Eroarea staționară

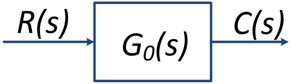
Paula Raica
Departmentul de Automatică
Str. Dorobantilor 71-73, sala C21, tel: 0264 - 401267
Str. Baritiu 26-28, sala C14, tel: 0264 - 202368
email: Paula.Raica@aut.utcluj.ro

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Eroarea staționară

Eroarea staționară = diferența între intrarea de referință ($r(t)$) și ieșirea sistemului ($c(t)$) în regim staționar.

$$e(t) = r(t) - c(t), \quad e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t), \quad e_{ss} = \lim_{t\to\infty}(r(t) - c(t))$$



Eroarea staționară se calculează doar dacă există regim staționar - sistem stabil!

Transformata Laplace a erorii: $E(s) = R(s) - C(s) = (1 - G_0(s))R(s)$
Teorema valorii finale (TVF) stabilește că:

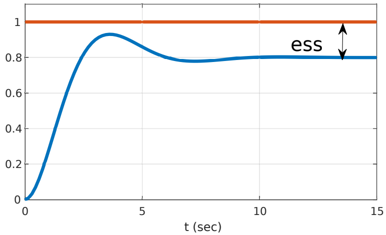
$$\text{dacă } \lim_{t\to\infty} e(t) \text{ există, atunci: } \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

Aplicați TVF numai dacă $E(s)$ *are toți polii cu partea reală negativă și nu mai mult de un pol în* 0.

Eroarea staționară - Exemple

Se consideră un sistem cu funcția de transfer: $G(s) = \dfrac{0.8}{s^2 + s + 1}$ și intrarea $r(t) = 1 \;\Rightarrow\; R(s) = \dfrac{1}{s}$.

Eroarea staționară: $$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s(1 - G(s))R(s) = \lim_{s \to 0} s\left(1 - \frac{0.8}{s^2 + s + 1}\right)\frac{1}{s} = 0.2.$$



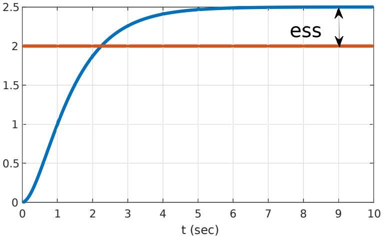
Din figura: intrarea $= 1$, ieșirea în regim staționar $= 0.8 \Rightarrow e_{ss} = 1 - 0.8 = 0.2$.

Eroarea staționară - Exemple

Se consideră un sistem cu funcția de transfer: $G(s) = \dfrac{2.5}{s^2 + 3s + 2}$ și intrarea

$r(t) = 2 \;\Rightarrow\; R(s) = \dfrac{2}{s}$.

$$\text{Eroarea staționară:} \quad e_{ss} = \lim_{s \to 0} s\left(1 - \frac{2.5}{s^2 + 3s + 2}\right)\frac{2}{s} = \left(1 - \frac{2.5}{2}\right) \cdot 2 = -0.5.$$

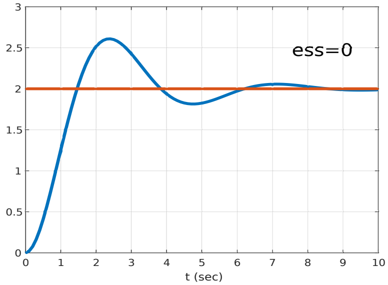


Din figură: intrarea $= 2$, ieșirea în regim staționar $= 2.5 \Rightarrow\; e_{ss} = 2 - 2.5 = -0.5$.

Eroarea staționară - Exemple

Se consideră un sistem cu funcția de transfer: $G(s) = \dfrac{2}{s^2+s+2}$ și intrarea $r(t) = 2 \;\Rightarrow\; R(s) = \dfrac{2}{s}$. Eroarea staționară:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left(1 - \frac{2}{s^2+s+2}\right)\frac{2}{s} = \left(1-\frac{2}{2}\right)\cdot 2 = 0.$$



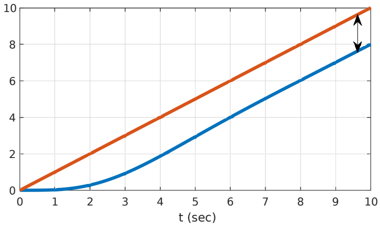
Din figură: intrarea $= 2$, ieșirea în regim staționar $= 2 \Rightarrow e_{ss} = 2 - 2 = 0$.

