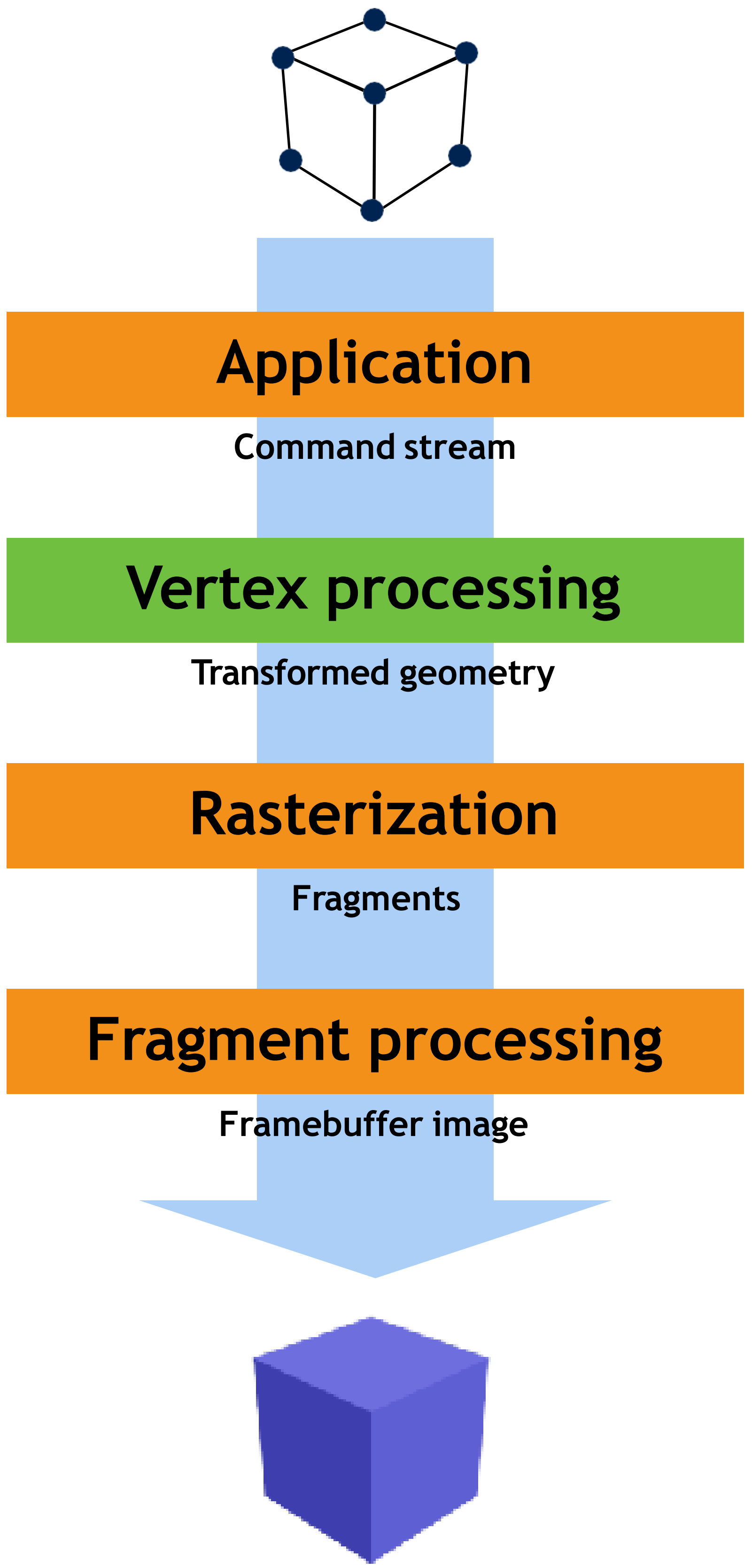
Transformări

Transformări

Transformările geometrice sunt folosite pentru a manipula modele geometrice:

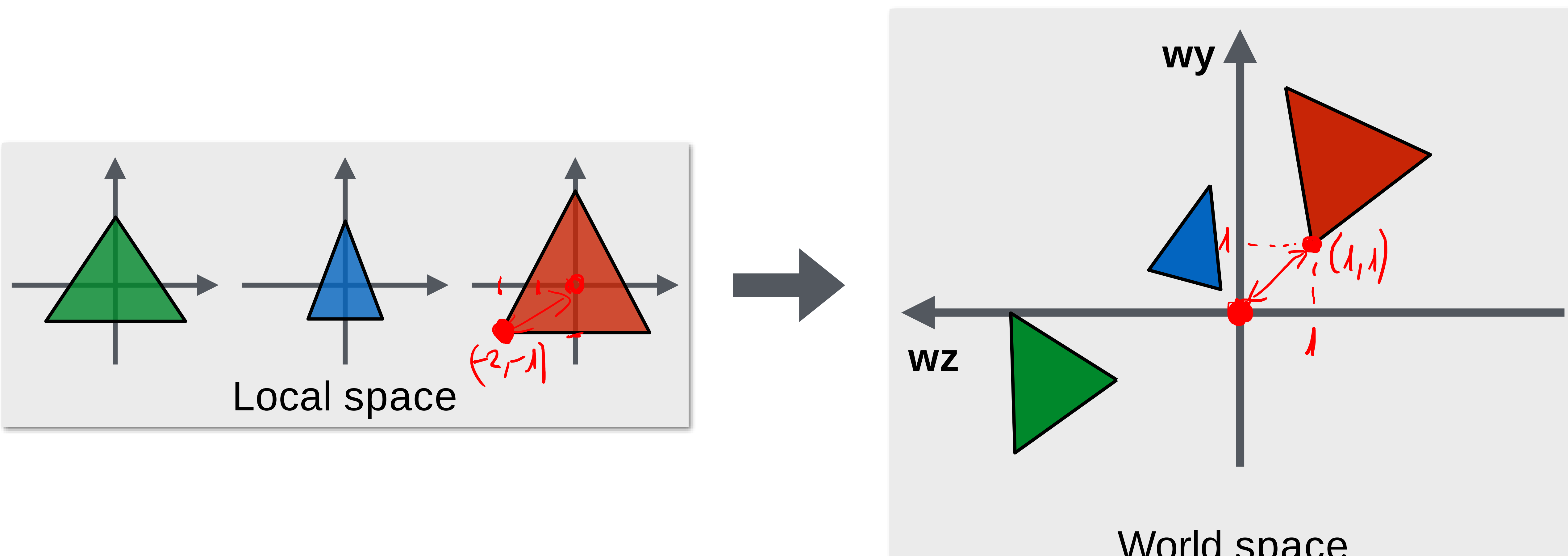
- poziționare
- modificare a formelor și orientării
- proiecții
- animații



Transformare de modelare (**M**)

Modifică poziția și orientarea obiectelor

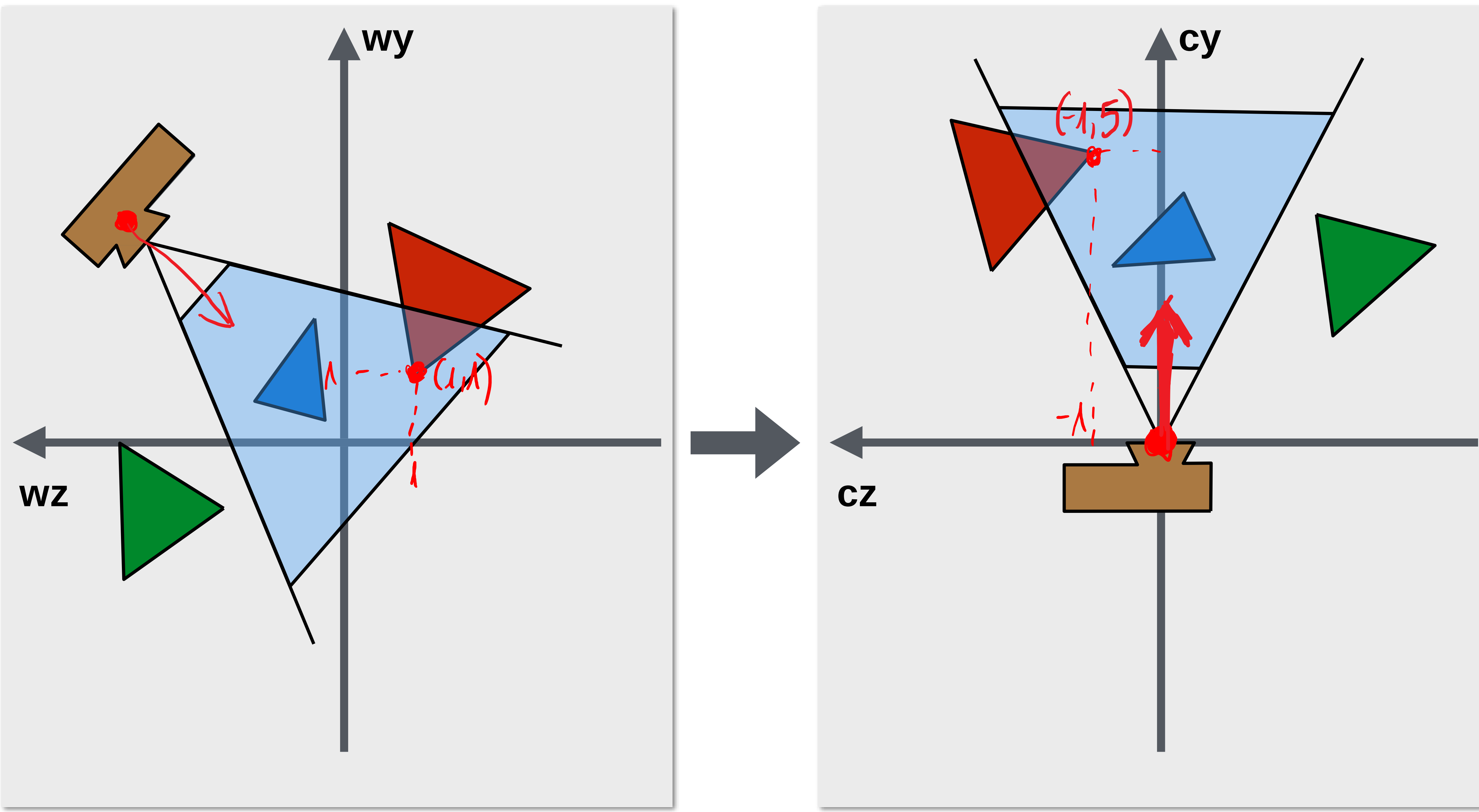
Rezultă posibile deformări



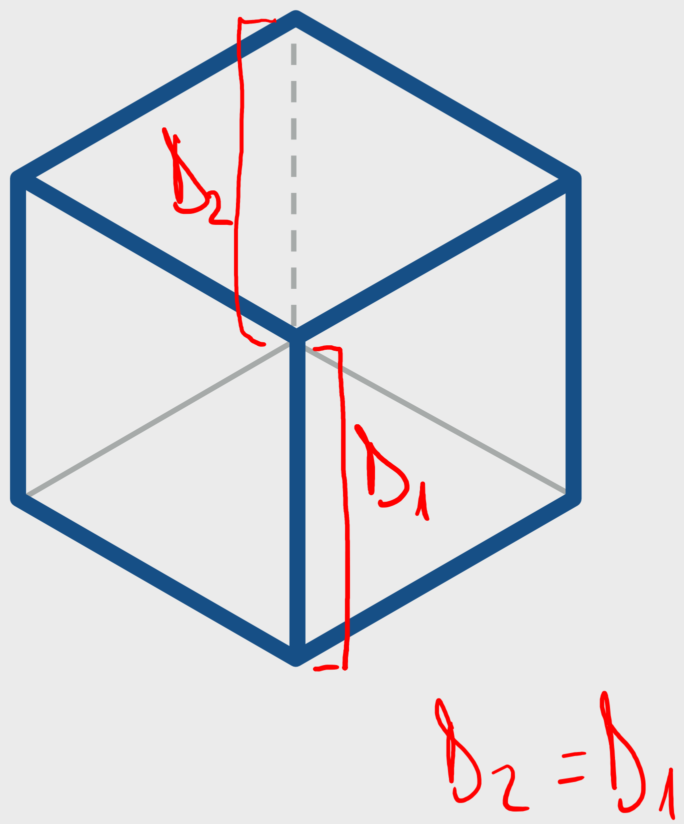
Transformarea de vizualizare (**V**)

Specifică poziția și orientarea camerei de vizualizare

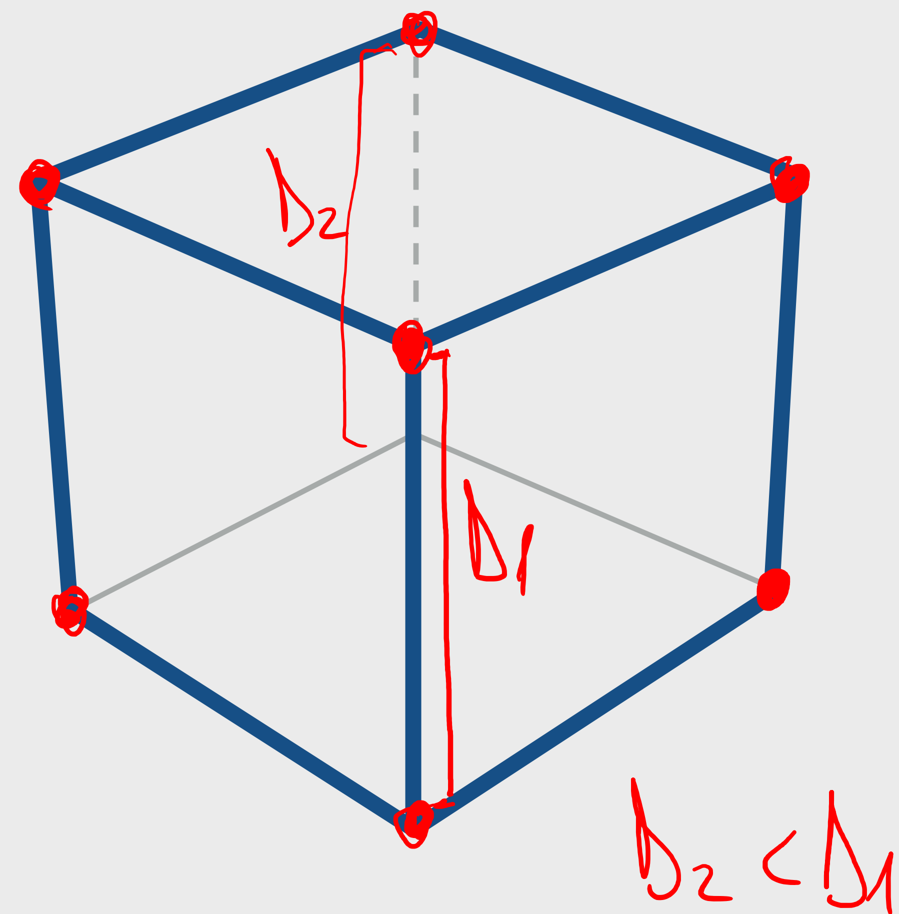
Specifică zona din lumea reală care este vizibilă



Transformarea de proiecție (**P**)

