Să se determine formula de cuadratură cu gradul de exactitate maxim de forma:

$$\int_a^b (x-a)(b-x) f(x)\,dx = A f(a) + B f(x_1) + C f(b) + R(f), \text{ unde}$$

x_1, A, B, C sunt necunoscutele problemei.

Rezolvare

Avem 4 necunoscute, pentru a le determina vom folosi condițiile

$R(1) = R(x) = R(x^2) = R(x^3) = 0$, adică $R(P) = 0$ pt $\forall P \in \Pi_3$

Pentru început considerăm

$$f(x) = (x-a)(b-x)(x-x_1) \in \Pi_3$$

și obținem

$$\int_a^b (b-x)^2(x-a)^2(x-x_1)\,dx = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 0 \iff$$

$$\iff \int_a^b x(b-x)^2(x-a)^2\,dx = x_1 \int_a^b (b-x)^2(x-a)^2\,dx \iff -\frac{(a-b)^5(a+b)}{60} =$$

$$= \frac{-x_1(a-b)^5}{30} \Rightarrow x_1 = \frac{a+b}{2}$$

Formula de cuadratură are forma:

$$\int_a^b (x-a)(b-x) f(x)\,dx = A f(a) + B f\left(\frac{a+b}{2}\right) + C f(b) + R(f)$$

În continuare se consideră pe rând:

$f(x) = (b-x)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$

$f(x) = (b-x)(x-a)$

$f(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$

și se obține sistemul:

$$\begin{cases} \int_a^b (b-x)^2 (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) dx = A(b-a)\left(a-\frac{a+b}{2}\right) \\ \int_a^b (b-x)^2 (x-a)^2 dx = B\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right) \\ \int_a^b (b-x)(x-a)^2\left(x-\frac{a+b}{2}\right) dx = C(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \frac{(a-b)^5}{120} = A(b-a)\frac{a-b}{2} \\ -\frac{(a-b)^5}{30} = B\frac{(b-a)^2}{4} \\ -\frac{(a-b)^5}{120} = C\frac{(b-a)^2}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{(b-a)^3}{60} \\ B = \frac{8(b-a)^3}{60} \\ C = \frac{(b-a)^3}{60} \end{cases}$$

Formula de cuadratură are forma:

$$\int_a^b (x-a)(b-x) f(x)\, dx = \frac{(b-a)^3}{60}\left(f(a) + 8 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) + R(f)$$