MN-5:

(1) Să se determine formulele de cuadratură de grad maxim de exactitate (se vor determina coeficienții și se vor caracteriza nodurile) de următoarea formă:

a) $\int_0^1 f(x)dx = A_0 f(0) + \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$

b) $\int_{-1}^1 f(x)dx = A_0 f(-1) + \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$

c) $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x-x^2}}dx = A_0 f(0) + \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$

d) $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + A_{n+1} f(b) + R(f)$

e) $\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx = A_0 f(0) + \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$

f) $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x-x^2}}dx = A_0 f(0) + \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + A_{n+1} f(1) + R(f)$

(2) Fie $w:(a,b)\to\mathbb{R}_+$ o pondere și $(P_k)_{k=\overline{0,n}}$ polinoamele ortonormate corespunzătoare. Să se arate că $\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(y) = K_n \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x-y}$, $\forall x,y \in (a,b)$, K_n fiind o constantă independentă de x și y. (formula lui Rodrigues)

(3) Dacă $w:(a,b)\to\mathbb{R}_+$ este o pondere, P_{n+1} polinomul ortonormat corespunzător acestei ponderi și x_i, $i=\overline{1,n+1}$ rădăcinile acestui polinom să se arate că funcționala

$A_n(f) = [x_1,\dots,x_{n+1}; \frac{f}{P_n}]$ este pozitivă (P_n fiind polinomul ortonormat de grad n.)

(4) Să se arate că rădăcinile polinoamelor ortonormate P_n și P_{n+1} relative la ponderea w se separă

5) Să se arate că următoarele șiruri de operatori sunt șiruri de operatori de aproximare uniformă pe intervalele indicate.

a) $\left(S_{\Delta_{n,1}}(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $\Delta_n: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $I = [a,b]$ pe $[a,b]$

b) $\left(B_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)$ $0 \le \alpha \le \beta$ f. $I = [0,1]$

c) $L_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x)$

$= (n+1)\sum_{k=0}^{n} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\,dt \cdot b_{n,k}(x)$, $I = [0,1]$

d) $\left(K_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $K_n(f)$

$D_n(f)(x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) \int_0^1 b_{n,k}(t) f(t)\,dt$

e) $\left(D_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

6) Care dintre șirurile de operatori de la problema 5. păstrează alura funcției?

7) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $[x_1,x_2,x_3,x_4;f]$

Arătați că $B_n(f)$, corespunzător intervalului $[a,b]$ are aceeași proprietate.