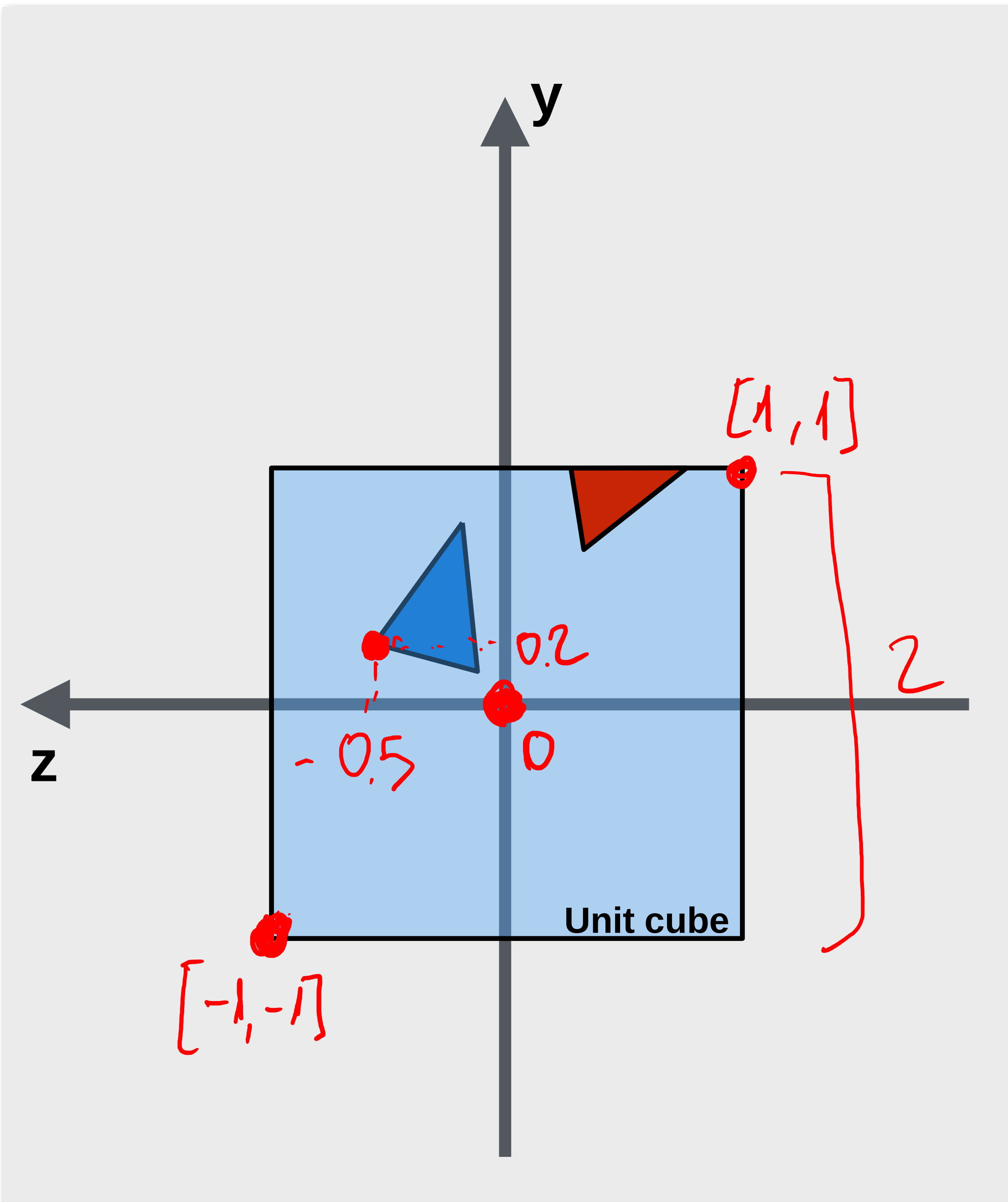


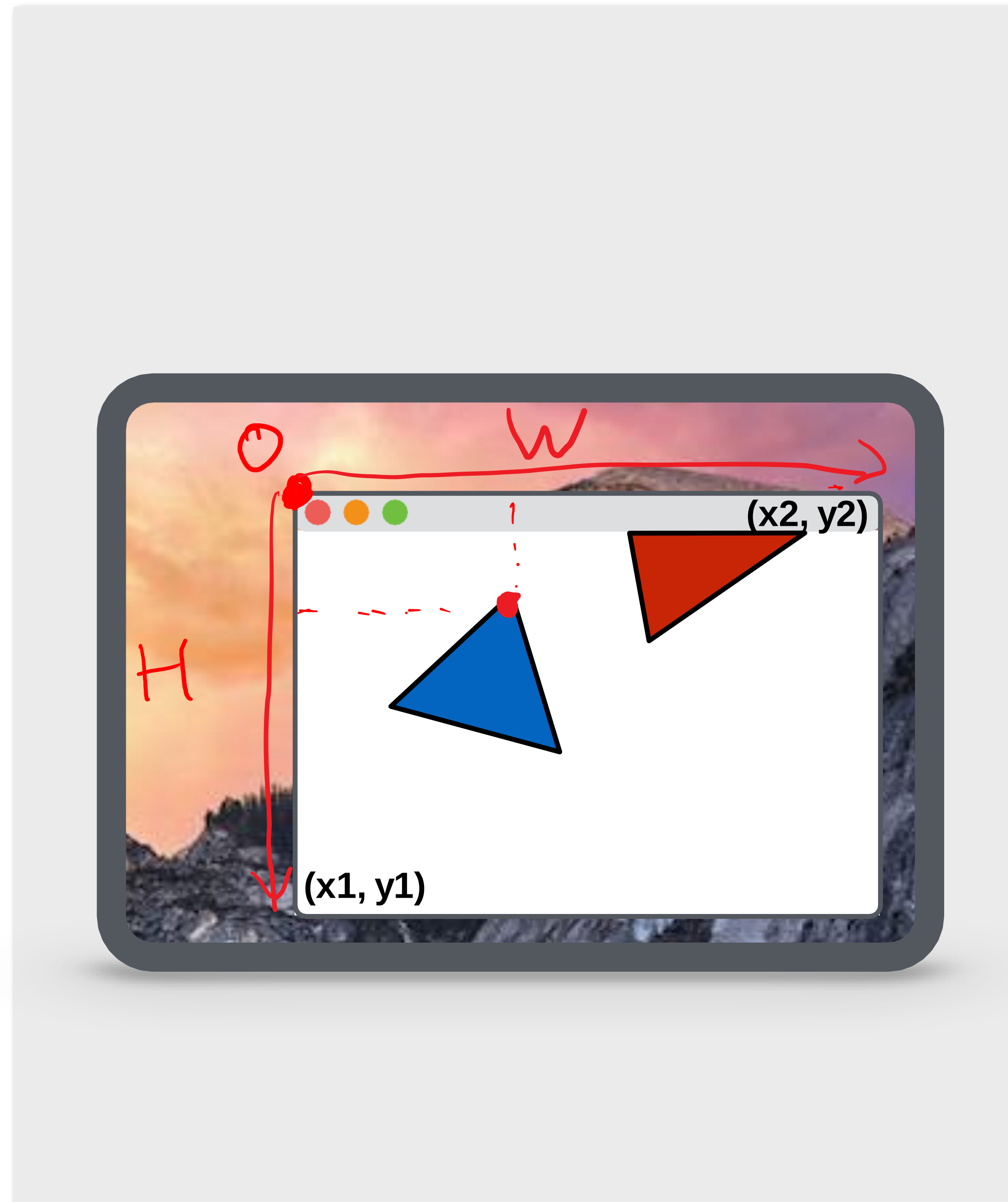
Orthographic projection



Perspective projection

Transformarea în coordonate ecran





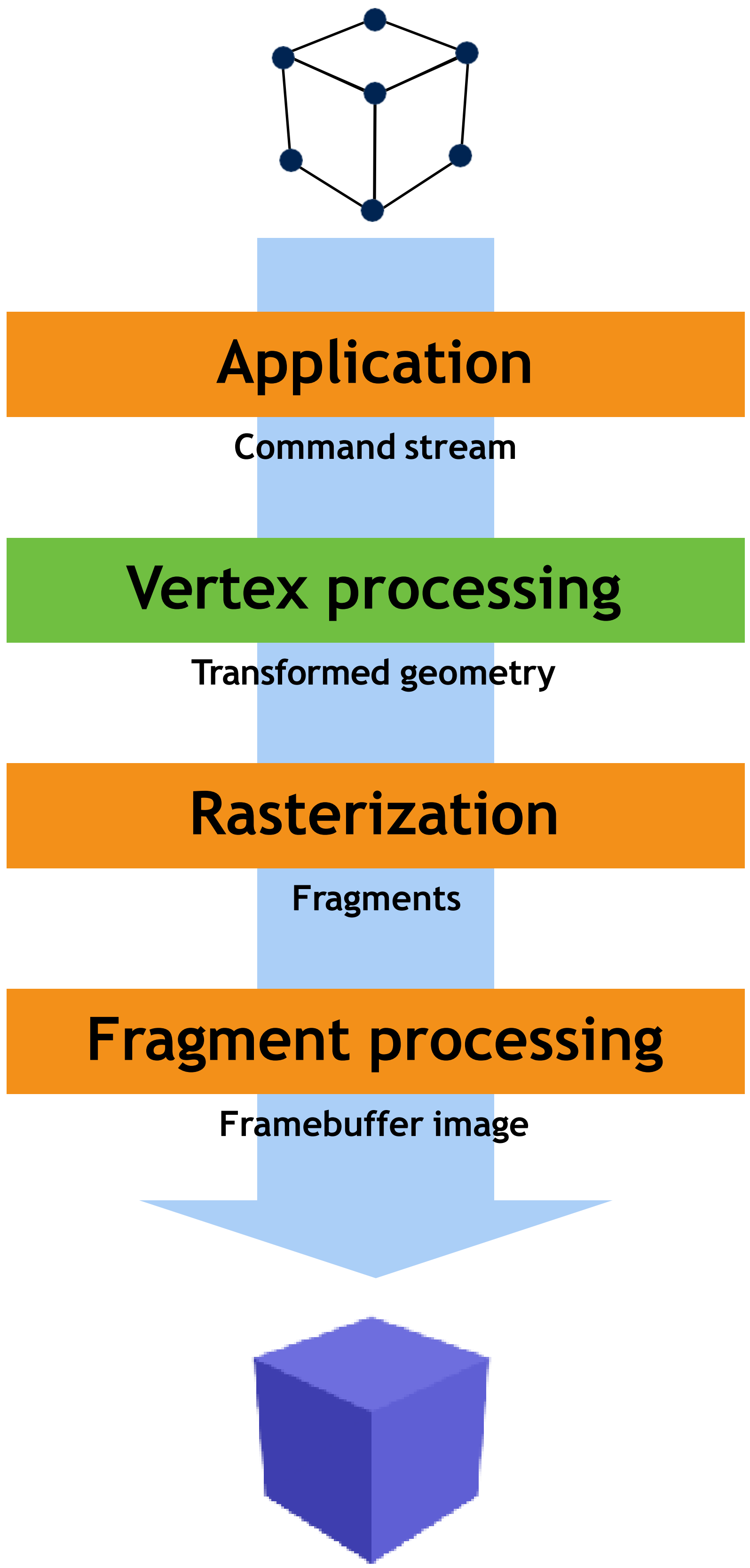
Transformări

Unelte matematice utilizate:

- Matrici și coordonate omogene

Tipuri de transformări:

- Rigid body (păstrează unghiurile, lungimile, ariile)
- Liniare
- Afine (păstează paralelismul dreptelor, raportul lungimilor, raportul ariilor)
- Perspective



Înmulțirea matricilor

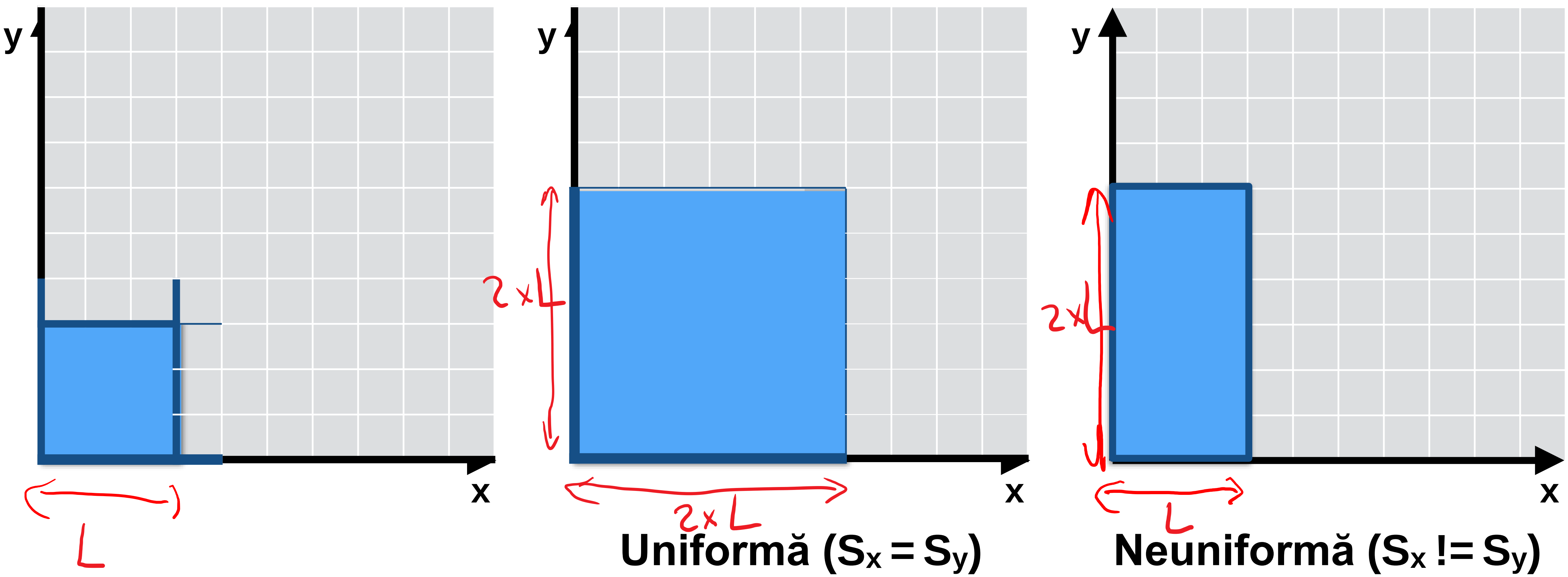
$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1c} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1c} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{i1} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{ic} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{r1} & \dots & p_{rj} & \dots & p_{rc} \end{bmatrix}$$

$$p_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{im}b_{mj}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rm} \end{bmatrix}}_{M_{trans.}} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{j1} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{i1} \\ \vdots \\ p_{r1} \end{bmatrix}}_{P'}$$

Scalare

$$x' = S_x x$$
$$y' = S_y y$$

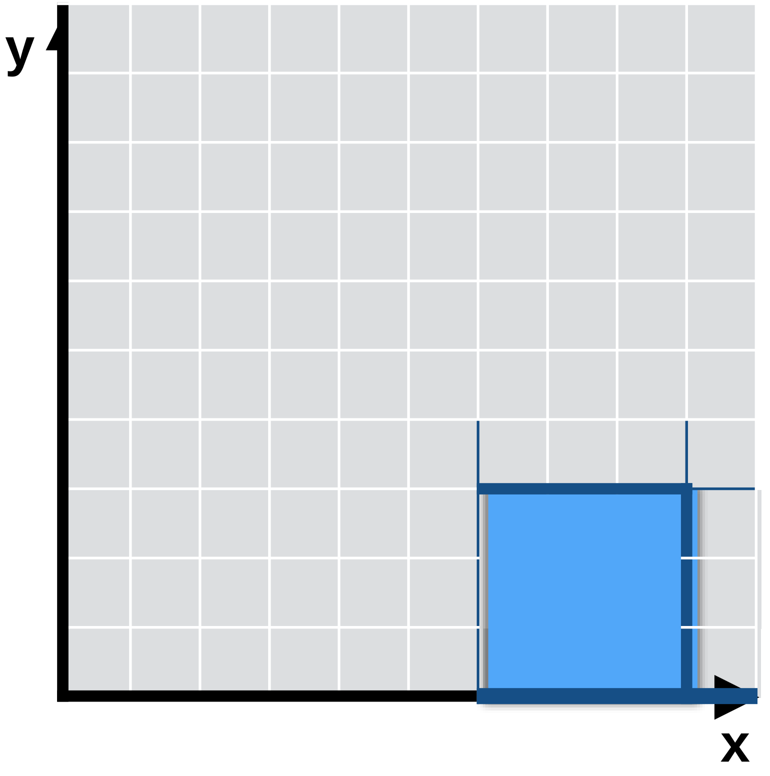


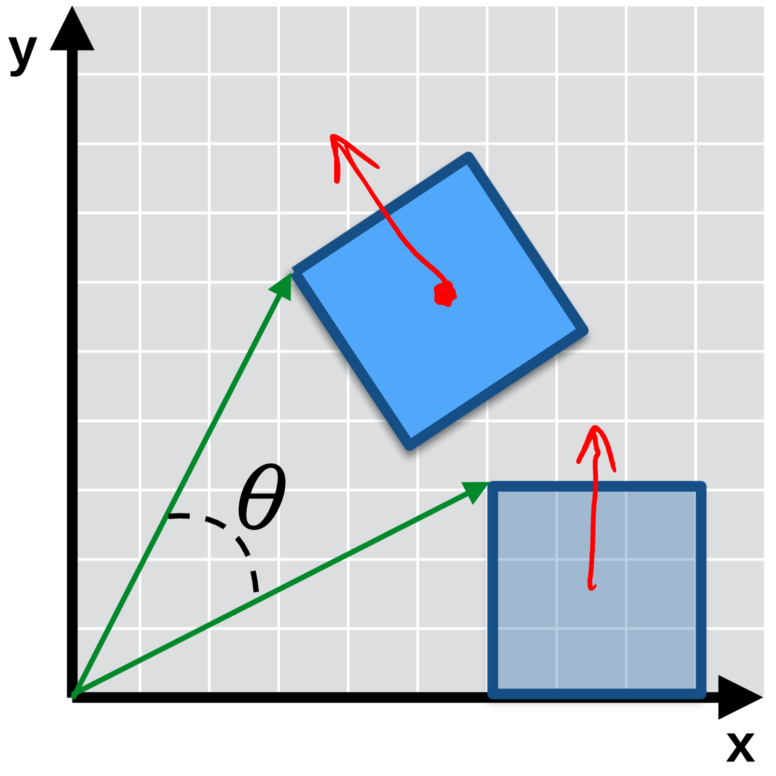
Uniformă ($S_x = S_y$)

Neuniformă (S_x != S_y)

Rotația

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$



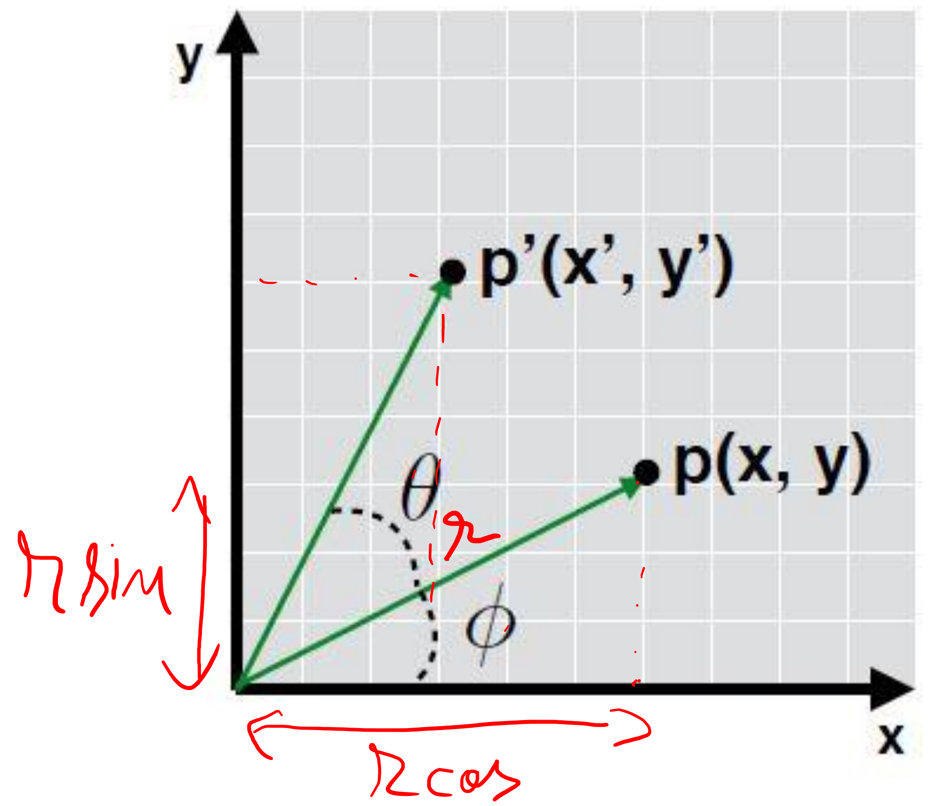


Rotația

$$p_x = r cos\phi$$
$$p_y = r sin\phi$$

$$p'_x = r cos(\phi + \theta) = \overbrace{r cos\phi}^{p_x} cos\theta - \overbrace{r sin\phi}^{p_y} sin\theta$$
$$p'_y = r sin(\phi + \theta) = r cos\phi sin\theta + r sin\phi cos\theta$$

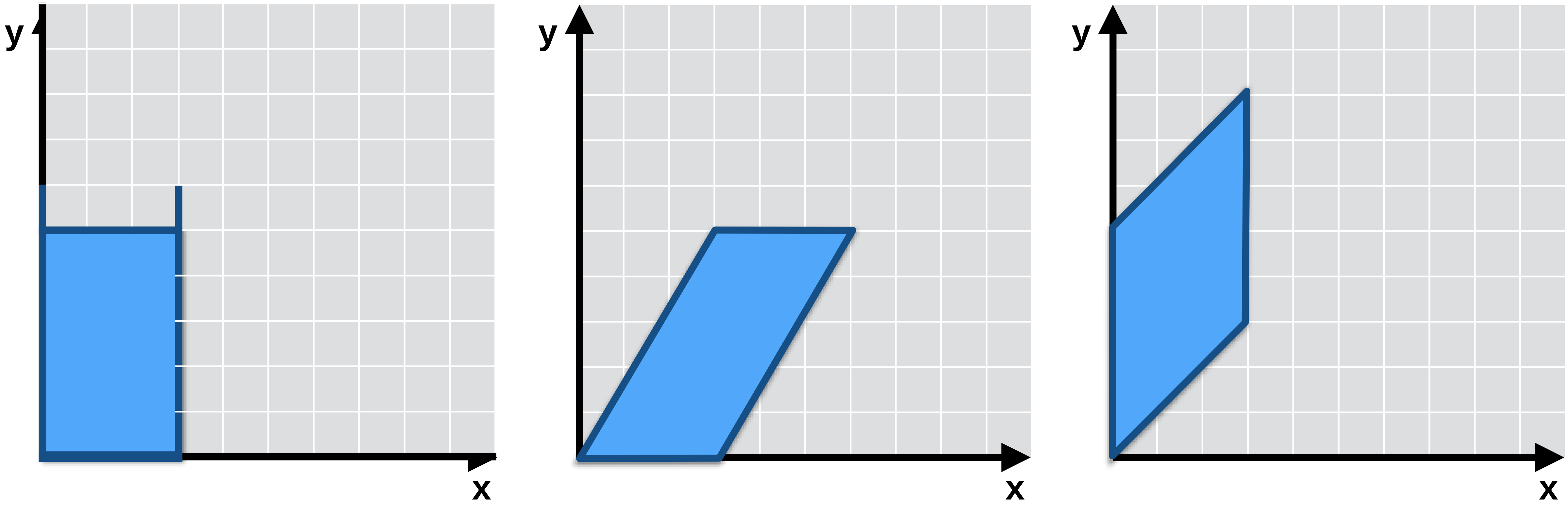
$$p'_x = p_x cos\theta - p_y sin\theta$$
$$p'_y = p_x sin\theta + p_y cos\theta$$



