examen: teorie + pb. MN Curs 1

↓

demonstrații

Interpolare

$f: A \to B$

$f(x_k) = y_k, \quad k = \overline{0,n}$

$x_i \neq x_j$

$F: A_1 \to B_1 \qquad A \subset A_1, \ B \subset B_1$

↓ supramulțime

$F(x_k) = f(x_k) \qquad k = \overline{0,n}$

"am interpolat f în x_k"

$x \neq x_k, \quad F(x) \overset{?}{\simeq} f(x)$

cum se comportă

$|f(x) - F(x)| \overset{?}{\to} 0$

$\Delta ? \ x_0 < x_1 < \dots < x_n$

$\|\Delta\| = \max(x_{k+1} - x_k)$

↳ norma div

$(X, d) \quad d: X \times X \to \mathbb{R}$

↳ mulț $\neq \emptyset$

↳ sp. metric

a) $d(x,y) \geq 0, \ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

b) $d(x,y) = d(y,x)$ (simetrică)

c) ineg Δ

$\forall x,y,z \in X, \ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

↓

"Când ești treaz"

$x_n: \ f: \mathbb{N} \to X$ șir pe $\mathbb{N}$

$x_n = f(n), \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(x_{2n}) $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ crescatoare și $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir atunci șirul

$(x_{\varphi(n)})$ se numește subșir a lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$x_n \to x$ $d(x_n, x) \to 0$

converge la — șir nr. reale poz

CE P**A MEA?

(X, d) un spațiu metric spațiul se num. sp. m. complet

$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are lim $\in X$.

$\forall \varepsilon>0, \exists N_\varepsilon$ a. î. $\forall p\in\mathbb{N}$ și $\forall n > N_\varepsilon$ $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$ șir fundamental

$\forall$ șir conv este fund. recip. nu e adv.

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3+4}, \quad |x_{n+p} - x_n| \le \alpha_n \to 0$$

ε $\quad \alpha_n < \varepsilon$

$p \to \infty \Rightarrow |x - x_n| \le \alpha_n < \varepsilon$

$$|x_{n+p} - x_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^3+4} < \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{k-(k-2)}{k(k-1)(k-2)} = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=n+1}\left[\frac{1}{(k-1)(k-2)} - \frac{1}{k(k-1)}\right]}_{\text{sum. telescopică}} =$$

$f(k)$ $\quad f(k+1)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{(n+p)(n+p-1)}\right) < \frac{1}{2n(n-1)}$$

$$|x - x_n| \le \frac{1}{2n(n-1)} < \frac{1}{100}$$

→ 4 example

$n(n-1) \geq 50$

„îi notă de trecere da nu-i bun"

(→ doamne ce curs oribil.)

- cu polinoame (Schema lui Horner?)

$f(x)$ $k = \overline{0,n}$

$f(x) \simeq P(x)$ $\quad P(x_k) = f(x_k)$

$\simeq F$

$$P_1(x) = P(x) + \left[\prod_{k=0}^{n} (x - x_k)\right] Q(x)$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$ $\exists!\, P \in \Pi_n$ $\xrightarrow{\text{de gr } n}$ $P(x_k) = f(x_k),\ k = \overline{0,n}$

↳ integrabile

↳ $\exists$ un șir

" măgar, statea pe el"

"bun el sunt zice că un $\exists$ un P de gr n?"

Dar $\sum_{i=0}^{n} a_i x_k^i = f(x_k) \quad k = \overline{0,n}$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = W(x_1, \ldots, x_n) = \left(\prod_{i<j} (x_i - x_j)\right)$$

↓

$= 0 \iff$ sunt două elem egale

$W \neq 0 \Rightarrow \exists!$ Polinom

Unicul polinom gr $\leq n$ care interpolează fct f în p. x_k se num polinomul de interpolare a lui Lagrange și not $L_n(f, x_0, \ldots x_n)(x)$

"știi din cântecu ală nuna nuna"

Def: fiind date p. distincte x_k, not $l(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$ (polinomul nodal)

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$ $i = \overline{0,n}$ → pol. fundam. Lagrange

T. $L_n(f; x_0, \ldots x_n)(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \cdot f(x_i)$

- doamne ce haotic predă...

