# Curs 1

## Polinoame

$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mulțimea tuturor polinoamelor $\Pi$

grad $< n$ $\Pi_n$

$P \in \Pi_n$, $a_n \neq 0$, $P(x) = (x-a)^k \cdot Q(a)$ $Q(a) \neq 0$

nu divide

are exact $n$ rădăcini în $P$

$P, Q$ 2 polinoame

$A$ o mulțime $\subset \mathbb{C}$ care are mai multe elemente decât maximul dintre gradul $Q$ și $P$

$$|A| \geq \max(\text{grad } Q, \text{grad } P) + 1$$

$$P(x) = Q(x) \ \forall \ x \in A \Rightarrow P = Q$$

$H(x) = P(x) - Q(x)$

$H(x) = A \cdot \prod_{k=1}^{n} (x - x_k) \Rightarrow \exists \ x_{n+1} \in A$

produs

$H(x_{n+1}) = 0 \Rightarrow A \cdot \prod_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k) = 0$

$A = 0$

# Interpolarea funcțiilor

măsurăm în puncte $x_0, x_1, \dots, x_n$

$\downarrow$ $f(x_0)$ $\downarrow$ $f(x_1)$ $\downarrow$ $f(x_n)$

$P$ $P(x_i) = f(x_i)$ $i = \overline{0, n}$ dacă găsim un polinom egal cu funcția

$Q(x) = P(x) + Q_1(x)$ spunem că $P$ interpolează funcția $f$ în punctele $i$

$x_i$, $x_i \neq x_j$

$f(x_i)$ $\exists \ P$ de grad minim a.î. $P$ să interpoleze funcția $f$ în puncte $x_i$

$P(x_i) = f(x_i)$

BRUNNEN

Există un unic polinom de grad $n$ $\exists!\, P$ grad $P \le n$ care interpolează fcț. $f$.

Unicul polinom $P$ s.n. **polinomul lui Lagrange**

Notație $\boxed{L_n(f_i, x_0, x_1, \dots, x_n)(x)}$

Dem

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

$n+1$ ecuații cu $n+1$ soluții

dacă determinantul sistemului $\neq 0 \Rightarrow$ SOLUȚIE UNICĂ

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ & \dots & & \\ n & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = V(x_0, \dots, x_n) \neq 0$$

$\hookrightarrow$ Vandermonde

$$a_k = \frac{\Delta a_k}{\Delta} \qquad k = \overline{0, n}$$

Teorema Lagrange

**Polinomul de interpolare a lui Lagrange**

$$\boxed{L_n(f; x_0 \dots x_n)(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x)}$$

unde $\boxed{l_k(x) = \frac{l(x)}{(x - x_k) l'(x_k)}}$ $\boxed{l(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)}$

Dem.: $l_k(x_i) = \delta_{k,i} = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & k = i \end{cases}$

s. lui Kronecker

$$l_k(x) = \frac{l(x)}{x - x_k} \cdot \frac{1}{l'(x_k)}$$

! Fie $x_0, \dots, x_m$ puncte distincte $m \geq 1$

Să se afle soluția: $\sum_{k=0}^{m} l_k(x) \cdot x_k = 5x + 4$

→ Ce polinom în punctul $x_i$ i-a valoarea $x_i$? $f(x) = x$ polinom de gradul 1

$$x = 5x + 4$$

$$x = -\frac{4}{4} = -1$$

$$L_m(P, x_0, \dots, x_m) = P \qquad P \in \Pi_m$$

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_m)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_m)}$$

$L_{m-1}^{\langle j \rangle}(f)(x)$ = pol. lui Lagrange care interpolează fct. $f$ în toate punctele mai puțin $x_j$

$$= L_{m-1}(f, x_0 \dots x_{j-1}, x_{j+1}, \dots x_m)(x)$$

$$L_m(f)(x) - L_{m-1}^{\langle j \rangle}(f)(x) = A_m (x-x_0)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_m)$$

$$= A_m \frac{l(x)}{x-x_j} \quad / \cdot (x-x_j)$$

$$L_m(f)(x) - L_{m-1}^{\langle i \rangle}(f)(x) = A_m \frac{l(x)}{x-x_i} \quad / \cdot (x-x_i)$$

$$(x - x_j - x + x_i) L_m(f)(x) = (x-x_j) L_{m-1}^{\langle j \rangle}(f)(x) - (x-x_i) L_{m-1}^{\langle i \rangle}(f)(x)$$

Aitken $L_m(f)(x) = \dfrac{(x-x_j) L_{m-1}^{\langle j \rangle}(f)(x) - (x-x_i) L_{m-1}^{\langle i \rangle}(f)(x)}{x_i - x_j}$

Def.:

Fiind date punctele distincte și funcția $f$ definită pe aceste puncte

s.n. **diferență divizată** a funcției $f$ pe punctele $x_0 \dots x_m$

coeficientul lui $x_m$ din polinomul de interpolare a lui Lagrange

Notație: $\boxed{[x_0, x_1, \dots x_m; f]}$ $\qquad (f[x_0, \dots x_m])$

Teoremă

Are loc următoarea egalitate $\boxed{[x_0, x_1, \dots x_m; f] = \sum_{i=0}^{m} \frac{f(x_i)}{l'(x_i)}}$

BRUNNEN

$$(l(x))' = (x-x_1)\dots(x-x_m) + \dots (x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) + \dots (x-x_m)$$

$$(x - x_{m-1})$$

Teoremă

Polinomul de interpolare a lui Lagrange pe puncte distincte $x_0, x_1, \dots x_n$ se poate scrie sub forma lui Newton

$$\boxed{N_n(f)(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} (x-x_0)\dots(x-x_{k-1})[x_0, x_1, \dots x_k; f]}$$

dif divizată

$$\underbrace{L_k(f; x_0, x_1, \dots x_k)(x)}_{\text{grad } k} - \underbrace{L_{k-1}(f; x_0, x_1, \dots x_{k-1})(x)}_{\text{grad } k-1}$$

$$= \underbrace{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})[x_0, x_1, \dots x_k; f]}_{\text{cel mult } k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (L_k(f; x_0, \dots, x_k)(x) - L_{k-1}(f; x_0, \dots, x_{k-1})(x)) =$$

?

$$\sum_{k=1}^{n} (x-x_0)\dots(x-x_{k-1})[x_0, \dots, x_n; f]$$

$$\Rightarrow L_n(f; x_0 \dots x_n)(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} (x-x_0)\dots(x-x_{k-1})[x_0, \dots, x_n, f]$$

$$L_n(f; x_0, \dots x_n)(x) = \frac{(x-x_j)\overset{\langle j \rangle}{L_{n-1}}(f) - (x-x_i)\overset{\langle i \rangle}{L_{n-1}}(f)}{x_i - x_j}$$

→ toți coeficienții sunt egali dacă polinoamele sunt egale

$$[x_0, \dots, x_n; f] = \frac{[x_0, \dots x_{j-1}, x_{j+1}, \dots x_n; f] - [x_0, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n; f]}{x_i - x_j}$$

| | $x_0$ | ..... | $x_n$ |
|---|---|---|---|
| $f(x_0)$ | $[x_0, x_1, \dots, f]$ | | |
| $f(x_1)$ | $[x_1, x_2, \dots, f]$ | | |
| ⋮ | | | |
| $f(x_n)$ | | | |

$[x_0, x_1, x_2, \dots; f]$

# Curs 2

$L_n(f; x_0 \dots x_n)(x_i) = f(x_i) \quad i = \overline{0,n}$ $\quad [x_0, x_1, \dots, x_n; f]$ diferența divizată

$N_n(f; x_0 \dots x_n)(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} (x-x_0) \dots (x-x_{i-1}) [x_0 \dots x_i, f]$

$x \neq x_i \quad \boxed{f(x) - L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x) = R_n(f; x_0 \dots x_n)}$

restul în aproximarea Lagrange

## Teoremă

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ (unde am făcut măsurătorile) pentru $\forall x$ are loc următoarea egalitate

$$\boxed{R_n(f; x_0 \dots x_n) = f(x) [x, x_0, \dots, x_n; f]}$$

(dacă $x = x_i \Rightarrow$ restul $= 0$)

Dem

Notăm $x_{n+1} = x$

grad cel mult $n+1$ $\qquad$ grad $n$

$L_{n+1}(f; x_0, \dots, x_n, x_{n+1})(t) - L_n(f; x_0 \dots x_n)(t) = f(t) [x_0, \dots, x_n, x_{n+1}; f]$

$n+1$ rădăcini $\qquad$ nu contează ordinea punctelor

Pentru $t = x_{n+1}$ $\quad t = x$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) - L_n(f; x_0, \dots x_n)(x) = f(x) [x, x_0, \dots, x_n; f]}$$

## Teoremă 2

Formula lui Cauchy pt. diferențe divizate

Dacă $f \in C^{(n)}_{[a;b]}$ rezultă $\Rightarrow \exists$ un punct teta $\theta$ care $\in (\min(x_0 \dots x_n), \max(x_0 \dots x_n))$

a.î.

$$\boxed{[x_0, x_1, \dots x_n; f] = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}}$$

BRUNNEN

Dem.

$h(x) = f(x) - L_n(f; x_0 \dots, x_n)(x)$, $h \in C^{(n)}_{[a,b]}$

$h(x)$ ↓ derivabilă de $n$ ori; $L_n(f; x_0 \dots, x_n)(x)$ ↓ polinom de grad $n$

$h(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$, $i = \overline{0,n}$

$x_0 < x_1 < \dots < x_n$

$h'$: un pct $c_1$ în care derivata se anulează cel puțin $n$ răd.; $c_2$ cel puțin $n-1$ răd; -"- 1 răd.

Fie $c$

$h^{(n)}_{(c)} = 0 \iff f^{(n)}_{(c)} - [x_0, \dots, x_n; f]\, n! = 0$

coef. lui $x_n$ $a_n$ e diferența divizată pe punctele $x_1 \dots x_n$

$\Rightarrow [x_0, \dots, x_n; f] = \dfrac{f^{(n)}_{(c)}}{n!}$

generalizează T lui Lagrange

dacă $f$ cont. pe $[a,b]$, $f$ derivabilă pe $(a,b)$ $\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ a.î. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

dacă $f(b) = f(a) \Rightarrow$ T. lui Rolle

Dacă $n=1$ $[x_0, x_1 : f] = \dfrac{f'(c)}{1!}$ $\quad \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}$ T Lagrange

Are loc următoarea Teoremă

Dacă $f \in C^{(n+1)}_{[a,b]} \Rightarrow \exists\, c \in (\min(x_0 \dots x_n, x), \max(\dots))$ a.î.

$$\boxed{R_n(f; x_0 \dots x_n)(x) = f(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}_{(c)}}{(n+1)!}}$$

Teoremă 3

are derivate de orice ordin

Dacă $f \in C^{\infty}_{[a,b]}$ și derivatele sunt uniform mărginite (adică $\exists\, M > 0$ a.î. norma $\|f^{(k)}\| \le M \ \forall k \in \mathbb{N}$)

$f$ derivat de $k$ ori în punctul $x$

$\|f^{(k)}\| = \max |f^{(k)}(x)| \quad x \in [a,b]$

$\Rightarrow$ $\boxed{L_n(f: x \dots x_n) \rightrightarrows f \quad L_n \text{ converge uniform la } f}$

Dacă am un şir $f_n$ şi $\exists\, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ a.î. $\| f_n - f \| \le \alpha_n$ tinde la 0 atunci
$n \to \infty$

$\Rightarrow$ şirul converge uniform către fct. $f$

Weierstrass $\qquad f_n \rightrightarrows f$

$$| f(x) - L_n(f; x_0 \dots x_n)(x) | = | f(x) \, | [x_0, \dots, x_n, x : f] |$$

de la $T_3$

$$= |f(x)| \, \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} \le \frac{|f(x)| \cdot M}{(n+1)!} \le \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

$$|x-x_0||x-x_1| \dots |x-x_n| < b-a$$

$$< b-a \quad \Rightarrow (b-a)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \| L_n(f: x_0 \dots x_n) - f \| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot M$$

tinde la 0 când $n \to \infty$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \ \forall x$$

## Teoremă (Faber - Bernstein)

Fie o matrice triunghiulară de noduri

$$(T) \quad \begin{array}{llll} x_{0,0} & & & \\ x_{1,0} & x_{1,1} & & \\ x_{2,0} & x_{2,1} & x_{2,2} & \\ \dots & & & \\ x_{n,0} & x_{n,1} & \dots & x_{n,n} \end{array} \qquad \begin{array}{l} L_0(f; x_{0,0}) \\ L_1(f; \dots) \\ L_2(f; \dots) \\ \\ L_n(f; \dots) \end{array}$$

