# Curs 12

## 7. Regimul tranzitoriu al circuitelor electrice liniare (Transient regime of linear circuits)

Def: Se numește regim tranzitoriu regimul electrocinetic nestaționar corespunzător trecerii unui circuit electric de la un regim permanent la un alt regim permanent. (The transient behaviour of the circuit explain the condition arising in a circuit during the time required for it to reach the steady state)

Regimurile tranzitorii apar (the transient regimes are due to):

- la deschiderea sau închiderea unor întrerupătoare care alimentează circuitul considerat (the opening or closing of a switch that powers the considered circuit).
- la variația bruscă a parametrilor circuitului (surse, sau alte elemente) datorită unor condiții speciale de lucru (the sudden variation of the circuit's parameters - sources or other elements)

Regimurile tranzitorii durează teoretic infinit, dar practic durata acestora e de ordinul constantei de timp a circuitului (câteva sutimi sau zecimi de secundă, și mai rar minute sau secunde). Transient regimes last - theoretically - an infinite period of time, but practicaly, the duration is about five times the time constant of the circuit (usualy tens or hundreds miliseconds, and seldom seconds or minutes). Transient regime vanish in time due to energy dissipation by Joule effect. Regimurile tranzitorii se amortizează în timp datorită disipării de energie prin efect Joule.

Metoda directă de studiu a regimurilor tranzitorii (The direct method for solving transient regimes): se scriu și se rezolvă ecuațiile integro-diferențiale ale circuitului.

Example: R, L, C - series circuit

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt = u(t) \;\Big|\; \frac{d}{dt}$$

$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i(t) = \frac{du}{dt}$$

$i_\ell$ - soluție de regim liber

o) soluția $i = i_\ell + i_p$ ($i_\ell$ - se datorează acumulării de energie în elementele de circuit. Se disipă în timp. $i_p$ - soluția de regim permanent. $i_\ell$ is due to energy accumulation in the circuit's elements. This component vanishes in time. $i_p$ - the permanent regime solution (steady state solution).

•) ordinul ec. diferențiale = numărul de bobine și condensatoare din circuit (toate bobinele serie = una singură; toate condensatoarele paralel = unul singur).
The order of the differential ec = nr. of coils and capacitors in the circuit (all series coils = a single coil; all parallel capacitors = a single capacitor).

•) constantele de integrare - se determină din condițiile inițiale ale circuitului
The integration constants are found from the circuit's initial conditions

7.1. Teoremele comutației naturale și forțate (Continuity conditions)

Energia magnetică acumulată într-o bobină $W_{mg} = \frac{L \cdot i^2}{2}$ (Mg energy in a coil)

Energia electrică acumulată într-un condensator $W_{el} = \frac{C \cdot u^2}{2}$ (El. energy in a capacitor)

Energiile acumulate nu pot varia prin salt, deoarece $p(t) = \frac{\partial W}{\partial t}$ nu poate fi infinită. The accumulated energies can not step change in time, since the electric power $p(t) = \frac{\partial W}{\partial t}$ can not be infinite.

Teorema I: comutație naturală pt. bobine (continuity condition for coils)

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = i_L(0)$$

$t = 0$ - momentul comutației
- step change occurs at $t=0$

Teorema II comutație naturală pt. condensatoare (continuity condition for capacitors)

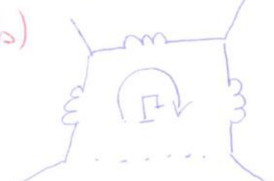
$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_C(0)$$

Teorema III comutație forțată pt noduri de condensatoare (continuity condition for nodes of capacitors)


$$q_\Sigma(0_-) = q_\Sigma(0_+) = q_\Sigma(0)$$

q - sarcina electrică
electric charge

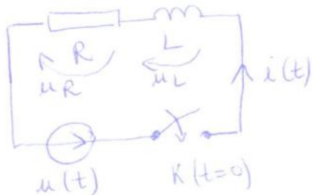
Teorema IV comutație forțată pt ochiuri de bobine (continuity conditions for loops of coils)




$$\Psi_\Gamma(0_-) = \Psi_\Gamma(0_+) = \Psi_\Gamma(0)$$

Ψ - flux magnetic (magnetic flux)