Forfecare (Shear)

$$x' = x + SH_x y$$

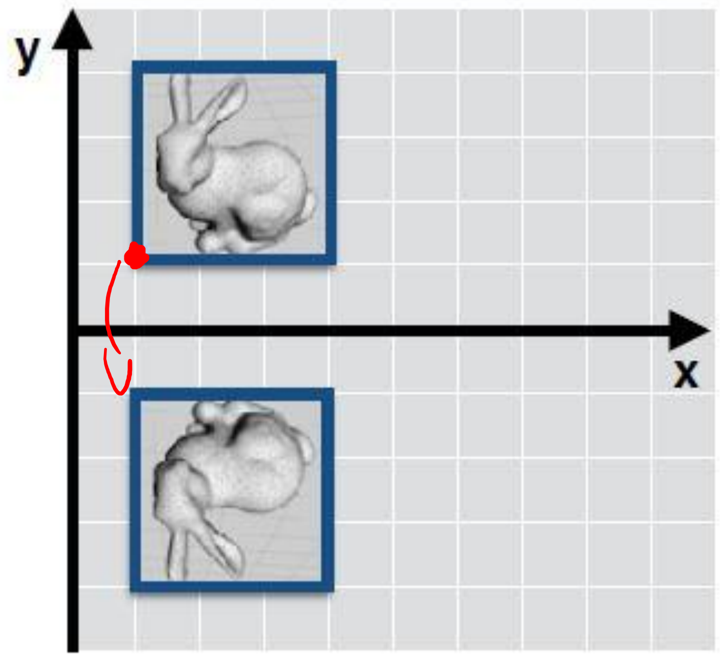
$$y' = SH_y x + y$$

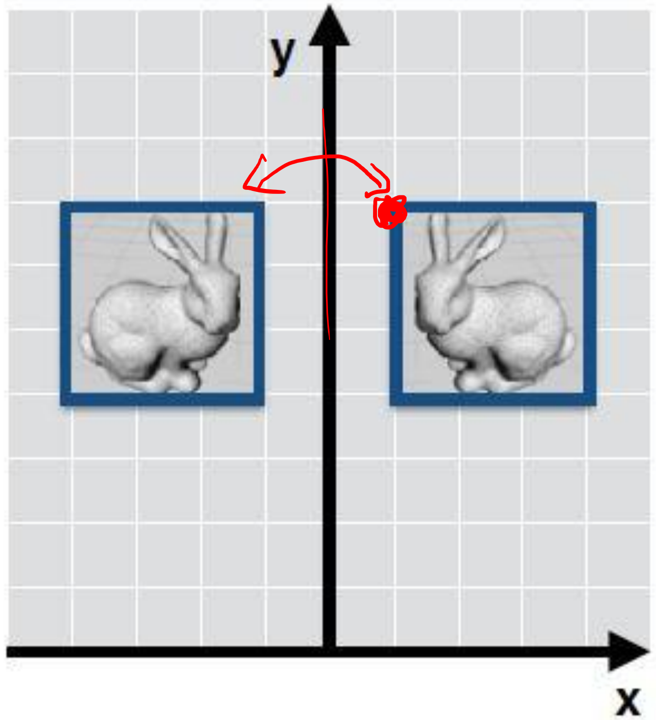


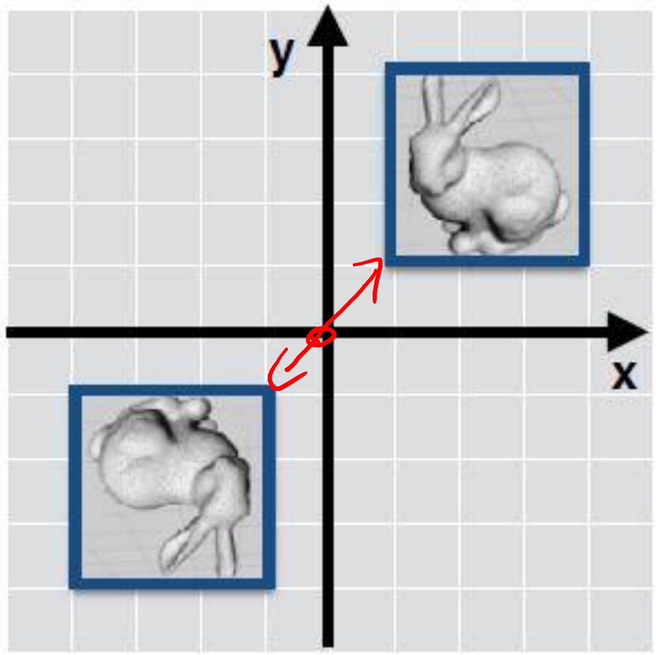
(poate fi definită prin transformări de rotație și scalare)

Reflexie

$$x' = x \qquad x' = -x \qquad x' = -x$$
$$y' = -y \qquad y' = y \qquad y' = -y$$







(poate fi definită prin transformări de rotație și scalare)

Transformări liniare

O funcție $T:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ este o transformare liniară dacă:

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}), \text{ for all } \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$
$$T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v}), \text{ for all } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \text{ and all scalars } c$$

Sumarizând obținem:

$$T(c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{u}) + c_2T(\mathbf{v})$$
$$\text{for all } \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \text{ and all scalars } c_1, c_2$$

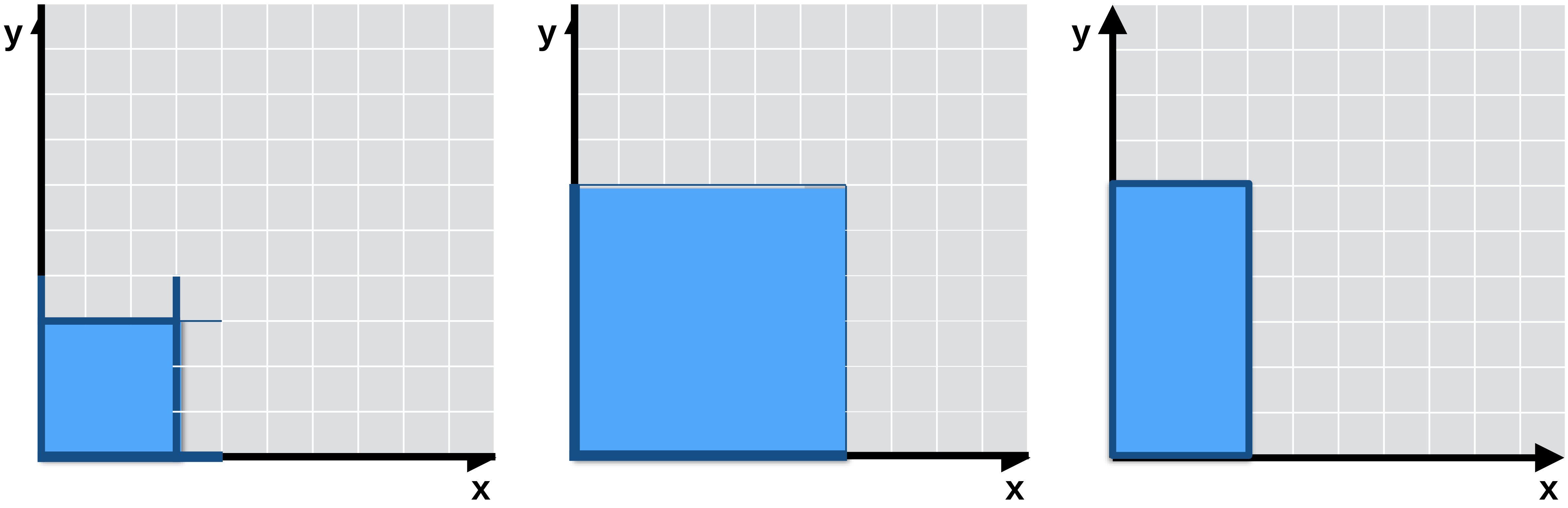
Poate fi reprezentată prin matrici 2x2

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= dx + ey \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Scalare

$$\mathbf{S}(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

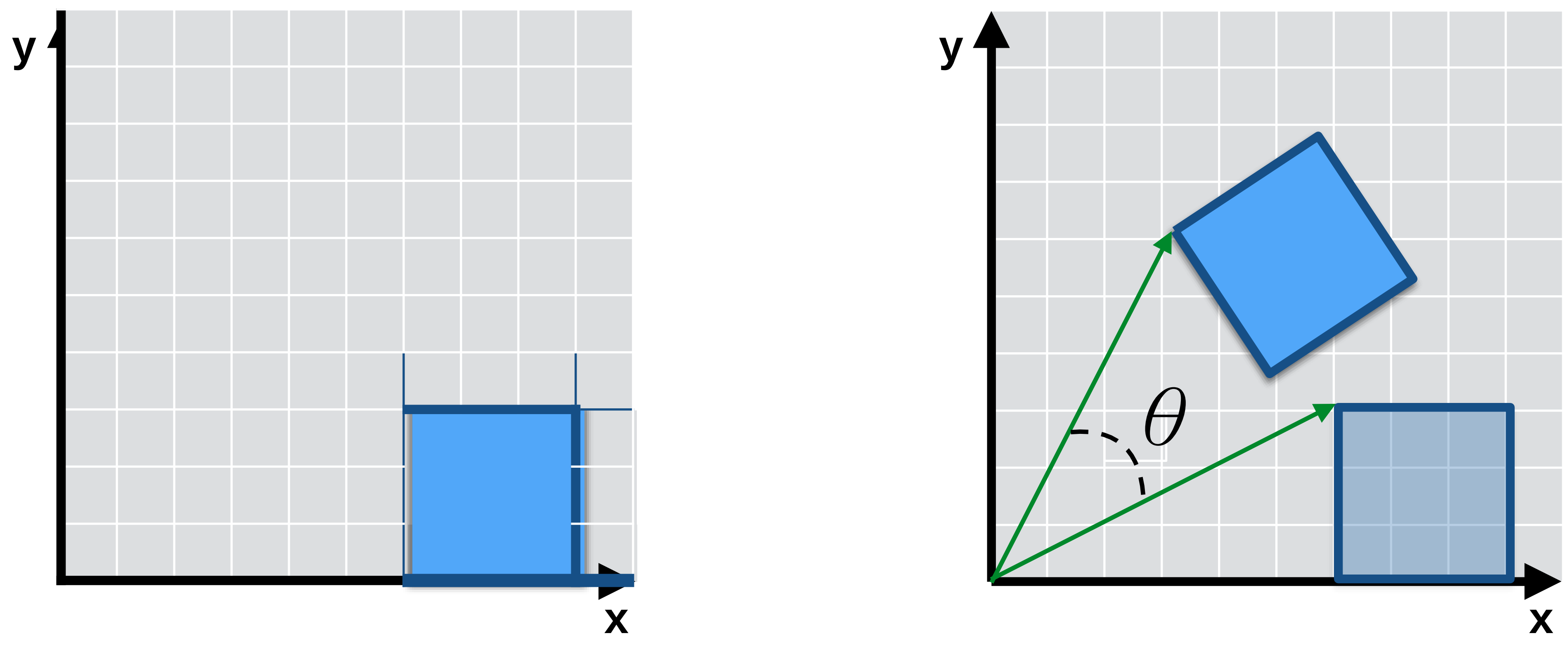
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x' = s_x x \\ y' = s_y y \end{matrix}$$



Rotație

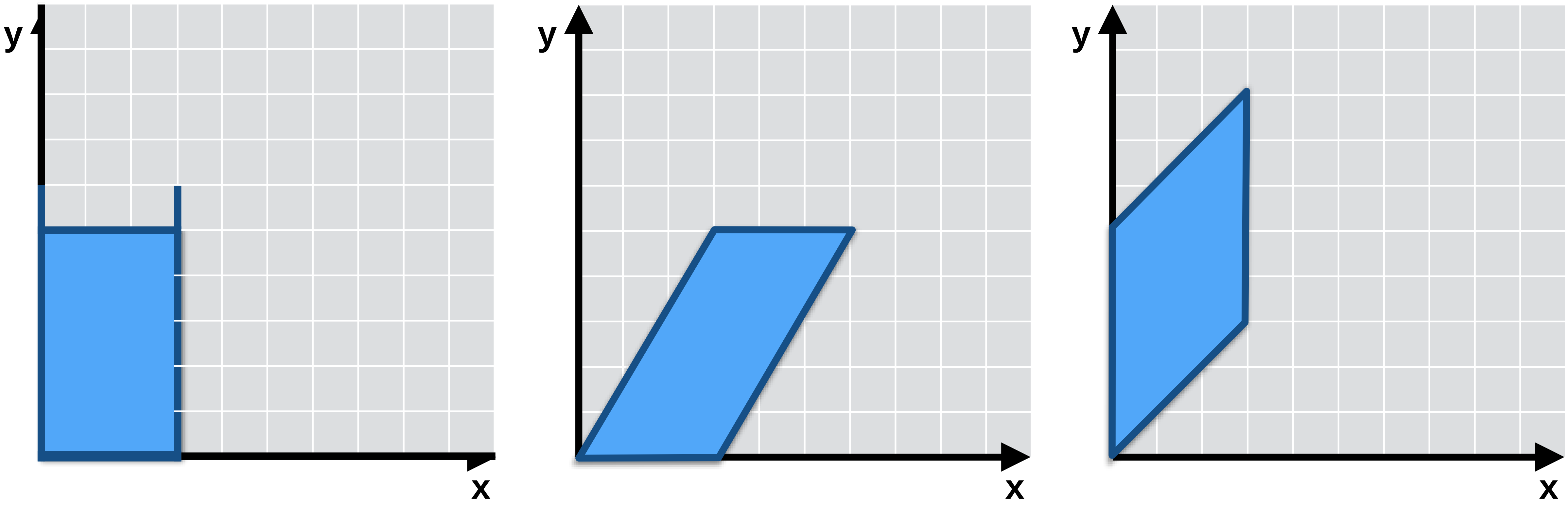
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$



Forfecare (Shear)

$$\mathbf{SH_x} = \begin{bmatrix} 1 & sh_x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{SH_y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ sh_y & 1 \end{bmatrix}$$

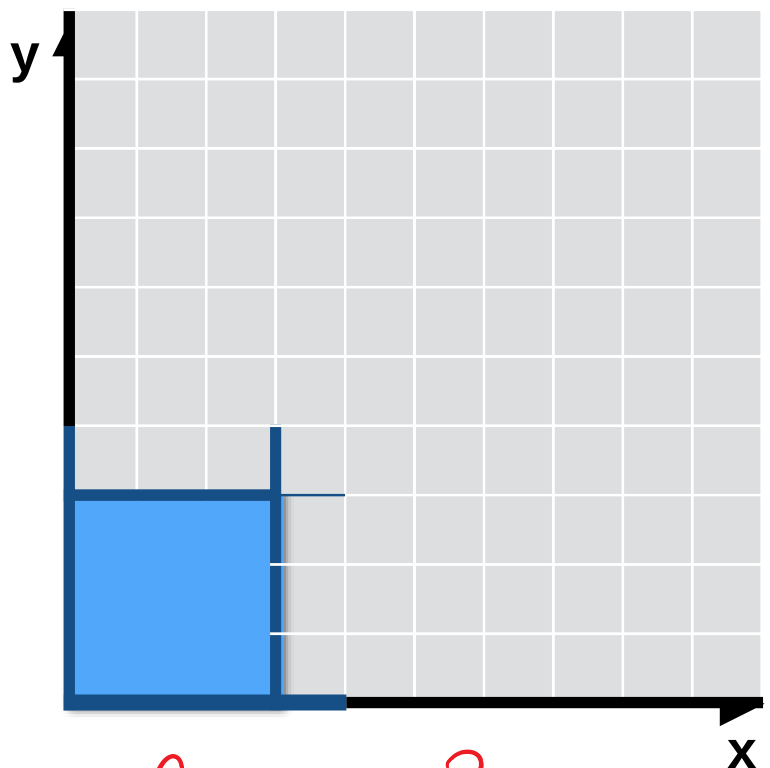


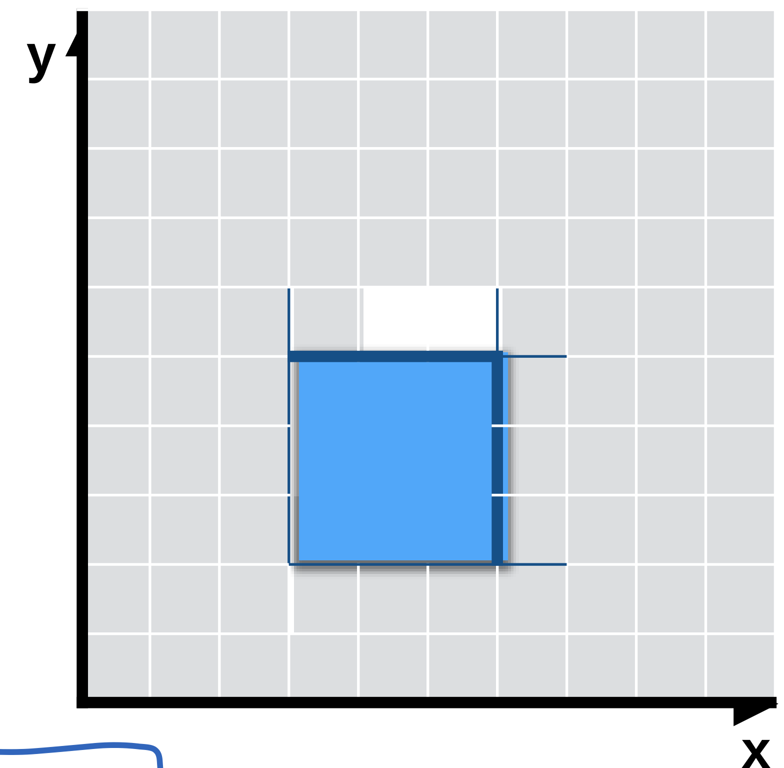
Translație

Translația definește o deplasare pe o anumită direcție și o anumită distanță, ambele specificate printr-un vector de translație

$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$





Translatie -> liniară ?

$T(x) + T(y) \overset{?}{=} T(x+y)$?

