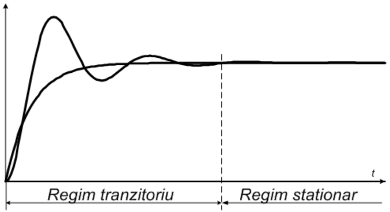
Analiza sistemelor liniare și continue

Paula Raica
Departamentul de Automatică
Str. Dorobanților 71, sala C21, tel: 0264 - 401267
Str. Barițiu 26, sala C14, tel: 0264 - 202368
email: Paula.Raica@aut.utcluj.ro

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Analiza sistemelor

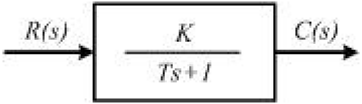
- Determinarea unui model matematic
- Metode diferite sunt disponibile pentru analiză
- Performanța se analizează pe baza semnalelor de test
- Scopul analizei: **studiul comportamentului sistemului în regim tranzitoriu și regim staționar când modelul sistemului și intrarea sunt cunoscute**
- Semnale de test: treaptă, rampă, impuls, sinusoidal



Analiza sistemelor

- Sistemul se descompune în elemente simple de ordinul cel mult 2 și efectele fiecărui element sunt analizate
- Comportamentul elementelor simple se poate studia utilizând parametri caracteristici:
  - Constante de timp, T
  - Timp mort, T_m
  - Factor de amortizare, ζ
  - Pulsația naturală ω_n
  - Constanta de proporționalitate (câștig), K

Sisteme de ordinul 1



Funcția de transfer:

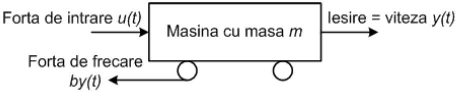
$$H(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts+1}$$

- K - factor de proporționalitate (câștig)
- T - constanta de timp, $T > 0$

Se analizează răspunsul sistemului la intrare treaptă unitară, rampă unitară și impuls. Condițiile inițiale se presupun zero.

Sistem de ordinul 1. Exemplu. Sistem mecanic

- O mașină cu masa m care se mișcă într-o singură direcție
- $u(t)$ o forță externă = semnalul de intrare
- $y(t)$ viteza mașinii = semnalul de ieșire
- Există forță de frecare: b = coeficient de frecare



- Ecuația diferențială care leagă intrarea de ieșire:

$$m\frac{dy(t)}{dt} + by(t) = u(t) \qquad |\mathcal{L},\ (CI = 0)$$

$$\Rightarrow \quad msY(s) + bY(s) = U(s) \quad \Rightarrow \quad Y(s)(ms + b) = U(s)$$

- Funcția de transfer: $H(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{ms+b} = \dfrac{\frac{1}{b}}{\frac{m}{b}s+1}$
- Factorul de proporționalitate $K = 1/b$, constanta de timp $T = m/b$.

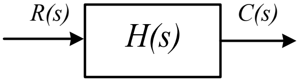
Sisteme de ordinul 1

Alte exemple:

$$H_1(s) = \frac{2}{s+2} = \frac{1}{\frac{1}{2}s+1}, \quad \Rightarrow \quad K=1,\ T=\frac{1}{2}$$

$$H_2(s) = \frac{4}{3s+2} = \frac{2}{\frac{3}{2}s+1}, \quad \Rightarrow \quad K=2,\ T=\frac{3}{2}$$

Răspunsul sistemului. Se cunosc: intrarea $R(s)$ și funcția de transfer $H(s) = \frac{K}{Ts+1}$.



$$C(s) = H(s)\cdot R(s) \quad \Rightarrow \quad c(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)\cdot R(s)]$$

Răspunsul la treaptă unitară

$$r(t) = 1, \quad R(s) = \frac{1}{s}, \quad C(s) = \frac{K}{Ts+1}\frac{1}{s}$$

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} - \frac{KT}{Ts+1}\right] = K(1-e^{-t/T}), \quad (t \geq 0)$$

