① Să se determine formula de cuadratură de grad maxim de exactitate. Pt $f \in C^2[a,b]$ să se determine nucleul lui Peano, semnul acestuia și o evaluare a restului cu $\|f''\|_\infty$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}} f(x)\,dx = A_0 f(x_0) + R(f)$$

Rezolvare:

În cazul acesta ponderea (funcția pondere) este:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \; ; \quad w : [-1,1] \to \mathbb{R}$$

Avem un singur nod x_0 și un singur coeficient A_0, $n = 0$.
Fiind două necunoscute considerăm condițiile:

$$R(1) = R(x) = 0 \qquad \left(R(f) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}} f(x)\,dx - A_0 f(x_0) \right)$$

$$\begin{cases} R(1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \, 1\,dx - A_0 \cdot 1 = 0 \\[2ex] R(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \, x\,dx - A_0 x_0 = 0 \end{cases}$$

Vom folosi: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int_{-1}^{1} (x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{1+x}\,\Big|_{-1}^{1} = 2\sqrt{2}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}}\, x\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x+1-1}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}\,dx - \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}\,dx - 2\sqrt{2} = \int_{-1}^{1} (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx - 2\sqrt{2} = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1} - 2\sqrt{2} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2^3} - 2\sqrt{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

și obținem sistemul

$$\begin{cases} 2\sqrt{2} - A_0 \cdot 1 = 0 \\ \frac{-2\sqrt{2}}{3} - A_0 x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 2\sqrt{2} \\ \frac{-2\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 2\sqrt{2} \\ x_0 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Obținem formula de cuadratură

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}} f(x)\,dx = 2\sqrt{2}\, f\left(-\frac{1}{3}\right) + R(f)$$

Mai mult

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}} x^2\,dx \overset{x+1=u}{=} \int \frac{(u-1)^2}{\sqrt{u}}\,du = \int \left(u^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}\right) du =$$

$$= \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} u^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{u} = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}} x^2\,dx = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}\Big|_{-1}^{1} - \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1} + 2\sqrt{x+1}\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{2}{5} 2^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} 2^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{2} = {}^{3/}\frac{2}{5} \cdot 4\sqrt{2} - {}^{5/}\frac{8}{3}\sqrt{2} + {}^{15/}2\sqrt{2} =$$

$$= \frac{24 - 40 + 30}{15}\sqrt{2} = \frac{14}{15}\sqrt{2}$$

Deducem că:

$$R(x^2) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}} x^2\,dx - 2\sqrt{2}\left(\frac{-1}{3}\right)^2 = {}^{3/}\frac{14}{15}\sqrt{2} - {}^{5/}\frac{2}{9}\sqrt{2} = \frac{42-10}{45}\sqrt{2} =$$

$$= \frac{32}{45}\sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow$$ formula de cuadratură verifică $R(1) = R(x) = 0$, $R(x^2) \neq 0$

$\Rightarrow$ gradul de exactitate este 1.

Pentru a determina termenul rest vom folosi următorul rezultat legat de reprezentarea Peano a funcționalelor liniare.

"Fie $R: C^n[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcțională liniară a.î. $R(P) = 0 \ \forall P \in \Pi_{n-1}$ ($\ker P = \Pi_{n-1}$). Atunci $\forall f \in C^n[a,b]$

$$R(f) = \int_a^b f^{(n)}(u) K(u)\, du$$ "

unde K reprezintă nucleul Peano definit prin

$$K(u) = \frac{1}{(n-1)!} R_x\left((x-u)_+^{n-1}\right), \ u \in [a,b]$$

Indicele in R_x indică faptul că R "acționează" în raport cu variabila x (nu în raport cu u)

Mai mult, dacă nucleul K păstrează semn constant pe $[a,b]$ atunci $\exists\, \xi \in [a,b]$ a.î.