7.2. Regimul tranzitoriu al circuitului RL serie. Transient behaviour of the RL circuit



$$u_R + u_L = u(t)$$

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} = u(t)$$

Soluția ecuației (the solution is) $i(t) = i_\ell(t) + i_p(t)$

Soluția ec omogene (the natural response): $i_\ell$

$R \cdot i_\ell + L \cdot \frac{di_\ell}{dt} = 0$ cu ec caracteristică (characteristic eq.) $R + L \cdot p = 0$, $p = -\frac{R}{L}$

$$\Rightarrow i_\ell = A \cdot e^{+p \cdot t} = A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$\Rightarrow i(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{L} t} + i_p(t)$$

La momentul (For) $t = 0$ $\Big| \Rightarrow i(0) = A + i_p(0) \Rightarrow A = i(0) - i_p(0)$

sau $A = i_0 - i_{p0}$

$i_0$ - valoarea curentului prin bobină la momentul $t = 0$. Din teorema I, e curentul prin bobină înainte de închiderea comutatorului K)

$i_0$ is the value of the current through the coil at $t=0$ (from the first continuity condition, it represents the current through the coil before the switch K closes)

Soluția finală a ecuației este (the final solution of the eq)

$$i(t) = (i_0 - i_{p0}) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + i_p(t)$$

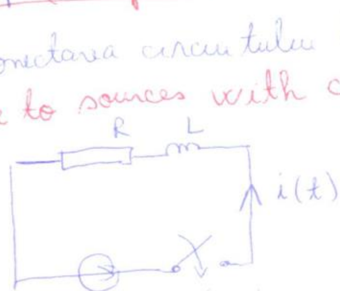
Notație (Note) $\tau = \frac{L}{R} = \frac{\omega L}{\omega R} \left[\frac{\Omega}{s^{-1} \cdot \Omega}\right] = [s]$ - constanta de timp a circuitului

$\tau$ - the time constant of this circuit

$$\Rightarrow i(t) = (i_0 - i_{p0}) \, e^{-\frac{t}{\tau}} + i_p(t)$$

Exemple (Examples)

① Conectarea circuitului la o sursă de tensiune continuă (Circuit response to sources with constant excitation).



a) Înainte de comutație (before K closes)

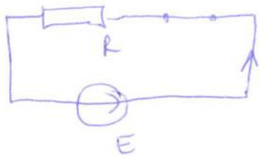
$i(t) = 0 \Rightarrow i(0) = 0 \Rightarrow i_0 = 0$

b) După comutație (after K closes)

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} = E$$

$$\Rightarrow i = i_\ell + i_p$$

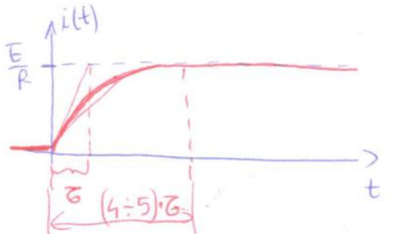
$i_p$ – soluția de regim permanent ce se stabilește în circuit după comutație și după încheierea regimului tranzitoriu ($i_p$ – the steady state current in the circuit after K closes and after the transient regime is finished)

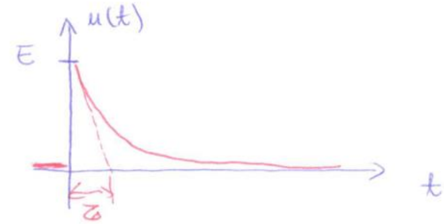



$$i_p = \frac{E}{R} \Rightarrow i_{p0} = \frac{E}{R}$$

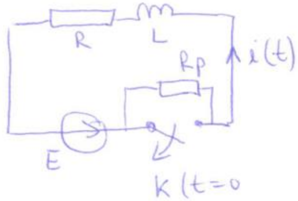
$$\Rightarrow \boxed{i(t) = \left(0 - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \frac{E}{R} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

$$\Rightarrow u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$




II) Deconectarea circuitului (sursă de tensiune continuă) – Disconnecting the circuit




a) Înainte de comutație (before K opens)

$$i(t) = \frac{E}{R} \Rightarrow i_0 = \frac{E}{R}$$

b) După comutație (after K opens)

$$(R + R_p) \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt} = E \quad ; \quad i(t) = i_l(t) + i_p(t)$$