- Pentru $t \to \infty \quad \Rightarrow \quad e^{-t/T} \to 0$ și $c(\infty) = K$ (val. de regim staționar)
- La $t = T$ valoarea lui $c(t)$ este $0.632K$, sau răspunsul a ajuns la 63.2% din valoarea finală:

$$c(T) = K(1-e^{-1}) = 0.632K$$

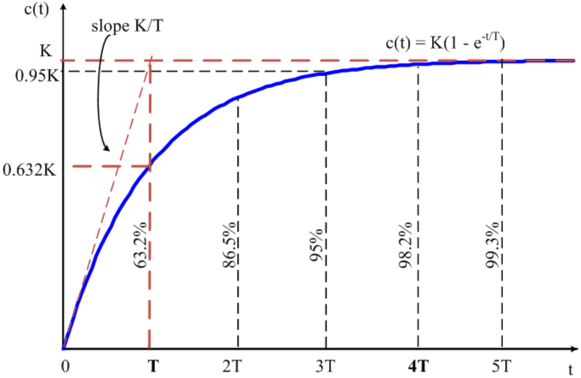
- Panta tangentei la $t = 0$ este $1/T$:

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{K}{T}e^{-t/T}|_{t=0} = \frac{K}{T}$$

- La $t = 4T$ răspunsul a ajuns la 98% din valoarea finală:

$$c(4T) = K(1-e^{-4T/T}) = 0.982K$$

Răspunsul la treaptă unitară



Pentru $t \geq 4T$ răspunsul rămâne într-un interval de 2% din valoarea sa finală.
Timpul de răspuns este:

$$t_s = 4T$$

Răspunsul la treaptă unitară

Pentru constante de timp mici - răspuns mai rapid.

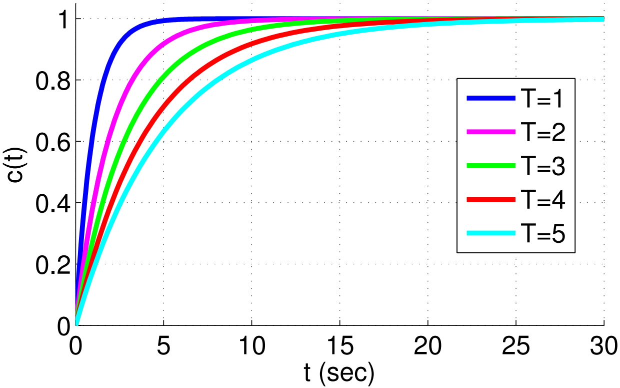


Figure: Răspunsul sistemelor de ordinul 1 pentru diferite valori ale constantei de timp

Răspunsul la rampă unitară

$$r(t) = t, \quad R(s) = \frac{1}{s^2}, \qquad C(s) = \frac{K}{Ts+1}\frac{1}{s^2}$$

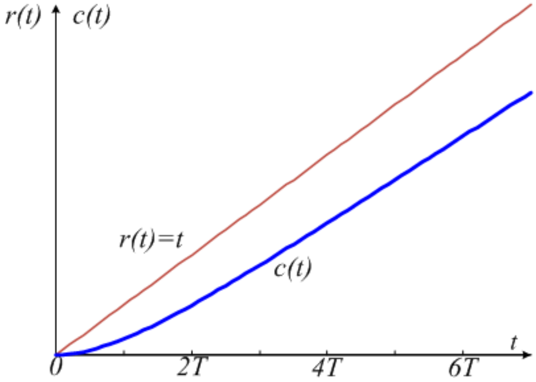
Dezvoltând $C(s)$ în fracții simple se obține:

$$\begin{aligned} c(t) &= \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[K\left(\frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1}\right)\right] \\ &= K(t - T + Te^{-t/T}), \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

Dacă timpul tinde la infinit $t \to \infty$, sistemul va urmări asimptotic o dreaptă cu ecuația:

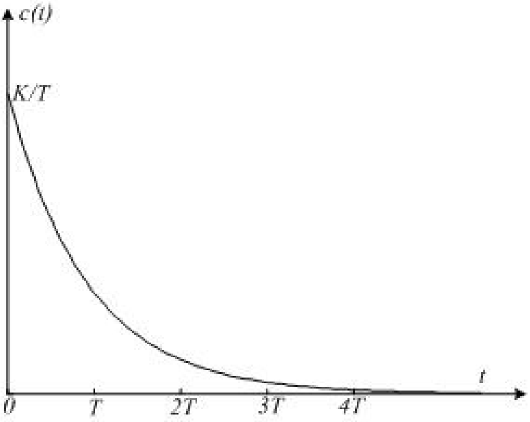
$$c(t) = K\left(t - T\right)$$

Răspunsul la rampă unitară



$$e^{-4T/T} = e^{-4} = 0.0183, \quad \Rightarrow \quad t_s = 4T$$

$$r(t) = \delta(t), \quad R(s) = 1, \quad C(s) = \frac{K}{Ts+1}, \quad c(t) = \frac{K}{T}e^{-t/T}, \quad (t \geq 0)$$