$\forall (T)\ \exists$ o fct. $f$ cu proprietatea că $L_n(f; \dots)$ diverge

indefinit derivabilă pt. care şirul $L_n$ diverge

Ex lui Runge

$f(x) = \frac{1}{x^2+25}$ $\quad [-5, 5]$ noduri echidistante $x_k = -5 + \frac{10}{n} \cdot k$

are derivate de orice ordin

## Aplicaţii

Cât face $[x_0, \dots, x_n; x^n]$?

$$\boxed{[x_0, \dots, x_n; x^n] = 1}$$

BRUNNEN

$$\boxed{[x_1, \dots, x_n : x^k] \overset{k \le n-1}{=} 0}$$

$$[x_1, \dots, x_n, x^{n+1}] = \frac{(n+1)!\,0}{\cancel{n!}} \overset{?}{=}$$

$$x^{n+1} - L_n(x^{n+1}; x_0, \dots, x_n)(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n) \quad \forall x \in \mathbb{C}$$

coeficienții $0 + [x_0, \dots, x_n; x^{n+1}] = +(x_0 + x_1 + \dots + x_n)$ am înmulțit cu $-$

suma unui pol $= \sum_{i=0}^{n} x_i$

$(x-x_0)(x-x_1)$

dif. div. pe punctele $0, x, 6, 7, 10 \Rightarrow 0 + 6 + 7 + 10 + \dots$

$$x^{n+2} - L_n(x^{n+2}; x_0, x_1 \dots x_n)(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n)(x-\alpha)$$

coef. lui $x^n$

$$0 = -\alpha - (x_1 + \dots + x_n) \Rightarrow \alpha = -(x_0 + \dots + x_n)$$

$x^{n+1}$ $x^n$ coef.

$$-[x_0 \dots x_n; x^{n+2}] = +\alpha(x_0 + \dots + x_n) + \sum_{i<j} x_i x_j$$

! Relațiile lui Viéte

$$[x_0, \dots, x_n; x^{n+2}] = \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i<j} x_i x_j$$

$$\boxed{(x_0 + \dots + x_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j}$$

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{Q(x)}{a_{n+1}\left(\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{A_i}{x-x_i}$$

$$P(x) = a_{n+1} \prod_{i=0}^{n} (x-x_i)$$

grad $Q$ < grad $P$

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \frac{\cancel{l(x)}\, Q(x_i)}{l'(x_i)(x-x_i)}}{a_{n+1}\, \cancel{l(x)}} = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\frac{Q(x_i)}{l'(x_i)\, a_{n+1}}}_{A_i} \cdot \frac{1}{x-x_i}$$

polinomul lui Lagrange

atașat unui polinom cu grad mai mic = polinom $Q$

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x-3)} = \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2}$$

$A_0 = \frac{1}{3}$ $A_1 = -1$ $A_2 = \frac{5}{3}$ pun degetul pe $x$ și înlocuiesc în rest cu $0$

$x-1$ $1$

$x-3$ $3$

la Examen $\left[x_0, x_1 \dots x_n ; \frac{1}{x-a}\right]$ $a \neq x_i$

$$\left[x_0, x_1, \dots, x_n ; \frac{1}{x-a}\right] = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(x_i - a)} \cdot \frac{1}{l'(x_i)}$$ din curs 1

$$l'(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)$$

$$\left[x_0, x_1, \dots, x_n, a ; f(x_i)\right] = \frac{f(x_0)}{l'(x_0)(x_0 - a)} + \frac{f(x_1)}{l'(x_1)(x_1 - a)}$$

$$+ \dots + \frac{f(x_n)}{l'(x_n)(x_n - a)} + \frac{f(a)}{(a - x_0) \dots (a - x_n)}$$

pentru $f = 1$

diferenta divizată $= 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{l'(x_i)(x_i - a)} + \frac{1}{(a - x_0) \dots (a - x_n)}$$

din $[x_1 \dots x_n, x^k]$ $\left[x_0 \dots x_n ; \frac{1}{x-a}\right] = -\frac{1}{(a-x_0) \dots (a-x_n)} = -\frac{1}{l(a)}$

la Examen $\frac{Q(x)}{x+1}$ $\left[x_0 \dots x_n ; \frac{Q(x)}{x+1}\right]$ grad $Q \leq n$

$Q(x) = (x+1) Q_1(x) + k$ dacă $x = -1 \Rightarrow k = Q(-1)$ T lui Bezout

$$\Rightarrow \left[x_0, \dots, x_n ; \frac{Q(x)}{x+1}\right] = \left[x_0, \dots x_n ; \underbrace{Q_1(x)}_{0 \text{ grad} \leq n-1} + \frac{k}{x+1}\right]$$

$$= \left[x_0, \dots x_n ; \frac{1}{x+1}\right]$$

## Interpolarea Hermite (numai cu noduri duble)

$f \in C^1[a, b]$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ştim } f(x_i) \quad i = \overline{0, n} \\ f'(x_i) \quad i = \overline{0, n} \end{array}\right\} \Rightarrow 2n + 2$$

$H_n$ (polinom) a.î. $n$ = minim a.î. $H_n(x_i) = f(x_i)$ $i = \overline{0, n}$
$H'_n(x_i) = f'(x_i)$

$n = ?$ $n = 2n+1$

$$\boxed{H_{2n+1}(f)(x)_{x_0 \dots x_n} = \sum_{i=0}^{n} U_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^{n} V_i(x) \cdot f'(x_i)}$$

$U_i, V_i \in \Pi_{2n+1}$

$U_i(x_k) = \delta_{i,k}$

$V_i(x_k) = 0 \quad \forall k = \overline{0, n}$

BRUNNEN

$$H'_{2m+1}(f)(x) = \sum_{i=0}^{m} u_i'(x_i) f(x_i) + \sum_{i=0}^{m} v_i'(x_i) f'(x_i)$$

$$U_i'(x_k) = 0$$

$$V_i'(x_k) = \delta_{i,k}$$

$$V_i(x) = \underbrace{(x-x_0)^2 (x-x_1)^2 \dots (x-x_{i-1})^2}_{\text{rad. dublă}} \underbrace{(x-x_i)}_{\text{rad. simplă}} (x-x_{i+1})^2 \dots (x-x_m)^2 k = k \frac{l^2(x)}{x-x_i}$$

grad $2m+1$

($2m+2$ dacă avem toate rădăcinile duble)

$$V_i'(x) = \frac{k\, 2\, l(x)\, l'(x)\, (x-x_i) - 1 \cdot l^2(x)}{(x-x_i)^2}$$

$$V_i'(x_i) = k\left[\lim_{x\to x_i} 2 \frac{l(x) l'(x)}{x-x_i} - \lim_{x\to x_i} \left(\frac{l(x)}{x-x_i}\right)^2\right]$$

$$1 = k\, 2\, l'^2(x_i) - l'^2(x_i) \Rightarrow k = \frac{1}{l'^2(x_i)}$$

# Curs 3

# Formule de cuadratură

Fct. lui Gauss $\int_0^x e^{-t^2}\,dt = F(x) - F(0)$ nu pot exprima primitiva ei ca fct elementară

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad \lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$$

Def.: S.n. pondere pe un interval $I$ al axei reale o fct. $w: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ cu proprietatea că are momente pe orice ordin

$$\boxed{\int_I w(x)\,x^k\,dx < \infty}$$

moment de ordinul $k$ a lui $w \to x^k$

Exemple:

$I = [a,b)$ $\quad w(x) = 1$

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \qquad w: (a,b) \to \mathbb{R}$$

știm că $\int_a^b x^k\, w(x)\,dx$ convergentă, finită $< \infty$

- $I = [0, \infty)$ $\quad w(x) = e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,x^k\,dx \qquad \text{Funcția gama } \Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-t}\,t^{a-1}\,dt$$

$$\overset{\lambda(x)=t}{=\!=} \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-t}\,\frac{t^k}{\lambda^k}\,dt = \frac{1}{\lambda^{k+1}}\,\Gamma(k+1) = \frac{k!}{x^{k+1}}$$

- $I = \mathbb{R}$

$w(x) = e^{-\lambda x^2}$, $\lambda > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\,x^k\,dx < \infty \qquad k \text{ par} = 2\int_0^\infty e^{-\lambda x^2}\,x^k\,dx$$

$k$ impar $\Rightarrow \int = 0$

BRUNNEN

$$\int_I w(x) f(x)\, dx = ?$$

$$A(f) = \int_a^b w(x) f(x)\, dx \quad , \quad A : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$ integrala este o funcțională liniară

$w(x) = 1$ vrem să aproximăm $\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$ rest

Dacă $w(x) \neq 1$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b w(x) f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f)} \quad (1)$$

Def.: S.n. formulă de cuadratură relativă la ponderea $w$ o formulă de tipul (1) unde $x_k$ sunt puncte distincte din intervalul $[a, b]$, iar $A_k$ sunt nr. reale care nu depind de funcția $f$; $R(f)$ s.n. restul formulei de cuadratură.

$$\boxed{R(f) = \int_a^b w(x) f(x)\, dx - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)}$$

criteriu de oprire → (câte puncte trebuie să iau înlocuiesc $R(f)$ cu $R(n)$

Def.: Formula de cuadratură (1) are gradul de exactitate $m$ dacă $R(P) = 0$ pentru $\forall P \in \Pi_m$ (de grad $\leq m$) și $R(x^{m+1}) \neq 0$.

$\Pi_m$ → spațiul vectorial

Exemplu

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R(f)$$

pe cine se anulează?

$$R(1) = \int_a^b dx - (b-a) = 0 \quad (1)$$

$$R(x) = \frac{b^2-a^2}{2} - \frac{b^2-a^2}{2} = 0 \quad (2) \qquad \int_a^b x\, dx = (b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right) + R(x)$$

$$R(x^2) = \int_a^b x^2\, dx - (b-a)\frac{(a+b)^2}{4} \overset{4)}{=} \frac{b^3-a^3}{3} - (b-a)\frac{(a+b)^2}{4} \overset{3)}{=} \qquad \int_a^b x^2\, dx = (b-a)\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + R(x^2)$$

$$= \frac{b-a}{12}\left[4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 3ab - 3b^2\right]$$

$$= \frac{(b-a)^3}{12} \neq 0 \quad (3)$$

din (1), (2), (3) $\Rightarrow$ $m$ = grad de exactitate = 1

Def.: Formula de cuadratură (1) s.n. formula de tip interpolator dacă coeficienţii

$A_k = \int_a^b w(x)\, l_k(x)\, dx$ unde $l_k(x)$ sunt polinoamele fundamentale din dezvoltarea Lagrange $l_k(x) = \dfrac{l(x)}{(x-x_k)\, l'(x_k)}$

## Teorema 1

Orice formulă de cuadratură de tip interpolator are gradul de exactitate cel puţin $n$ $\quad R(I) = 0 \quad \forall\, I \in \Pi_n$

Dem.: $$R(f) = \int_a^b w(x) f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} \Big( \underbrace{\int_a^b w(x)\, l_k(x)\, dx}_{A_k} \Big) f(x_k)$$

$$R(f) = \int_a^b w(x) \Big[ f(x) - \sum_{k=0}^{n} l_k(x) - f(x_k) \Big] dx$$

luăm $f$ un polinom de grad $n$ $\quad f = P \in \Pi_n$

$$R(P) = \int_a^b w(x) \,(P(x) - P(x))\, dx = 0$$

## Teorema 2

Fie $n$ un nr. nat. fixat atunci formula de cuadratură (1) are gradul de exactitate cel mult $2n+1$.

Dacă formula de cuadratură (1) are gradul de exactitate cel puţin $n$ atunci ea e de tip interpolator.

Dem.: $$\int_a^b f(x)\, w(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} A_k\, f(x_k) + R_n(f)$$

ştim că $\quad R_n(P) = 0 \quad \forall\, P \in \Pi_n$

luăm $\quad f(x) = l_i(x) \Rightarrow R_n(l_i) = 0$

$$\Rightarrow \int_a^b l_i(x)\, w(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} A_k \underbrace{l_i(x_k)}_{\delta_{i,k}} = A_i \cdot 1$$

$$\delta_{i,i} = 1$$

Pp. prin absurd că $\exists$ punctele $x_k$ şi numerele $A_k$ cu $k = \overline{0,n}$ astfel că funcţia de cuadratură (1) să aibă gradul de exactitate cel puţin $2n+2$

BRUNNEN

$R_n(P_{2n+2}(x)) = 0$

Fie $P_{2n+2} = l^2(x)$ pol. nodurilor $l(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$

$$R_n(l^2) = \underbrace{\int_a^b w(x)\, l^2(x)\, dx}_{\substack{w>0 \\ l^2>0}} - \sum_{k=0}^{n} A_k \underbrace{l^2(x_k)}_{=0}$$

$\Rightarrow$ integrala nu poate fi 0

pentru $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R_1(f)}$ formula dreptunghiului

$n+1$ noduri

## Teoremă

$n$ nr. nat. fixat $\in \mathbb{N}^*$ atunci există o unică formulă de cuadratură de grad maxim de exactitate $\exists!\ l_{n+1}$

Nodurile formulei de cuadratură de grad maxim de exactitate sunt rădăcinile polinomului ortogonal de grad $n+1$ relativ la ponderea $w$.