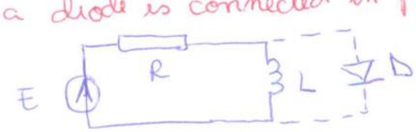
$$i_p(t) = \frac{E}{R + R_p} \Rightarrow i_{p0} = \frac{E}{R + R_p}$$

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = \left(\frac{E}{R} - \frac{E}{R + R_p}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R + R_p}} \quad ; \quad \boxed{\tau = \frac{L}{R + R_p}}$$

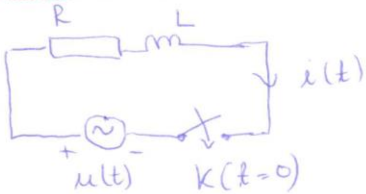
$$u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{R_p \cdot E}{R(R + R_p)} \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{R_p}{R} \cdot E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

<u>Obs</u>: Dacă (If) $E = 100\,V$ și (and) $\frac{R_p}{R}$ e mare (is large) → i.e. $100 \Rightarrow u_L(0) = 1000V$!

Pt. a proteja bobina, se conectează în paralel cu ea o diodă (To protect the coil from this too large voltage, a diode is connected in parallel with the coil)



③ Conectarea la o sursă de tensiune alternativă (Response to sources with sinusoidal excitation)




$$u(t) = E\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t + \gamma_e)$$

a) Înainte de comutație (before K closes)

$$i(t) = 0 \Rightarrow i_0 = 0$$

b) După comutație (after K closes)

$$L\cdot\frac{di}{dt} + R\cdot i = u(t) \quad ; \quad i(t) = i_l(t) + i_p(t)$$

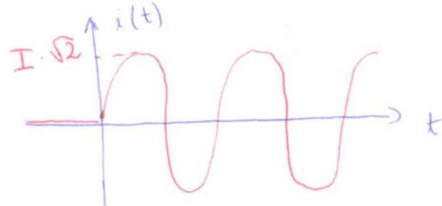
$$i_p(t) = I\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t + \gamma_i) \qquad \begin{cases} I = \dfrac{E}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \\ \gamma_i = \gamma_e - \varphi \;;\; \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega L}{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow i_p(0) = i_{p0} = I\sqrt{2}\cdot\sin(\gamma_e - \varphi)$$

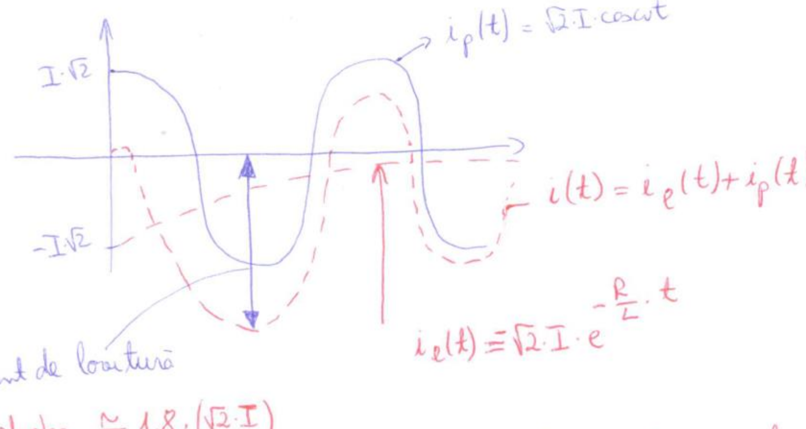
$$\Rightarrow i(t) = \sqrt{2}\cdot I\cdot\sin(\omega t + \gamma_e - \varphi) - \sqrt{2}\cdot I\cdot\sin(\gamma_e - \varphi)\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$$

a) Pentru (For) $\boxed{\gamma_e = \varphi} \Rightarrow i_l(t) = 0 \Rightarrow i(t) = \sqrt{2}\cdot I\cdot\sin(\omega t)$ NU EXISTĂ REGIM TRANZ.