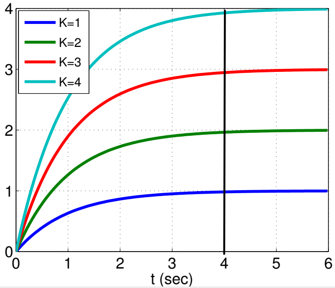


Factorul de proporționalitate. Exemplu

Se consideră un sistem de ordinul 1 cu funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{K}{s+1}$$

- $T = 1$ și $t_s = 4T = 4sec$, pentru orice valoare a lui K.
- Valoarea de regim staționar a ieșirii, pentru intrare treaptă unitară este K. Răspunsul pentru diferite valori ale lui K:



Influența factorului de proporționalitate

Se consideră:

- orice sistem liniar cu o funcție de transfer $H(s)$ și factorul de proporționalitate $K = 1$, *și*
- un sistem cu funcția de transfer $H_k(s) = kH(s)$

Răspunsurile la treaptă unitară sunt:

- for $H(s)$:

$$c(t) = L^{-1}[H(s)R(s)] = L^{-1}[\frac{H(s)}{s}]$$

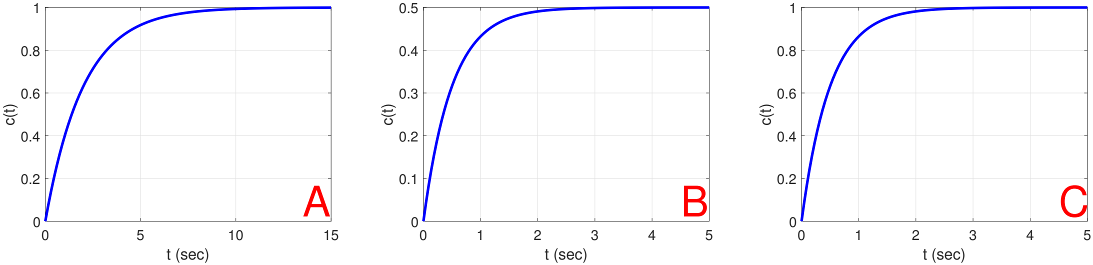
- for $H_k(s)$:

$$c_k(t) = L^{-1}[H_k(s) \cdot R(s)] = L^{-1}[\frac{k \cdot H(s)}{s}] = k \cdot L^{-1}[\frac{H(s)}{s}] = k \cdot c(t)$$

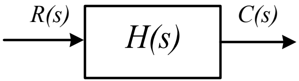
Exerciţiu

Determinaţi care dintre răspunsurile la treaptă unitară din figurile de mai jos corespund funcţiilor de transfer:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+2}, \qquad , G_2(s) = \frac{2}{s+2}, \qquad , G_3(s) = \frac{1}{2s+1}$$



Sisteme de ordinul 2



$$H(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ω_n - *pulsația naturală*, ζ - *factorul de amortizare*, K - factorul de proporționalitate.

$$\omega_n > 0, \qquad \zeta \geq 0$$

Sisteme de ordinul 2. Exemple

Forma generală:

$$H(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Exemple:

- $H_1(s) = \dfrac{1}{s^2 + s + 1}, \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{\omega_n^2} = 1, \ \dfrac{2\zeta}{\omega_n} = 1$

$$\Rightarrow \omega_n = 1; \quad \zeta = \frac{1}{2}, \quad K = 1$$

- $H_2(s) = \dfrac{4}{s^2 + 2s + 2} = \dfrac{2}{\frac{1}{2}s^2 + s + 1}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{1}{2}; \Rightarrow \ \omega_n = \sqrt{2}, \quad \frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{2\zeta}{\sqrt{2}} = 1 \ \Rightarrow \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad K = 2$$