$w$ $\langle f, g\rangle_w = \int_a^b w(x) f(x) g(x)\,dx$ $\bar{g}$ conjugatul

$f, g \in C(a,b)$

$f, g$ ortogonale (=perpendiculare dacă produsul scalar e 0)

$\langle l(x), x^k\rangle_w = 0$, $\forall k = \overline{0, n}$

$l(x) \perp$ pe $\forall$ polinom $x^k$ de grad $w$

$P(x) - L_n(P; x_0 \ldots x_n)(x) = l(x)\, Q(x)$

grad $P \geq n+1$ grad $P-(n+1)$

$$\underbrace{\int_a^b w(x) P(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} A_k P(x_k)}_{R(P)} = \int_a^b l(x)\, \underbrace{Q(x)}_{\text{grad } P-(n+1)}\, w(x)\,dx$$

grad $l_{n+1} - n - 1$

Arătăm că un polinom de grad $n+1$ ortogonal în raport cu ponderea $w$ pe $\Pi_n$ are toate rădăcinile reale, distincte, situate în interiorul intervalului $(a,b)$.

Fie $P = \ell(x)$ $\int_a^b w(x) P(x) x^k = 0 \quad \forall k = 0, m$

Observam că $P$ are cel puţin o rădăcină reală deoarece $\int_a^b w(x)P(x)dx = 0$

$\exists$ cel puţin o rădăcină $x \in (a,b)$ a.î. $P(x_0) = 0$ (în $x_0$ pol. îşi schimbă semnul)

$\longrightarrow$ un polinom schimbă semnul în rădăcină de ordin de multiplicitate impar

$x_0$ răd. a lui $P$

$$P(x) = (x-x_0)^p \, Q(x) \qquad Q(x_0) \neq 0$$

$$= \underbrace{(x-x_0)}_{\text{schimbă semnul}} (x-x_0)^{p-1} Q(x)$$

Fie $x_0, x_1 \dots x_k$ rădăcini distincte în care $p$ schimbă semnul (de ordin de multp. impar)

$$P(x) = (x-x_0) \dots (x-x_k) Q_1(x) \quad \text{unde } Q_1 \text{ nu îşi schimbă semnul}$$

presupunem prin absurd că $k \leq m$

$$\Rightarrow (x-x_0) \dots (x-x_k) P(x) \text{ nu schimbă semnul } \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b \underbrace{w(x)(x-x_0) \dots (x-x_k) P(x) Q(x)}_{0 < 0 \text{ „F"}} \leq 0$$

$w = 1$ Vrem să găsim polinomul ortogonal de grad 1

$$C \int_a^b (x + \alpha) \, dx = 0 \qquad \text{Răd} = ?$$

constantă

$$\int_a^b x \, dx = -\alpha(b-a)$$

$$\frac{b^2 - a^2}{2} = -\alpha(b-a) \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{b+a}{2}}$$

$$x_0 = \frac{b+a}{2}$$

Formula de cuadratură de grad maxim de exactitate s.n. formula dreptunghiului

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R(f)$$

Examen Ponderea $w = e^x$ $\alpha = ?$ $\int_a^b e^x (x-\alpha) dx = 0$

$$\alpha = \frac{\int_a^b x e^x dx}{\int_a^b e^x dx} = \frac{e^x(x-1) \Big|_a^b}{e^b - e^a}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se consideră diviziunea $a,\ \underbrace{a+\frac{b-a}{n}}_{\times 1},\ a+2\frac{b-a}{n},\ \dots,\ \underbrace{a+k\frac{b-a}{n}}_{\times k},\ \dots,\ b$ $\times n$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{\times k}^{\times k+1} f(n)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{2k+1}{n}(b-a)\right) + R_n(f)$$

depinde de $n$

## Teoremă T. lui Peano

Fie $A$ o funcțională $A : C^{(n+1)}_{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că are gradul de exactitate $n$. $A(x^k) = 0$, $k = \overline{0, n}$ atunci

$\forall f \in C^{(n+1)}_{[a,b]}$ are loc egalitatea

$$\boxed{A(f) = \frac{1}{n}\int_a^b A\left[(x-t)_+^n\right]_x f^{(n+1)}(t)\,dt}$$

A acționează asupra lui x

$$\boxed{(x-t)_+^n = \begin{cases} 0 & x<t \\ (x-t)^n & x \geq t \end{cases}}$$

Dem. F. lui Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(x) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \int_a^b (x-t)^n + f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$\Rightarrow A(f) = \frac{1}{n!}\int_a^b A(x-t)^n + f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \overset{\exists c}{=} f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

$$A(f) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c) \int_a^b A(x-t)_+^n\,dt$$

$$|A(f)| \leq \frac{1}{n!} \|f^{(n+1)}\| \cdot \int_a^b A(x-t)_+^n\,dt \,|\, R$$

modul funcțional

# Curs 4

formula dreptunghiului $\int_a^b f(x)dx = (b-a) f(\frac{a+b}{2}) + R(f)$

Cum putem evalua restul?

Fie $f \in C^2[a,b]$, $R(f) = \int_a^b f(x)dx - (b-a) f(\frac{a+b}{2})$

$R(1) = R(x) = 0$ $\qquad R(x^2) = \frac{b^3-a^3}{3} - \frac{(b-a)(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)(b-a)^2}{12}$

$$\boxed{R(x^2) = \frac{(b-a)^3}{12}}$$

T. Peano

$A(1) = A(e_1) = \dots = A(e_n) = 0$

$A(f) = \frac{1}{n!} \int_a^b A(x-t)_+^n f^{(n+1)}(t)\, dt$

→ Presupunem că $f \in C^2[a,b]$ atunci

$n = 1$ $\qquad R(f) = \frac{1}{1!} \int_a^b R(x-t)_+ f''(t)\, dt$ $\qquad$ ( R acționează asupra lui x)

reamintim $\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$ formula de medie

se poate scrie $\overset{?}{=} f''(c) \int_a^b R(x-t)_+ dt = k$ este o constantă care nu depinde de f

$R(x-t)_+ = \int_a^b (x-t)_+ dx - (b-a)(\frac{a+b}{2} - t)_+$ (trebuie să arătam că e pozitivă $\forall x$)

deplacem în 2 $\int_a^t \overset{0}{\parallel} + \int_t^b$

$= \int_a^b (x-t) dx - (b-a)(\frac{a+b}{2} - t)_+$

$= \frac{(x-t)^2}{2} \Big|_t^b - (b-a)(\frac{a+b}{2} - t)_+$

$$= \begin{cases} \frac{(b-t)^2}{2} - (b-a)(\frac{a+b}{2} - t) & , t \in [a, \frac{a+b}{2}) \\ \frac{(b-t)^2}{2} & , t \in [\frac{a+b}{2}, b) \end{cases}$$

$R(e_2) = (e_2)'' = 2k = \frac{(b-a)^3}{12} \Rightarrow k = \frac{(b-a)^3}{24}$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(c)} \qquad f \in C^2[a,b]$$

formula dreptunghiului cu rest

Formula dreptunghiurilor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{2k+1}{2n}(b-a)\right) + R_k(f)$$

punctele de diviziune $\boxed{x_k = a + k\frac{(b-a)}{n}}$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{2k+1}{2n}(b-a)\right) + \frac{(b-a)^3}{n^3 \cdot 24} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f''(c_k)$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{2k+1}{2n}(b-a)\right) + \frac{(b-a)^3}{24 n^2} \cdot \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f''(c_k)}{n}$$

media aritmetică a $n$ numere

$m$

cuprins între cea mai mică și mare valoare

T. lui Darboux

$(f(\alpha), f(\beta))$ $f(\alpha) < f(\beta)$

$\exists$ un pct. c unde $f(c) = m$)

Darboux $\Longrightarrow$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{2k+1}{2n}(b-a)\right) + \boxed{\frac{(b-a)^3}{24 \cdot n^2} \cdot f''(c)}}$$

$\varepsilon > 0$ $\quad \frac{(b-a)^3}{24 \cdot n^2} \cdot \|f''\|_\infty < \varepsilon$

$$n > \sqrt{\frac{(b-a)^3}{24 n^2}} = \frac{(b-a)\sqrt{b-a}}{2\sqrt{6}\, n \sqrt{\varepsilon}}$$

$$n = \left[\frac{(b-a)}{n}\sqrt{\frac{b-a}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}}}\right] + 1$$

parte întreagă

$(n > \alpha \quad \alpha \notin \mathbb{N} \quad n \geq [\alpha] + 1)$

Examen

Să se găsească formula de cuadratură de forma: (și să se dea o evaluare a restului)

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x) = A_0 f(x_0) + R(f) \qquad f \in C^2[-1, 1]$$

(vrem grad maxim $\Rightarrow$ $x_0$ rădăcina pol. ortogonal)

$w(x) = x^2$

$$\int_{-1}^{1} x(x - x_0)\,dx = 0$$

$$0 - x_0 \int_{-1}^{1} x^2\,dx = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

$R(x) = 0$

$$\int_{-1} x^3\,dx - A_0 \cdot 0$$

$$f = 1 \qquad \int_{-1}^{1} x^2\,dx = A_0 \qquad A_0 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = \frac{2}{3} f(0) + R(f)$$

$$R(f) = \int_{-1}^{1} R(x-t)_+ \, f''(t)\,dt \overset{f \text{ de medie}}{=\!=} k \cdot f''(c)$$

$$R(x-t)_+ > 0$$

$$k = \int_{-1}^{1} R(x-t)_+ \, f''(t)\,dt \quad \text{NU depinde de } f$$

$$\Rightarrow R(f_2) = 2k$$

$$k = \frac{f_2}{2} \qquad f_2 = \int_{-1}^{1} x^4 - 0 = \frac{2}{5} \Rightarrow k = \frac{1}{5}$$

## Formula de cuadratură de tip Gauss

$$\boxed{\int_a^b w(x) f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f)}$$

se arată că restul e proporțional cu suma modulelor coeficienților formulei de cuadratură

$$|R(f)| = k \sum_{k=0}^{n} |A_k| \geq \sum_{k=0}^{n} A_k$$

## Teoremă

Coeficienții unei formule de cuadratură de tip Gauss sunt strict pozitivi

$$\boxed{A_k > 0 \quad \forall\, k \in \overline{0,n}}$$

$$A_k = \int_a^b w(x)\, l_k(x)\,dx$$

$$f(x) = l_k^2(x) \geq 0 \qquad R(l_k^2) = 0$$

e polinom de grad $2n$

se anulează în toate punctele mai puțin $x_k$

înlocuim

$$0 < \int_a^b w(x)\, l_k^2(x)\,dx = A_k$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} A_k \overset{?}{=} \int_a^b w(x)\,dx}$$

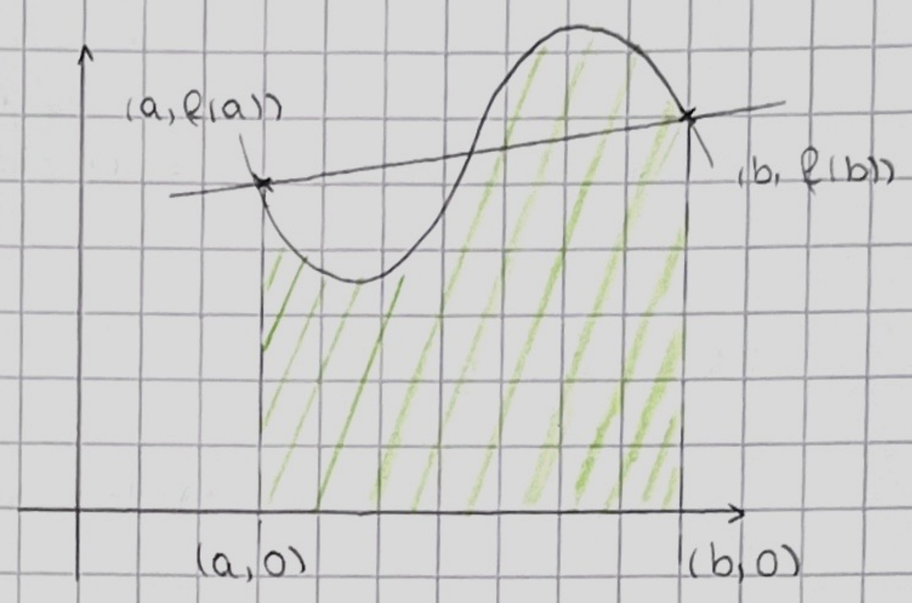
(înlocuiesc pe $f$ cu 1)

BRUNNEN

$f$ funcție convexă $f''(x) \geq 0 \xRightarrow[\text{formula dreptunghiului}]{} \int_a^b f(x)\,dx \geq (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