NO TRANSIENT RESPONSE!

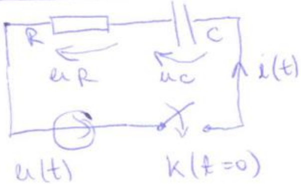



b) Pentru (for) $\boxed{\gamma_e - \varphi = \frac{\pi}{2}} \Rightarrow i(t) = \sqrt{2}\cdot I\cdot\cos\omega t - \sqrt{2}\cdot I\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} = \sqrt{2}\cdot I\left(\cos\omega t - e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)$




$I_{stroke} \cong 1{,}8\cdot(\sqrt{2}\cdot I)$

## 7.3 Regimul tranzitoriu al circuitului RC (Transient response of RC circuit)




$$u_R + u_C = u(t)$$

$$R\cdot i + \frac{1}{C}\cdot\int i(t)\cdot dt = u(t), \text{ cu } i(t) = \frac{dq}{dt}$$

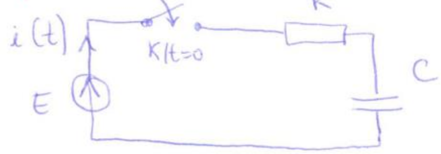
$$\Rightarrow R\cdot\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}\cdot q = u(t)$$

$$\Rightarrow q(t) = q_e(t) + q_p(t) \quad \text{Cu / With}: \; R\cdot\frac{dq_e}{dt} + \frac{1}{C}\cdot q_e = 0 \Rightarrow q_e(t) = A\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

La (for) $t=0 \Rightarrow q_0 = A + q_{p0} \Rightarrow A = q_0 - q_{p0}$

$$\Rightarrow \boxed{q(t) = (q_0 - q_{p0})\, e^{-\frac{t}{RC}} + q_p(t)} \qquad \boxed{\tau = R\cdot C}$$

Example: cuplarea unui condensator la o sursă de tensiune continuă (transient response to sources with constant excitation)



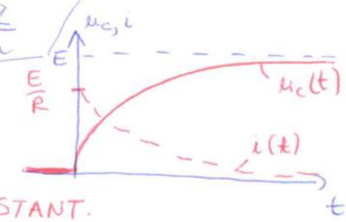

$$R\cdot\frac{dq}{dt} + C^{-1}\cdot q = E \;;\; q_0 = 0$$ (Condensator inițial neîncărcat) (No initial charge on capacitor)

$$q_p = C\cdot E \Rightarrow q_{p0} = C\cdot E$$

$$\Rightarrow q(t) = (0 - C\cdot E)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + C\cdot E$$

$$C = \frac{q}{u}$$

$$\boxed{q(t) = C\cdot E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \Rightarrow \boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$




## 7.4. Interpretarea constantei de timp a circuitului. TIME CONSTANT.


$$q(t) = q_p\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$tg\,\alpha = \left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=0} = \frac{AA'}{OA'} = \frac{q_p}{OA'}$$

$$\Rightarrow OA' = \frac{q_p}{tg\,\alpha}$$

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=0} = \left(q_p\cdot\frac{1}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)_{t=0} = \frac{q_p}{\tau} = tg\,\alpha$$

$$\Rightarrow OA' = \tau$$

$$q_\tau = q_p\left(1 - e^{-1}\right) = 0{,}632\cdot q_p$$

Constanta de timp este:
- subtangenta în origine a curbei $q(t)$
- timpul după care sarcina acumulată pe armăturile condensatorului e egală cu 0,632 din sarcina de regim permanent
- după $5\tau$, sarcina acumulată pe armăturile condensatorului e de $0{,}99\cdot q_p$

The time constant:
- the initial slope of the curve $q(t)$ is $\frac{q_p}{\tau}$
- the time required for the charge accumulated on the capacitor's plate to be 0,632 of the total charge accumulated in steady-state
- after $5\tau$, the response is less than 1 percent away from its final value.

## 7.5. Transformata Laplace în rezolvarea circuitelor electrice funcționând în regim tranzitoriu. The LAPLACE transform.

