# 1 Transformata Laplace

Tabela 1: Tablel cu transformate Laplace

| $f(t)$ | $\mathscr{L}[f(t)]$ | $f(t)$ | $\mathscr{L}[f(t)]$ |
|---|---|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ | $\sin at$ | $\frac{a}{s^2+a^2}$ |
| $1$ | $\frac{1}{s}$ | $\cos at$ | $\frac{s}{s^2+a^2}$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ | $e^{-at}\sin bt$ | $\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$ |
| $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ | $e^{-at}\cos bt$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$ |

Tabela 2: Proprietăţi ale transformatei Laplace

| ***Proprietate*** | ***Domeniul timp*** | ***Domeniul s*** |
|---|---|---|
| | $f(t)$ | $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ |
| Liniaritate | $af_1(t) + bf_2(t)$ | $aF_1(s) + bF_2(s)$ |
| Prima derivată | $\frac{df(t)}{dt}$ | $sF(s) - f(0)$ |
| A doua derivată | $\frac{d^2f(t)}{dt^2}$ | $s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ |
| A n-a derivată | $\frac{d^nf(t)}{dt^n}$ | $s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$ |
| Integrare în timp | $\int_0^t f(\tau)d\tau$ | $\frac{1}{s}F(s)$ |
| Teorema valorii finale | $f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t)$ | $\lim_{s\to 0} sF(s)$, dacă toţi polii lui $sF(s)$ sunt în semiplanul stâng |

## 2 Răspunsul la treaptă al sistemului de ordinul 1

Răspunsul la treaptă unitară al unui sistem de ordinul 1 cu funcţia de transfer $G(s) = \dfrac{k}{Ts+1}$ este:

$$c(t) = k(1 - e^{-t/T})$$

şi timpul de răspuns este:

$$t_s = 4T$$

## 3 Răspunsul la treaptă al sistemului de ordinul 2

Pentru un sistem de ordinul 2 cu funcţia de transfer:

$$G(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

**(a)** cazul subamortizat: $0 < \zeta < 1$,

- polii sunt: $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}j$
- răspunsul la treaptă unitară este:

$$c(t) = k\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t + \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right], \quad \text{unde } \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

- caracteristicile răspunsului tranzitoriu:
  - timpul de răspuns, $t_s = \dfrac{4}{\zeta\omega_n}$
  - timpul răspunsului maxim, $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d}$
  - suprareglajul, $M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$
  - timpul de creştere, $t_r = \frac{1}{\omega_d}\cdot\left(\pi - \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) = \frac{\pi-\beta}{\omega_d}$

**(b)** cazul critic amortizat, $\zeta = 1$

- polii sunt: $s_1 = s_2 = -\omega_n$
- răspunsul la treaptă unitară este:

$$c(t) = k\left(1 - e^{-\omega_n t}(1 - \omega_n t)\right)$$

**(c)** cazul supra-amortizat, $\zeta > 1$

- polii sunt: $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$
- răspunsul la treaptă unitară este:

$$c(t) = k\left(1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2}\right)\right)$$

**(d)** cazul ne-amortizat, $\zeta = 0$

- polii sunt: $s_{1,2} = \pm\omega_n j$
- răspunsul la treaptă unitară este:

$$c(t) = k\left(1 - \cos\omega_n t\right)$$