Sisteme de ordinul 2

- **Pentru analiza sistemului de ordinul 2 se va considera $K = 1$.**
- Un alt factor de proporționalitate nu schimbă caracteristicile răspunsului tranzitoriu, ci influențează numai amplitudinea sa și valoarea în regim staționar (proporționale cu K).
- Polii sistemului $H(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$, sunt soluțiile ecuației caracteristice:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$\Delta = 4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2 = 4\omega_n^2(\zeta^2 - 1)$$

Polii sunt:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

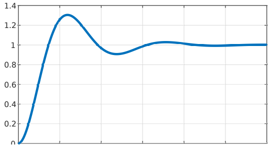
Sisteme de ordinul 2

sistem subamortizat

$0 < \zeta < 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta < 0$ poli complex conjugați

$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}j,$

răspuns periodic amortizat

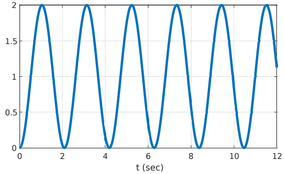


sistem neamortizat

$\zeta = 0$ poli pe axa imaginară:

$s_{1,2} = \pm\omega_n j,$

răspuns oscilant întreținut

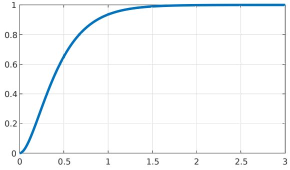


sistem supra-amortizat

$\zeta \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq 0$ poli reali

$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1},$

răspuns aperiodic amortizat



Răspunsul la treaptă al sistemelor subamortizate

$$r(t) = 1, \quad R(s) = \frac{1}{s}, \quad C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Sistem **subamortizat**: $0 < \zeta < 1$. Polii sunt complecși $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n j\sqrt{1-\zeta^2}$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

unde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ - **pulsația de oscilație**.

$$\mathcal{L}^{-1}[C(s)] = c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot sin\left(\omega_d t + arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

Răspunsul la treaptă al sistemelor subamortizate

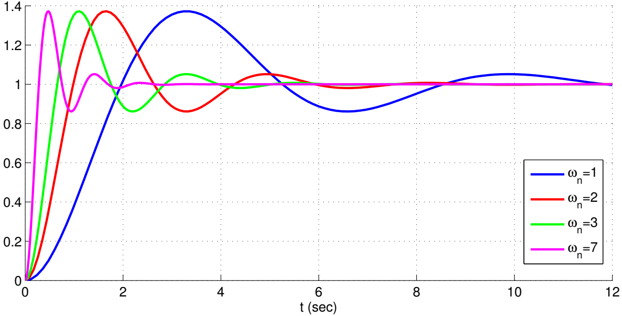


Figure: Răspunsul la treaptă al unui sistem subamortizat pentru ζ - constant și diferite valori ale lui ω_n

Răspunsul la treaptă al sistemelor subamortizate

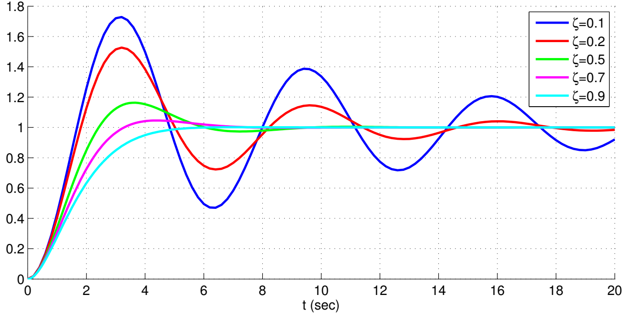


Figure: Răspunsul la treaptă al unui sistem subamortizat pentru ω_n constant și diferite valori ale lui ζ

Răspunsul la treaptă al sistemelor neamortizate

Sistem **neamortizat**: $\zeta = 0$. Poli imaginari$s_{1,2} = \pm j\omega_n$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}, \quad R(s) = \frac{1}{s}, \quad C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$$

Răspunsul la treaptă:

$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t, \quad (t \geq 0)$$

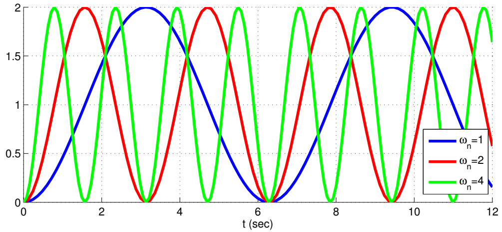


Figure: Răspunsul la treaptă al unui sistem de ordinul 2 neamortizat pentru diferite valori ale lui ω_n

Răspunsul la treaptă al sistemelor critic amortizate

Sistem **critic amortizat**: $\zeta = 1$. Polii sunt reali și egali: $s_{1,2} = -\omega_n$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}, \quad R(s) = \frac{1}{s}, \quad C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2 s}$$

Răspunsul la treaptă:

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 - \omega_n t), \quad ,(t \geq 0)$$

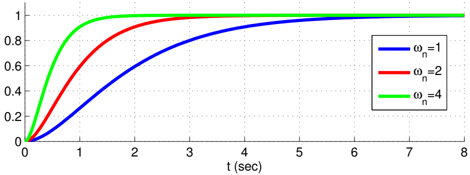


Figure: Răspunsul la treaptă al sistemelor de ordinul 2 critic amortizate pentru diferite valori ale lui ω_n

Răspunsul la treaptă al sistemelor supra-amortizate

Sistem **supraamortizat**: $\zeta > 1$.
Polii sunt reali și **negativi**: $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$.

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s - s_1)(s - s_2)}$$

Răspunsul la treaptă: $c(t) = 1 + \dfrac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\dfrac{e^{s_1 t}}{s_1} - \dfrac{e^{s_2 t}}{s_2}\right)$

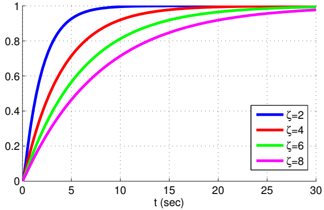


Figure: Răspunsul la treaptă al unui sistem de ordinul 2 supraamortizate pentru diferite valori ale lui ζ

Răspunsul la treaptă al sistemelor de ordinul 2

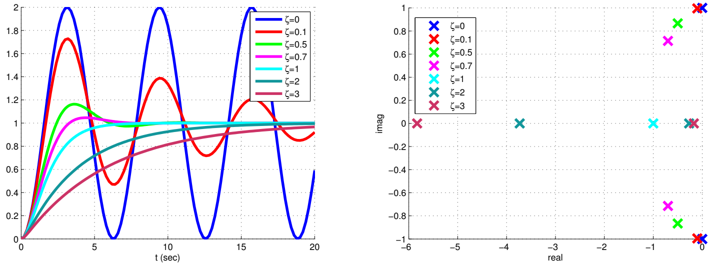
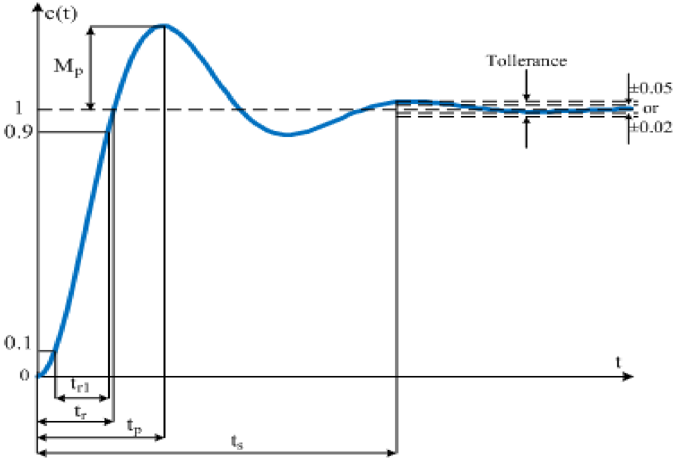


Figure: Răspunsul la treaptă al sistemelor de ordinul 2pentru diferite valori ale lui ζ și polii sistemului

Specificațiile răspunsului tranzitoriu al sistemelor

Timp de creștere, timpul răspunsului maxim, suprareglaj, timp de răspuns



Răspunsul tranzitoriu al sistemelor de ordinul 2

1. Timpul de creștere, t_r : timpul necesare răspunsului să crească de la 10% la 90%, sau de la 0% la 100% din valoarea finală.
2. Timpul răspunsului maxim, t_p : timpul necesar răspunsului să atingă primul vârf al răspunsului (sau valoarea maximă).
3. Suprareglajul M_p : valoarea maximă a răspunsului măsurată de la valoarea staționară a răspunsului. Suprareglajul în procente este $(M_{p\%})$:

$$M_{p\%} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \cdot 100\%$$

unde $c(\infty)$ este valoarea finală (în regim staționar) a ieșirii.