Def: Se numește transformată Laplace funcția $F(s)$ de variabilă complexă $s = \sigma + j\omega$ definită de integrala (the Laplace transform is defined as):

$$\underbrace{F(s)}_{\text{frequency domain function}} = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty \underbrace{f(t)}_{\text{time domain function}} \cdot e^{-st} \cdot dt \quad \Big\} \; s = \sigma + j\omega \text{ is a complex quantity}$$

Pentru ca integrala să aibă sens, trebuie ca $f(t)$ să îndeplinească următoarele condiții (The conditions for the integral to converge to a finite value are:)

1) Să fie netedă pe porțiuni ($f(t)$ is continuous after $t=0$)

2) $f(t) = 0$ pt $t < 0$ (prior to $t=0$, the function $f(t)=0$)

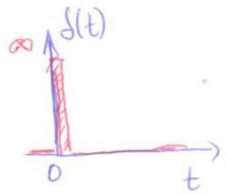
3) Să crească mai repede decât $e^{\sigma t}$ – altfel integrala nu are limită.

($\int_0^\infty |f(t)| \cdot e^{-s_1 t} \cdot dt < \infty$ for some real positive $s_1$. If the magnitude of $f(t)$ is $|f(t)| < M e^{at}$ for all positive $t$, $M>0, a>0$, the integral will converge for $s_1 > a$)

### 7.5.1 Transformatele Laplace ale unor funcții uzuale. The Laplace transform of some usual functions.

1) Funcția impuls unitate (The unit impulse function)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \infty, & t=0 \\ 0, & t>0 \end{cases} \qquad \text{cu / with } \int_0^\varepsilon \delta(t) \cdot dt = 1 \text{ când / when } \varepsilon \to 0$$

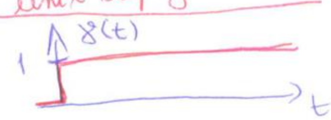


$$\boxed{\mathcal{L}[\delta(t)]} = \int_0^\infty \delta(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_0^\varepsilon \delta(t) \cdot e^{-st} \cdot dt \cong \boxed{1}$$

$$e^{-st}\Big|_{\text{for } t \in (0,\varepsilon)} \cong 1$$

2) Funcția treaptă unitate (The unit step function)

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



$$\boxed{\mathcal{L}[\gamma(t)]} = \int_0^\infty \gamma(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot dt = -\frac{1}{s} \cdot e^{-st}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{s}(0-1) = \boxed{\frac{1}{s}}$$

3) Imaginea unei derivate (The derivative of a function)

Reminder: $(f \cdot g)' = f' g + f \cdot g' \Rightarrow \int f' g = f \cdot g - \int f \cdot g'$

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{df}{dt} \cdot e^{-st} \cdot dt = f \cdot e^{-st} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f \cdot (-s) \cdot e^{-st} \cdot dt =$$

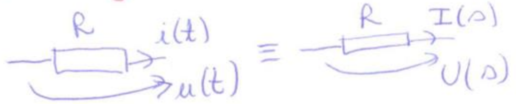
$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = [0 - f(0)] + s \cdot \mathcal{L}[f(t)] = s \cdot \mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad (1)$$

4) Imaginea unei integrale (The integral of a function)

În relația (**1**) se înlocuiește $f(t)$ cu $\int f(t)$ pt $f(0) = 0$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = s \cdot \mathcal{L}\left[\int f(t) \cdot dt\right] \Rightarrow \mathcal{L}\left[\int f(t) \cdot dt\right] = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}[f(t)]$$

7.5.2 Tensiunile operaționale pe elementele de circuit (The transform corresponding to the voltage-current relationship for circuit elements)

a) 

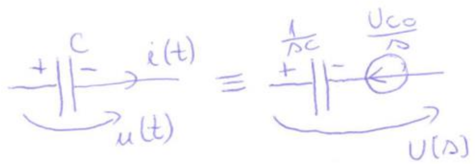

$$u(t) = R \cdot i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}[u(t)] = R \cdot \mathcal{L}[i(t)]$$

$$\boxed{U(s) = R \cdot I(s)}$$

b) 


$$u(t) = L \cdot \frac{di}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}[u(t)] = L \cdot \mathcal{L}\left[\frac{di}{dt}\right]$$

$$\boxed{U(s) = s \cdot L \cdot I(s) - \underbrace{L \cdot i(0)}_{\Psi_0}}$$

c) 