Eroarea staționară - Exemple

Se consideră un sistem cu funcția de transfer: $G(s) = \dfrac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$ și intrarea $r(t) = t \;\Rightarrow\; R(s) = \dfrac{1}{s^2}$. Eroarea staționară:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s\left(1 - \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}\right)\frac{1}{s^2} = \lim_{s \to 0} \frac{s^3 + 2s^2 + 2s}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}\frac{1}{s} =$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{s^2 + 2s + 2}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = 2$$

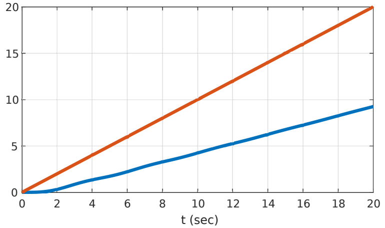


Eroarea staționară - Exemple

Se consideră un sistem cu funcția de transfer: $G(s) = \dfrac{1}{s^3 + s^2 + 3s + 2}$ și intrarea $r(t) = t \;\Rightarrow\; R(s) = \dfrac{1}{s^2}$. Eroarea staționară:

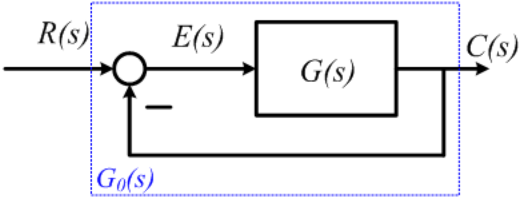
$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left(1 - \frac{1}{s^3 + s^2 + 3s + 2}\right)\frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0}\left(1 - \frac{1}{s^3 + s^2 + 3s + 2}\right)\frac{1}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{s^3 + s^2 + 3s + 1}{s^3 + s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{1}{s} = \infty$$



Eroarea staționară pentru sisteme cu reacție negativă unitară

Pentru un sistem în buclă închisă cu reacție negativă unitară:



Sistemul închis $G_0(s)$ trebuie să fie stabil!

eroarea este:

$$E(s) = R(s) - C(s) = R(s) - R(s)G_0(s) = R(s)(1 - G_0(s))$$

sau

$$E(s) = R(s)(1 - \frac{G(s)}{1 + G(s)}) = R(s)\frac{1}{1 + G(s)}$$

Teorema valorii finale:

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

Eroarea staționară pentru sisteme cu reacție negativă unitară

- utilizând funcția de transfer în buclă închisă $G_0(s)$:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s(1 - G_0(s))R(s)$$

- utilizând funcția de transfer în buclă deschisă $G(s)$:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{1+G(s)}R(s)\right)$$

Pentru o referința treaptă unitară: $r(t) = 1$ or $R(s) = 1/s$:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s(1 - G_0(s))\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}(1 - G_0(s)) = 1 - G_0(0)$$

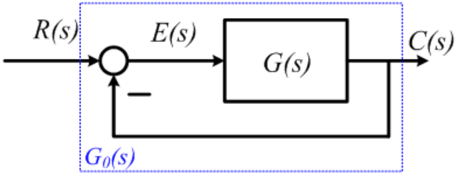
sau

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{1+G(s)}\right)\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{1+G(0)}$$

Eroarea staționară - Exemplu

Se consideră un sistem în buclă închisă cu funcția de transfer a buclei deschise:

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1}$$

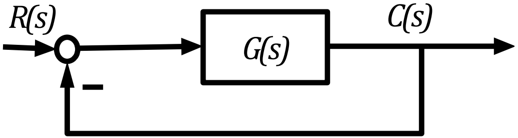


Pentru o intrare treaptă unitară, $R(s) = 1/s$, eroarea staționară este:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + G(0)} = \frac{1}{1 + k}$$