$$R(f) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} R(x^n)$$

În cazul nostru: $R: C^2[-1,1] \to \mathbb{R}$

$$R(f) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x+1}} f(x) - 2\sqrt{2}\, f\left(-\frac{1}{3}\right)$$

Avem $\mathrm{Ker}(R) = \Pi_1$ $\qquad (n-1=1 \Rightarrow n=2)$

$$\Rightarrow R(f) = \int_{-1}^{1} K(u)\, f^{(2)}(u)\, du$$

unde nucleul Peano este dat de:

$$K(u) = \frac{1}{(2-1)!} R_x\left((x-u)_+^{2-1} \right) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}} (x-u)_+\, dx - 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{3}-u\right)_+$$

în locul lui f

$$= \int_{-1}^{u} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \underbrace{(x-u)_+}_{=0\ (x\le u)}\, dx + \int_{u}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \underbrace{(x-u)_+}_{=(x-u)^1\ (x\ge u)}\, dx - 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{3}-u\right)_+ =$$

$$= \int_{u}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}} (x-u)\, dx - 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{3}-u\right)_+ = \int_{u}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx - u\int_{u}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}}\, dx -$$

$$- 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{3}-u\right)_+ = \int_{u}^{1} \frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}}\, dx - u\int_{u}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}}\, dx - 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{3}-u\right)_+ =$$

$$= \int_{u}^{1} \sqrt{1+x}\, dx - (1+u)\int_{u}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}}\, dx - 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{3}-u\right)_+ =$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{u}^{1} - (1+u)\, 2\sqrt{x+1}\,\Big|_{u}^{1} - 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{3}-u\right)_+ =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{2^3} - \sqrt{(u+1)^3}\right) - 2(1+u)\left(\sqrt{2}-\sqrt{u+1}\right) - 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{3}-u\right)_+ =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{3}\left(\sqrt{2^3} - \sqrt{(u+1)^3}\right) - 2(1+u)\left(\sqrt{2}-\sqrt{u+1}\right), & -\frac{1}{3} \le u \\ \frac{2}{3}\left(\sqrt{2^3} - \sqrt{(u+1)^3}\right) - 2(1+u)\left(\sqrt{2}-\sqrt{u+1}\right) - 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{3}-u\right), & u < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow K(u) = \begin{cases} \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}(1+u)\sqrt{1+u} - 2(1+u)\sqrt{2} + 2(1+u)\sqrt{u+1}, & -\frac{1}{3} \le u \\ \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}(1+u)\sqrt{1+u} - 2\sqrt{2}(1+u) + 2(1+u)\sqrt{1+u} + 2\sqrt{2}\left(u+\frac{1}{3}\right) & u \le \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow K(u) = \begin{cases} 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{3} - (1+u)\right) + 2(1+u)\sqrt{1+u}\left(1-\frac{1}{3}\right), & -\frac{1}{3} \le u \\ 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{3} - (1+u)\right) + 2(1+u)\sqrt{1+u}\left(1-\frac{1}{3}\right) + 2\sqrt{2}\left(u+\frac{1}{3}\right), & u \le -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{3} - u\right) + \frac{4}{3}(u+1)\sqrt{1+u}, & -\frac{1}{3} \le u \\ \frac{4}{3}(u+1)\sqrt{u+1}, & u \le -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Se observă că are loc inegalitatea

$$K(u) \geq 0 \quad \forall u \in [-1,1]$$

$\Rightarrow K$ păstrează semn constant pe $[-1,1]$

$\Rightarrow \exists\ \xi \in [-1,1]$ a.î. $R(f) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} R(x^2) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\overset{16}{\cancel{32}}}{45} \sqrt{2}\, f^{(2)}(\xi)$

$\Rightarrow R(f) = \frac{16\sqrt{2}}{45} f''(\xi)$

Dacă $\|f''\|_\infty \leq M \Rightarrow |R(f)| \leq \frac{16\sqrt{2}}{45} \cdot M$