$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{+\infty} i(t) \cdot dt = \frac{1}{C}\left[\int_{-\infty}^{0} i(t)\,dt + \int_0^\infty i(t) \cdot dt\right]$$

$$\Rightarrow u(t) = U_{C0} + \frac{1}{C}\int_0^\infty i(t) \cdot dt$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[U_{C0}] + \frac{1}{C} \cdot \mathcal{L}\left[\int_0^\infty i(t) \cdot dt\right] \Rightarrow \boxed{U(s) = \frac{U_{C0}}{s} + \frac{1}{s \cdot C} \cdot I(s)}$$

7.5.3 Forma operațională a ecuațiilor circuitelor electrice (S domain equations of electrical circuits)

Pentru un circuit R, L, C serie, tensiunea la borne în cazul unor condiții inițiale nule este (for an RLC series circuit, the voltage for zero initial conditions is): $U(s) = \left(R + sL + \frac{1}{sC}\right) \cdot I(s)$; $Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$ – impedanță operațională

KCL $\boxed{\sum I_k(s) = 0}$ – pentru un nod în care se întâlnesc laturile k – for a node where the branches k meet

KVL $$\boxed{\sum\left(E_k(s) + \Psi_{k0} - \frac{U_{kC0}}{s}\right) = \sum\left(Z_k(s) \cdot I_k(s) + \underset{j \neq k}{Z_{kj}(s) \cdot I_j(s)}\right)}$$

$Z_{kj}$ – impedanță mutuală (mutual impedance)

## 7.5.4. Transformatele Laplace ale unor funcții uzuale (The Laplace transforms of some functions)

| $f(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}}$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s}$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $e^{\pm \alpha t}$ | $\frac{1}{s \mp \alpha}$ |
| $t \cdot e^{\pm \alpha t}$ | $\frac{1}{(s \mp \alpha)^2}$ |
| $\sin(\alpha t)$ | $\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$ |
| $\cos(\alpha t)$ | $\frac{s}{s^2+\alpha^2}$ |

## 7.5.5. Metode de inversiune (Heaviside theorems)

Fie (Let): $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$

1°. $Q(s) = 0$ are numai soluții simple (has only first-order real poles) $\Rightarrow$
$Q'(s_k) \neq 0$, unde $s_k$ sunt soluțiile ecuației (where $s_k$ are the solutions of the eq.)

$$\Rightarrow F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{C_1}{s-s_1} + \frac{C_2}{s-s_2} + \dots + \frac{C_n}{s-s_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{s-s_k}$$

Pt. determinarea coeficientului $C_1$ se formează produsul (To determine the coefficient $C_1$, we write the eq.) $\frac{P(s)}{Q(s)}(s-s_1)$ și se calculează limita acestui produs când $s \to s_1$ (se aplică regula lui L'Hôpital) (we compute the limit of this product when $s \to s_1$ using L'Hôpital rule):

$$C_1 = \lim_{s \to s_1} (s-s_1) \cdot \frac{P(s)}{Q(s)} = \lim_{s \to s_1} \frac{P(s) + (s-s_1) \cdot P'(s)}{Q'(s)} = \frac{P(s_1)}{Q'(s_1)}$$

ș.a.m.d. pt restul coeficienților (and so on for the other coefficients)

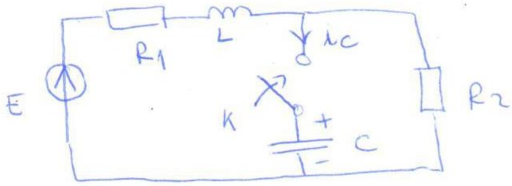
2° Dacă una din rădăcinile ec. $Q(s) = 0$ e nulă $(s_0 = 0)$ (If one of the solution of the eq $Q(s) = 0$ is zero $(s_0 = 0)$) $\Rightarrow Q(s) = s \cdot R(s)$

