Lista 3 - pb. 1

a) Să se găsească polinomul de grad zero P_0 pt. care:

$$\max_{x\in[0,1]} |e^x - P_0(x)| = \min_{Q\in\Pi_0} \max_{x\in[0,1]} |e^x - Q(x)|$$

sau

$$\|e^x - P_0\|_\infty = \min_{Q\in\Pi_0} \|e^x - Q\|_\infty$$

unde $\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$

REZOLVARE:

- Vom folosi următorul rezultat teoretic numit Teorema de echioscilație Cebîșev
- Fie $f \in C_{[a,b]}$ și $n \geq 0$. Există un unic polinom Q_n^* astfel încât

$$Q_n^* \in \Pi_n \; (\deg(Q_n^*) \leq n) \text{ și}$$

$$\rho_n(f) = \|f - Q_n^*\|_\infty$$

sau

$$\min_{Q\in\Pi_n} \|f - Q\|_\infty = \|f - Q_n^*\|_\infty$$

- Acest polinom este caracterizat în mod unic de următoarea proprietate:

$\exists$ cel puțin $n+2$ puncte $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} \leq b$

pt. care $f(x_j) - Q_n^*(x_i) = \nabla(-1)^j \rho_n(f)$, $j = \overline{0, n+1}$

cu $\nabla = \pm 1$ depinzând doar de f și n

- În cazul nostru $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$, $a=0, b=1$

$P\in\Pi_0 \Rightarrow P_0(x)=\alpha$ (= constant)

$n=0 \Rightarrow \exists$ 2 puncte x_0, x_1 a. î. $E=\|e^x-P_0\|_\infty$

$$\begin{cases} f(x_0)-P_0(x_0)=(-1)^0E \\ f(x_1)-P_0(x_1)=(-1)^1E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_0}-\alpha=E \\ e^{x_1}-\alpha=E \end{cases}$$

- Din $x_0=a$ și $x_{n+1}=x_{0+1}=x_1=b \Rightarrow x_0=0$ și $x_1=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^0-\alpha=E \\ e^1-\alpha=-E \end{cases}$$

$$\overline{1+e-2\alpha=0} \Rightarrow \alpha=\frac{1+e}{2}$$

$$\Rightarrow P_0(x)=\frac{1+e}{2}\in\Pi_0$$

$$E=e^0-\frac{1+e}{2}=\frac{e-1}{2} \Rightarrow \|e^x-P_0\|_\infty=\frac{e-1}{2}$$

b) Să se găsească polinomul de grad 1, $P_1\in\Pi_1$, pt. care

$$\max_{x\in[0,1]}|e^x-P_1(x)|=\min_{Q\in\Pi_1}\max_{x\in[0,1]}|e^x-Q(x)|$$

sau

$$\|e^x-P_1\|_\infty=\min_{Q\in\Pi_1}\|e^x-Q\|_\infty$$

REZOLVARE:

- În acest caz $P_1(x)=\alpha x+\beta$, $f(x)=e^x$, $a=0, b=1$

$n=1 \underset{n+1=2}{\Longrightarrow} \exists$ 3 puncte x_0, x_1, x_2 astfel încât

$$\begin{cases} f(x_0)-P_1(x_0)=(-1)^0E_1 \\ f(x_1)-P_1(x_1)=(-1)^1E_1 \\ f(x_2)-P_1(x_2)=(-1)^2E_1 \end{cases} \quad \text{unde } E_1=\|e^x-P_1\|_\infty$$

- Din $x_0 = a$ și $x_{m+1} = x_{1+1} = x_2 = b \Rightarrow x_0 = 0$ și $x_2 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^0 - (\alpha \cdot 0 + \beta) = E_1 \\ e^1 - (\alpha \cdot 1 + \beta) = E_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \beta = E_1 \\ e - \alpha - \beta = E_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 - E_1 \\ e - \alpha - (1 - E_1) = E_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 - E_1 \\ \alpha = e - 1 \end{cases}$$

- Pt. a determina $x_1 \in (0,1)$ și E_1 considerăm funcția

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = e^x - \alpha x - \beta = e^x - P_1(x)$$

Vom avea $g(0) = E$, $g(x_1) = -E_1$ și $g(1) = E_1$

unde $E_1 = \| e^x - P_1 \|_\infty = \| g \|_\infty = \max\limits_{x \in [0,1]} |g(x)|$

- Deducem că x_1 este un punct de minim pt. g
- Obținem sistemul:

$$\begin{cases} g(x_1) = -E_1 \\ g'(x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1} - \alpha x_1 - \beta = -E_1 \\ e^{x_1} - \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \ln(e-1) \\ E_1 = 1 + \dfrac{(e-1)\ln(e-1) - e}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta = 1 - E_1 = \frac{e - (e-1)\ln(e-1)}{2}$$

$$\Rightarrow P_1(x) = (e-1)x + \frac{e - (e-1)\ln(e-1)}{2} \in \Pi_1$$

$$\| e^x - P_1(x) \|_\infty = \frac{(e-1)\ln(e-1) - e}{2} + 1$$