Curs nr. 1

Teoria Campului Electromagnetic

Universitatea Tehnica din Cluj-Napoca http://users.utcluj.ro/~lcret/

Despre Curs

Scop

Familiarizarea studentilor cu notiuni despre electromagnetism

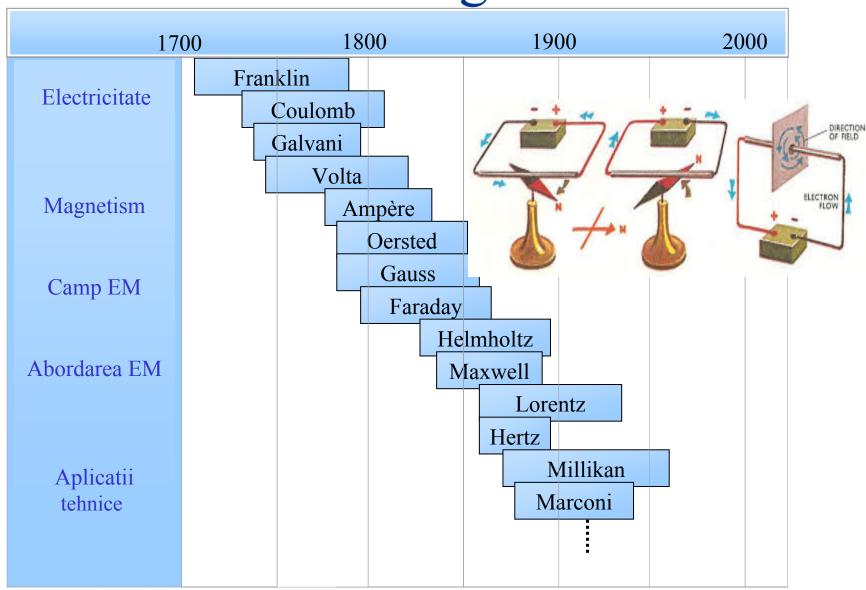
Objective

- Prezentarea principiilor si aplicatiilor din electromagnetism
- Intelegerea si aplicarea legilor ce guverneaza campul electric si cel magnetic
- Cunoasterea anumitor aplicatii ale campului electromagnetic

Cuprinsul cursului

- 1. Electrostatica
- 2. Legile generale. Legi de material
- 3. Magnetostatica
- 4. Electrodinamica
- 5. Unde electromagnetice

Istoria electromagnetismului



INTRODUCERE

Statica si dinamica in electromagnetism

Sarcini stationare → campuri electrostatice

(sarcinile au viteza nula si acceleratia nula)

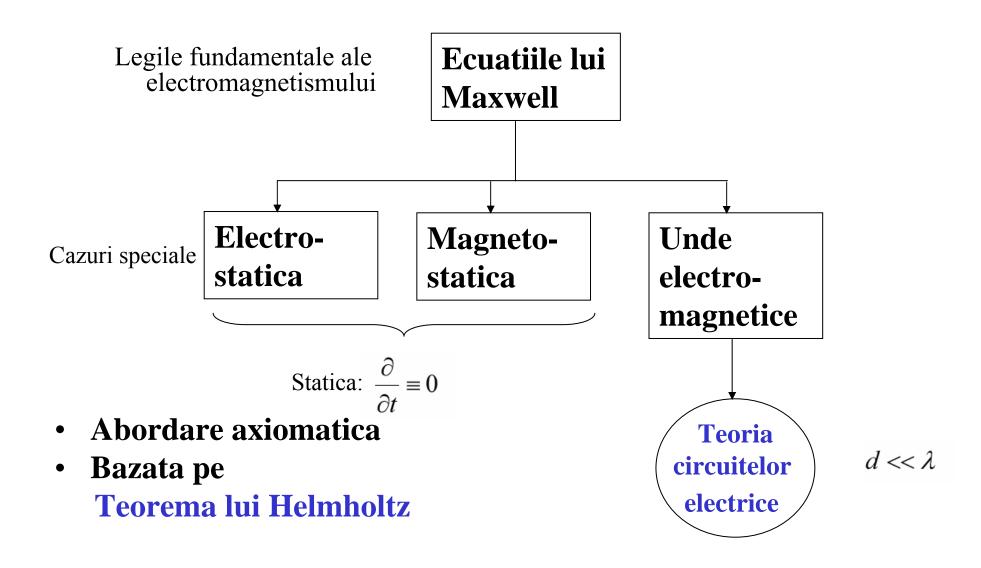
Curenti constanti → campuri magnetostatice

(sarcinile au viteza ne-nula si acceleratia nula)