Coeficientul $C_0$ a lui $\frac{1}{s}$ este (The coefficient $C_0$ of $\frac{1}{s}$ is):

$$C_0 = \lim_{s \to 0} \frac{P(s) \cdot s}{s \cdot R(s)} = \frac{P(0)}{R(0)}$$

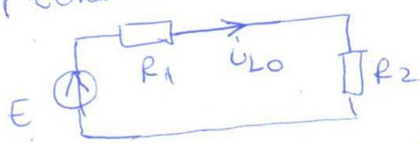
Exemplu: Să se determine expresiile variabilelor de stare ($i_L$, $u_C$), în regimul tranzitoriu apărut în circuit după închiderea comutatorului K.

$E = 300\,V$, $R_1 = 200\,\Omega$, $R_2 = 100\,\Omega$, $C = 200\,\mu F$, $L = 1\,H$




Rezolvare

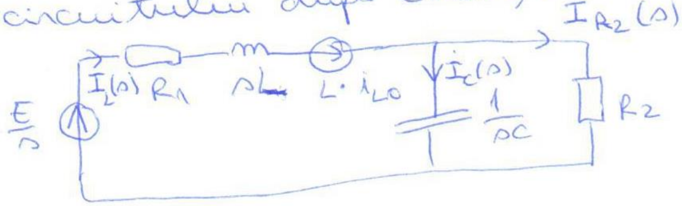
1) Circuitul înainte de comutație (tensiune de alimentare continuă)




$$\Rightarrow i_{L0} = \frac{E}{R_1+R_2} = 1A$$

$$u_{C0} = 0$$

2) Schema operațională a circuitului după comutație




Teoremele lui Kirchhoff (în operațional)

$$\begin{cases} I_L(s) = I_C(s) + I_{R_2}(s) \\ \frac{E}{s} + L \cdot i_{L0} = (R_1 + sL) \cdot I_L(s) + \frac{I_C(s)}{sC} \\ \frac{I_C(s)}{sC} = R_2 \cdot I_{R_2}(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_C(s) = s \cdot C \cdot R_2 \cdot I_{R_2}(s)$$

$$\Rightarrow \frac{E}{s} + L \cdot i_{L0} = (R_1 + sL) \cdot \left[ I_{R_2}(s) + s \cdot C \cdot R_2 \cdot I_{R_2}(s) \right] + \frac{\cancel{sC} R_2 I_{R_2}(s)}{\cancel{sC}}$$

$$\Rightarrow \frac{300}{s} + 1 = (200 + s)(1 + s \cdot 200 \cdot 10^{-6} \cdot 100) \cdot I_{R_2}(s) + 100 \cdot I_{R_2}(s)$$

$$\frac{300+s}{s} = I_{R_2}(s) \cdot \left[ 100 + (200+s)(1 + 2 \cdot 10^{-2} \cdot s) \right]$$

$$\Rightarrow I_{R_2}(s) = \frac{\frac{300+s}{s}}{100 + 200 + s + 4s + 2 \cdot 10^{-2} \cdot s^2} = \frac{300+s}{s(0{,}02 s^2 + 5s + 300)}$$

$$= \frac{300+s}{0{,}02 \cdot s(s^2 + 250 s + 15\,000)} = \frac{300+s}{0{,}02 \cdot s(s+100)(s+150)}$$

$$= \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+100} + \frac{C_3}{s+150} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+100} + \frac{1}{s+150}$$

$$\Rightarrow U_C(s) = R_2 \cdot I_{R_2}(s) = \frac{100}{s} - \frac{200}{s+100} + \frac{100}{s+150} \rightarrow \boxed{u_C(t) = 100 - 200 \cdot e^{-100t} + 100 \cdot e^{-150t}}$$

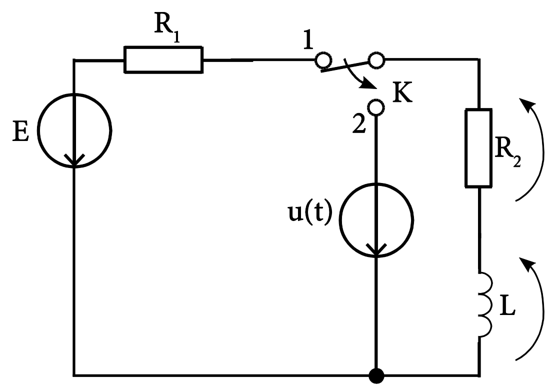
Analog $i_L(t)$!