## Formula(le) trapezului(lor)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 2 noduri $x_0 = a$, $x_1 = b$




ponderea $w = 1$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b L_1(f; a, b)(x) + R(f)$$

p. lui Lagrange

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2} + R(f)$$

aproximăm aria prin aria trapezului

linia mij. = $\frac{\text{suma bazelor}}{2}$

$$R(l_2) = \frac{b^3-a^3}{3} - \frac{b-a}{2}(a^2+b^2) - (b-a)\,\frac{2b^2+2ab+2a^2-3a^2-3b^2}{6}$$

$$= -\frac{(b-a)^3}{6} \neq 0 \Rightarrow \text{grad de exactitate } 1$$

vezi Teorema 2 curs 3
2 noduri $\Rightarrow$ grad de exactitate cel puțin 1

$$\int f(x) - L_1(f; a, b)(x) = (x-a)(x-b)\,[x, a, b : f]$$

$$R(f) = \int_a^b \underbrace{(x-a)(x-b)}_{\text{pe intervalul } [a,b] \text{ au semnul } -}\,[x, a, b : f]\,dx$$

$$= [c, a, b : f] \int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$$

f. de medie pt. dif. div

$$= \frac{f''(\theta)}{2 \cdot 2} \cdot k$$

$$R(l_2) = l_2'' = \frac{2}{2} \cdot k \qquad k = -\frac{(b-a)^3}{2 \cdot 6}$$

## Formula Trapezului

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\theta)}$$

Dacă $f$ e convexă

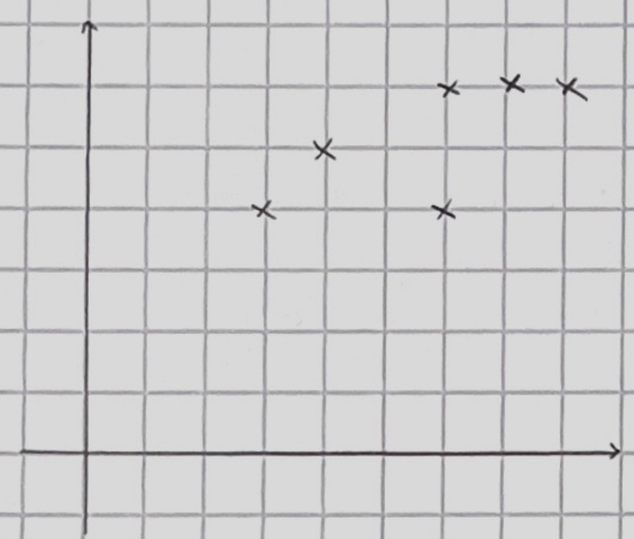
$$(b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}$$ inegalitățile lui Hadamard

Formula Trapezelor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{b-a}{12n} \left[ f(x_k) + f(x_{k+1}) - \frac{(b-a)^3}{R_n^3} f(c_k) \right] \right]$$

$$= \frac{b-a}{2n} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) \right] - \frac{(b-a)^3}{12n^2} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)}{n}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n} \left[ f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right] - \frac{(b-a)}{12n^2} \cdot f''(c)}$$



dreaptă de regresie

$(y_i - ax_i - b)^2 = 0$

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 = 0$$

a.î. $E(a,b)$ cea mai mică posibilă

ec. dreptei $y = ax + b$

Vreau să determin a și b

$$\frac{\partial E}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)\, x_i = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b_i) = 0$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i + nb \end{cases}$$

Media aritmetică cu valorile măsurate

$$M(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \qquad M(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\begin{cases} n\,M(y) = a \cdot n \cdot M(x^2) + b \cdot n \cdot M(x) \\ n\,M(x) = a \cdot n \cdot M(y) + n \cdot b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\,M(x) + b\,M(x) = M(y) \\ a\,M(x) + b = M(y) \quad / \cdot -M(x) \end{cases}$$

dreaptă de regresie

$$\Delta = M(x^2) - M^2(x) > 0 \qquad \Rightarrow a(\underbrace{M(x^2) - M(x)^2}_{\text{dispersie}}) = M(y)(1 - M(x))$$

BRUNNEN

Aproximare medie pătratică cu polinoame

Fie $f(x)$ $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilă împreună cu patratul ei

$$\exists \int_a^b f^2(x)\,dx \qquad \exists \int_a^b f(x)\,dx \qquad \langle l_i, l_j \rangle = \delta_{i,j}$$

Cum pot aproxima cât mai bine $f(x) \simeq \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot P_i(x)$

$P_i$ - polinoame ortogonale

$$[a,b] \quad w \Rightarrow \int_a^b \underbrace{P_i(x)}_{\text{de grad } i} \underbrace{P_j(x)}_{\text{de grad } j}\,dx = \delta_{i,j} \quad \text{(ortonormate)}$$

$$f, g \qquad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \left[ f(x) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i(x) \right]^2 dx = F(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_k} = 0$$

$$\Rightarrow -\int_a^b 2\left[ f(x) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i(x) P_k(x) \right] dx$$

$$\int_a^b f(x) P_k(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \int_a^b P_i(x) P_j(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x) P_k(x)\,dx = \alpha_k \qquad \text{coef. } \alpha_k \text{ dați de rel } 0$$

coef. Fourier

# Curs 5

# Funcții spline

Def.: S.n. funcție spline o funcție $f$ continuă, cu proprietatea că ea e segmentar polinomială

$\exists$ o diviziune $\Delta \in C(I)$ $x_0 < x_1 < \dots < x_n$

$$\Delta \mid [x_k, x_{k+1}] \in \Pi \qquad k = \overline{0, n-1}$$

→ orice polinom e o funcție spline

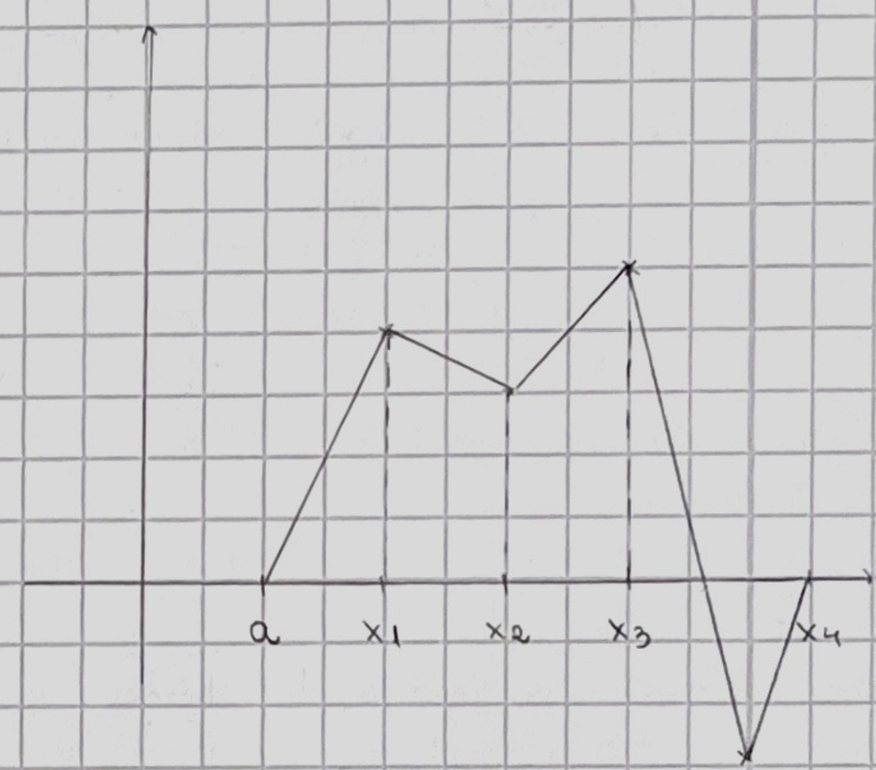
→ $m$ e gradul polinomului (cel mai mare grad) ⇒ spline-ul e de ordin $m$

ex.: $a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

grad cel mult 1

pentru polinom de grad 0 ⇒ constantă

1 ⇒ dreaptă




Spline de interpolare

$f(x_i)$ $i = \overline{0, n}$ $x_0 = a$, $x_1 = b$

Vrem spline de ordin I

$S_{\Delta n, 1}$ $\Delta n$: $a = x_0 < \dots < x_n = b$ $S_{\Delta n, 1}(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$

## Teorema de existență și unicitate

a) Fiind dată diviziunea $\Delta n$ $\exists!$ (există un unic) spline de interpolare care interpolează fct. $f$

b) $S_{\Delta n, 1}(f(x)) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$, unde $l_i$ spline-uri de ordin I

Dem.:

$[x_k, x_{k+1}] \Rightarrow S_{\Delta 1, n}(f)$ | $L_1(f; x_k, x_{k+1})(f)$

$[x_k, x_{k+1}]$

(- să interpoleze fct. în 2 pct. distincte
- grad I)

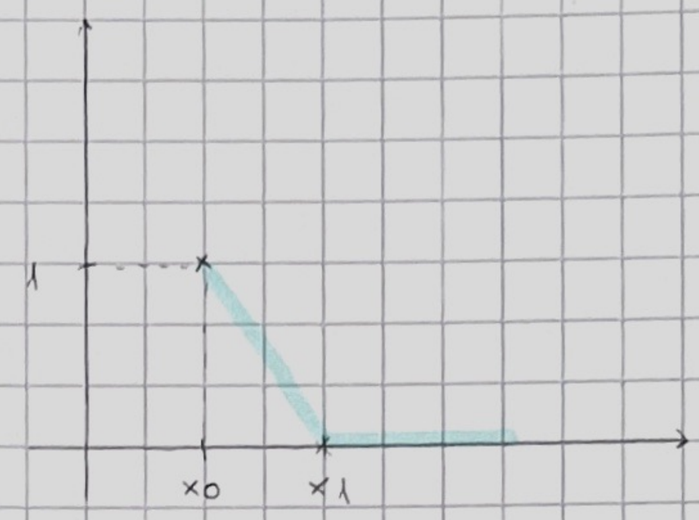
$$L_1(f; x_k, x_{k+1})(x) = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} f(x_k) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f(x_{k+1})$$

BRUNNEN

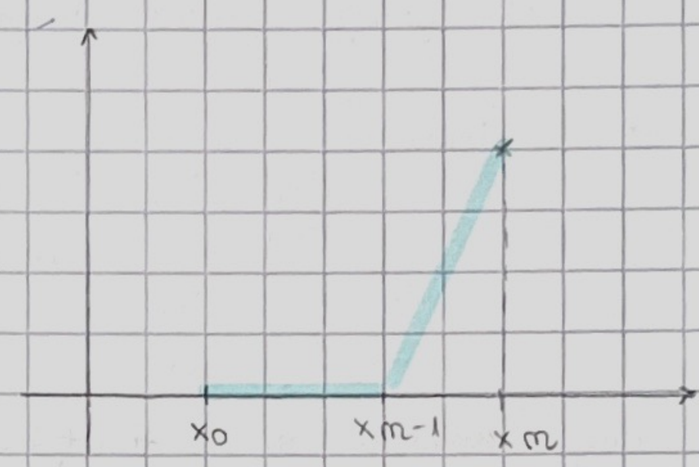
Ce inseamnă $l_0, l_m, l_k$ ? $1 \le k \le m-1$

$l_i(x_k) = \delta_{i,k}$

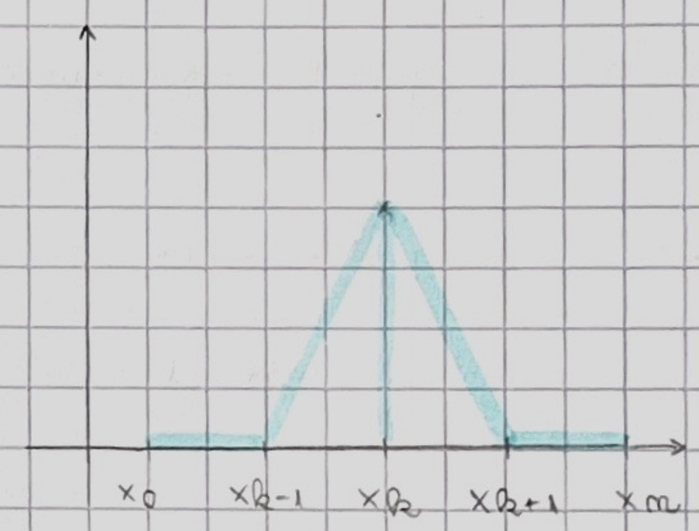
$$l_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}, & x \in [x_0, x_1) \\ 0, & x \in [x_1, x_m) \end{cases}$$




$$l_m(x) = \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{m-1}) \\ \dfrac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}}, & x \in [x_{m-1}, x_m) \end{cases}$$




$$l_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{k-1}) \\ \dfrac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, & x \in [x_{k-1}, x_k) \\ \dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, & x \in [x_k, x_{k+1}) \\ 0, & x \in [x_{k+1}, x_m) \end{cases}$$




gata demonstrația.

in $x_k = 1$

Ce se întâmplă cu restul ?