Ex: $\boxed{T(x) = x+1}$

$T(y) = y+1$

$\Rightarrow T(x) + T(y) = x+1+y+1$

$T(x+y) = x+y+1$

Transformări afine

O dreaptă se transformă tot într-o dreaptă (=> putem aplica transformarea doar pe punctele care definesc dreapta)

Păstrează paralelismul dreptelor

Translația este un exemplu de transformare afină

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

$$x' = ax + by + t_x$$
$$y' = dx + ey + t_y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{Transformare liniară}} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

Transformări liniare vs afine

Transformările liniare modifică vectorii bază ai sistemului de coordonate, dar nu și originea

Transformările afine modifică vectorii bază ai sistemului de coordonate și originea

- Poate fi descrisă ca o combinație de transformări liniare și transformări de translație

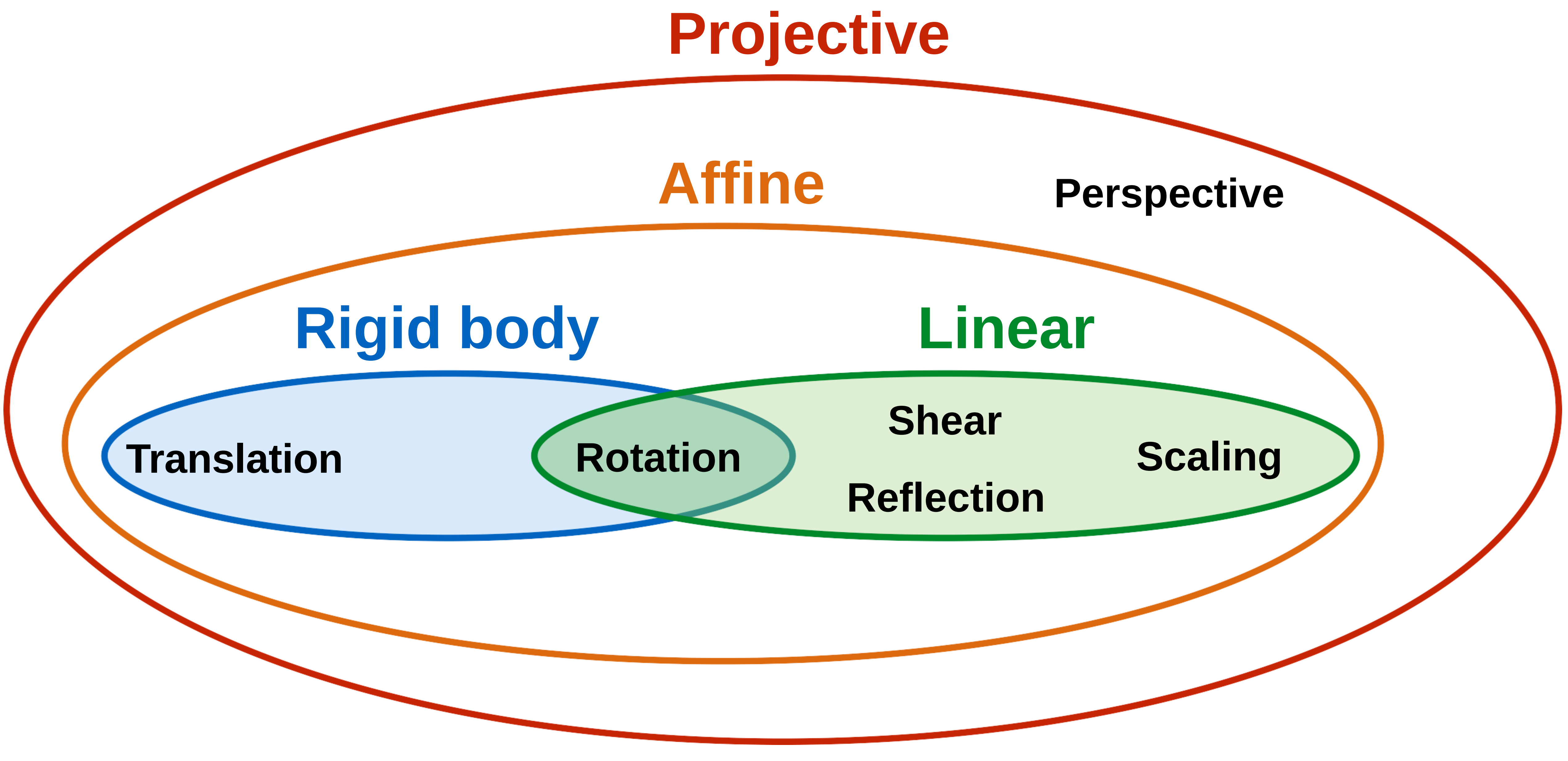
Pentru ambele:

Dreptele se mapează în drepte

Dreptele paralele rămân paralele

Rapoartele sunt păstrate (lungime, arie)

Transformări



Puncte vs Vector

Puncte	Vectori
$\mathbf{p} = p_x \mathbf{e_1} + p_y \mathbf{e_2} + \mathbf{o}$ $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{v} = p_x \mathbf{e_1} + p_y \mathbf{e_2}$ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{V} = \overset{P_1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}} - \overset{P_2}{\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Coordonate omogene

adăugăm o coordonată adițională ***w***

w=1 => punct

w=0 => vector

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} wx \\ wy \\ w \end{bmatrix} / w$$

Transformări afine

Transformările afine pot fi reprezentate sub formă matricială:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & t_x \\ m_{21} & m_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformările afine ale unor coordonate omogene păstrează coordonata **w** nemodificată (o transformare generală modifică coordonata **w**)

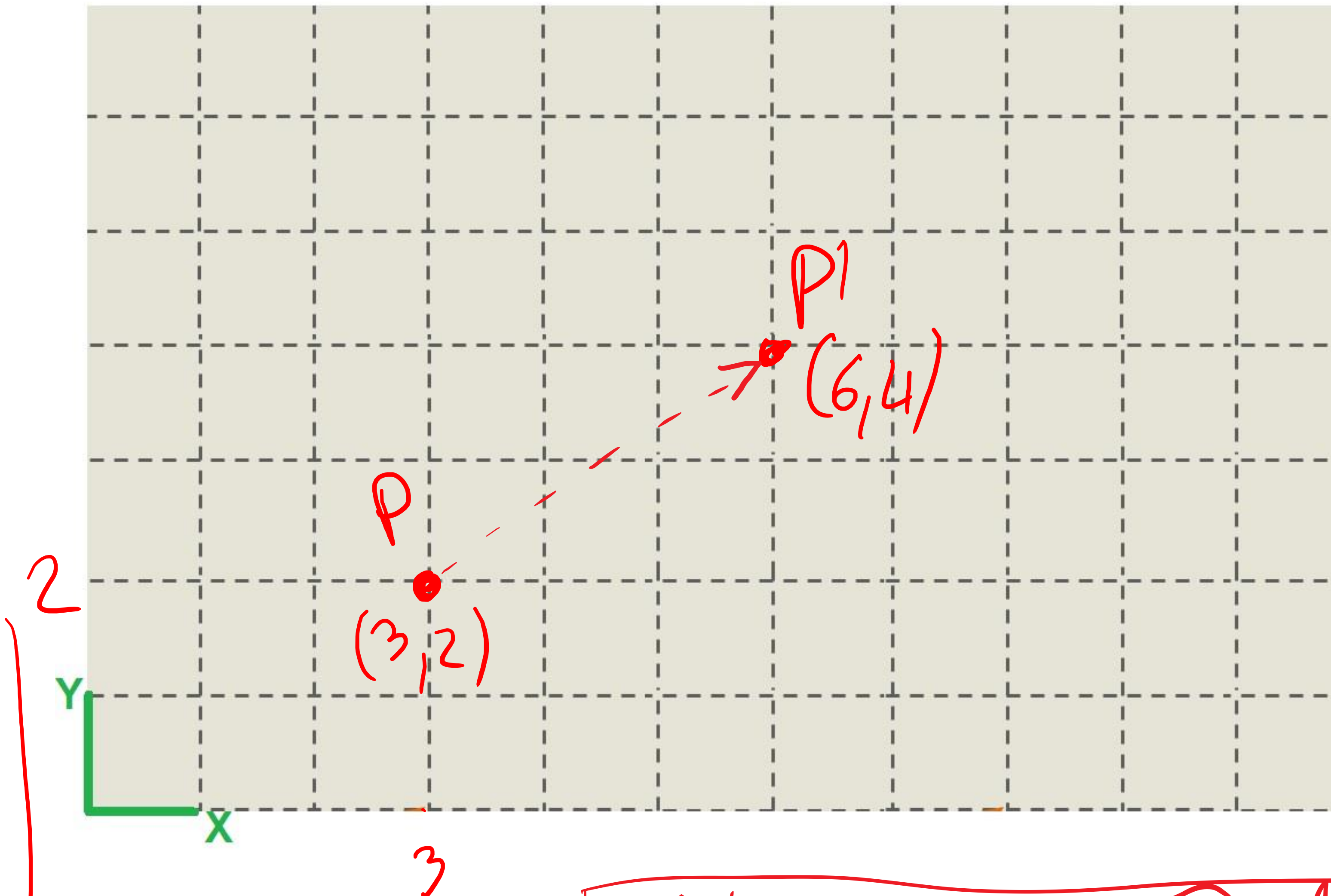
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & T_x\\ 0 & 1 & T_y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+T_x\\ y+T_y\\ 1\end{pmatrix}$$

Exemplu:

Translație cu

$T_x = 3$

$T_y = 2$



$$\begin{array}{ccc}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot & \begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix} = & \begin{pmatrix}6\\ 4\\ 1\end{pmatrix}\\ & P & P'\end{array}$$

$$P' = T(3,2)\cdot P$$

Matrice 2×2 ? Translație?

$$\begin{pmatrix}1 & T_x\\ 0 & T_y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x + T_x\cdot y\\ 0 + T_y\cdot y\end{pmatrix}$$

Matrici de transformare

Translație:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Scalare:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotație:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Înmulțirea matricilor

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1c} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1c} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{i1} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{ic} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{r1} & \dots & p_{rj} & \dots & p_{rc} \end{bmatrix}$$

$$p_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{im}b_{mj}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{j1} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{i1} \\ \vdots \\ p_{r1} \end{bmatrix}$$

De ce folosim matrice pt. transformări?

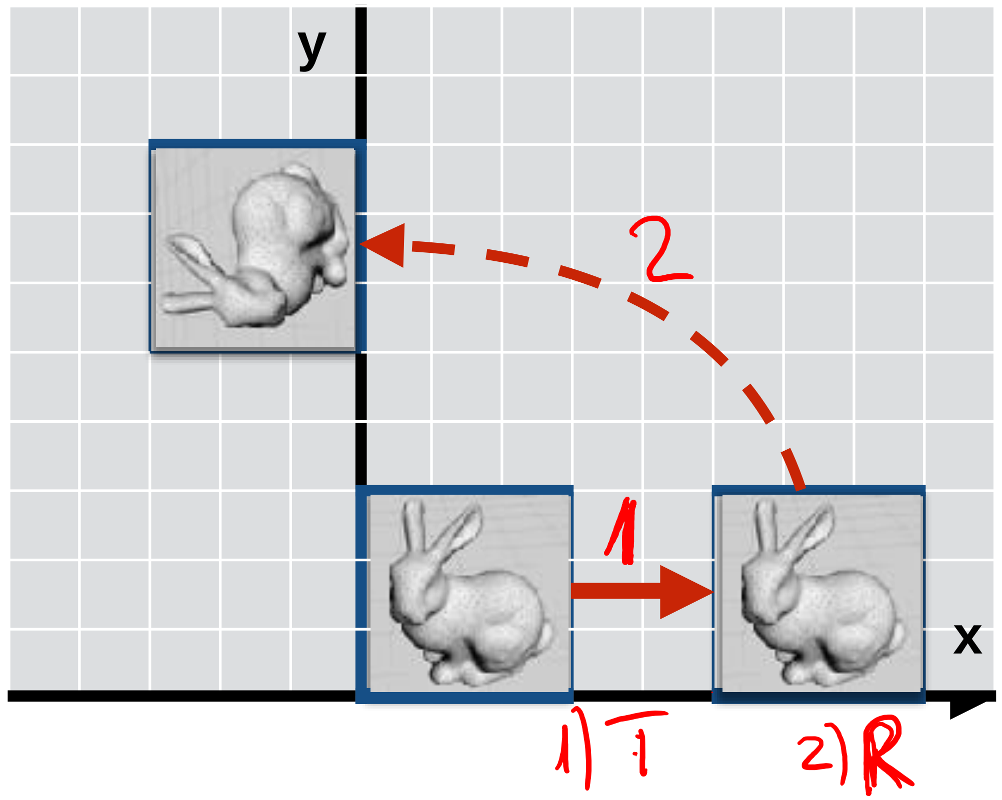
Exemplu: 1 000 000 puncte => aplicăm o serie de 3 transf => $\boxed{\text{3 mil. operații}}$

Alternativa: înmulțire mat. transf. => $\mathbf{M} = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$ => 2 operații

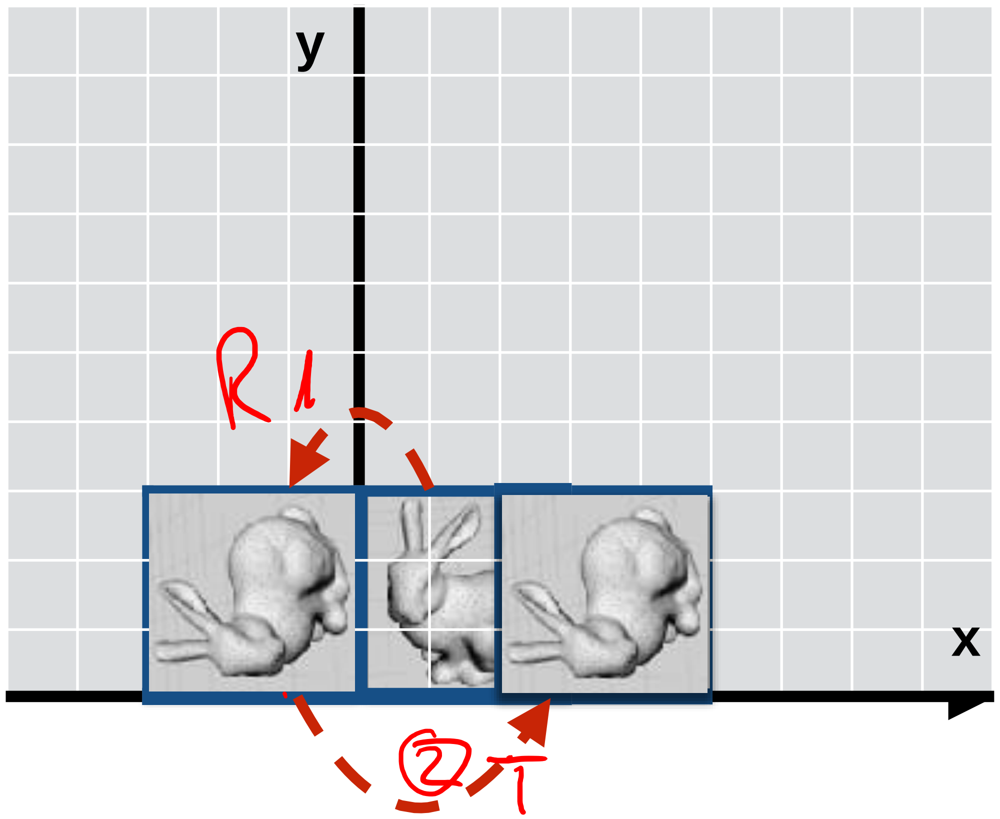
înmulțire M cu fiecare punct => 1 mil. operații; $\boxed{\text{Total: 1 000 002 op}}$

Compunerea transformărilor

- Transformările afine sunt asociative (**A**(**BC**)=(**AB**)**C**)
- Ordinea de specificare a transformărilor este importantă



$$P' = RTP$$



$$P' = TRP$$

Ordinea transformărilor contează!

Scalare relativ la un punct

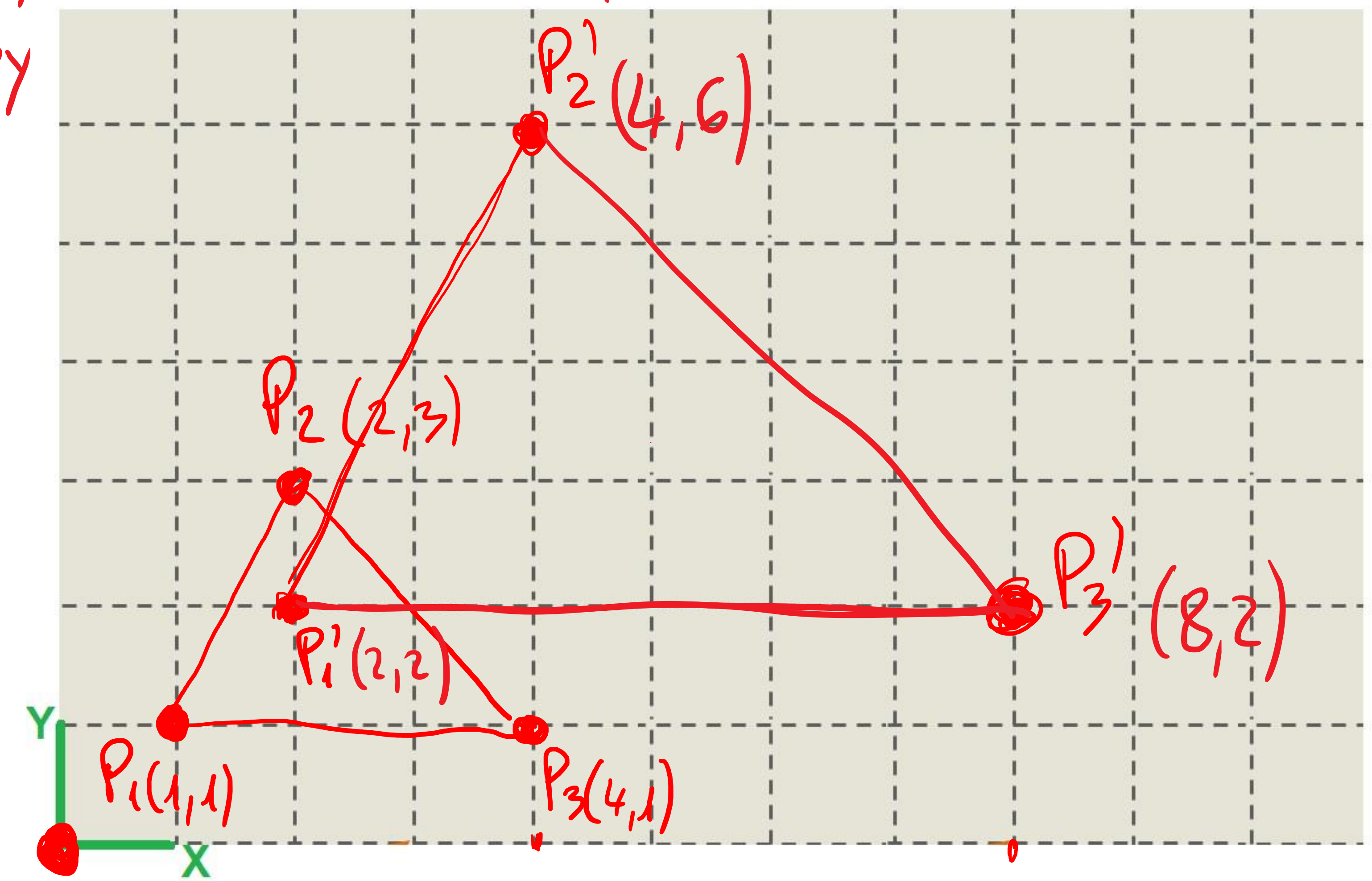
Exemplu: Scalare cu $(\underset{S_x}{2}, \underset{S_y}{2})$ => scalare uniformă

$$\begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftarrow \text{mat. scalare}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overset{P_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{matrix} x \\ y \\ \end{matrix} = \overset{P_1'}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$-\,\|\,- \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-\,\|\,- \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Neutru => $S_x = 1$, $S_y = 1$ => Identitate

