n+1} - x^n + 1)] = \sum_{i=0}^{n} \frac{t_i^2(t_i^{n+1} - t_i^n + 1)}{\ell'(t_i)} = 0$$

unde $\ell(x) = (x - t_0)(x - t_1) \dots (x - t_n)$

$$[t_0, t_1, \dots, t_n ; x^{n+2}] = \underbrace{S_1^2 - S_2}_{\text{sumele Viète}} = \left(\sum_{i=0}^{n} t_i\right)^2 - \left(\sum_{0 \le i < j \le n} t_i \cdot t_j\right) = 1 - 0$$

pentru că ecuația $t^{n+1} - t^n + 1 = 0$ are sumele $S_1 = 1$, $S_2 = 0$

$$\Rightarrow [t_0, t_1, \dots, t_n ; x^{n+3}] = 1$$