Constantele erorii staționare

- Se consideră un sistem cu reacție negativă:



$$G(s) = \frac{k\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s^N\prod_{i=1}^{Q}(s+p_i)}$$

  - $G(s)$ = funcția de transfer a sistemului deschis
  - reacție unitară
  - N = tipul sistemului (nr. de poli în origine ai sistemului deschis)

- Eroarea staționară:

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty}(r(t) - c(t))$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s(R(s) - C(s)) = \lim_{s\to 0} sR(s)(1 - \frac{G(s)}{1+G(s)}) = \lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

Eroarea staționară

Intrare treaptă: $r(t) = 1 \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s}$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\frac{1}{1+G(s)} = \frac{1}{1+G(0)} = \frac{1}{1+K_p}$$

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) \quad = \text{constanta erorii staționare la poziție}$$

- $N = 0$:

$$G(s) = \frac{k\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{Q}(s+p_i)} \quad \Rightarrow \; K_p = const \Rightarrow \; e_{ss} = const$$

- $N \geq 1$:

$$G(s) = \frac{k\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s^N\prod_{i=1}^{Q}(s+p_i)} \quad \Rightarrow \; K_p = \infty \Rightarrow \; e_{ss} = 0$$

Eroarea staționară

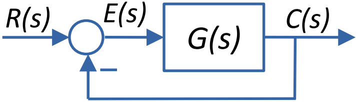
Intrare rampă: $r(t) = t \Rightarrow R(s) = \dfrac{1}{s^2}$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{s^2}\frac{1}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s(1+G(s))} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{sG(s)} = \frac{1}{K_v}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) \;\; = \text{constanta erorii staționare la viteză}$$

- $N = 0$: $G(s) = \dfrac{k\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{Q}(s+p_i)} \quad \Rightarrow K_v = 0 \Rightarrow e_{ss} = \infty$
- $N = 1$: $G(s) = \dfrac{k\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s\prod_{i=1}^{Q}(s+p_i)} \quad \Rightarrow K_v = const \Rightarrow e_{ss} = const$
- $N \geq 2$: $G(s) = \dfrac{k\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s^N\prod_{i=1}^{Q}(s+p_i)} \quad \Rightarrow K_v = \infty \Rightarrow e_{ss} = 0$

Exemplu 1



$$G(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)}$$

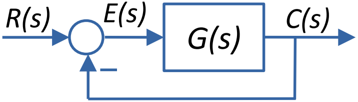
- Sistemul închis este stabil - verificare
- Constanta erorii staționare la poziție și eroarea staționară la poziție (intrare treaptă):

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s+4}{(s+1)(s+2)} = 2, \qquad e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{3}$$

- Constanta erorii staționare la viteză și eroarea staționară pentru intrare rampă:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{s+4}{(s+1)(s+2)} = 0, \qquad e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty$$

Exemplu 2



$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

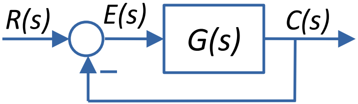
- Sistemul închis este stabil - verificare
- Constanta erorii staționare la poziție și eroarea staționară la poziție (intrare treaptă):

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{4}{s(s+2)} = \infty, \qquad e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

- Constanta erorii staționare la viteză și eroarea staționară pentru intrare rampă:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{4}{s(s+2)} = 2, \qquad e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{2}$$

Exemplu 3



$$G(s) = \frac{4}{s-2}$$

- Sistemul deschis $G(s)$ - instabil dar sistemul închis $G_0(s) = \dfrac{G(s)}{1+G(s)} = \dfrac{4}{s+2}$ este stabil.
- Constanta erorii staționare la poziție și eroarea staționară la poziție (intrare treaptă):

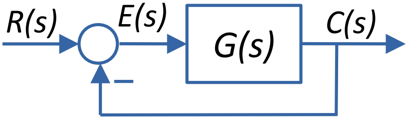
$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{4}{s-2} = -2, \qquad e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = -1$$

- Constanta erorii staționare la viteză și eroarea staționară pentru intrare rampă:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{4}{s-2} = 0, \qquad e_{ss} = \infty$$