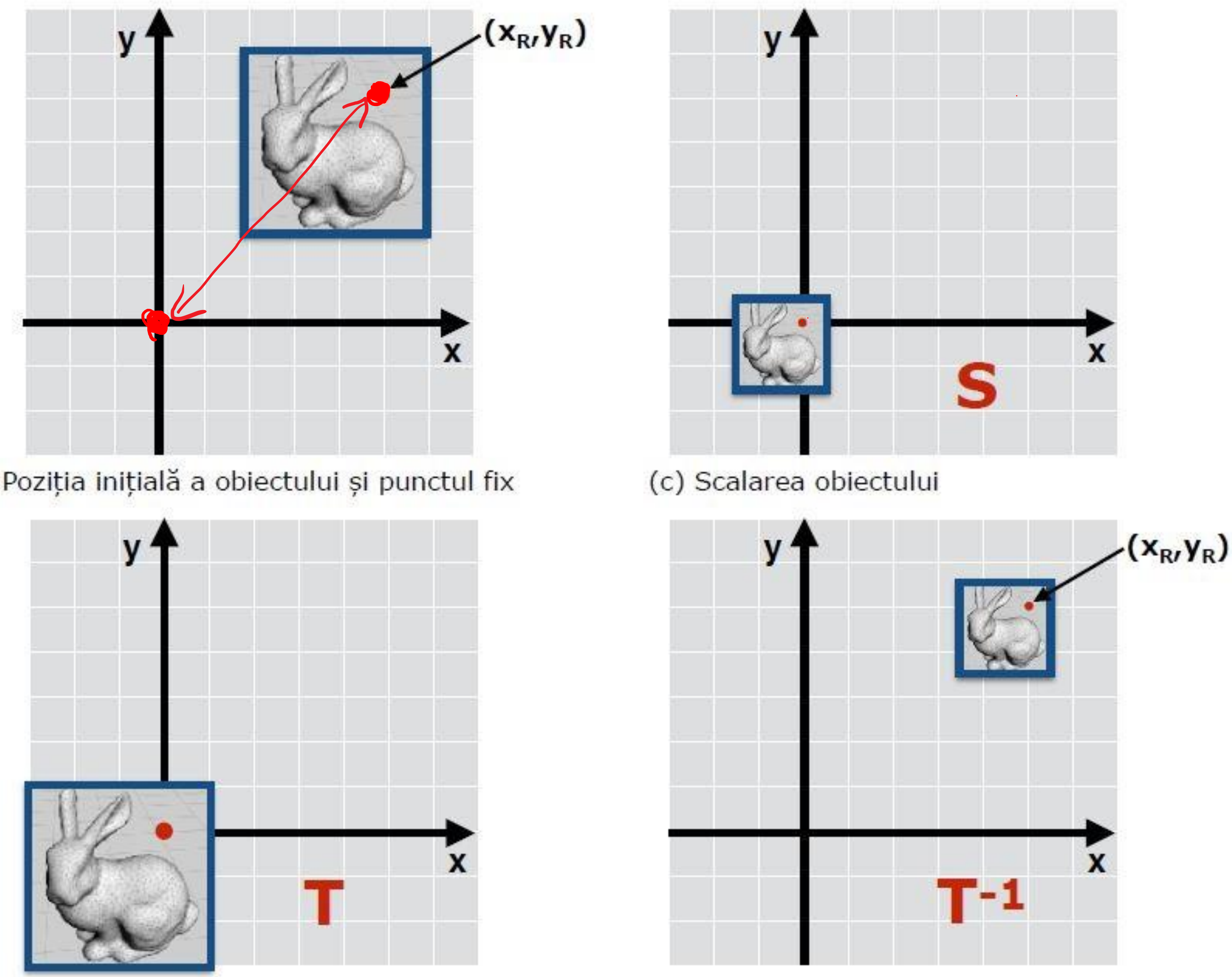
Scalare inversă => $S_x, S_y \in (0,1)$

Scalare relativ la un punct

1. Translație
2. Scalare
3. Translație inversă

1) $T(-x_R, -y_R)$
2) S
3) $T(x_R, y_R)$

$$P' = \underbrace{\overset{3}{\mathbf{T}^{-1}}\overset{2}{\mathbf{S}}\overset{1}{\mathbf{T}}}P$$



(a) Poziția inițială a obiectului și punctul fix

(c) Scalarea obiectului

(b) Translația obiectul astfel încât punctul fix (x_R, y_R) să devină originea

(d) Translația obiectului astfel încât punctul fix (x_R, y_R) să revină la locația inițială

Scalare relativ la un punct

Exemplu: Scalare cu (2,2) în jurul pct-ului C(2,2)

1) T => translatam C în origine

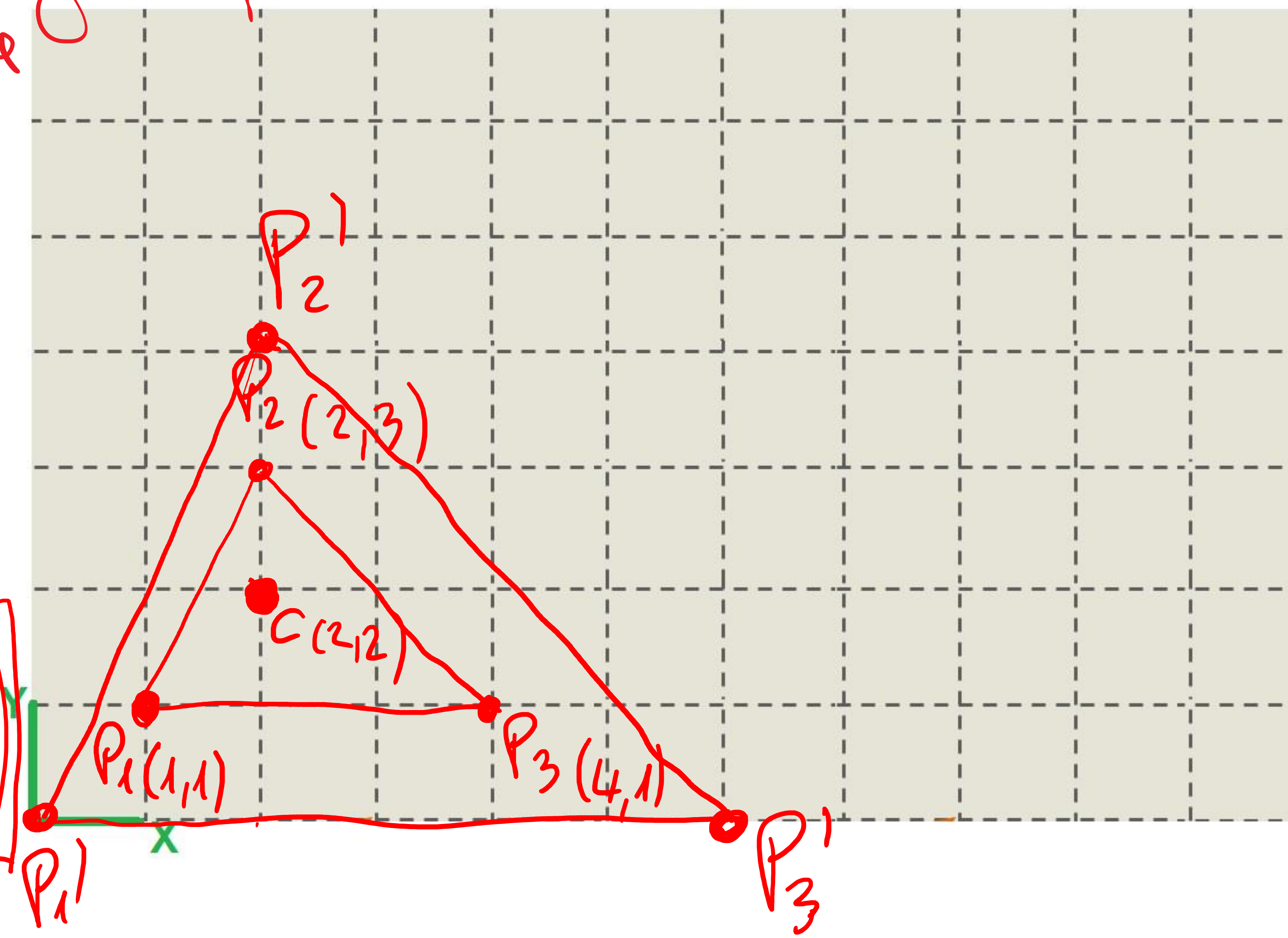
2) S

3) T^- => translatie inversă

$$\boxed{M = T^- \cdot S \cdot T}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}_{M}$$



$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overset{P}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \overset{P'}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

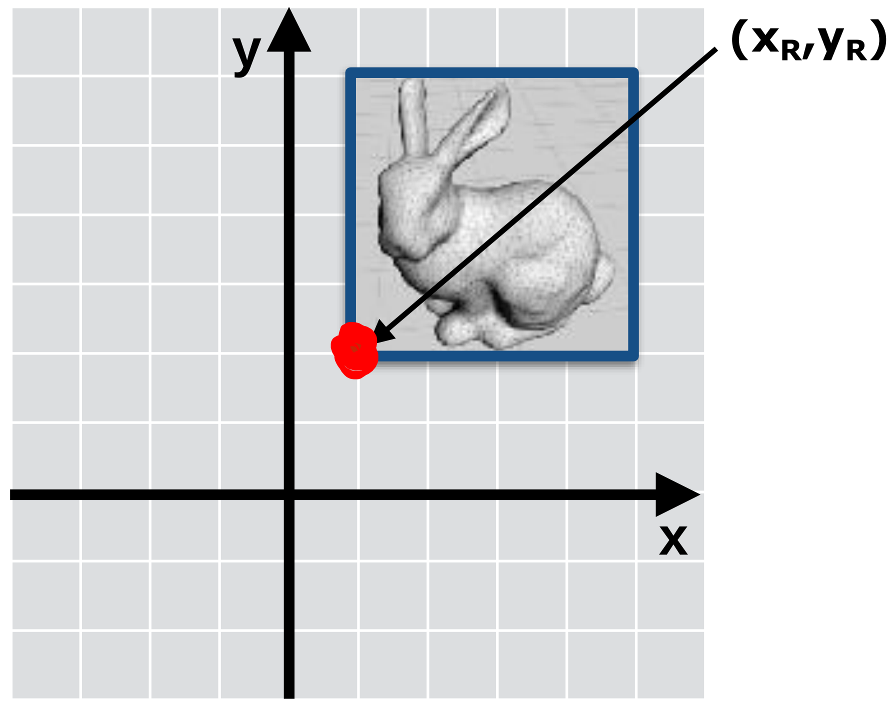
$$— \, || \, — \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

. . .

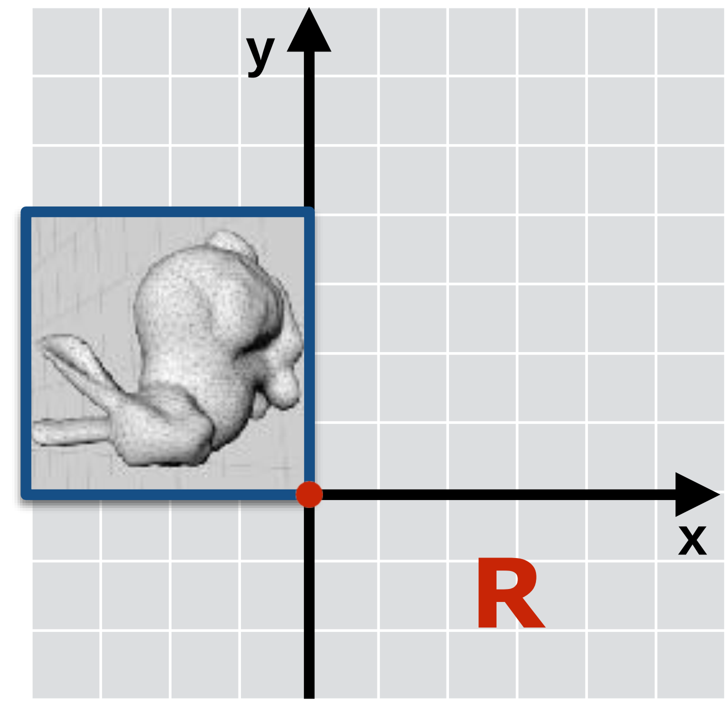
Rotație în jurul unui punct

1. Translație
2. Rotație
3. Translație inversă

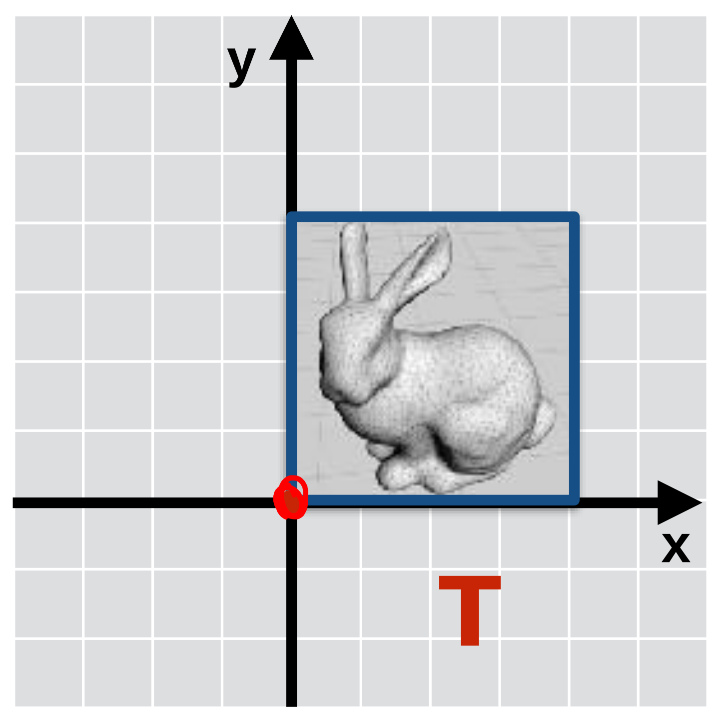
$$P' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{T}P$$



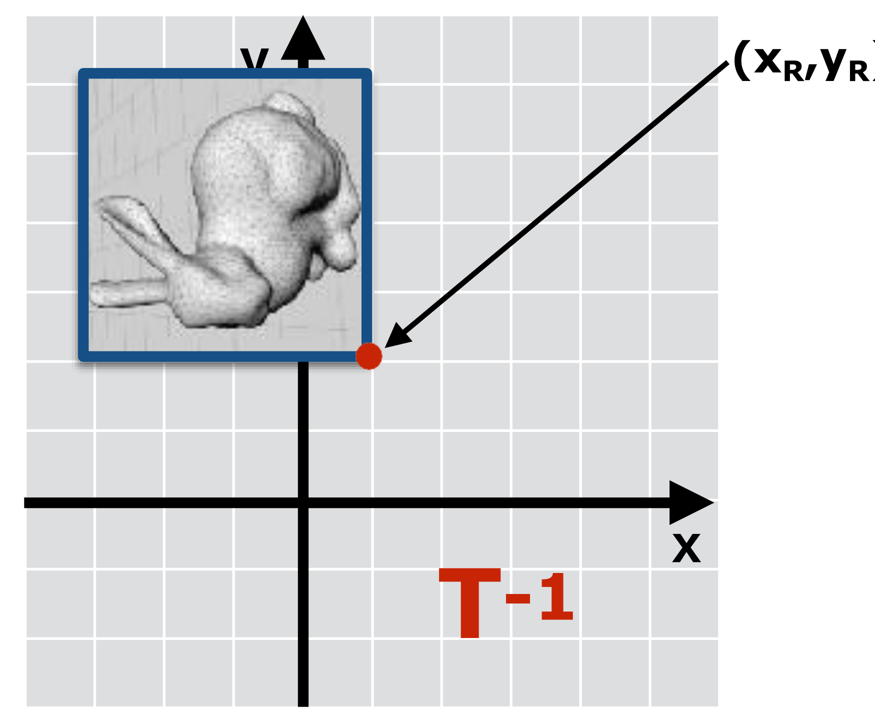
(a) Poziția inițială a obiectului și punctul fix



(c) Rotația obiectului



(b) Translația obiectul astfel încât punctul fix (x_R, y_R) să devină originea



(d) Translația obiectului astfel încât punctul fix (x_R, y_R) să revină la locația inițială

Tranformări inverse

Translație: $\mathbf{T}^{-1}(t_x, t_y) = \mathbf{T}(-t_x, -t_y)$

Scalare: $\mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y) = \mathbf{S}(1/s_x, 1/s_y)$

Rotație: $\mathbf{R}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta) = \mathbf{R}^T$

Inversa unei secvențe de transformări - inversăm ordinea transformărilor și aplicăm inversa fiecărei transformări

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3$$
$$\mathbf{I} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{M}_3^{-1}(\mathbf{M}_2^{-1}(\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_1)\mathbf{M}_2)\mathbf{M}_3$$
$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}_3^{-1}\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_1^{-1}$$

Transformări 3D

Translație:

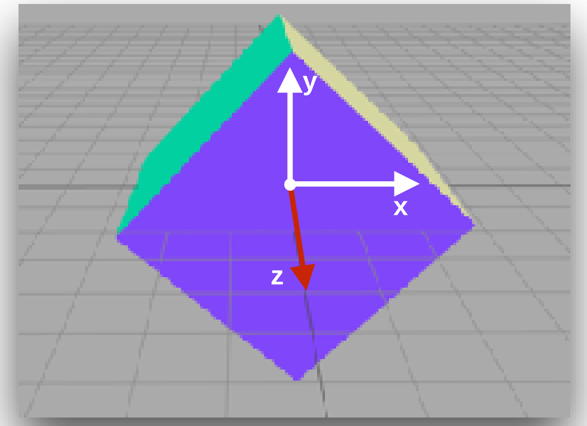
$$p\prime = \mathbf{T}p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Scalare:

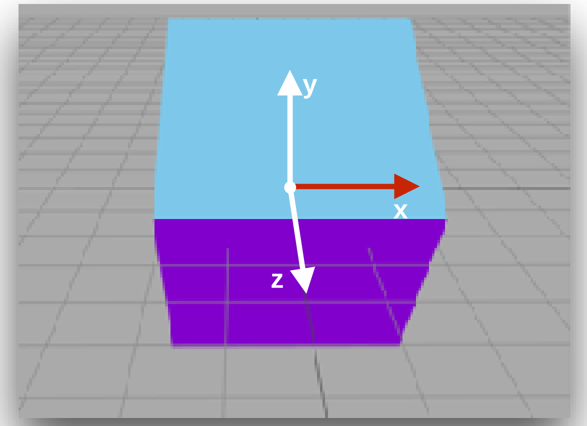
$$p\prime = \mathbf{S}p = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x x \\ s_y y \\ s_z z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotație față de axe

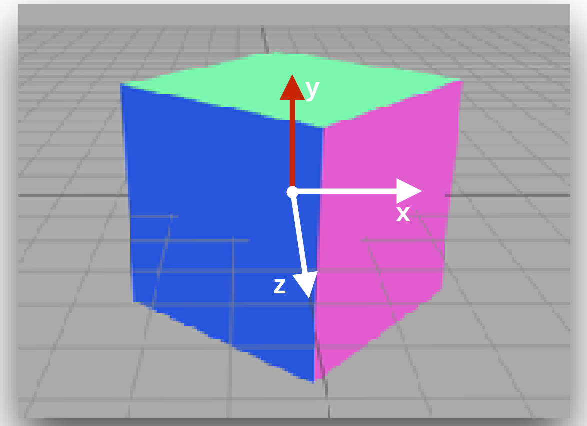
$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