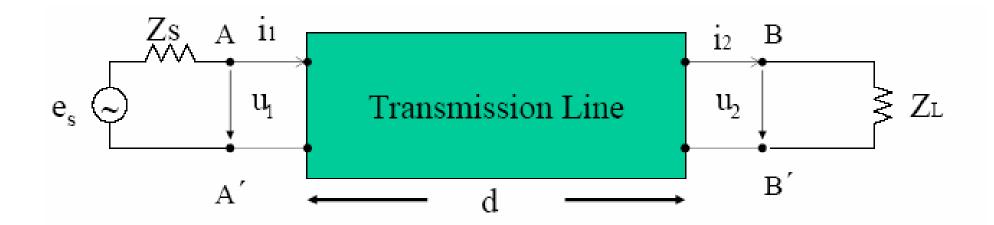
Curenti variabili in timp → camp electromagnetic

(sarcinile au viteza ne-nula si acceleratia ne-nula)

Studiul electromagnetismului



Modelul de circuit cu elemente concentrate



•Modelul liniei de transmisie cu elemente concentrate, vazut

intre AA' sau BB' $i_1 = i_2$ $u_1 = u_2$

Valid doar daca

Lungimea liniei de transmisie $d \ll \lambda$ Lungimea de unda a semnalului

Doua variante

1. $d << \lambda \ (d = 0.01 \lambda)$

Tensiunea la capatul liniei (d) este aproximativ aceeasi cu tensiunea de intrare. Linia poate fi tratata ca un circuit cu elemente concentrate.

2. d comparable to λ

In aceasta situatie, tensiunea la capatul liniei poate diferi mult fata de tensiunea de intrare. Linia se trateaza ca un circuit cu elemente distribuite.

$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{f} [m]$$

Maximum lengths for lumped applications

Application	Frequency	Wavelength	Max length
		$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{10^8}$	(based on d=
		f	0.01 λ)
Power Transmission	50 Hz	6.000 km	60 km
Telephone	1 kHz	300 km	3 km
TV	150 Mhz	2 m	2 cm
Radar/Microwave	10 GHz	3 cm	0.3 mm
Visible light	5×10 ¹⁴ Hz	600 nm	6 nm

SI (International System of) Units

Fundamental SI Units

Quantity	<u>Unit</u>	Abbreviation
length	meter	m
mass	kilogram	kg
time	second	S
current	ampere	A
temperature	kelvin	K
luminous intensity	candela	cd

Marimi vectoriale fundamentale in electromagnetism

- Un camp reprezinta distributia spatiala a unei marimi; aceasta marime poate fi atat un *vector* cat si un *scalar*.
- Atunci cand un eveniment produs intr-o anumita locatie produce un efect intr-o alta locatie, se spune ca aceste evenimente sunt conectate printr-un camp.
- •In general, marimile vectoriale fundamentale in electromagnetism sunt functii atat de pozitie (in spatiul 3D) cat si de timp.

Marimi vectoriale fundamentale in electromagnetism

• Intensitate camp electric (\overline{E})

```
u.m. = volt per metru (V/m = kg m/A/s^3)
```

• Inductie electrica (\overline{D})

```
u.m. = coulomb per metru patrat (C/m^2 = A s/m^2)
```

• Intensitate camp magnetic (\overline{H})

```
u.m. = amper per metru (A/m)
```

• Inductie magnetica (\overline{B})

```
u.m. = tesla = weber per metru patrat

(T = Wb/m^2=kg/A/s^3)
```

Trei constante universale

• Viteza undei electromagnetice (ex: lumina) in vid

$$c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

• Permeabilitatea magnetica a vidului

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

• Permitivitatea dielectrica a vidului

$$\varepsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

Relatia dintre cele trei constante universale

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

In vid

$$\overline{B} = \mu_0 \overline{H}$$

$$\overline{D} = \varepsilon_{_{0}} \overline{E}$$

Capitolul 1

Electrostatica

Campul electric in vid

- Definitii
- Sarcini Electrice
- Legea lui Coulomb si definitia fortei electrice si a intensitatii campului electric
- Campul electric pentru distributii discrete
- Campul electric pentru distributii continue
- Legea lui Gauss

Conceptul de *camp* se utilizeaza pentru a descrie "*o actiune la distanta*" – o pertubatie produsa intr-un punct poate avea un efect asupra unui alt punct, situat la o anumita distanta. Regiunea in care se resimte acest efect al mediului de cuplaj este descrisa prin intensitatea campului (marime vectoriala).

Fenomenele electrice cauzate de frecare fac parte din viata noastra de zi cu zi, si pot fi intelese prin intermediul sarcinilor electrice.

Efectele sarcinilor electrice pot fi observate ca atractia / respingerea unor obiecte diverse "incarcate cu sarcina electrica".

Electrostatica este ramura electromagnetismului care se ocupa de studiul *efectelor sarcinilor electrice statice*.

Legea fundamentala a electrostaticii este legea lui Coulomb care se bazeaza pe observatii fizice si nu poate fi dedusa logic sau matematic din orice alta lege a fizicii.