Fie funcția $f$ dată

mărim numărul de puncte a.î. norma diviziunii $\to 0$

## Teoremă

Dacă $f \in C^2[a,b]$ și considerăm șirul de diviziuni al $[a,b]$ finit a.î. norma diviziunii să tindă la 0 $\|\Delta_m\| \to 0$ atunci

$$\Rightarrow S_{\Delta_m}(f) \rightrightarrows f \quad \text{converge uniform spre } f$$

( norma : $\|\Delta_m\| = \max(x_{k+1} - x_k) \quad k = \overline{0,m}$ )

Dem.:

$$f(x) - S_{\Delta_m}(f)(x) = f(x) - L_1(f: x_k, x_{k+1})(x) = (x - x_k)(x - x_{k-1})[x, x_k, x_{k+1}; f]$$

restul interpolării Lagrange

$$\xRightarrow{\text{f. Cauchy}} = (x - x_k)(x - x_k + 1)\frac{f''(\theta)}{2}$$

$$|f(x) - S_{\Delta_m}(f)(x)| = \left|\frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{2}\right| \|f''(\theta)\| \le \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2}\|f''\|$$

$$|f(x) - S_{\Delta m}(f)(x)| \le \left\|\frac{\Delta m}{2}\right\|^2 \cdot \|f''\| \qquad \forall x \in [a,b]$$

(Wierstrass şir de funcţii ≤ şir de nr pozitive şi care tinde la 0 ⇒ convergent)

$$\xRightarrow{W} S_{\Delta m}(f) \Longrightarrow f$$

Dacă se dă $\mathcal{F}_i(f) = \{ g \mid g \in C[a,b],\ \forall k = \overline{0, m-1},\ g \in C^1[x_k, x_{k+1}],\ g(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0,m} \}$

mulţimea tuturor punctelor g

g continuă pe [a,b]

g derivabilă pe porţiuni

g interpolează funcţia în punctele $x_i$

care minimizează ?

$$\int_a^b g^{i^2}(x)\,dx = ? \quad , \ g \in \mathcal{F}_i(f)$$

care din funcţii realizează cea mai mică val?

exemple de funcţii: $f$, $S_{\Delta m,1}$

## Teorema 3

$\exists!\ g^* \in \mathcal{F}_1(f)$ a.î.

$$\boxed{\inf_{g \in \mathcal{F}_1(f)} \int_a^b g'^2(x)\,dx = \int_a^b g^{*\prime 2}(x)\,dx}$$

şi $g^* = S_{\Delta m,1}(f)$

$g^*$ spline de ord I

(nu e spaţiu vectorial din cauza adunării → nu e stabilă)

$$\mathcal{F}^0 = \{ g \mid g \in C[a,b],\ g \in C^1[x_k, x_{k+1}] \mid g(x_m) = 0 \}$$

adunarea e bine definită $g_1(x_k) = g_2(x_k) = 0$

$$\left( \begin{array}{l} (\lambda g)(x_k) = \lambda f(x_k) \neq f(x_k) \\ \text{dacă } g \in \mathcal{F}^0 \quad (\lambda g)(x_k) = \lambda g(x_k) = 0 \end{array} \right)$$

Dem.:

1) Presupunem că există un element $g^* \in \mathcal{F}_1(f)$ şi care realizează infimumul

$$\int_a^b g^{*\prime 2}(x)\,dx \le \int_a^b g'^2(x)\,dx \qquad \forall g \in \mathcal{F}_1(f)$$

Considerăm funcţia

$$F(\lambda) = \int_a^b \underbrace{[g^{*\prime}(x) - \lambda h'(x)]^2}_{g^*,\ h \text{ continue, derivabile pe porţiuni}} \qquad h \in \mathcal{F}^0$$

$$F(\lambda) \ge \inf$$

$$F(\lambda) \ge \int_a^b g^{*\prime 2}(x)\,dx \ge F(0)$$

$$g^* - h'(x) \cdot \lambda \in \mathcal{F}_1'(f)$$

Verificăm dacă $g^*(x_k) - \lambda h(x_k) = f(x_k)$

$F'(\lambda) = -2\int_a^b h'(x)\left[g^{*\prime}(x) - \lambda h'(x)\right]dx$ ! derivez în raport cu $\lambda$ NU cu $x$

$$\boxed{F'(0) = -2\int_a^b h'(x)\, \underbrace{g^{*\prime}(x)}\, dx = 0} \quad \forall\, h \in \mathcal{F}^0 \qquad (1)$$

trebuie să fie ortogonal pe $F^0(c)$

Dacă (1) e adevărată $\Rightarrow g^*$ realizează infimumul

→ Vrem să arătăm că (1) este suficientă

$$\int_a^b g'^2(x)\,dx = \int_a^b \Big[\underbrace{g'(x) - g^{*\prime}(x)}_{a} + \underbrace{g^{*\prime}(x)}_{b}\Big]^2 dx$$

$$= \int_a^b \left[g'(x) - g^{*\prime}(x)\right]^2 dx + 2\int_a^b \overbrace{\left[g'(x) - g^{*\prime}(x)\right]}^{h'(x)} \cdot \overbrace{g^{*\prime}(x)}^{0}\,dx + \int_a^b g^{*\prime 2}(x)\,dx$$

$h(x) = g(x) - g^*(x)$

$h(x_k) = 0$

$$\Rightarrow \int_a^b g'^2(x)\,dx = \int_a^b \left[g'(x) - g^{*\prime}(x)\right]^2 + \int_a^b g^{*\prime 2}(x)\,dx \geq \int_a^b g^{*\prime 2}(x) \qquad (2) \text{ T. lui Pitagora}$$

$\Rightarrow$ (1) e suficientă

→ Dacă arătăm că există un singur $g^*$ care respectă proprietatea de ortogonalitate

$\Rightarrow$ unicitate

Pp. că $g^* \in \mathcal{F}_1(f)$ și $g_1^* \in \mathcal{F}_1(f)$ există a.î. $\int_a^b g^{*\prime 2}(x)\,dx = \int_a^b g_1^{*\prime 2}(x)\,dx$

în (2) luăm $g = g_1^*$

$$\Rightarrow \cancel{\int_a^b g_1^{*\prime 2}(x)\,dx} = \int_a^b \left[g_1^{*\prime}(x) - g^{*\prime}(x)\right]^2 + \cancel{\int_a^b g^{*\prime 2}(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \left[g_1^{*\prime}(x) - g^{*\prime}(x)\right]^2 = 0 \quad \text{când e continuă}$$

Dacă $f$ continuă $\int_a^b f(x) = 0 \Rightarrow f = 0$

Aria unui punct $= 0$

Observăm că $\int_a^b \left[g_1^{*\prime}(x) - g^{*\prime}(x)\right]^2 dx = \sum_{k=0}^{m-1} \underbrace{\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[g_1^{*\prime}(x) - g^{*\prime}(x)\right]^2 dx}_{\text{fct. cont} \geq 0} = 0$

$\Rightarrow g_1^{*\prime}(x) - g^{*\prime}(x) = 0 \quad \forall\, x \in [x_k, x_{k+1}]$

$g_1^*(x) - g^*(x) = C_k \qquad x = x_m \qquad C_k = 0$

$\Rightarrow g_1^*(x) = g^*(x) \quad \forall\, x$

Arătăm că $\int_a^b S'_{\Delta n,1}(f)(x)\,h'(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} S'_{\Delta n,1}(f)(x)\cdot h'(x)\,dx$

$= \sum_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}; f] \underbrace{\int_{x_k}^{x_{k+1}} h'(x)\,dx}_{=0} = 0$

coeficientul rezultat în urma diviz

$\Rightarrow \forall\, g \in \mathcal{F}_1$ are loc inegalitatea $\boxed{\int_a^b g'^2(x)\,dx \geq \int_a^b S'^2_{\Delta n,1}(f)(x)\,dx}$

# Spline-uri cubice de interpolare

Pp. $f \in C^1[a,b]$, $f \in C^2[x_k, x_{k+1}]$ $k = \overline{0, n-1}$

continuă împreună cu derivata de ordin I

are derivată de ordin 2 pe porțiuni

știm $f(x_k)$, $f'(x_k)$ vrem să îl det.

$S_{\Delta n,3}(f)$ cu următoarele proprietăți

spline de ordin 3

1. $S_{\Delta n,3} \in C^1[a,b]$
2. $S_{\Delta n}(f)(x_k) = f(x_k)$ (să interpoleze fct în pct $x_k$)
3. $S'_{\Delta n}(f)(x_k) = f'(x_k)$ $k = \overline{0,n}$ (derivata sa să fie interpolată în pct $x_k$)

## Teoremă

$\boxed{\exists!\ S_{\Delta n,3} \text{ care interpolează funcția și derivata}}$

Dem.:

$[x_k, x_{k+3}]$ $\begin{cases} S_{\Delta n,3}(f)(x_k) = f(x_k) \\ S'_{\Delta n,3}(f)(x_k) = f'(x_k) \end{cases}$

$\begin{cases} S_{\Delta n,3}(f)(x_{k+1}) = f(x_{k+1}) \\ S'_{\Delta n,3}(f)(x_{k+1}) = f'(x_{k+1}) \end{cases}$

(Hermite)

## Teoremă

Splineul de interpolare $S_{\Delta n,3}(f)(x)$ poate fi scris sub forma

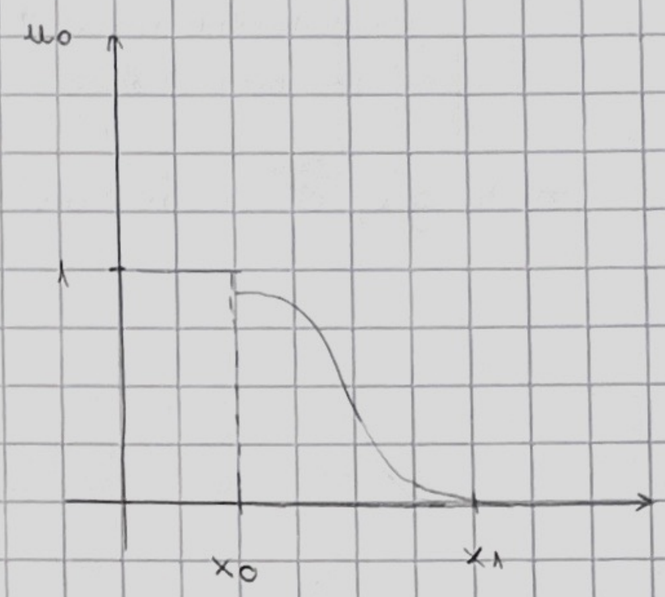
$$\boxed{S_{\Delta n,3}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) f(x_k) + \sum_{k=0}^{n} v_k(x) f'(x_k)}$$

BRUNNEN

$u_k$, $v_k$ sunt spline-uri de ordinul 3 care verifică condițiile

$u_k(x_i) = \delta_{k,i}$ $\qquad$ $v_k(x_i) = 0$

$u'_k(x_i) = 0$ $\qquad$ $v'_k(x_i) = \delta_{k,i}$




$\Rightarrow u_0(x) = \alpha_3 (x-x_1)^2 + \alpha_4 (x-x_1)^3$

$$u_0(x) \begin{cases} [\alpha_3 \cdot \alpha_4 (x_0 - x_1)](x_0-x_1)^2 = 1 \\ \text{deriv.} \quad 2\alpha_3 (x_0 - x_1) + 3\alpha_4 (x_0-x_1)^2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha_3 = \dfrac{3(x_1-x_0)\alpha_4}{2}$

$$u_0(x) = \underset{0}{\underset{\parallel}{\cancel{\alpha_1}}} + \underset{0}{\underset{\parallel}{\alpha_2}} (x-x_1) + \alpha_3 (x-x_1)^2 + \alpha_4 (x-x_1)^3$$

Examen

Să se găsească $u_5$ din spline-ul ...