4. Timpul de răspuns, t_s : timpul necesar ieșirii să ajungă și să rămână într-un interval din jurul valorii de regim staționar, de obicei 2% sau 5% din valoarea finală.

Timpul de creștere

Timpul de creștere t_r se obține înlocuind $c(t_r) = 1$ sau

$$c(t_r) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \sin\left(\omega_d t_r + arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) = 1$$

sau

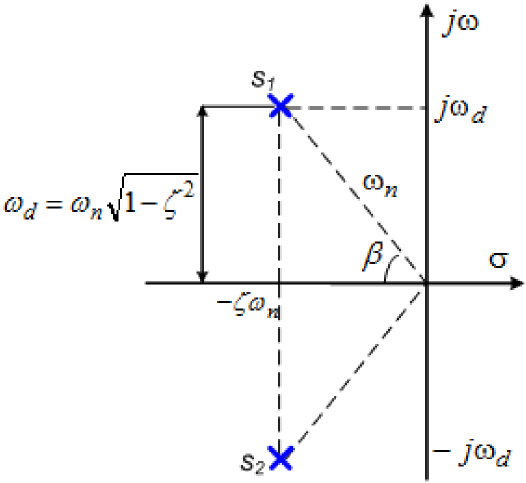
$$\sin\left(\omega_d t_r + arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) = 0$$

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \cdot \left(\pi - arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

$\beta =$ unghiul între axa reală negativă și linia care leagă originea se polul s_1 (vezi figura următoare).

Polii complecși ai unui sistem de ordinul 2

Figură importantă !!



Timpul răspunsului maxim

Se obține derivând $c(t)$ în raport cu timpul și egalând derivata cu zero:

$$\frac{dc(t)}{dt}\Big|_{t=t_p} = sin(\omega_d t_p) \cdot \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\omega_n t_p} = 0$$

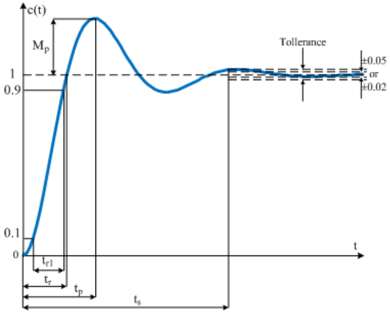
$$sin(\omega_d t_p) = 0$$

$$\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, ...,$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

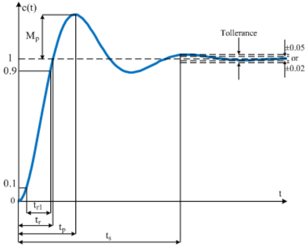
unde:

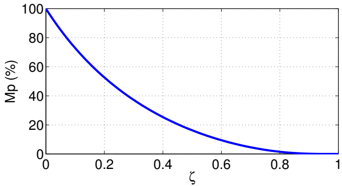
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{(1-\zeta^2)}$$



Suprareglajul

M_p apare la timpul $t = t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$.





$$M_p = c(t_p) - c(\infty) = c(t_p) - 1 = -\frac{e^{-\zeta\omega_n\pi/\omega_d}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d\pi/\omega_d + \beta)$$

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Suprareglajul în procente:

$$M_{p\%} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \cdot 100\% = \frac{c(t_p) - 1}{1} \cdot 100\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot 100\%$$

Timpul de răspuns

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}/\sqrt{1-\zeta^2} \cdot sin\left(\omega_d t + \beta\right)$$

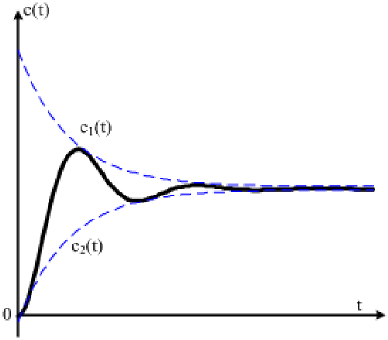
Curbele înfășurătoare:

$$c_{1,2}(t) = 1 \pm e^{-\zeta\omega_n t}/\sqrt{1-\zeta^2}$$

$c_1(t), c_2(t)$ și $c(t)$ vor ajunge la 2% din valoarea finală aproximativ când

$$e^{-\zeta\omega_n t_s} < 0.02, \text{ sau } \zeta\omega_n t_s \cong 4$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$