Sarcini electrice

Sarcina electrica este o proprietate fundamentala a materiei. Aceasta este masurata in *Coulomb* (C). S-a convenit ca intensitatea curentului electric, avand unitatea de masura *Amper* (A) sa fie aleasa ca unitate de masura fundamentala in SI. De aceea, *Coulomb* este o unitate de masura secundara, obtinuta ca:

$$i = -\frac{dQ}{dt} \Longrightarrow 1C = 1A \times 1s$$

i reprezinta curentul electric, in Amper (A)

Q reprezinta sarcina electrica, in Coulomb (C)

t reprezinta timpul

Sarcini electrice

- Dovezi ale existentei sarcinilor electrice exista pretutindeni, ex.
 - electricitate statica
 - fulgere
- Obiectele se pot incarca prin contact sau prin forte de frecare.
- Benjamin Franklin (anii 1700) descopera ca exista doua tipuri de sarcini:
 - Sarcini pozitive
 - Sarcini negative
- Franklin descopera si ca sarcinile de acelasi fel se resping si sarcinile diferite se atrag.
- Sarcinile electrice sunt:
 - cuantificate (Millikan)—masoara sarcina electrica a electronului
 - conservate (Franklin)

Sarcinile electrice

Clase de materiale

- Conductoare sunt materiale in care sarcinile se pot misca liber (ex. cupru).
- **Izolatoare** sunt materiale in care sarcinile nu se pot misca liber (ex. sticla).
- Semiconductoare sunt materiale in care sarcinile se pot misca in anumite conditii (ex. silicon).

Sarcinile si Pamantul

- Pamantul actioneaza ca o sursa sau o scurgere aproape infinita a sarcinilor, si de aceea sarcina sa neta nu poate fi modificata usor.
- Orice conductor in contact cu pamantul se spune ca e legat la pamant si nu poate avea o **sarcina neta**. (principiul paratrasnetului)

Sarcini electrice

Sarcini induse

- Plasarea unor obiecte incarcate in apropierea unui conductor poate duce la redistribuirea sarcinilor electrice *(polarizarea conductorului)*.
- Intr-un conductor polarizat legat la pamant, sarcinile electrice se vor transfera catre/de la pamant, putand ajunge sa ramana cu o sarcina neta (prin Inductie).
- Obiectele se pot incarca prin
 - conductie (necesita contact cu un alt obiect incarcat).
 - inductie (nu necesita contact cu un alt obiect incarcat).

Sarcini electrice

Nucleul atomului contine particule purtatoare de sarcini electrice: protonii. Protonii si electronii **reactioneaza in moduri opuse** la influenta campurilor EM externe. De aceea, ei au sarcini opuse.

S-a convenit ca protonii sa fie considerati incarcati cu sarcina positiva, si electronii cu sarcina negativa. Sarcina unui electron este egala ca valoare absoluta cu cea a unui proton si este:

$$Q_e = -1.602 \times 10^{-19}, C$$

In acest curs ne vom ocupa de sarcini electrice macroscopice, de ex. distributii de sarcina mult mai mari decat dimensiunile maxime ale unui nucleu atomic.

Sarcinile sunt asociate cu materia. De aceea, ele ocupa volumuri finite. Totusi, sarcinile volumice Q pot fi oricand considerate ca fiind alcatuite din volume mai mici. Aceasta metoda este foarte utila mai ales in cazul distributiilor de sarcina neomogene.

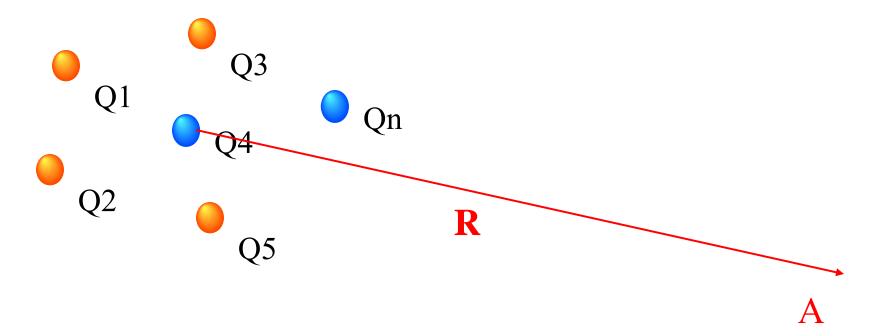
Distributii Continue de Sarcini

Sarcinile pot fi:

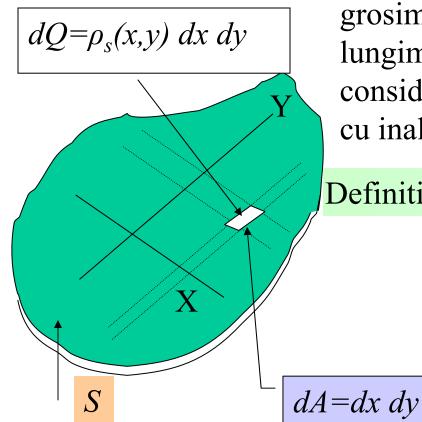
- Punctiforme (C)
- Distributii volumice de sarcini (C/m³) mai general
- Distributii superficiale de sarcini (C/m²)
- Distributii liniare de sarcini (C/m)

Sarcini punctiforme

Reprezinta sarcini al caror volum poate fi considerat infinitesimal (un punct) in comparatie cu distanta de la centrul sau pana la un punct in care se analizeaza campul electric.