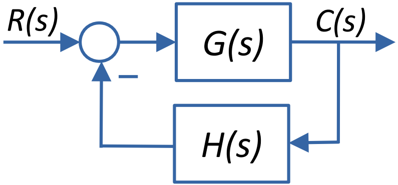
Exercițiu

Arătați că pentru un sistem cu reacție negativă unitară:



- Eroarea staționară pentru o intrare treaptă este egală cu 0, dacă $G(s)$ are un pol în origine (sistem de tipul 1)
- Eroarea staționară pentru o intrare rampă este egală cu 0, dacă $G(s)$ are doi poli în origine (sistem de tipul 2)

Eroarea staționară pentru sisteme cu reacție negativă ne-unitară

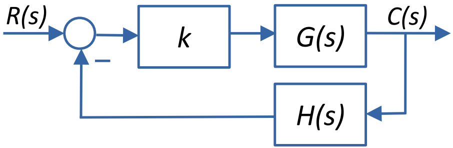


- Funcția de transfer a sistemului închis $G_0(s) = \dfrac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$ - stabilă
- Eroarea staționară:

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty}(r(t) - c(t)) = \lim_{s\to 0} s(R(s) - C(s)) = \lim_{s\to 0} s \cdot R(s) \cdot (1 - G_0(s))$$

Exemplu

Determinați valoarea parametrului k ($k > 0$) pentru care eroarea staționară la o intrare treaptă $r(t) = 4, \;\; t > 0$ este egală cu 0.



$$k > 0, \quad G(s) = \frac{1}{s+2}, \quad H(s) = \frac{2}{s+4}$$

- Sistemul închis:

$$G_0(s) = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)H(s)} = \frac{k(s+4)}{(s+2)(s+4)+2k}$$

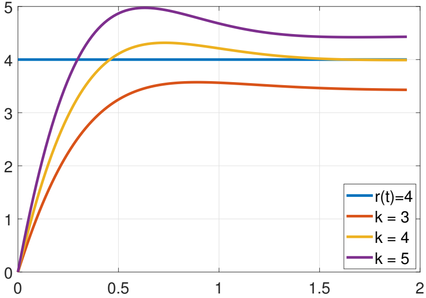
- Verificarea stabilității $G_0(s)$: de exemplu folosind criteriul RH pentru polinomul caracteristic $s^2 + 6s + 8 + 2k$

Exemplu - cont.

- Eroarea staționară:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot R(s) \cdot (1 - G_0(s)) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{4}{s} \cdot \left(1 - \frac{k(s+4)}{(s+2)(s+4)+2k}\right)$$

$$e_{ss} = 4 \cdot (1 - G_0(0)) = 4 \cdot (1 - \frac{4k}{8+2k}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k = 4}$$

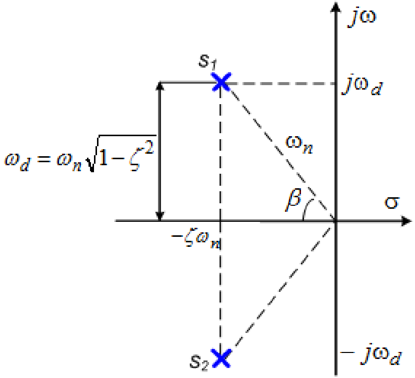


Analiza sistemelor. Aplicații

Câteva observații asupra localizării polilor sistemului de ordinul 2 și caracteristicile răspunsului tranzitoriu

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Polii complecși ai unui sistem de ordinul 2



$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$Re(s_{1,2}) = -\zeta\omega_n, \quad Im(s_{1,2}) = \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

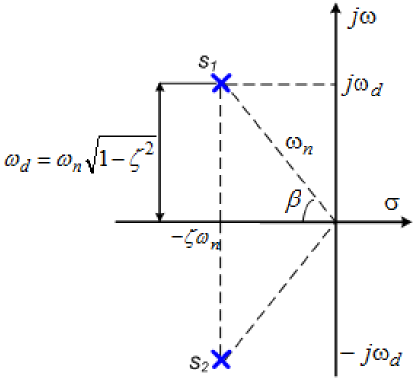
- timpul de răspuns:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