La momentul t = 0 comutatorul K trece din poziţia 1 în poziţia 2. În acel moment, valoarea sursei de alimentare sinusoidale este $u(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}U$ şi este în scădere. Să se determine:

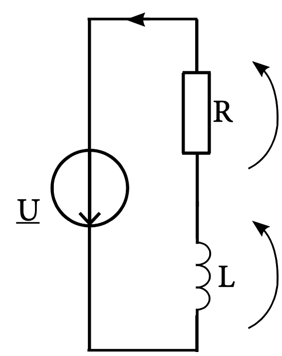
a) Valoarea curentului în regim tranzitoriu prin inductivitatea L;

b) În ce moment trebuie să aibă loc comutaţia astfel încât să nu apară regim tranzitoriu.

Date numerice: E=200[V] ; $u(t)=100\sqrt{2}\sin(100\pi t+\gamma_u)$; $R_1=R_2=10[\Omega]$ ; $\omega L=10[\Omega]$.




Soluţie:




a) După comutaţie:

$$u(t)=u_{R_2}+u_L=R_2\cdot i+L\frac{di}{dt}.$$

Soluţia: $i = i_p + i_l$;

$$u(t)=100\sqrt{2}\sin(100\pi t+\gamma_u) \Rightarrow \underline{U}=100\cdot e^{j\gamma_u}.$$

Determinarea soluţiei de regim permanent $i_p$:

$$\underline{U}=j\omega L\cdot\underline{I}_p+R_2\underline{I}_p \Rightarrow \underline{I}_p=\frac{\underline{U}}{R_2+j\omega L};$$

$$\underline{I}_p=\frac{100\cdot e^{j\gamma_u}}{10+j10}=\frac{10\cdot e^{j\gamma_u}}{\sqrt{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}}=\frac{10}{\sqrt{2}}\cdot e^{j\left(\gamma_u-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

La momentul t =0:

(tensiunea în scădere)

$$\left.\begin{aligned}u(0)&=\frac{\sqrt{2}}{2}U=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 100\\ u(0)&=100\sqrt{2}\sin(100\pi\cdot 0+\gamma_u)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \sin\gamma_u=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow \gamma_u=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

Deci: $\underline{I}_p = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\frac{7\pi}{12}} \Rightarrow i_p(t) = 10\sin\left(100\pi t + \frac{7\pi}{12}\right)$.

Determinarea termenului de regim liber $i_l$: $R_2 \cdot i_l + L\frac{di_l}{dt} = 0 \Rightarrow -\frac{R_2}{L}dt = \frac{di_l}{i_l}$.

Prin integrare se obţine: $i_l(t) = A \cdot e^{-\frac{R_2}{L}t}$

Deci: i(t) = $i_p$+$i_l$ = $10\sin\left(100\pi t + \frac{7\pi}{12}\right) + A \cdot e^{-\frac{R_2}{L}t}$.

Aplicând teorema comutaţiei: $i_L(0_-) = i_L(0_+) = i(0)$

Termenul $i_L(0_-)$ se determină pentru circuitul existent înainte de comutaţie:

$$\begin{matrix} i_L(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{200}{20} = 10[A] \\ i(0_+) = 10\sin\frac{7\pi}{12} + A \end{matrix} \Rightarrow 10\sin\frac{7\pi}{12} + A = 10 \Rightarrow A = 10\left(1\text{-}\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

b) Pentru a nu avea regim tranzitoriu în momentul comutaţiei punem condiţia: $i_l$=0 $\Rightarrow$ A=0

$$\underline{I}_p = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\left(\gamma_u - \frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow i(0_+) = 10\sin\left(\gamma_u - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow i(0_+) = 10\sin\left(\gamma_u - \frac{\pi}{4}\right) = 10 = i(0_-)$$

$$\sin\left(\gamma_u - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Rightarrow \gamma_u - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \gamma_u = \frac{3\pi}{4}.$$