Sarcini superficiale



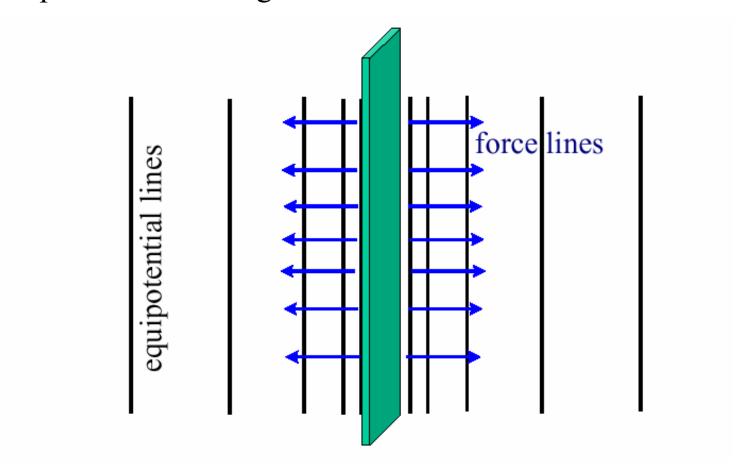
Sunt utile atunci cand sarcinile fizice 3-D sunt distribuite in straturi subtiri, a caror grosime este neglijabila in comparatie cu lungimea si latimea lor. In plus, se poate considera ca variatia densitatii de sarcina cu inaltimea este neglijabila.

Definitia desitatii superficiale de sarcina [C/m²]

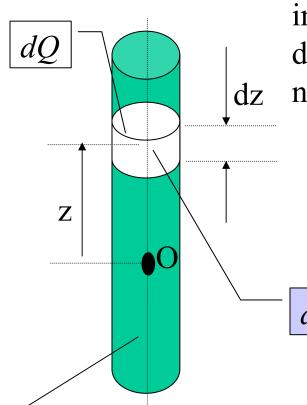
$$\rho_s = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA}$$

$$Q = \int_{S} \rho_{s} \cdot dA$$

Sarcinile superficiale implica simetria campului creat fata de planul in care se gasesc.



Sarcini liniare



Reprezinta aproximari utile pentru sarcinile al caror volum are doua dimensiuni neglijabile in raport cu cea de a treia (lungimea). Variatia densitatii de sarcina in sectiunea firului este neglijabila.

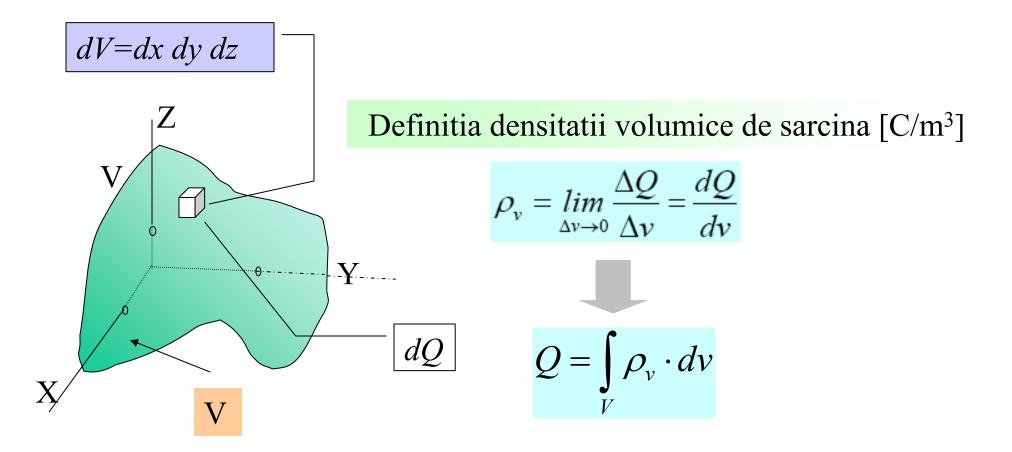
Definitia densitatii liniare de sarcina [C/m]

$$\rho_{l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl}$$

dl=dz

$$Q = \int_{C} \rho_l \cdot ds$$

Sarcini volumice



2. Legea lui Coulomb (1785)

$$F_{12} = \frac{1}{\underbrace{4\pi\varepsilon}_{k}} \frac{Q_{1}Q_{2}}{R^{2}} = -F_{21}, \text{ N}$$

Legea lui Coulomb stabileste faptul ca forta dintre doua sarcini electrice aflate in repaus este direct proportionala cu valorile sarcinilor electrice si invers proportionala cu patratul distantei dintre ele.

Aceata proportionalitate inversa cu patratul distantei este o caracteristica universala a campurilor in lumea noastra 3-D.

Sarcinile de acelasi semn se resping si sarcinile de semne diferite se atrag.