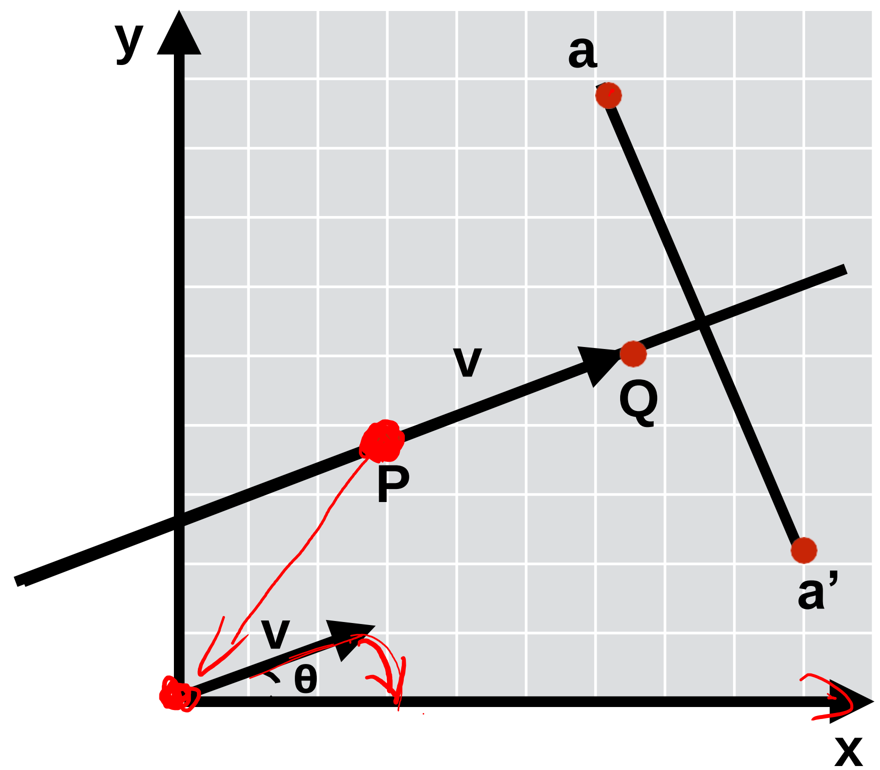


$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Oglindire față de un vector

1. Translație cu -P
2. Rotație cu -θ
3. Oglindire față de axa x
4. Rotație cu θ
5. Translație cu P



$$M = \begin{bmatrix}1 & 0 & P_x\\ 0 & 1 & P_y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -P_x\\ 0 & 1 & -P_y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

T(P) **R**(θ) **S**(1, -1) **R**(-θ) **T**(-P)

Punct într-un sistem Euclidean

$$P(x,y,z) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} + x\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix} = \mathbf{Ic}$$

originea **vectorii (x, y, z)**

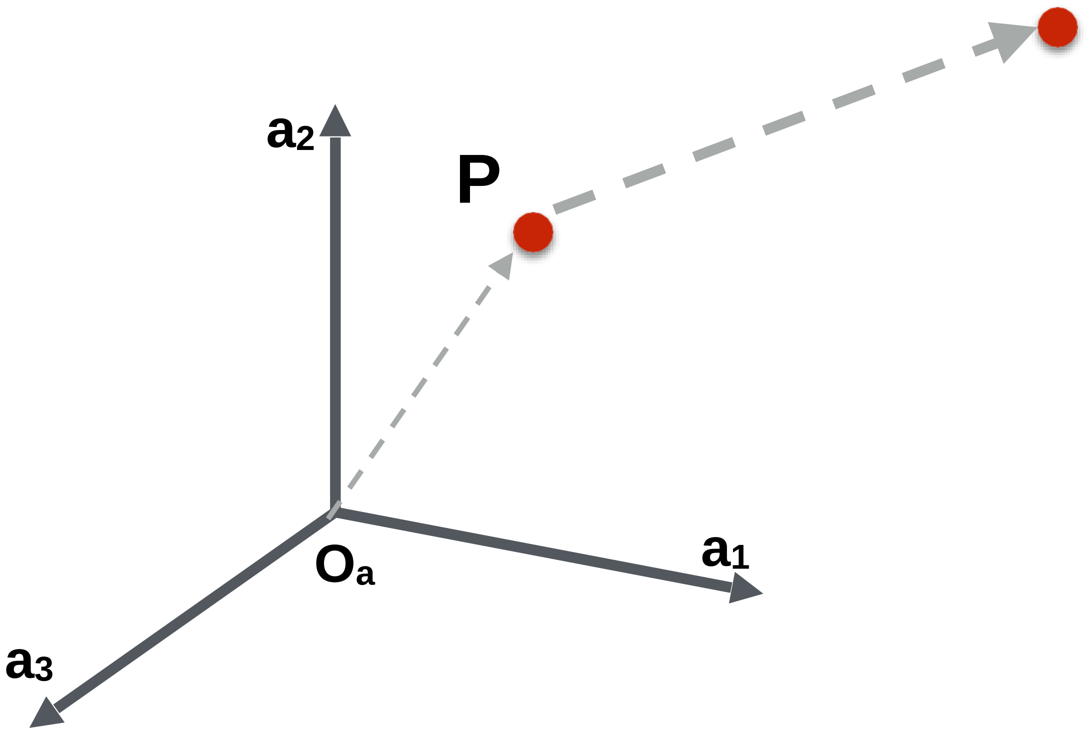
Transformând un punct **P** cu o matrice de transformare **M** avem două interpretări valide ale rezultatului:

- Transformăm punctul în sistemul de coordonate **I**
  $$P' = \mathbf{I}(\mathbf{Mc}) = \mathbf{Ic}'$$
- Transformăm sistemul de coordonate **I**
  $$P' = (\mathbf{IM})\mathbf{c} = \mathbf{I}'\mathbf{c}$$

Sisteme de coordonate

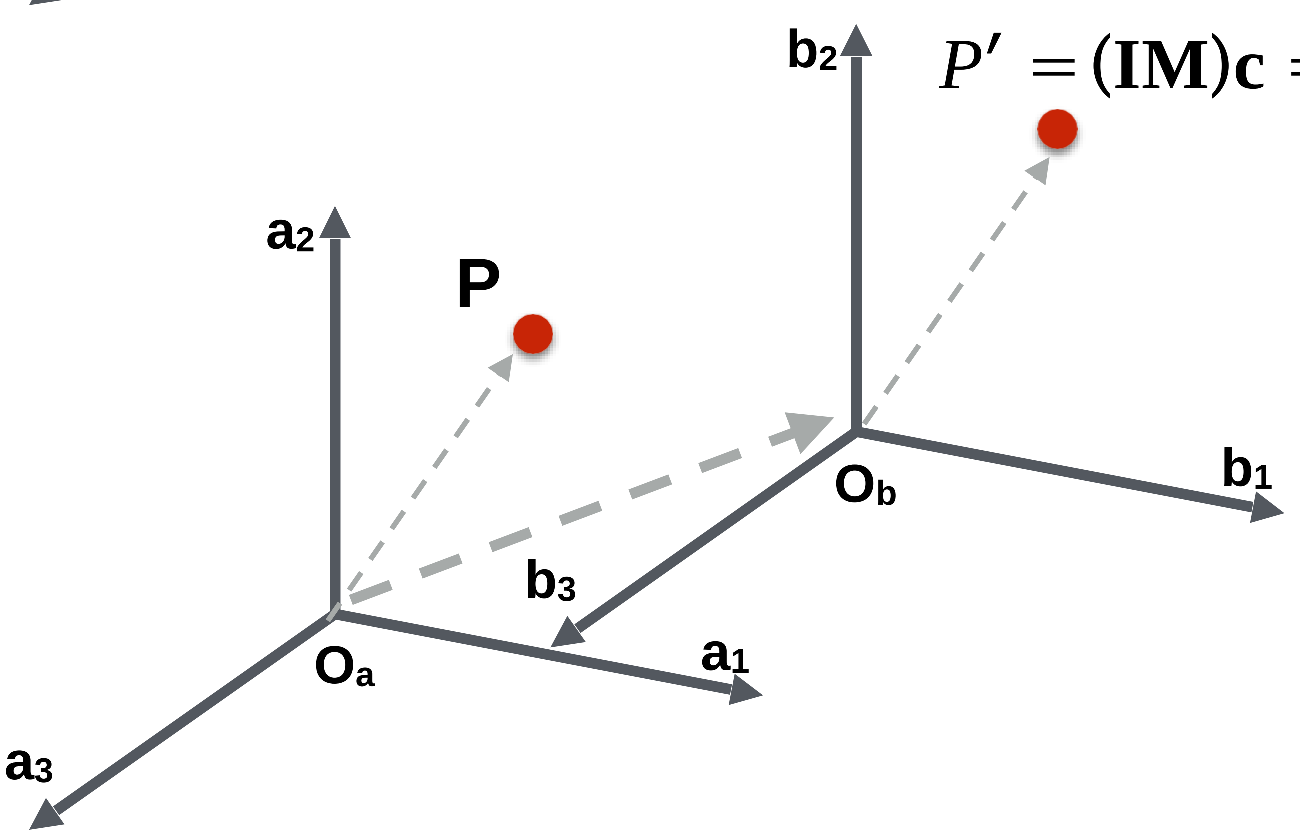
1. Transformarea punctului în sistemul de coordonate I

$$P' = \mathbf{I}(\mathbf{Mc}) = \mathbf{Ic}'$$



2. Transformare sistemului de coordonate I

$$P' = (\mathbf{IM})\mathbf{c} = \mathbf{I}'\mathbf{c}$$



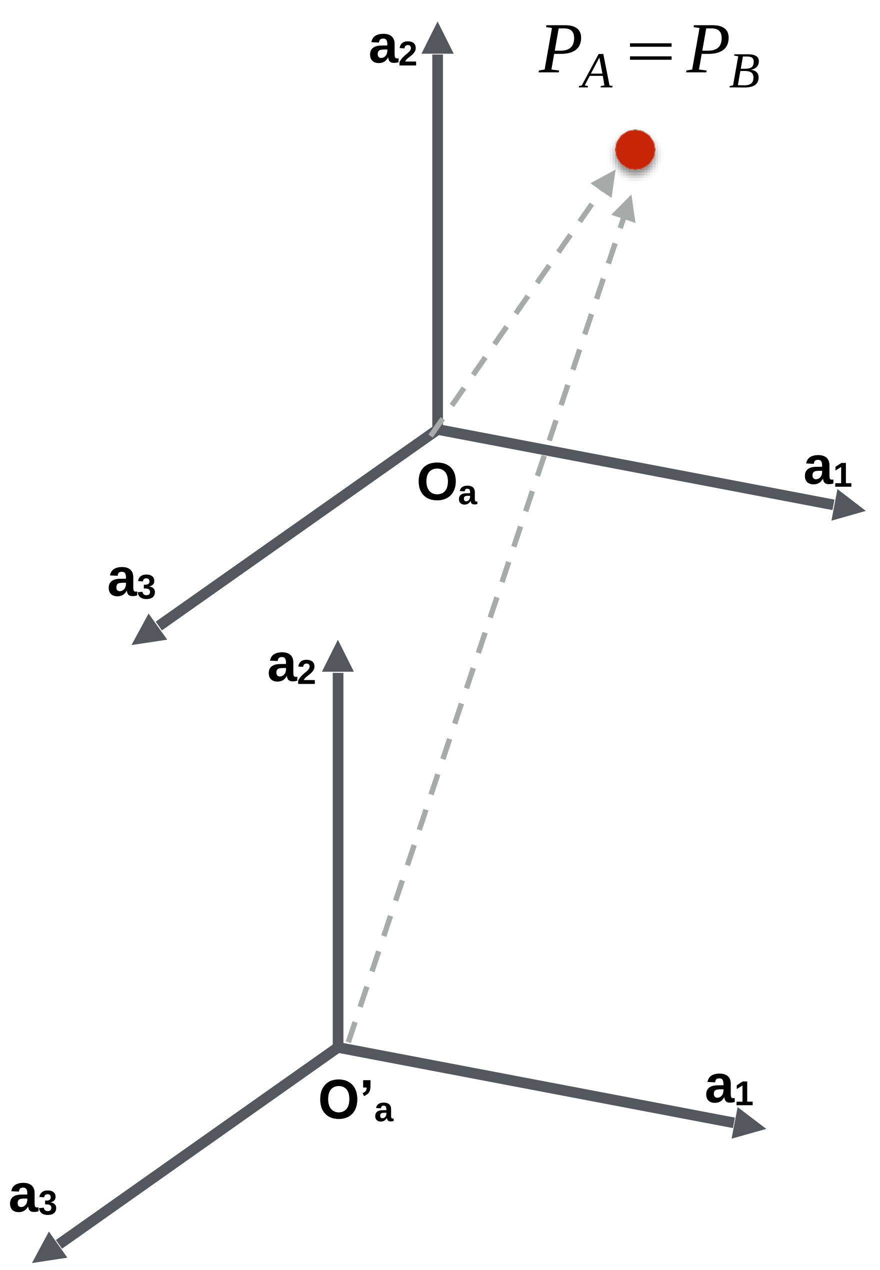
Schimbarea sistemului de coordonate

Translație:

- modifică originea sistemului de coordonate
- vectorii bază nu sunt afectați de operația de translație

$$P = O_A + x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2 + z\mathbf{a}_3$$

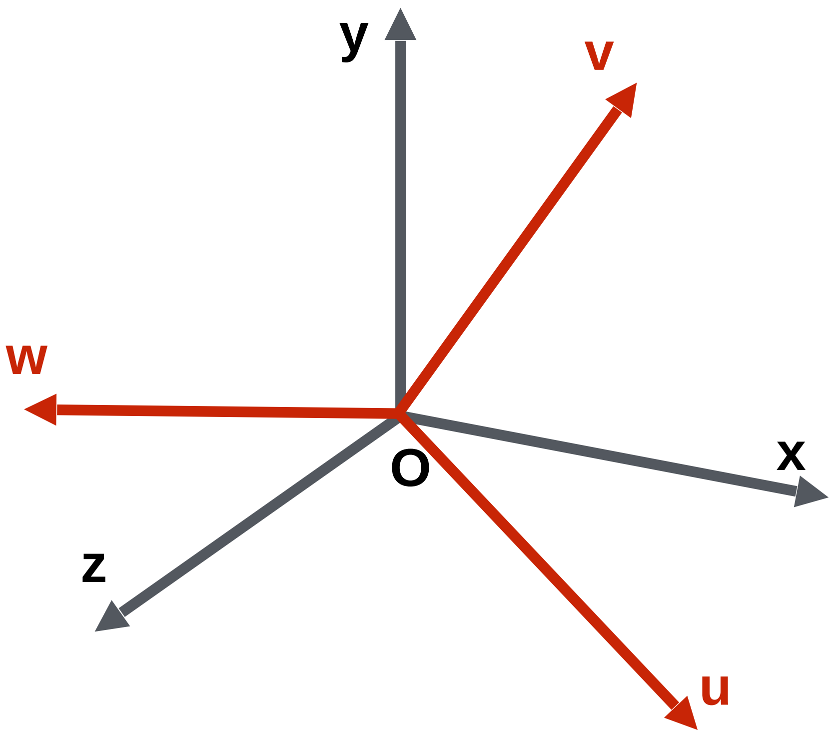
$$P = O_A' + x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2 + z\mathbf{a}_3$$



Schimbarea sistemului de coordonate

Rotație și scalare:

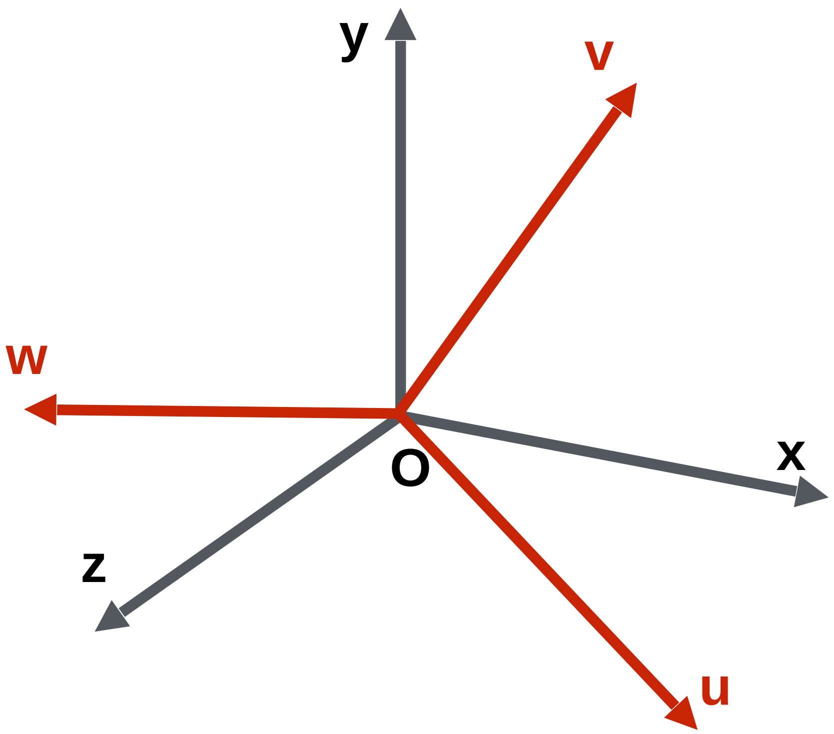
- exprimăm (**u**, **v**, **w**) folosind vectorii bază $(1,0,0)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$



$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}$$

Schimbarea sistemului de coordonate

- Matricea **M** transformă din sistemul de coordonate exprimat prin vectorii bază $(1,0,0)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$ la (**u**, **v**, **w**)

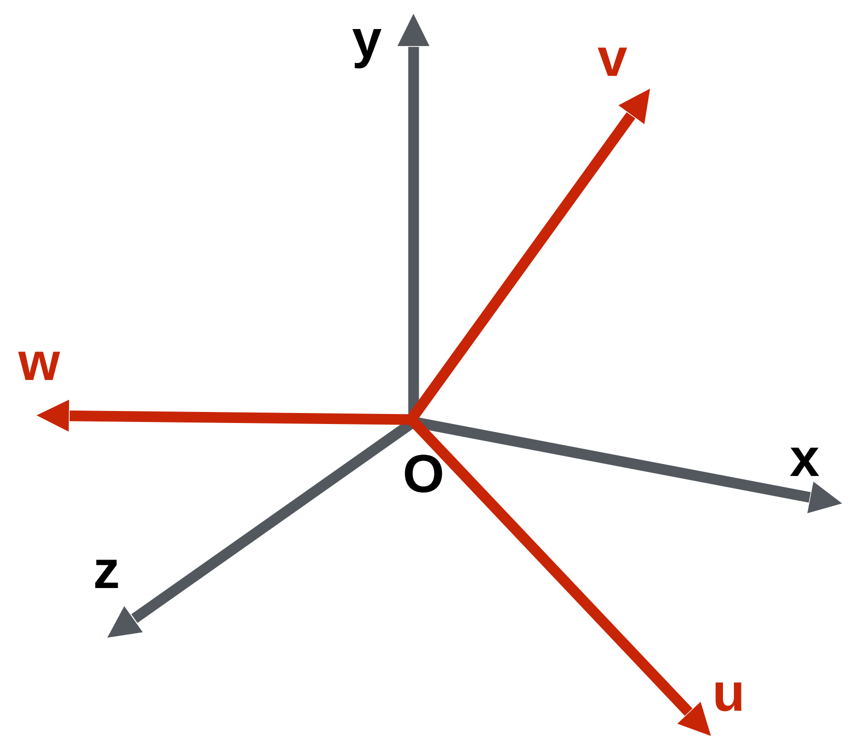


$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_x \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{u} \qquad \mathbf{M}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{v} \qquad \mathbf{M}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{w}$$

Schimbarea sistemului de coordonate

- Matricea $\mathbf{M}^{-1}$ transformă din (**u**, **v**, **w**) la sistemul de coordonate exprimat prin vectorii bază $(1,0,0)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$