Dar $l_i(x_k) = \delta_{k,i}$ → Δ mare

↳ kronecker?

$$L_n(f; \quad (x_k) = \sum_{i=0}^{n} \delta_{k,i} \cdot f(x_i)$$

"să ziceam că ați fi la examen dun feri"

$f(x)=x^4+5 \quad L(f; 1,-1,2,3)(x) = f(x)$

$f(x) - L_3(f; \ )(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x-3)$

"și gata ați luat 10"

Corolar: ceea care rezultă din

Fie P cu $gr \le n$ $\quad L_n(P, x_0, \dots x_n)(x) = P(x)$

$Q(x) = L_n(P; x_0, \dots, x_n)(x) - P(x)$

$Q(x_k) = 0 \quad k = \overline{0,n}$

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$$

$\hookrightarrow$ m.- a întrebat pe mn

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) \cdot i = 5n$$

$x_i = \frac{i}{n}, \ i = \overline{0,n}$

$\boxed{x = 5}$

Obs: $l_i(x) = \dfrac{l(x)}{(x-x_i)l'(x_i)} \quad i = \overline{0,n}$

$$(\ln l(x))' = \frac{l'(x)}{l(x)}$$

$$(l(x))' = (x-x_1)\dots(x-x_n) + \dots + (x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})$$
$$+ \dots (x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

Def: fiind dată f și pct dist. x_k se num. dif divizată pe pct $x_0, x_1, \dots x_n$, a fct f, mr not $[x_0 \dots x_n; f]$ = coef lui x_n $L_n(f; x_0, \dots, x_n)$

Obs: $$[x_0, \dots x_n; f] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{l'(x_k)}$$

$$L_n(f, \dots)(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{l'(x)}{(x-x_i)} \cdot \frac{1}{l'(x_i)} \cdot f(x_i)$$

"mie îmi dă 1, vouă cât vă dă?"

$$[x_0, \dots, x_n; x^m] = \begin{cases} 0, & m \geq 0, \leq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

$m \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; x^{n+k}] \quad k = \overline{1,2}$$

$$[x_0, \dots x_n, \ell(x)] = 0$$

$$\ell(x) = x^{n+1} - S_1 x^n + Q_{n-1}(x)$$

I. rel. Viette

$$0 = [x_0, x_1, \dots, x_n, x^{n+1}] - S_1$$

$$[x_0, \dots x_n; x\,\ell(x)] = 0$$

$$0 = [x_0, \dots, x_n; x^{n+2}] - S_1 x^{n+1} + S_2 x^n + Q_{n-1}(x)$$

$$0 = [\quad , x^{n+2}] - S_1^2 + S_2$$

$$L_n(f; x_0, \dots x_n)(x) - L_{n-1}(f; x_1, \dots, x_n) = [x_0, \dots x_n; f] \frac{\ell(x)}{x - x_0} \quad \Big| \, x - x_0$$

→ SAVE ME PLS

→ VREAU SĂ PLEC, NOEMI AVEA DREPTATE

→ CE CURS ORIBIL

$$L_n(f; x_0, \dots x_n)(x) - L_{n-1}(f; x_0, \dots x_n)(x) = [x_0, \dots, x_n; f] \frac{\ell(x)}{x - x_n} \quad \Big| \, x - x_n$$

$$(x - x_0 - x + x_n) L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x) = (x - x_0) L_{n-1}(f; x_1, \dots x_n)(x) -$$
$$-(x - x_n) L_{n-1}(f; x_1, \dots x_n)(x)$$

vai de plm

$$\boxed{[x_0, \dots, x_n; f] = \frac{[x_1, \dots x_n; f] - [x_0, \dots x_{n-1}; f]}{x_n - x_0}}$$