Proprietăți de extrem spline-ul de ordin 3

$$\mathcal{F}_3(f) = \{ g \mid g \in C^1[a,b],\ g \in C^2[x_k, x_{k+1}],\ k = \overline{0, m-1},\ \begin{matrix} g(x_i) = f(x_i) \\ g'(x_i) = f'(x_i) \end{matrix},\ i = \overline{0,m} \}$$

g interpolează $f(x_i)$ și derivata în $x_i$

$$G \in \mathcal{F}_3(f) \quad \inf_{g \in \mathcal{F}_3(f)} \int_a^b g''^2(x)\,dx = \int_a^b G''^2(x)\,dx$$

$$\mathcal{F}_3^0 = \{ h \mid h \in C^1[a,b],\ h \in C^2[x_k, x_{k+1}],\ h(x_k) = h'(x_k) = 0\ \forall k = \overline{0,m} \}$$

spațiu vectorial

## Teoremă

G realizează infimumul dacă și numai dacă $\int_a^b G''(x) h''(x)\,dx = 0 \quad \forall h \in \mathcal{F}_3^0$

Dem: $F_1(r) = \int_a^b [G''(x) - h''(x) r]^2 dx \geq \int_a^b G''^2(x)\,dx \qquad G - rh \in \mathcal{F}_3(f)$

$\Rightarrow F_1(0) = \min$

$F_1'(0) = 0 \Rightarrow \int_a^b G''(x) \cdot h''(x)\,dx = 0$ (necesară)

$g \in \mathcal{F}_3(f)$

$$\Rightarrow \int_a^b g''^2(x)\,dx = \int_a^b (g'' - G'' + G'')^2 dx = \int_a^b (g'' - G'')^2 + \underbrace{2\int_a^b G''(x) \underbrace{[g''(x) - G''(x)]}_{\in \mathcal{F}_3^0} dx}_{0}$$

$$+ \int_a^b G''^2(x)\,dx \geq \int_a^b G''^2(x)\,dx$$

Vrem să arătăm că e unic

Pp. că $\exists$ G şi $G_1 \in \mathcal{F}_3(\ell)$ care realizează infimumul

$$\int_a^b G''^2(x)dx = \int_a^b G_1''^2(x)dx \leq \int_a^b g''^2(x)dx$$

$g = G_1$

$$\cancel{\int_a^b G_1''^2(x)dx} = \int_a^b (G_1'' - G'')^2(x) + \cancel{\int_a^b G''^2(x)dx}$$

$$\int_a^b [G_1'' - G'']^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{x_k}^{x_{k+1}} [G_1''(x) - G''(x)]^2 dx = 0$$

$\Rightarrow G_1''(x) - G''(x) = 0$ pe $[x_k, x_{k+1}]$

$\Rightarrow G_1(x) - G(x) = a_k x + b_k$ polinom de ord. 1

$$\begin{cases} 0 = a_k x_k + b_k \\ 0 = a_k \Rightarrow b_k = 0 \end{cases}$$

Spline-ul de ordin 3 e ortogonal pe $\forall h \in \mathcal{F}_0$

# Curs 6

## Aproximarea funcţ. cont. pt. operatori liniari şi pozitivi

Fie $f \in C^{\infty}[a,b]$ , $\|f^{(n)}\| \leq M$

are derivate uniform mărginite

condiţia e restrictivă

$$S_{\Delta_{n,f}}(f) \rightrightarrows f \qquad f \in C[a,b]$$

$\exists\, P_n \in \Pi_n$ (există un şir de polinoame pe $n$) a.î.

$$P_n \rightrightarrows ?$$

→ Teorema lui Weierstrass

Orice funcţie continuă poate fi aproximată $f \in C[a,b]$

→ Teorema lui S.H. Bernstein (1934)

Fie $f$ o funcţie definită pe $[0,1]$ , continuă pe $[0,1]$

$f \in C[0,1]$ $\left[ [a,b] \;,\; t \longrightarrow \frac{x-a}{b-a} \text{ când } \begin{array}{l} x=a \Rightarrow t=0 \\ x=b \Rightarrow t=1 \end{array} \right]$

**Def**

Pentru $f \in C[0,1]$ s.n. polinom Bernstein de grad $n$ polinomul $B_n^{(f)} \in \Pi_n$

$$\boxed{B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x)\, f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

unde $\boxed{b_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}$ pol. fundamentale $(b_{n,k})$ $k \in \{0, \dots, x\}$

$C_k^n$

→ şir de aproximare uniformă
→ converge uniform la funcţie
→ e pozitiv

**Def**

Fie $L_n$ un operator $L_n : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ , operatorul $L_n$ s.n. operator liniar şi pozitiv dacă îndeplineşte următoarele condiţii

a) este **liniar** dacă am 2 funcţii $f, g \in C[0,1]$ , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

atunci $L_n(\alpha f + \beta g) = \alpha L_n(f) + \beta L_n(g)$

b) să fie pozitiv $\forall f \geq 0 \Rightarrow L_n f \geq 0$ [ $(L_n f)(x) \geq 0$ ]

înseamnă că pentru $\forall x \in [0,1] \Rightarrow f(x) \geq 0$

## Proprietăți

a) Fie $L_n$ un operator liniar pozitiv (L.P.) atunci pentru $\forall f \in C[0,1]$ are loc egalitatea

$$\boxed{|L_n(f)| \leq L_n(|f|)}$$

Dem.:

$-|f| \leq f \leq |f| \qquad f \leq g \Leftrightarrow f-g \leq 0 \qquad L_n(g-f) = L_n(g) - L_n(f) \geq 0$

$g-f \geq 0$

→ un operator liniar și pozitiv este monoton față de funcție

$-L_n|f| \leq L_n f \leq L_n|f| \Leftrightarrow |L_n f| \leq L_n|f|$

spațiu vectorial

| produs scalar | ≤ norma lui $v_1$ + norma lui $v_2$

√ produsul scalar a lui $v_1$ cu el însuși

b) Dacă $f, g \in C[0,1]$ 2 funcții continue, $L_n$ operator L.P. atunci

$$\boxed{|L_n(f \cdot g)(x)| \leq \sqrt{L_n(f^2)(x) \cdot L_n(g^2)(x)}}$$

Dem.:

$(f(t) - \lambda \cdot g(t))^2 \geq 0 \quad \forall t \in [0,1],\ \lambda \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f^2(t) - 2\lambda f(t) g(t) + g^2(t) \cdot \lambda^2 \geq 0$

$\Rightarrow L_n(f^2)(x) - 2\lambda L_n(f \cdot g)(x) + \lambda^2 \cdot L_n(g^2)(x) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $x \in [0,1]$

e pozitivă dacă $\Delta \leq 0$ și coeficientul lui $L^2 > 0$

$4[\underbrace{(L_n(f \cdot g)(x))^2 - L_n(f^2)(x)}_{<0} \cdot L_n(g^2)(x)] \leq 0$

Notăm $e_i$ monoamele $e_i(x) = x^i$, $i \in \mathbb{N}$

$L_n$ operator L.P. $L_n e_0 = e_0$

$\underbrace{L_n^*(f)(x)}_{(L_n e_0)(x)} = L_n^*(f)$

## Teoremă (Popoviciu - Bohman - Korovkin)

Fie $L_n$ șir de operatori L.P. $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $L_n: C[0,1] \to C[0,1]$, condiția necesară și suficientă pentru ca $L_n f \rightrightarrows f$, $\forall f \in C[0,1]$ este ca

$$\boxed{L_n e_i \rightrightarrows e_i \quad i = 0, 1,}$$

BRUNNEN

Dem.: $f \in$ Lipschtziana dacă $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$

constantă poz.

$f \in C^1[0,1]$

$$|f(x) - f(y)| \geq |x-y| \cdot |f'(c)| \leq M|x-y|$$

nu se întâmplă și invers ex.: $\sqrt{x}$ $\quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$

$$|f(t) - f(x)| \leq M|t-x|$$

$$|L_n(f(t) - f(x))(x)| = |(L_n f)(x) - f(x) \cdot L_n(\underbrace{e_0}_{1})x|$$

$$= |(L_n f)(x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|)(x)$$

$$\leq M \cdot L_n(|t-x|)(x)$$

inegalitatea lui Cauchy $\leq \sqrt{\underbrace{L_n e_0(x)}_{=1}} \cdot \sqrt{L_n(|t-x|^2)(x)}$

$$|(L_n f)(x) - f(x)| \leq M\sqrt{L_n(t^2 - 2tx + x^2)(x)}$$

$$= M\sqrt{\underbrace{(L_n e_2)(x)}_{\text{converge uniform}} - 2x\underbrace{(L_n e_1)(x)}_{\text{converge uniform}} + x^2} \Longrightarrow M\sqrt{x^2 - 2x^2 + x^2} = 0$$

Dem.: Bernstein $\quad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \Longrightarrow f(x)$

$$B_n(e_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (1-x+x)^n = 1$$

Vrem să vedem dacă converge uniform

Termenul general din dezvoltare

$$\longrightarrow (a+b)^n = T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$B_n(e_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k}{n}$$

$$(1-x+t\cdot x)^n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)\, t^k \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} t^k \cdot b_{n,k}(x)$$

identitate (A) $\forall x, k$

derivăm în raport cu $t$

$$n(1-x+tx)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k t^{k-1} b_{n,k}(x) \quad / \cdot t$$

$\forall t$

(A) pentru $t=1 \Rightarrow nx = \sum_{k=0}^{n} k \cdot b_{n,k}(x) \quad / \cdot \frac{1}{n}$ (1)

$$\Rightarrow x = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} b_{n,k}(x)$$

$$\Rightarrow B_n e_1 = e_1$$

$$(B_n e_2)(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) \cdot \frac{k^2}{n^2}$$

(1) $\Rightarrow nt\,x(1-x+tx)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k t^k b_{n,k}(x)$ (2)

derivăm

$$nx(1-x+tx)^{n-1} + n(n-1)tx^2(1-x+tx)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k^2 t^{k-1} b_{n,k}(x)$$

$$t=1 \Rightarrow nx + n^2x^2 - n^2x^2 = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k^2 b_{n,k}(x)}_{B_n(e_2)(x)}$$

$$\Rightarrow B_n(e_2)(x) = x^2 + \frac{nx(1-x)}{n^2}$$

$$\underbrace{|B_n(e_2)(x) - x^2|}_{\text{şir poz.}} = \frac{x(1-x)}{n} \quad , x \in [0,1] \text{ pozitiv}$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{4n}}_{\infty n} \to 0$$

$$\Rightarrow B_n(e_2) \rightrightarrows e_2$$

## Def

Dacă am un şir de operatori liniari $L_n : C[0,1] \to C[0,1]$ $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s.n. şir de aproximare uniformă dacă $L_n(f) \rightrightarrows f$ $\forall f \in C[0,1]$

## Teoremă (Păstrarea alurii prin polinoame Bernstein)

formă (convex concav) + monotonie

Şirul de polinoame $(B_n f)_{n\geq 1}$ păstrează alura funcţiei:

Dacă $f$ e crescătoare / descrescătoare la fel e şi $B_n f$

Dacă $f$ e convexă / concavă la fel e şi $B_n f$

Pp. că $f$ e crescătoare pe $[0,1]$ $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Ştim că $f$ e continuă

$$B_n'(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[k \cdot x^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}\right] f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!\, x^k (1-x)^{n-k-1}}{k!\,(n-k-1)!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{k-1=i} x^{k-1}(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) - n \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} \cdot f\left(\frac{k-1}{n}\right) - n \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k}(x) \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \geq 0 \Rightarrow \text{Bernstein păstează monotonia}$$

3 $$B_n'(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k}(x) \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}; f\right] \longrightarrow \text{diferenţa divizată}$$

Notez cu $g_n(x) = \left[\frac{(n-1)x}{n}, \frac{(n-1)x+1}{n}; f\right]$ atunci

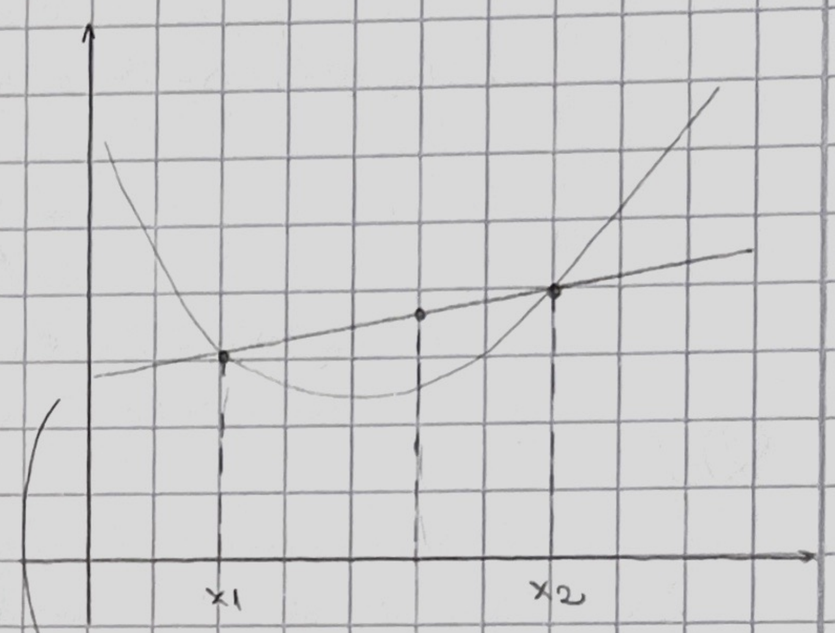
$$B_n'(f)(x) = B_{n-1}(g_n)(x)$$

$$B_{n-1}(g_n(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k}(x)\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}; f\right]$$