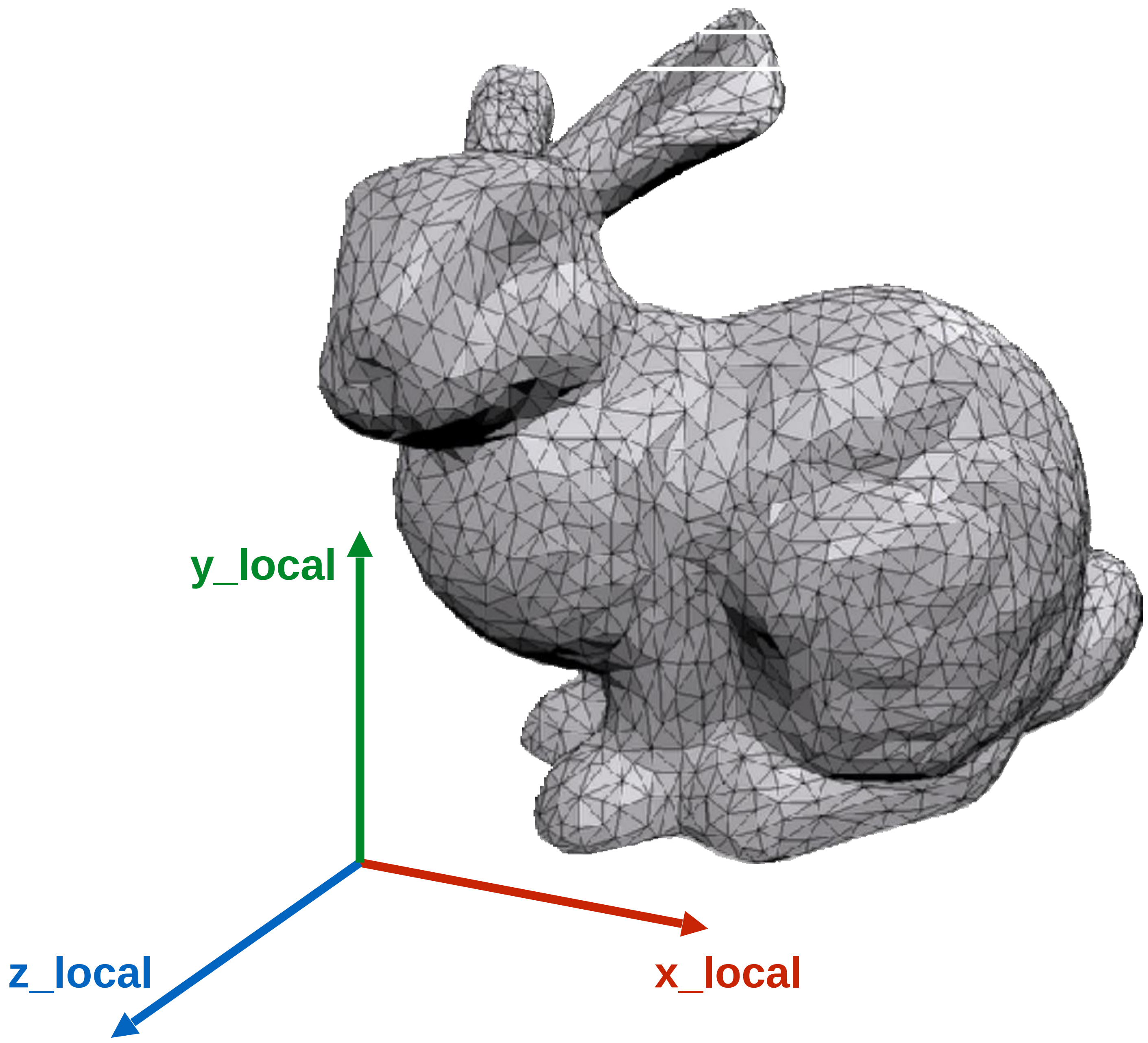


$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_x \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\mathbf{M}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{Mx} = \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Mx} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}$$

Sistem local de coordonate

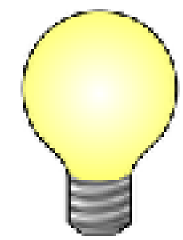
Spațiul model/obiect (Model/Object space)



Sistemul de coordonate real (world)

Sistem de referință în care sunt plasate obiectele, sursele de lumină și camera de vizualizare

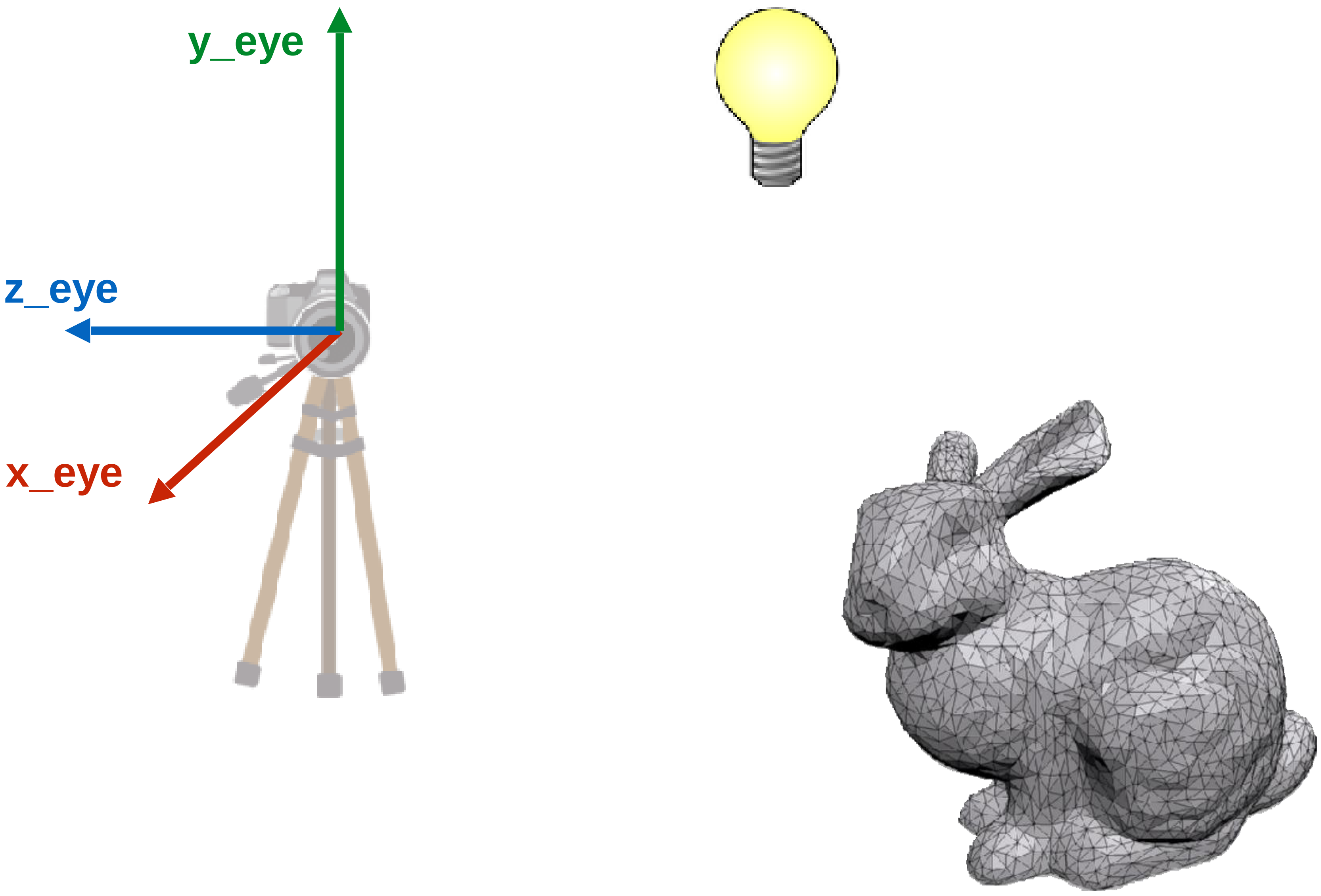
Spațiu real (World space)



Sistemul de coordonate de vizualizare
Eye (view) coordinate system

Camera de vizualizare este originea sistemului de coordonate și privește de-a lungul axei z negative

Spațiu cameră (Camera space)



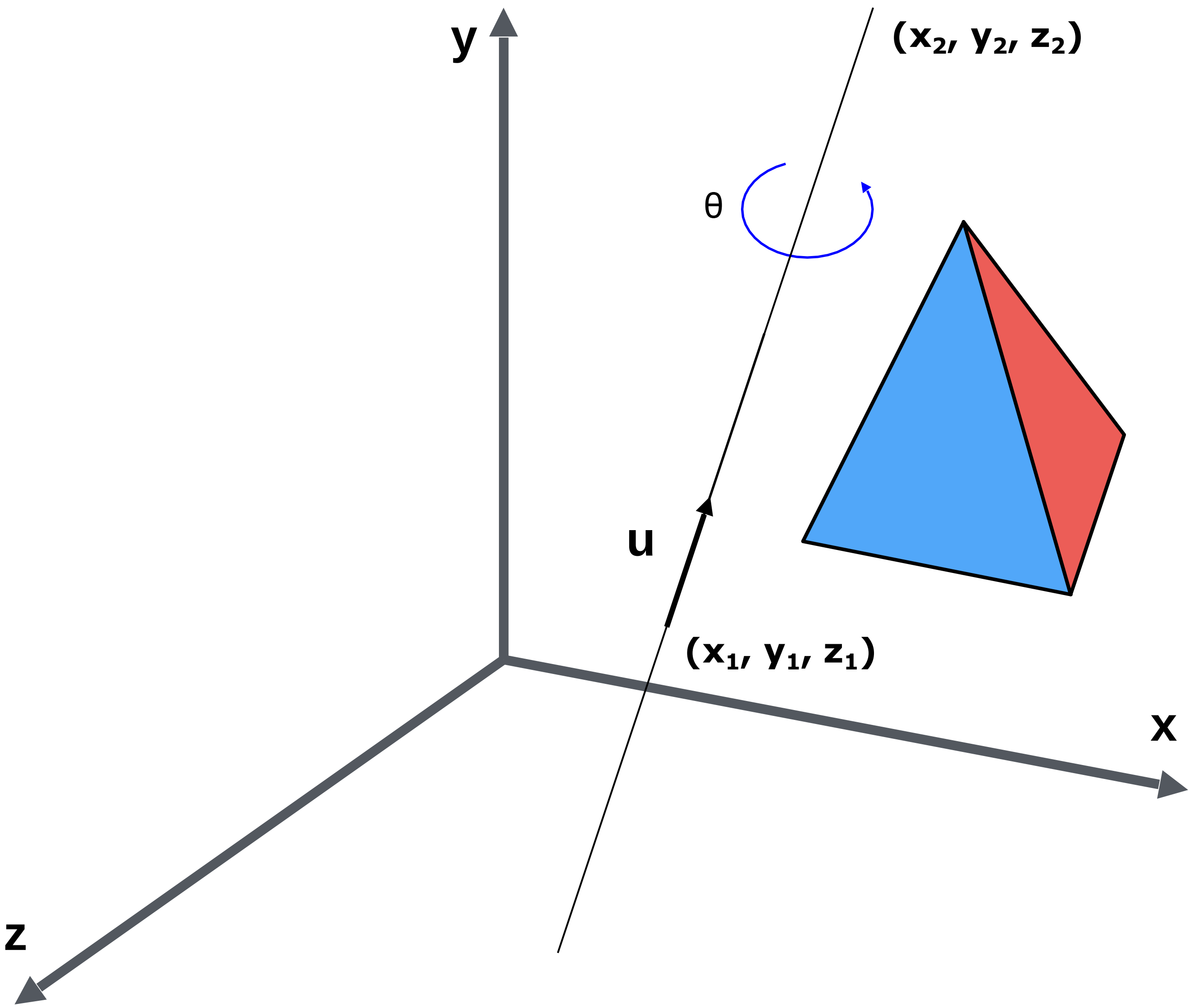
Sisteme de coordonate

- Coordonate de decupare (Clip coordinates)
- Coordonate dispozitiv normalizate (Normalized device coordinates)
- Coordonate ecran (Window (screen) coordinate)

Later

Extra

Rotație în jurul unui vector oarecare



Rotație în jurul unui vector oarecare

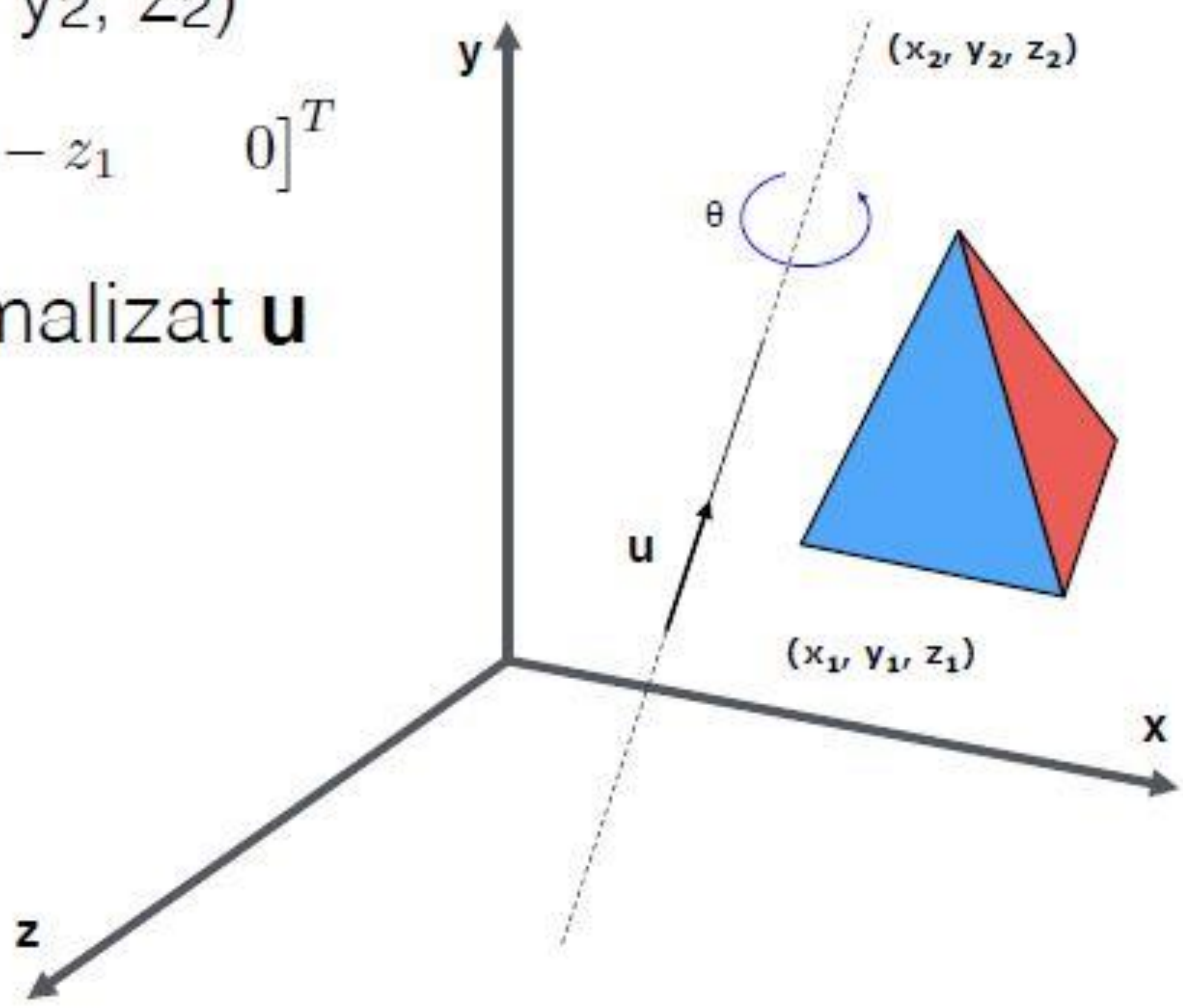
- Vectorul este definit de punctele $P_1(x_1, y_1, z_1)$ and $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

- Calculăm vectorul normalizat **u**

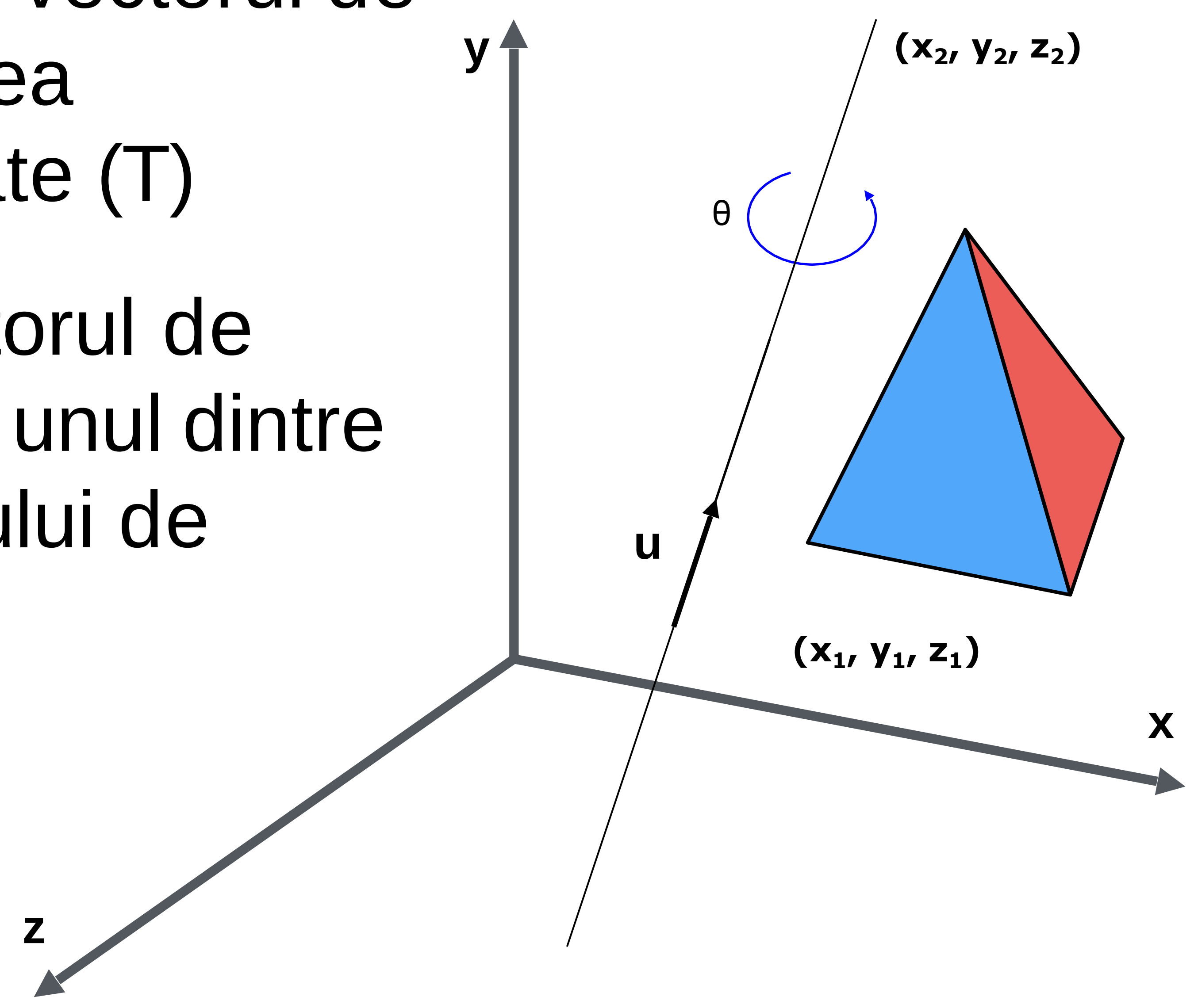
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$a = \frac{\Delta x}{\|\mathbf{v}\|} \quad b = \frac{\Delta y}{\|\mathbf{v}\|} \quad c = \frac{\Delta z}{\|\mathbf{v}\|}$$



