5b) Să se găsească formula de cuadratură de grad maxim de exactitate. Pt $f \in C^2[a,b]$ să se determine nucleul lui Peano, semnul acestuia și o evaluare a restului în $\|f''\|_\infty$

$$\int_0^1 e^x f(x)\,dx = A_0 f(x_0) + R(f)$$

## Rezolvare

În cazul acesta funcția pondere este

$$w(x) = e^x, \quad w:[0,1] \to \mathbb{R}$$

Avem un singur nod $x_0$ și un singur coeficient $A_0$, $n=0$

Fiind două necunoscute considerăm condițiile:

$$R(1) = R(x) = 0 \qquad \left(R(f) = \int_0^1 e^x f(x)\,dx - A_0 f(x_0)\right)$$

$$R(1) = \int_0^1 e^x \cdot 1 \cdot dx - A_0 = 1$$

$$R(x) = \int_0^1 e^x x\,dx - A_0 x_0 = 0$$

Vom folosi $\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1$

$$\int_0^1 x e^x\,dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1$$

și obținem sistemul

$$\begin{cases} e-1-A_0 = 0 \\ 1 - A_0 x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = e-1 \\ (e-1)x_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = e-1 \\ x_0 = \dfrac{1}{e-1} \end{cases}$$

Obținem formula de cuadratură

$$\int_0^1 e^x f(x)\,dx = (e-1) f\left(\frac{1}{e-1}\right) + R(f)$$

Mai mult

$$\int_0^1 x^2 e^x\,dx = x^2 e^x \Big|_0^1 - 2\int_0^1 x e^x dx = e - 2$$

Deducem că $R(x^2) = \int_0^1 x^2 e^x dx - (e-1)\left(\frac{1}{e-1}\right)^2 = (e-2) - \frac{1}{e-1} = \frac{e^2-3e+1}{e-1} \neq 0$

$\Rightarrow$ formula de cuadratura verifică:

$$R(1) = R(x) = 0, \quad R(x^2) \neq 0$$

$\Rightarrow$ gradul de exactitate este 1

Pentru a determina termenul rest vom folosi următorul rezultat legat de reprezentarea Peano a funcțiilor liniare

"Fie $R: C^n[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcțională liniară a.î. $R(P) = 0 \ \forall P \in \Pi_{m-1}$ ($\operatorname{Ker} P = \Pi_{m-1}$). Atunci $\forall f \in C^m[a,b]$

$$R(f) = \int_a^b f^{(m)}(u) K(u) du$$ "

unde $K$ reprezintă nucleul Peano definit prin

$$K(u) = \frac{1}{(m-1)!} R_x\left((x-u)_+^{m-1}\right), \quad u \in [a,b]$$

Indicele în $R_x$ indică faptul că $R$ "acționează" în raport cu variabila $x$ (nu în raport cu $u$)

Mai mult, dacă nucleul $K$ păstrează semn constant pe $[a,b]$ atunci $\exists\, \xi \in [a,b]$ a.î.

$$R(f) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!} R(x^m)$$

În cazul nostru $R: C^2[0,1] \to \mathbb{R}$

$$R(f) = \int_0^1 e^x f(x)dx - (e-1) f\left(\frac{1}{e-1}\right)$$

Avem $\operatorname{Ker}(R) = \Pi_1$ $(m-1 = 1 \Rightarrow m = 2)$

$$\Rightarrow R(f) = \int_0^1 K(u) f^{(2)}(u) du$$

unde nucleul lui Peano este dat de

$$K(u) = \frac{1}{(2-1)!} R_x\left((x-u)_+^{2-1}\right) = \underbrace{\int_0^1 e^x (x-u)_+ dx}_{\uparrow \text{ în locul lui } f} - (e-1)\left(\frac{1}{e-1} - u\right)_+ =$$

$$= \int_0^u e^x \underbrace{(x-u)_+}_{=0\ (x \le u)} dx + \int_u^1 e^x \underbrace{(x-u)_+}_{=(x-u)\ (x \ge u)} dx - (e-1)\left(\frac{1}{e-1} - u\right)_+ =$$

$$= \int_u^1 e^x (x-u) dx - (e-1)\left(\frac{1}{e-1} - u\right)_+ = \int_u^1 x e^x dx - u\int_u^1 e^x dx - (e-1)\left(\frac{1}{e-1} - u\right)_+ =$$

$$= x e^x \Big|_u^1 - \int_u^1 e^x dx - u\int_u^1 e^x dx - (e-1)\left(\frac{1}{e-1} - u\right)_+ = e - ue^u - (1+u) e^x \Big|_u^1 -$$

$$-(e-1)\left(\frac{1}{e-1} - u\right)_+ = e - ue^u - (1+u)(e - e^u) - (e-1)\left(\frac{1}{e-1} - u\right)_+ =$$

$$= \cancel{e} - \cancel{ue^u} - \cancel{e} - ue + e^u + \cancel{ue^u} - (e-1)\left(\frac{1}{e-1} - u\right)_+ =$$

$$= -eu + e^u - (e-1)\left(\frac{1}{e-1} - u\right)_+ =$$

$$= \begin{cases} e^u - ue, & \frac{1}{e-1} \le u \le 1 \\ e^u - eu - (e-1)\left(\frac{1}{e-1} - u\right), & 0 \le u \le \frac{1}{e-1} \end{cases} = \begin{cases} e^u - ue, & \frac{1}{e-1} \le u \le 1 \\ e^u - \cancel{ue} - 1 + \cancel{ue} - u, & 0 \le u \le \frac{1}{e-1} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^u - ue, & \frac{1}{e-1} \le u \le 1 \\ e^u - (1+u), & 0 \le u \le \frac{1}{e-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow K(u) = \begin{cases} e^u - ue, & \frac{1}{e-1} \le u \le 1 \\ e^u - (u+1), & 0 \le u \le \frac{1}{e-1} \end{cases}$$

$\Rightarrow K(u) \geq 0 \ \forall u \in [0,1] \Rightarrow K$ păstrează semn constant pe $[0,1] \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\ \xi \in [0,1]$ a.î.

$$R(f) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} R(x^2) = \frac{e^2 - 3e + 1}{2(e-1)} f^{(2)}(\xi)$$

$$\Rightarrow \boxed{R(f) = \frac{e^2 - 3e + 1}{2(e-1)} f^{(2)}(\xi)}$$

Dacă $\|f''\|_\infty \le M \Rightarrow |R(f)| \le \frac{e^2 - 3e + 1}{2(e-1)} M$