Dem. convexitate

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ $\forall r \in [0,1]$ $f$ convexă dacă

$$f(\underbrace{(1-r)x_1 + r x_2}_{\text{între } x_1, x_2}) \le (1-r) f(x_1) + r f(x_2)$$




pol. de interpolare a lui Lagrange

$\Leftrightarrow$ $f$ convexă dacă și numai dacă

$$\forall x_1, x_2, x_3 \quad [x_1, x_2, x_3; f] \ge 0$$

pp. $f$ convexă

$$[x_1, x_2, x_3; f] \ge 0$$

din 3 $B''_n(f)(x) = B'_{n-1}(g_n)(x) = \sum_{k=0}^{n-2} b_{n-2,k}(x)\left[\frac{k}{n-1}, \frac{k+1}{n-1}; g_n(x)\right]$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} b_{n-2,k}(x)(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} b_{n-2,k}(x)\left[g_n\left(\frac{k+1}{n-1}\right) - g_n\left(\frac{k}{n-1}\right)\right]$$

$$= \underbrace{n(n-1)}_{\frac{1}{n}} \sum_{k=0}^{n-2} b_{n-2,k}(x)\Big(\underbrace{\left[\frac{k+1}{n}, \frac{k}{n}; f\right] - \left[\frac{k}{n}, \frac{k-1}{n}; f\right]}_{\frac{1}{n}}\Big)$$

formula de recurență pentru diferența divizată

$$= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k-1}{n}, \frac{k+1}{n}; f\right] b_{n-2,k}(x)\right) \ge 0$$

curbă $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a,b]$ $\quad \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

polinomul lui B atașat curbei

$$B_n(\vec{r})(t) = \vec{i}\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(t)\cdot x\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(t)\cdot y\left(\frac{k}{n}\right)$$

# Curs 7

## Curbe Bezier

→ Avem 2 puncte $P_0, P_1 \in \mathbb{R}^k$ $(k = 2,3)$ din plan sau din spațiu, atunci dreapta care trece prin cele 2 puncte se poate scrie parametric

$$\overline{P_0P_1} = (1-t)P_0 + t \cdot P_1$$

Notez $\vec{R}(t)$ vectorul de poziție $\vec{R}(t) = (1-t)\vec{r}_{P_0} + t \cdot \vec{r}_{P_1}$

$P_0(x_0, y_0)$ $P_1(x_1, y_0)$ $x = (1-t)x_{P_0} + t x_{P_1}$

$y = (1-t)y_{P_0} + t y_{P_1}$

reprezentarea parametrică a dreptei din plan

Vectorial: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [0,1]$

($i, j, k$ versori)

→ Avem $n$ puncte $P_0, P_1, \dots, P_n$

$P_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$ pentru $i = \overline{0,n}$

$b_{1,0} = (1-t)$

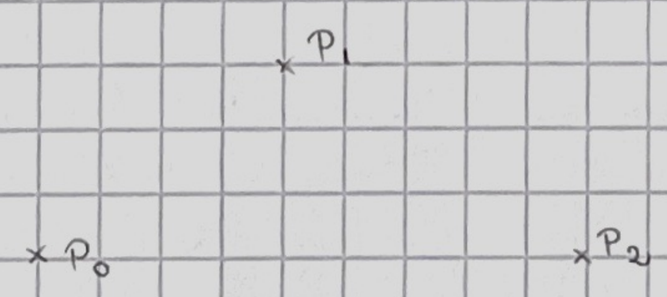
$b_{1,1} = t$

$$\boxed{b_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}}$$

$\Rightarrow \overline{P_0P_1} = b_{1,0}(t)P_0 + b_{1,1}(t)P_1$

$P_0, P_1, \dots P_n$ $$\boxed{B_{P_0,P_1,\dots,P_n}(t) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(t) \cdot P_k}$$ algoritmul lui Casteljaux

$P_0, P_1, P_2$




$B_{P_0,P_1,P_2}(t) = (-1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$

$= (1-t)[(1-t)P_0 + 2tP_1 + tP_2] + t[(1-t)P_1 + tP_2]$

$= (1-t)B_{P_0,P_1}(t) + t B_{P_1,P_2}(t)$

## Teoremă

Fie $B_{P_0,P_1,\dots,P_n}(t)$ curba Bezier de ordinul $n$ cu punctele de control $P_0, P_1 \dots P_n$ și curba $B_{P_0,P_1,\dots,P_n}(t)$ atunci are loc următoarea egalitate:

$$\boxed{B_{P_0,P_1,\dots,P_n,P_{n+1}}(t) = (1-t)B_{P_0,\dots,P_n}(t) + t \cdot B_{P_1,\dots,P_n,P_{n+1}}(t)}$$

(Orice curbă Bezier de grad $n$ se poate obține din curbă Bezier de grad 1)

Dem.: $B_{P_0,\dots,P_n,P_{n+1}}(t) = \sum_{k=0}^{n} b_{n+1,k}(t) \cdot P_k$

$(1-t)\, B_{P_0,\dots,P_n}(t) + t\, B_{P_1,\dots,P_{n+1}}(t) =$

$(1-t) \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(t) \cdot P_k + t \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(t) \cdot P_{k+1} =$

$(1-t) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \cdot P_k + t \cdot \sum_{i=1}^{n+1} b_{n,k-1}(t) \cdot P_k =$

Facem schimbarea $k+1=i$ → indice de insumare mort

$C_0^n = 1$

$(1-t)^{n+1} \cdot P_0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n+1-k} \cdot P_k + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{k-1} t^k (1-t)^{n+1-k} \cdot P_k + t^{n+1} \cdot P_{n+1} =$

pt. $k = n+1$

$\underbrace{(1-t)^{n+1} \cdot P_0}_{b_{n+1,0}(t) \cdot P_0} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right]}_{C_k^{n+1}} t^k (1-t)^{n+1-k} + \underbrace{t^{n+1} P_{n+1}}_{b_{n+1,n+1}(t)} = \sum_{k=0}^{n+1} b_{n+1,k}(t) \cdot P_k$

$B_{P_0,\dots,P_n}(t) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(t) \cdot P_k$

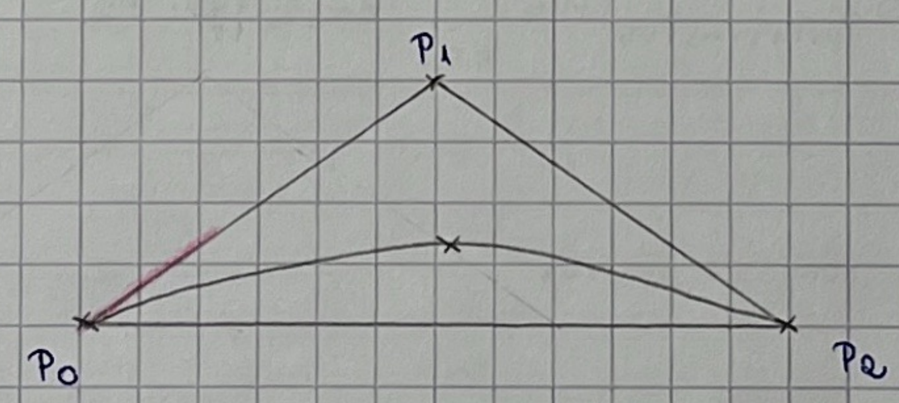
→ Orice curbă Bezier trece prin origine

$\boxed{B_{P_0,\dots,P_n}(0) = P_0}$

toate polinoamele se anulează în 0

$\boxed{B_{P_0,\dots,P_n}(1) = P_n}$

toate polinoamele se anulează în 1, mai puțin ultimul




→ învelitoarea convexă dă $\Delta P_0P_1P_2$

- dacă un punct se poate scrie ca și combinație convexă din $P_0, P_1, P_2$ ⇒ aparține $\Delta P_0P_1P_2$

→ tangenta la curba Bezier e o parabolă

(tg. la c. Bezier în $P_0$ și $P_2$ coincid cu dreptele $P_0P_1$, $P_nP_{n+1}$)

Vrem să arătăm că tangenta la curbă e aceeași cu direcția dreptei $P_0P_1$

$\vec{r}'(0) = b'_{n,0}(0) P_0 + b'_{n,1}(0) P_1$

(nu avem de la 2 încolo, în 2 derivata se anulează $t^2 = 0$ ⇒ 0 e rădăcină multiplă

$b_{n,0}(t) = (1-t)^n$

derivăm în funcție de $t$

$b_{n,1}(t) = nt\,(1-t)^{n-1}$ $\qquad t=0$

$\Rightarrow \vec{r}'(0) = -nP_0 + nP_1 = n(P_1 - P_0)$

direcția dreptei $P_0P_1 = P_1 - P_0$ $\qquad (x_1-x_0,\ y_1-y_0)$

$P_1 - P_0$ coincide cu vectorul $(x_1-x_0)\vec{i} + (y_1-y_0)\vec{j}$

panta dreptei $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$\longrightarrow 1, t, t^2, \dots, t^n$ baza standard

(Vrem să vedem cum să scriem curba Bezier)

$$B_{P_0,\dots,P_n}(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \cdot M_{n,k}$$ puncte diferite de $P_k$

$$B_n(f)(t) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(t)\, f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$B_1(f)(t) = (1-x)f(0) + xf(1)$$

$$= x(f(1)-f(0)) + f(0)$$ $\qquad f(1)-f(0)$ coef lui $x$

$$B_{n,P_1}(t) = t\,(P_1 - P_0) + P_0$$

$\longrightarrow$ Cum calculăm coef lui $t^k$ din $B_k$ ?

$\longrightarrow$ Există mai multe funcții care au același polinom Bernstein ? (DA $\forall f$ cu pct $\frac{k}{n}$)

$$B_n(f)(x) = B_n\left(L_n\left(f: 0, \tfrac{1}{n}, \dots, \tfrac{n}{n}\right)(x)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x)\, f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Scriem sub forma lui Newton

$$L_n\left(f: 0, \tfrac{1}{n}, \dots, \tfrac{n}{n}\right)(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} x\left(x-\tfrac{1}{n}\right)\dots\left(x-\tfrac{k-1}{n}\right)\left[0, \tfrac{1}{n}, \dots, \tfrac{k}{n}; f\right]$$

$$B_n(f)(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} B_n\left(x\left(x-\tfrac{1}{n}\right)\dots\left(x-\tfrac{k-1}{n}\right)\right)(x)\underbrace{\left[0, \tfrac{1}{n}, \dots, \tfrac{k}{n}; f\right]}_{\text{constanta care nu depinde de } x}$$

$$B_n\left(x\left(x-\tfrac{1}{n}\right)\dots\left(x-\tfrac{k-1}{n}\right)\right)(x) = \sum_{i=k}^{n} b_{n,i}(x)\cdot \frac{i}{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)\dots\left(\frac{i-k+1}{n}\right)\frac{(1-k)\dots 1}{(1-k)!}$$

e o pt $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots$

$$= \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \cdot \frac{i!}{(n-k)!(i-k)!}$$

$$= x^k \sum_{i=k}^{n} \frac{n!}{\cancel{i!}(n-i)!(n-k)!\cdot(i-k)!} \cdot x^{i-k}\cdot(1-n)^{n-i}$$

$$= \frac{x^k\, n!}{(n-k)!(n-k)!} \cdot \sum_{i=k}^{n} \frac{x^{i-k}(1-x)^{n-i}}{(n-i)!\,(i-k)!}\cdot(n-k)!$$ punem noi

$$= \frac{x^k \cdot n!}{(n-k)!^2} \sum_{i=k}^{n} \binom{n-k}{i-k} x^{i-k}(1-x)^{n-i}$$

BRUNNEN

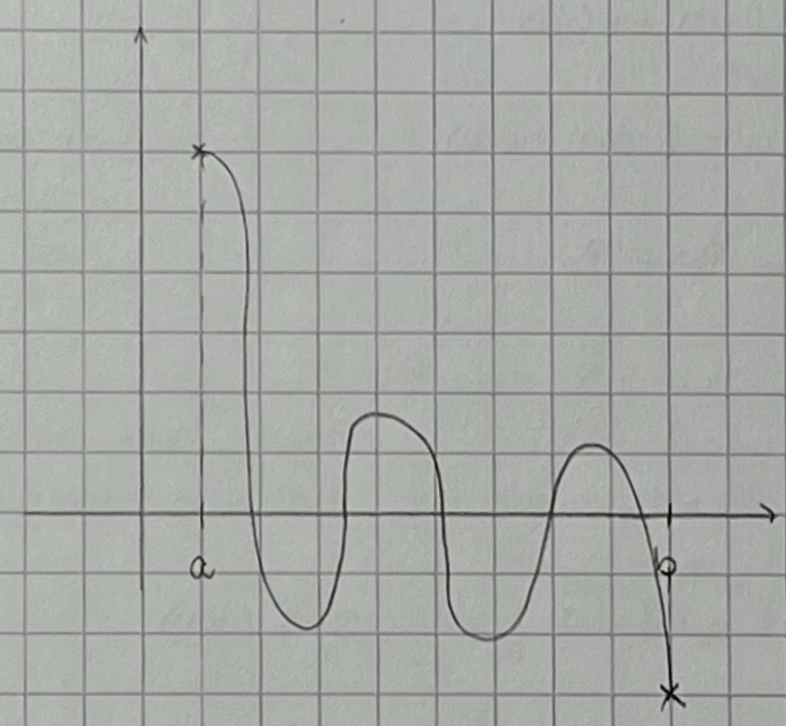
$i-k=p$

$$= \frac{x^k \cdot n!}{(n-k)!^2} \cdot \sum_{p=0}^{n-k} \binom{n-k}{p} \cdot x^p \cdot (1-x)^{n-k-p} = \frac{x^k \cdot n!}{(n-k)!^2}$$

$$B_n(f)(x) = f(0) + x^k \sum_{i=k}^{n} \frac{n!}{(n-k)!^2} \cdot \frac{1}{n^k} [0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{k}{n}; f]$$