Constanta de proportionalitate k depinde de sistemul de unitati de masura folosit. In SI k=1 ($4\pi\epsilon$)

$$[k] = \frac{N \times m^2}{C^2} = \frac{N \times m^2}{A^2 \times s^2} = \frac{V \times m}{C}$$

Prin experimente (realizate in aer/vid), daca forta este masurata in newtoni, distanta in metri si sarcina in coulombi

$$k = 9.0 \times 10^9$$

Teoretic, in SI aceasta constanta are valoarea:

$$k = 10^{-7} c^2$$

unde c este viteza luminii.

Constanta

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi k}$$

se numeste permitivitate dielectrica, care in vid este

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi c^2 \cdot 10^{-7}} \simeq \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = \frac{10^{-9}}{36\pi}$$

O valoare mai precisa este

$$\varepsilon_0 = 8.856 \times 10^{-12}, \text{ F/m} = \text{C/(V} \times \text{m)}$$

Permitivitatea dielectrica a materialelor depinde de abilitatea materiei de a se polariza sub influenta unui camp electric extern.

Permitivitatea dielectrica a materialelor se determina, de obicei, relativ la cea a vidului prin intermediul permivitatii dielectrice relative (constanta dielectrica) ε_r

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

Aer: $\varepsilon_{\rm r} = 1.0006$

Apa: $\varepsilon_{\rm r} = 1.0006$

Sol urban (uscat): $\varepsilon_r \approx 3$

Sol rural (umed): $\varepsilon_r \approx 14$

Intensitatea campului electric (vector) E

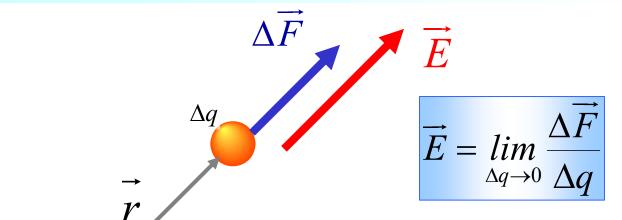
Vectorul intensitate camp electric reprezinta forta exercitata asupra unei sarcini unitare.

$$\vec{E} = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta q} = \frac{d\vec{F}}{\Delta q}, N/C = V/m \qquad \iff \vec{F} = \Delta q \cdot \vec{E}, N$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{F} = \Delta q \cdot \overrightarrow{E}, \ N$$

Aici, Δq este o sarcina de proba, ceea ce inseamna ca este suficient de mica pentru a nu perturba campul electric masurat initial, generat de sarcina sursa Q.

Intensitatea campului electric creat de o sarcina punctiforma q



Deci campul electric creat de aceasta sarcina este:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Intensitatea campului electric

Proprietati generale ale unui camp electric

- Campul electric este generat de orice obiect incarcat cu sarcina.
- Este un camp vectorial si respecta **principiul superpozitiei**, astfel incat campul unui sistem de obiecte incarcate este egal cu suma (vectoriala) a campurilor create de fiecare obiect incarcat in parte.
- Forta electrostatica dintre obiectele incarcate cu sarcina electrica este mediata de campul electric.

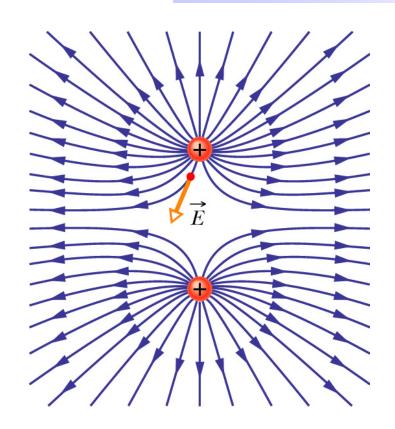
Intensitatea campului electric

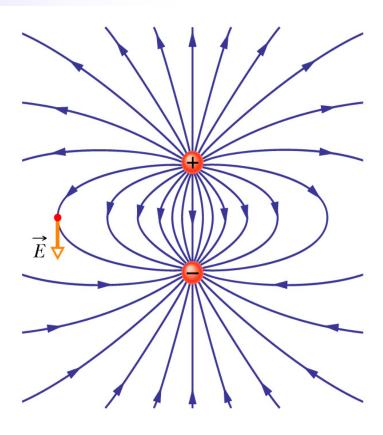
Liniile de camp electric

- Reprezinta un instrument de vizualizare pentru a ilustra geometria unui camp electric.
- Liniile de camp electric au ca origine sarcinile pozitive si se incheie in sarcinile negative.
- Directia campului electric in orice punct este tangentiala cu linia de camp ce trece prin acel punct.
- Intensitatea campului electric in orice punct este proportionala cu densitatea liniilor de camp din acea zona.