- timpul răspunsului maxim:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Polii complecși ai unui sistem de ordinul 2



$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$|s_{1,2}| = \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} = \omega_n$$

- factorul de amortizare

$$cos\beta = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = \zeta$$

$$\beta = arccos\zeta$$

- timpul de creștere:

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

Exemplu

Se consideră un sistem de ordinul 2 cu funcția de transfer :

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Determinați aria din planul complex în care pot fi localizați polii sistemului astfel încât specificațiile răspunsului la treaptă să sunt:

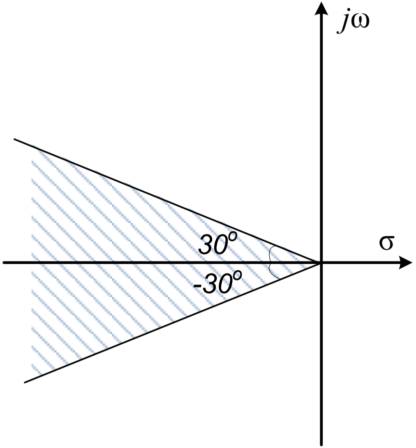
(a) Factorul de amortizare $\zeta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) Factorul de amortizare $\zeta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ și timpul de răspuns $t_s < 4\ sec$.

(c) Factorul de amortizare $\zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, timpul de răspuns $t_s < 4\ sec$ și timpul răspunsului maxim $t_p = \frac{\pi}{3}\ sec$.

Exemplu - (a)

(a) Localizarea polilor astfel încât $\zeta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$



- factorul de amortizare

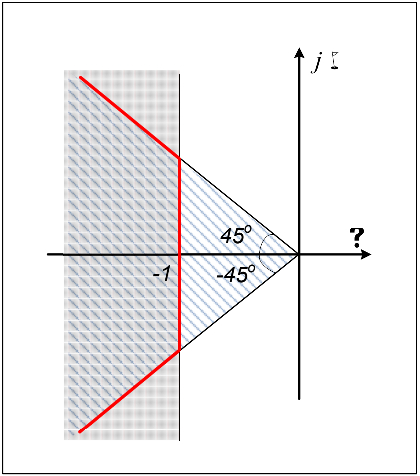
$$\zeta = cos\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = arccos\zeta$$

$$\zeta \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad cos\beta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \beta \leq arccos\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \beta \leq 30^o$$

Exemplu - (b)

(b) Localizarea polilor astfel încât $\zeta \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ și $t_s < 4\ sec$



- factorul de amortizare

$$\zeta = cos\beta \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \beta \leq arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^o$$

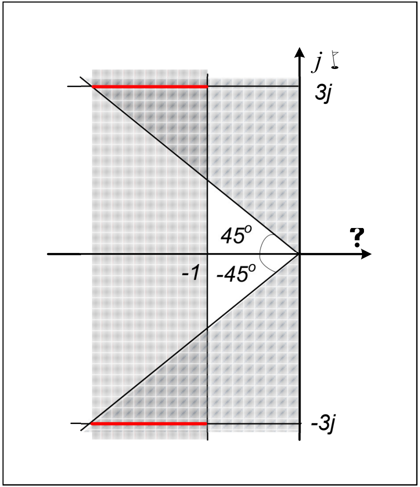
- timpul de răspuns

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} < 4 \quad \Rightarrow \quad \zeta\omega_n > 1 \quad \Rightarrow \quad -\zeta\omega_n < -1$$

$$\Rightarrow \quad Re(poli) < -1$$

Exemplu - (c)

(c) Localizarea polilor astfel încât $\zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t_s < 4\ sec$, $t_p = \frac{\pi}{3}\ sec$.



- factorul de amortizare

$$\zeta = cos\beta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \beta \geq arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^o$$

- timpul de răspuns

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} < 4 \quad \Rightarrow \quad \zeta\omega_n > 1 \quad \Rightarrow \quad -\zeta\omega_n < -1$$

- timpul răspunsului maxim

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \omega_d = 3$$

$$\Rightarrow \quad Re(poli) < -1, \quad im(poli) = 3$$