Exemplu

Se consideră un sistem cu funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{25}{s^2 + 6s + 25} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Se calculează:

1. Polii sistemului:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{1 - \zeta^2}j = -3 \pm 4j$$

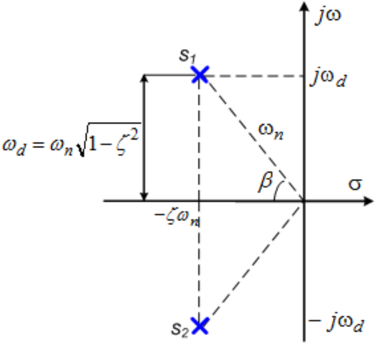
2. Pulsația oscilațiilor (partea imaginară a polilor) este:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = 5\sqrt{1 - 0.6^2} = 4$$

   și partea reală negativă a polilor:

$$-\zeta\omega_n = -3.$$

Exemplu



$$\beta = arctan\frac{\omega_d}{\zeta\omega_n} = 0.93$$

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{3.14 - 0.93}{4} = 0.55sec$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3.14}{4} = 0.78sec$$

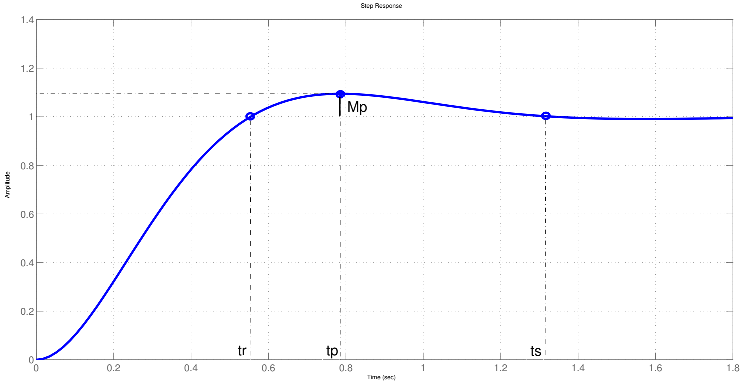
$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.095$$

$$M_p(\%) = 9.5\%$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{3} = 1.33sec$$

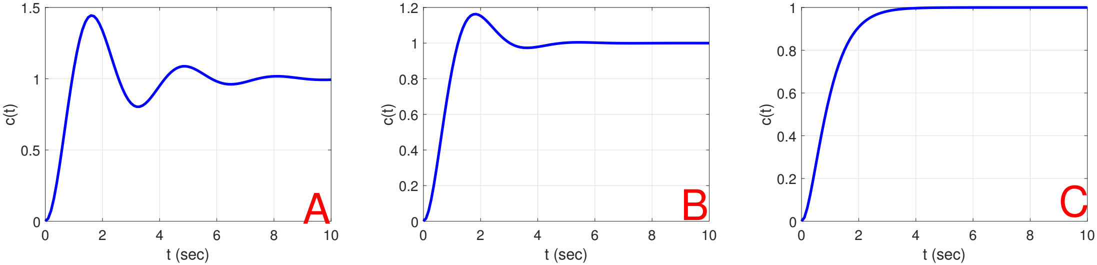
Exemplu

Răspunsul la treaptă al sistemului. Valorile parametrilor sistemului se observă din figură.



Determinaţi care dintre răspunsurile la treaptă unitară din figurile de mai jos corespund funcţiilor de transfer:

$$G_1(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 4}, \quad , G_2(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}, \quad , G_3(s) = \frac{4}{s^2 + s + 4}$$



Determinaţi care dintre răspunsurile la treaptă unitară din figurile de mai jos corespund funcţiilor de transfer:

$$G_4(s) = \frac{4}{s^2+4}, \qquad , G_5(s) = \frac{1}{s^2+1}, \qquad , G_6(s) = \frac{4}{s^2+5s+4}$$