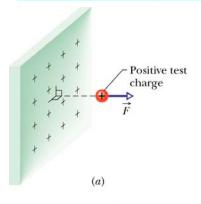
Intensitatea campului electric

Exemple:

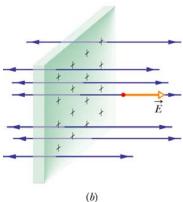




Intensitatea campului electric



Exemple:



Camp electric uniform: un camp electric ce are aceeasi amplitudine si aceeasi directie in orice punct.

Campul electric datorat mai multor sarcini punctiforme

Forta asupra unei sarcini de proba este

$$\Delta \vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \Delta \vec{F}_{i}$$

astfel incat campul electric este, prin definitie, dat de

$$\vec{E} = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta q} = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta \vec{F}_{i}}{\Delta q} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_{i}$$

Principiul superpozitiei!

Campul electric datorat mai multor sarcini punctiforme

Principiul superpozitiei

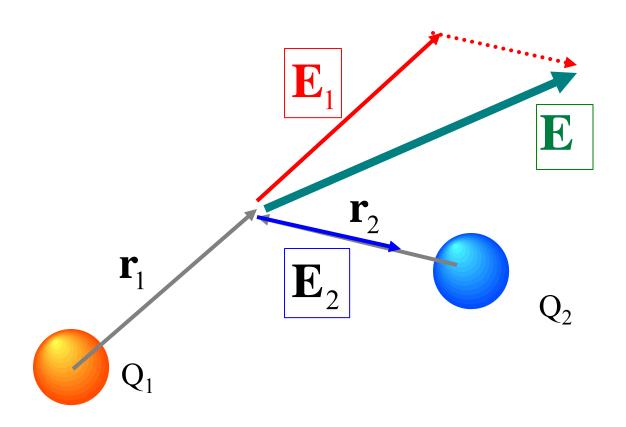
Acest principiu este de mare importanta pentru solutionarea problemelor de camp in medii liniare (medii ale caror proprietati electromagnetice (EM)) nu depind de intensitatea campului. In cazul campurilor electrostatice (CES), proprietatea EM care se ia in considerare este permitivitatea dielectrica. Daca nu depinde de E, atunci mediul este liniar.

CES datorat mai multor sarcini punctiforme in orice punct este suma vectoriala a campurilor create de fiecare sarcina individuala:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

Campul electric datorat mai multor sarcini punctiforme

Principiul superpozitiei (cont)



Campul electric datorat unor distributii de sarcina continue

Cand campul este datorat unor sarcini distribuite intr-un anumit **volum**, cu densitate cunoscuta P_{ν} C/m³, acest volum se considera alcatuit dintr-un **numar infinit de sarcini infinitezimale** (diferentiale):

$$dQ = \rho_{v} \cdot dv, \quad C$$

Fiecare sarcina diferentiala reprezinta in fapt o sarcina punctiforma. Ea genereaza o "parte" diferentiala a campului, care este:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \vec{u}, \quad V/m$$

Campul electric datorat unor distributii de sarcina continue

Campul total se obtine pe baza principiului superpozitiei.

Se realizeaza insumarea contributiilor diferentiale: aceasta reprezinta o integrare (integrala de volum).

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{V} \frac{\rho_v}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dv, \quad V/m$$

Cand sarcinile sunt distribuite pe o suprafata, sarcina totala se descompune in sarcini diferentiale de suprafata, fiecare fiind descrisa de densitatea superficiala de sarcina ρ_s C/m²:

$$dQ = \rho_s \cdot dA$$
, C

Campul electric datorat unor distributii de sarcina continue

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{S} \frac{\rho_s}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dA, \quad V/m$$

In cazul distributiilor liniare de sarcini, acestea se descompun in sarcini liniare diferentiale, fiecare fiind descrisa de densitatea liniara de sarcina ρ_l C/m:

$$dQ = \rho_l \cdot ds$$
, C

Campul electric generat de sarcinile liniare se determina utilizand urmatoarea integrala curbilinie:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_C \frac{\rho_l}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} ds, \quad V / m$$

Campul electric datorat unor distributii de sarcina continue

Calculul campului electric utilizand principiul superpozitiei

Algoritmul de calcul:

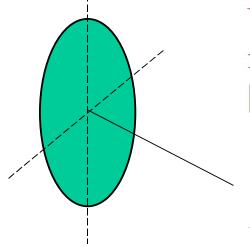
- Analiza problemei si a simetriei acesteia
- Abordarea solutiei
- Calcule
- Concluzii

Campul electric datorat unor distributii de sarcina continue

Exemplul nr.1

Campul electric al unui disc

Se da:



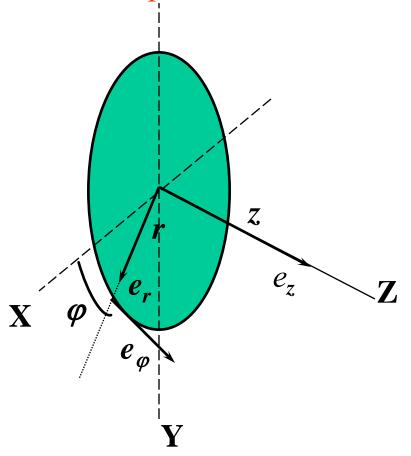
Un disc subtire circular, de raza R, incarcat cu densitatea de sarcina ρ_S [C/m²].