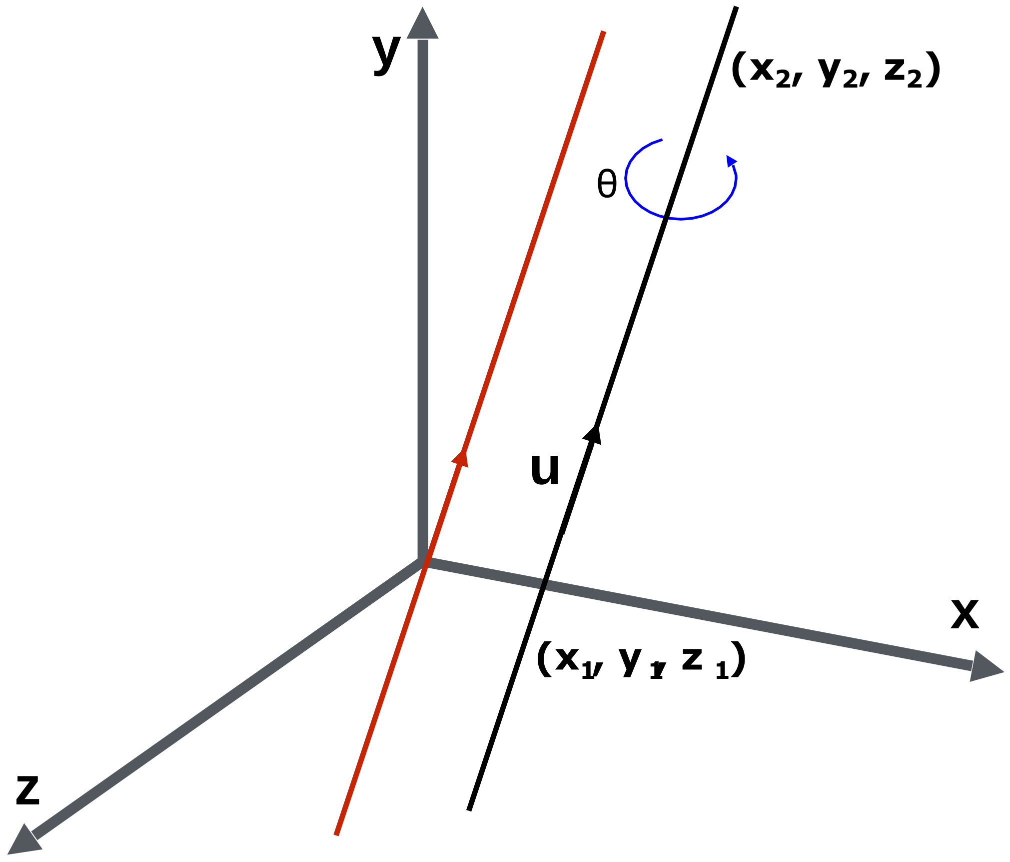
Rotație în jurul unui vector oarecare

1. Translație astfel încât unul dintre punctele care definesc vectorul de rotație să devină originea sistemului de coordonate (T)
2. Rotație astfel încât vectorul de rotație să fie paralel cu unul dintre vectorii bază ai sistemului de coordonate (R)
3. Rotație cu unghiul θ
4. R^{-1}
5. T^{-1}

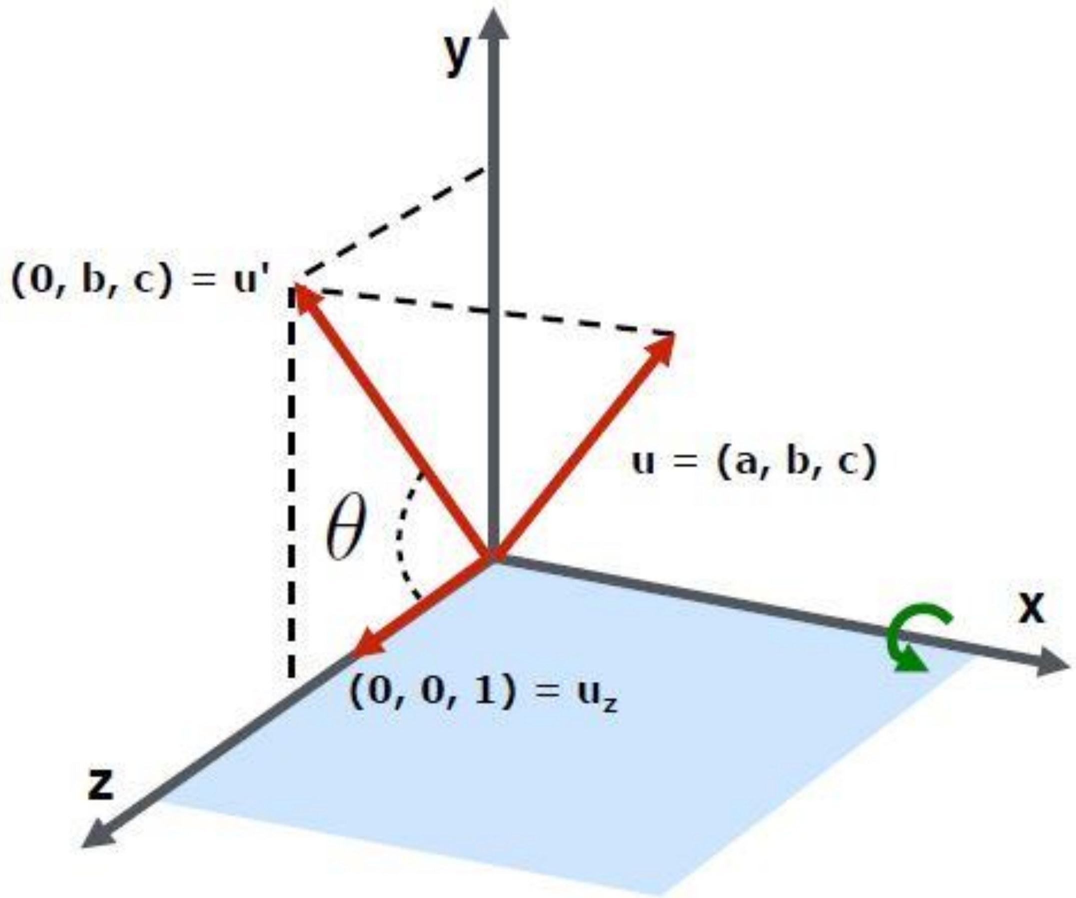


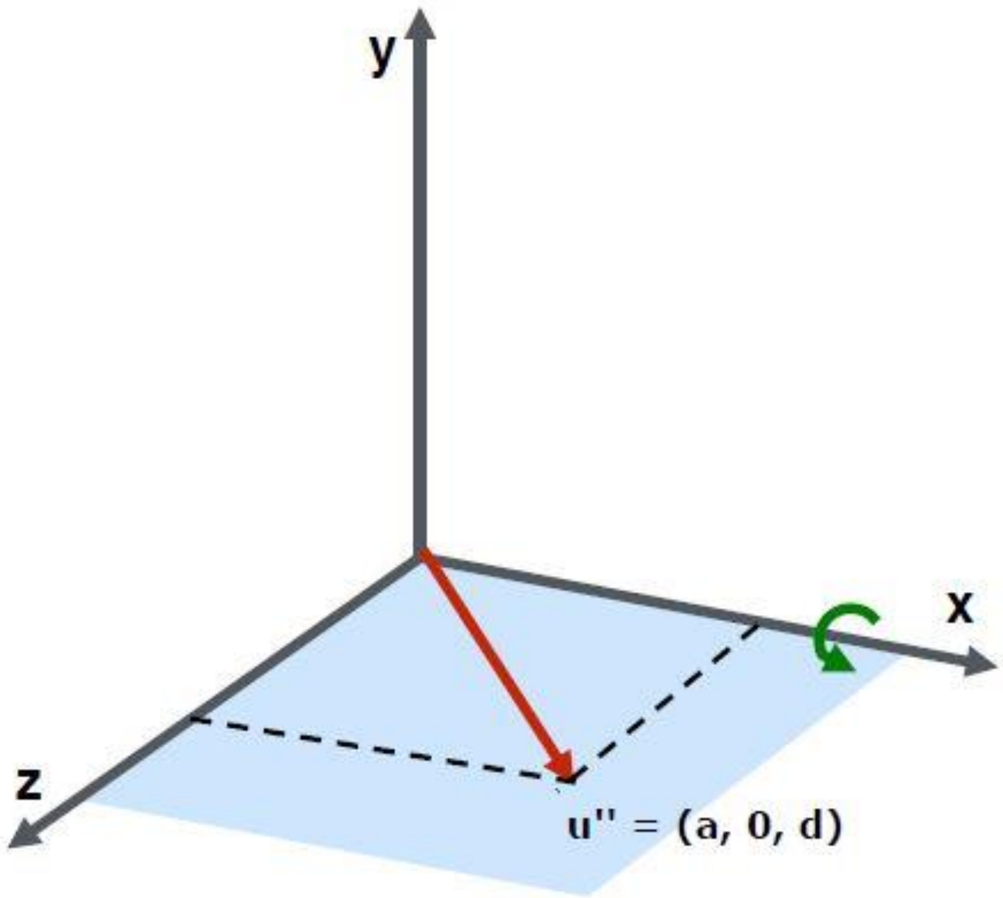
1. Translație

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



2. Rotație





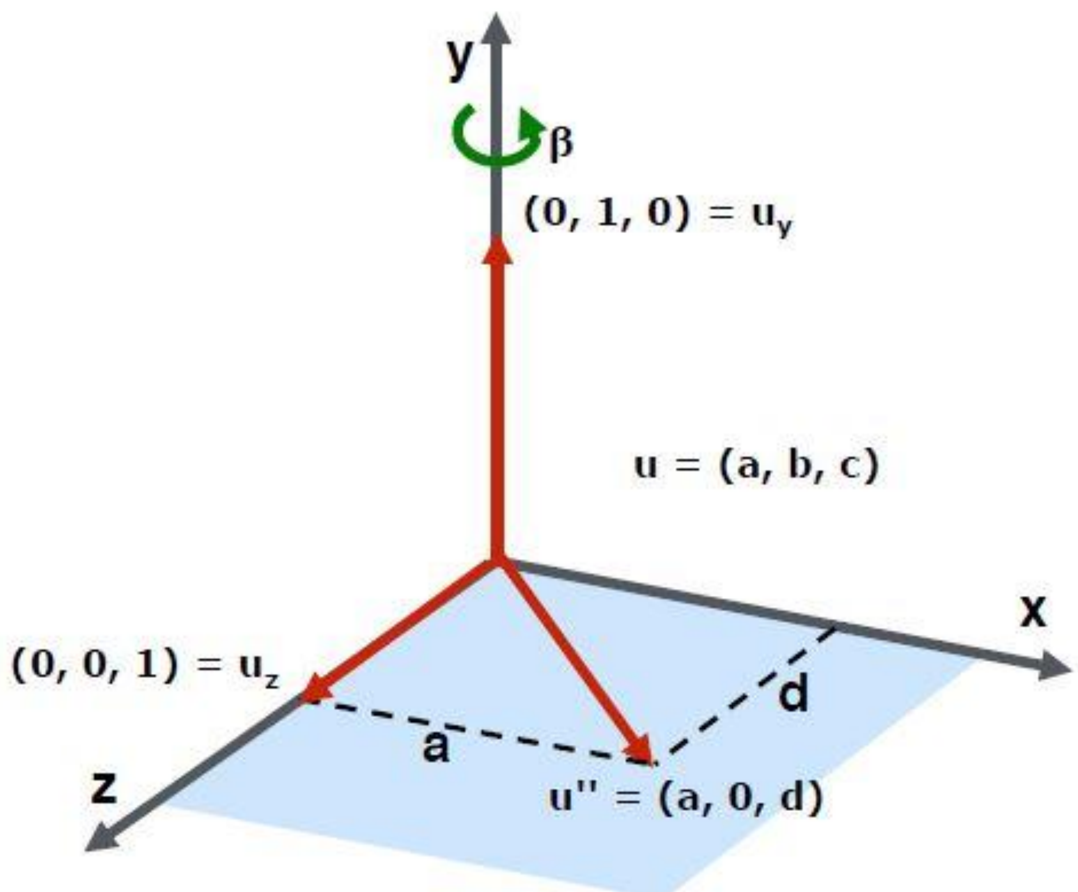
$$\mathbf{u'} \cdot \mathbf{u_z} = \|\mathbf{u'}\| \|\mathbf{u_z}\| \cos\theta$$

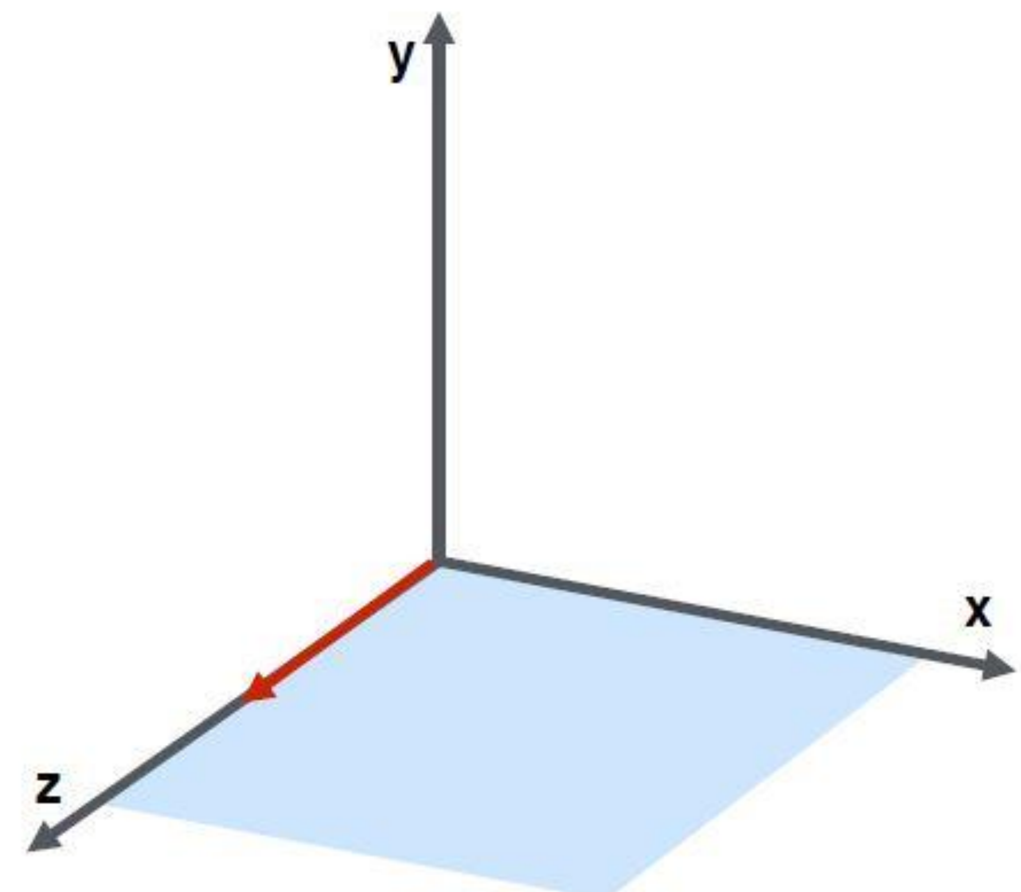
$$\cos\theta = \frac{c}{d} \qquad \sin\theta = \frac{b}{d}$$

$$d = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\mathbf{R_x}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c/d & -b/d & 0 \\ 0 & b/d & c/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Rotație





$$\mathbf{u}'' \cdot \mathbf{u_z} = \|\mathbf{u}''\| \|\mathbf{u_z}\| \cos\beta$$

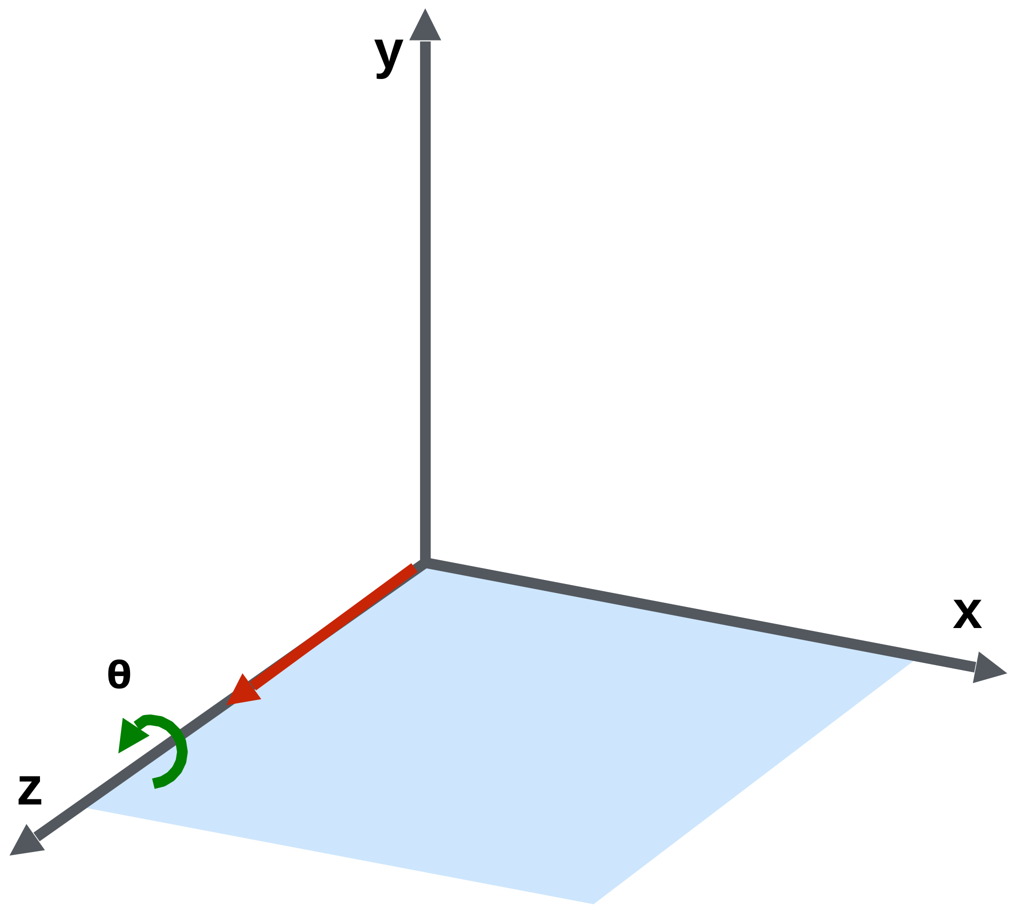
$$\mathbf{u}'' \times \mathbf{u_z} = \mathbf{u_y} \|\mathbf{u}''\| \|\mathbf{u_z}\| \sin\beta = \mathbf{u_y} \sin\beta$$

$$\sin\beta = -a \qquad \cos\beta = d$$

$$\mathbf{u}'' \times \mathbf{u_z} = \mathbf{u_y}(-a)$$

$$\mathbf{R_y}(\beta) = \begin{bmatrix} d & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Rotație cu unghiul θ



$$\mathbf{R_z}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotație în jurul unui vector oarecare

4: $R^{-1} = R_x(\Phi)^{-1} R_y(\beta)^{-1}$

5: T^{-1}

Matricea globală de transformare:

$$\mathbf{H = T^{-1} R_x(\Phi)^{-1} R_y(\beta)^{-1} R_z(\theta) R_y(\beta) R_x(\Phi) T}$$