Se cere:

Determinarea campului electric *E* intr-un punct arbitrar, situat in oricare parte a discului.

Campul electric datorat unor distributii de sarcina continue

Analiza problemei si a simetriei acesteia

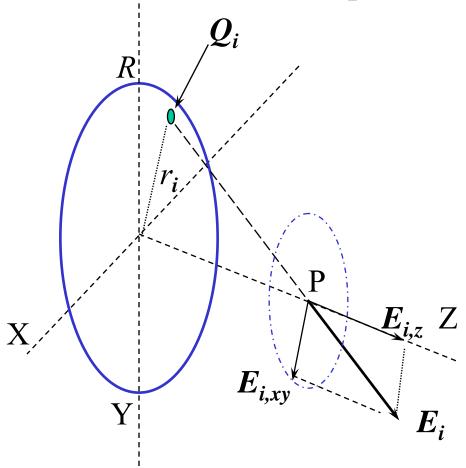


- 1. Distributia de sarcina: ρ_s [C/m²]
- 2. Axele de coordonate:axa Z = axa de simetrie,perpendiculara pe disc
- 3. <u>Simetria problemei:</u> cilindrica
- 4. Coordonate cilindrice:

$$r, z, \varphi$$

Campul electric datorat unor distributii de sarcina continue

Analiza, evaluarea campului



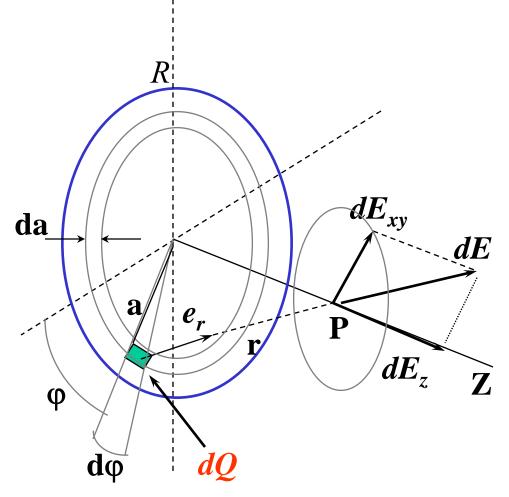
- 1. Axele XYZ
- 2. Punctul P pe axa Z
- 3. Toate sarcinile Q_i aflate la r_i si φ_i creeaza E_i in P
- $4. E_{i,xy}, E_{i,z}$
- 5. consecinta: $\Sigma E_{i,xy} = 0$,

de verificat!!

6.
$$E = E_z e_z$$
 doar!

Campul electric datorat unor distributii de sarcina continue

Abordarea solutiei



1. Sarcini distribuite

$$2. \quad dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} e_r$$

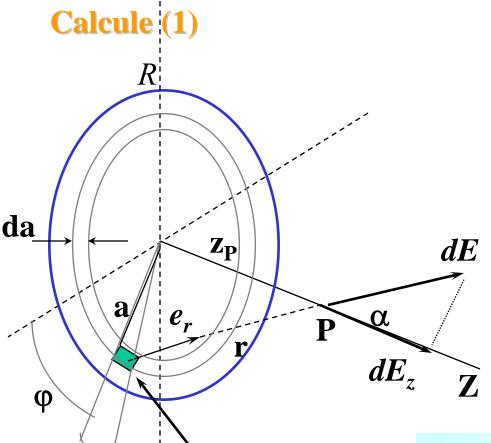
3. Inele si segmente

4.
$$dQ = \rho_s.dA = \rho_s (da.)(a d\varphi)$$

5. *Doar* componenta z!

6.
$$dE_z = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} (e_r \bullet e_z)$$

Campul electric datorat unor distributii de sarcina continue



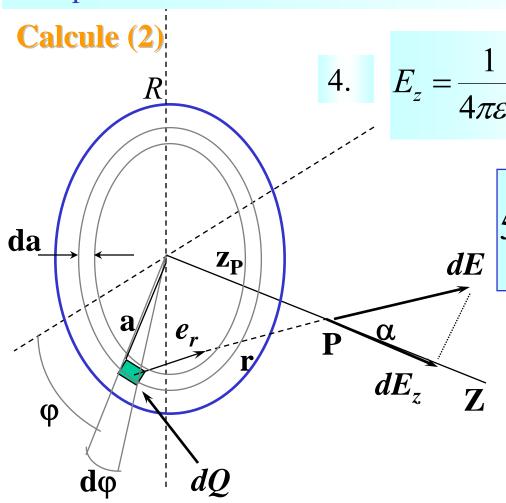
1.
$$dE_z = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} (e_r \bullet e_z)$$

2.
$$dQ = \rho_s.dA = \rho_s (da.)(a d\varphi)$$

3.
$$e_r \bullet e_z = \cos \alpha = \frac{z_P}{\sqrt{a^2 + z_P^2}}$$

4.
$$E_{z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{R} \frac{\rho_{s}.da.a.d\phi}{\left(a^{2} + z_{P}^{2}\right)} \frac{z_{P}}{\sqrt{a^{2} + z_{P}^{2}}}$$

Campul electric datorat unor distributii de sarcina continue



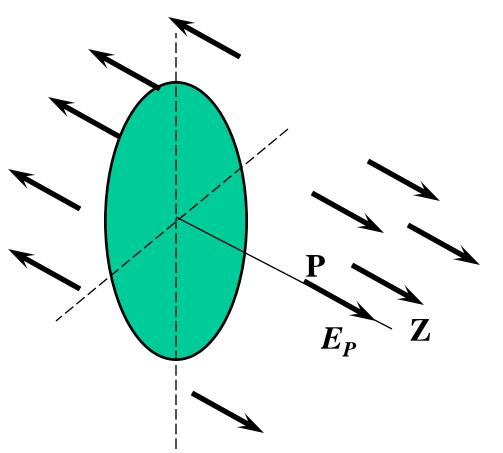
4.
$$E_{z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{R} \frac{\rho_{s}.da.a.d\phi}{\left(a^{2} + z_{p}^{2}\right)} \frac{z_{p}}{\sqrt{a^{2} + z_{p}^{2}}}$$

6. Daca
$$R \rightarrow infinit$$
:

$$E_z = \frac{\rho_s}{2 \varepsilon_0}$$

Campul electric datorat unor distributii de sarcina continue

Concluzii



Pentru discuri infinite:

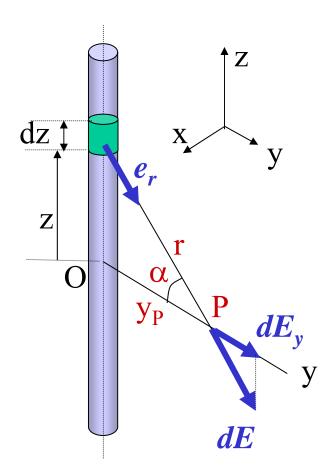
$$\mathbf{E}_{P} = \frac{\rho_{s}}{2\varepsilon_{0}} \mathbf{e}_{\mathbf{z}}$$

Intensitatea campului este independenta de distanta pana la disc =>

Camp omogen

Analiza:

- fir ∞ lung: ρ_l [C/m]
- simetrie cilindrica



Problema:

 $\boldsymbol{E_P}$ in punctul P(0,y_P,0)

Abordare:

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} e_r$$

- Element de sarcina: $dQ = \rho_l dz$
- Simetrie ⇒ doar componenta y !!

$$e_r$$
. $e_y = \cos \alpha$

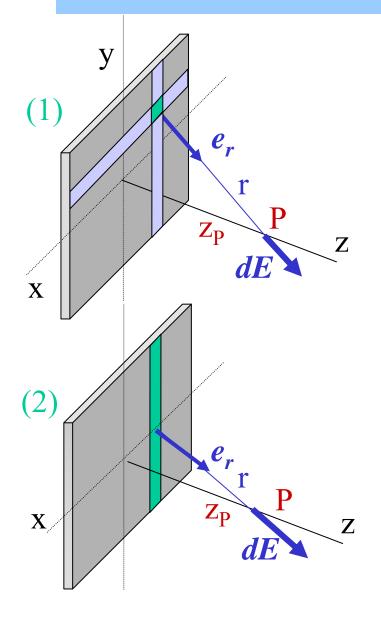
$$\mathbf{E} = \int \mathbf{dE_y} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_l . dz}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos \alpha$$

 $r, e_r \text{ si } \alpha \text{ sunt } f(z)$:

$$r = \sqrt{y_P^2 + z^2}$$
; $\cos \alpha = \frac{y_P}{r}$

 $=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 y_P}$

Concluzie: E simetrie radiala



Placa subtire, $\rho_s[C/m^2]$

(1)
$$= dA = dx.dy, at (x,y)$$

$$dQ = \rho_s dA = \rho_s dx.dy$$

$$dE = dE_x e_x + dE_y e_y + dE_z e_z$$

$$daca placa e \infty extinsa: dE // e_z$$

(2) daca $\rho_s = f(x)$: se utilizeaza rezultatul pt fir ∞ lung:

$$dE_z = \frac{d\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 z_P}$$

$$dE \text{ in planul XZ}$$

$$cu d\rho_l = \rho_s dx$$

Rezumatul formulelor de calcul de camp, pentru distributii sandard de sarcini electrice

Sarcina punctiforma

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{R^2} \hat{R}, \text{ V/m}$$

Sarcina liniara uniforma infinit lunga

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \frac{\rho_l}{r}$$
, V/m

Sarcina superficiala uniforma infinit extinsa

$$\vec{E} = \hat{n} \frac{\rho_s}{2\varepsilon}$$
, V/m