# Metode numerice de rezolvare a ecuațiilor și sistemelor neliniare

Vrem să rezolvăm o ecuație $f(x)=0$, $f$ continuă pe $[a,b]$ (pentru $n \geq 5$ nu se pot găsi formule de rezolvare prin radical




→ dacă $f$ e continuă pe $[a,b]$ și $f(a) \cdot f(b) < 0$ ⇒ avem numar impar de soluții pe $[a,b]$
(cel puțin o rădăcină)

$f$ derivabilă și putem rezolva

$f'(x)=0$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| rădăcinile derivabile | $a$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_p$ | $b$ |

$f'(x_0)=0$, $k=\overline{1,p}$

| | $a$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_p$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | + | − | − | | |

nr. de schimbări de semn = nr. de soluții

strict monotonă și $f(a) \cdot f(b) < 0$ ⇒ o singură soluție

Exemplu:

$f(x) = x^3 + x - 1000 = 0$

$3x^2+1$

$+\infty \to +\infty$

$-\infty \to -\infty$

$f(10) > 0$

$f(9) = 729 + 9 - 1000 < 0$

rădăcina e în intervalul $(9, 10)$

| $f(9)$ | $f(10)$ |
|---|---|
| − | + |

$\frac{19}{2}$ dacă $f(\frac{19}{2}) > 0 \Rightarrow$ rădăcina se găsește în $(9, \frac{19}{2})$ (împărțim în 2)

$f(\frac{37}{4}) < 0 \Rightarrow$ rădăcina se găsește în $(\frac{37}{4}, \frac{19}{2})$

Avem $[a, b]$

Notăm $a_0 = a$, $b_0 = b$ $\quad f(a) < 0$
$f(b) > 0$

$\frac{a+b}{2}$ dacă $f(\frac{a+b}{2}) < 0 \Rightarrow a = \frac{a+b}{2}$

șir $x_n, \dots, |x_n - x| < \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \qquad 2^n > \frac{b-a}{\varepsilon}$

$n = (\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}) + 1$

**Def.**: (ține de cât de repede converge un șir la limita sa)

Fie șirul $x_n \to x$ (care converge la $x$ număr fixat) spunem că șirul $x_n$ are rapiditatea de convergență $p$, $p \in \mathbb{R}^+$ dacă

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{x_n - x}{(x_{n+1} - x)^p} = c} \qquad \text{unde } c > 0$$

Șirul $x_n$ are rapiditatea cel puțin $p$ dacă

$$\exists M > 0 \text{ a.î. } \boxed{|x_n - x| \leq M |x_{n+1} - x|^p}$$

cu cât $p > 0 \Rightarrow$ șirul se aproprie mai repede de limită

$$|x_n - x| \leq M |x_{n+1} - x|^4 \cdot 4$$

Metoda înjumătățirii are rapiditatea de convergență 1.

$$\frac{|x_{n+1} - x|}{|x_{n+1} - x|} \leq 2 \cdot (b-a)$$

Vrem să rezolvăm o ecuație prin șiruri, fără să știm limita.

## Teorema de punct fix a lui Banach

Fie $(X, d)$ un spațiu metric, complet (adică $\forall$ șir fundamental $x_n$ e convergent sau are limită în $x$).

Fie $T: X \to X$, $T$ operator, $T$ s.n. contracție dacă $\exists L \in (0, 1)$ a.î.

$$\boxed{d(Tx, Ty) \leq L\, d(x, y)}$$

BRUNNEN

Dacă $T$ este o contracție atunci $T$ are un singur punct fix

$$\boxed{\exists!\, x^* \in X \quad T \cdot x^* = x^*}$$

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \quad , \quad x_{n+1} = T \cdot x_n \quad , \quad x_0 \in X$$

$$d(x_n, x^*) \leq L^n \cdot \frac{d(x_0, x_1)}{1-L} \leq \varepsilon$$

Exemplu: $x^3 + x - 1000 = 0$

$$\left[ \; x = f(x) \qquad |f(x) - f(y)| = |x-y| \cdot |f'(c)| < |x-y| \cdot \| f' \| \; \right]$$

dacă $\| f' \| < 1 \Rightarrow$ contracție

$x = 1000 - x^3$ nu ajută

$x^3 = 1000 - x$

$x = \underbrace{\sqrt[3]{1000-x}}_{f(x)}$ e bună

$T(x) = \sqrt[3]{1000-x}$

Vrem să vedem dacă norma $< 1$

$$|f'(x)| = \left| -\frac{1}{3\sqrt[3]{(1000-x)^2}} \right| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1000-x)^2}} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{990^2}} < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{81} = \frac{1}{243}$$

# Curs 8

reamintim $f(x) = 0$, $T: (X, d] \to x$, $Tx^* = x^*$

$d(Tx, Ty) \leq L\, d(x, y)$ $L \in (0,1)$

$x_{n+1} = Tx_n$, $x_0 \in X$, $d(x_n, x^*) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1)$

Fie un şir de nr. reale $x_n \to x$ (care are limita $= x$, spunem că şirul are rapiditatea de convergenţă $p$, $p > 0$ dacă:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - x|}{|x_n - x|^p} = A > 0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{|x_{n+1} - x| \leq M |x_n - x|^p}$$

$\longrightarrow$ cu cât $p$ este mai mare cu atât şirul converge mai rapid la limită

Exemplu: Metoda înjumătăţirii $f(x) = 0$, vrem să determinăm $x^* \in (a, b)$ cu aproximare dată înainte

distanţele $x^* - a$, $b - x^* < b - a$

$(a, \frac{a+b}{2})$

$a_1$ $b_1$

$\frac{b-a}{2}$

$\frac{b-a}{2^2}$

la pasul $n$

$$|x_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} = \frac{1}{2}$$

metodă de convergenţă liniară

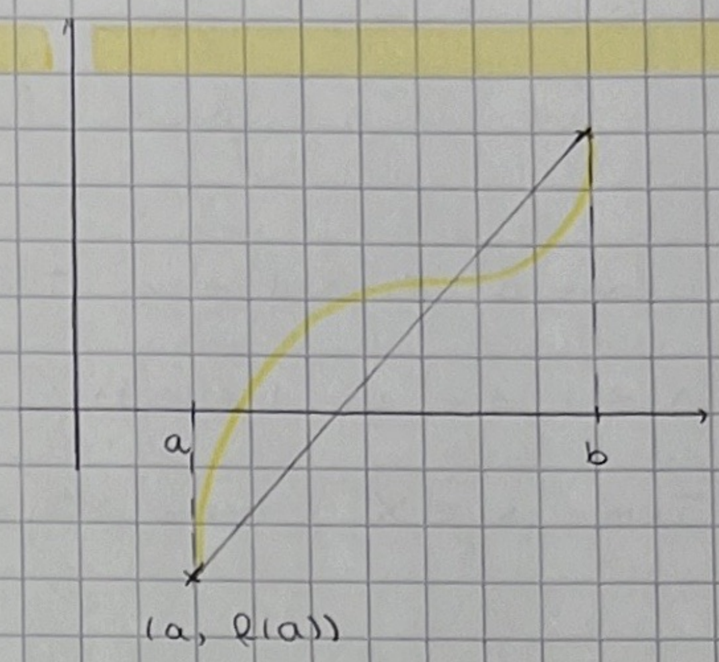
metodă de convergenţă de ordine $p$

# Metoda falsei poziții

$f(a) < 0$ , $f(b) > 0$

$a = a_1$ $\quad b = b_1$

iau polinomul lui Lagrange care interpolează în $a_1, b_1$




$$L_1(f; a_1, b_1) = \frac{x - a_1}{b_1 - a_1} f(b_1) + \frac{b_1 - x}{b_1 - a_1} f(a_1) = 0$$

intersectăm cu axa $Ox$

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} f(b_1) + \frac{b_1 - x}{b_1 - a_1} f(a_1) = 0$$

$\frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1}$ diferența divizată pe $a_1, b_1$

$$x[a_1, b_1 : f] = \frac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{b_1 - a_1}$$

$$x[a_1, b_1 : f] = \frac{a_1 (f(b_1) - f(a_1))}{b_1 - a_1} + \frac{(a_1 - b_1) f(a_1)}{b_1 - a_1}$$

$$\Rightarrow x_1 = a_1 - f(a_1) \cdot \frac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)}$$

$a_2 = x_1$

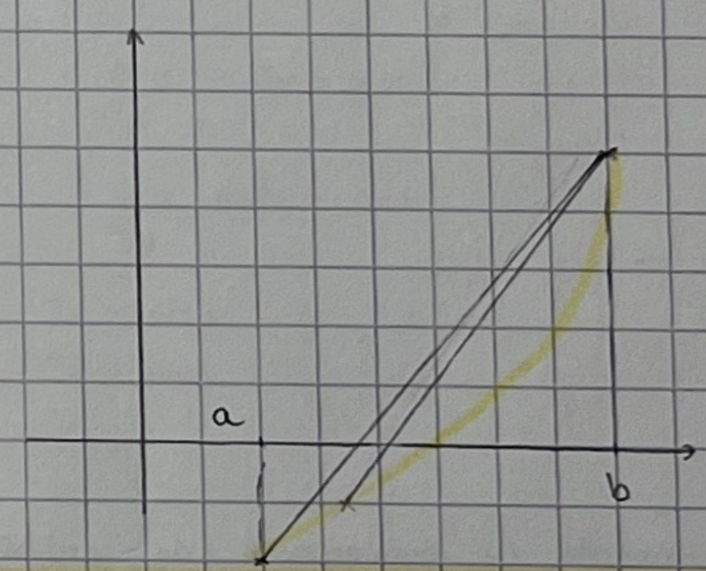
$b_2 = b_1$

$$\boxed{x_m = a_m - f(a_m) \frac{b_m - a_m}{f(b_m) - f(a_m)}}$$

Ordinul de convergență este tot 1.

pp. că $f$ este convexă pe $(a, b)$

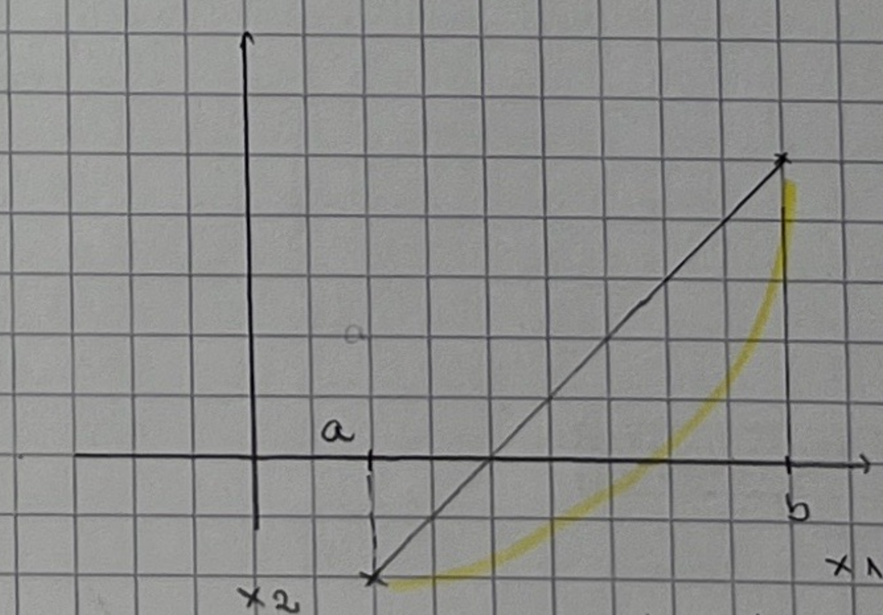
$$\boxed{x_{m+1} = x_m - f(x_m) \cdot \frac{b - x_m}{f(b) - f(x_m)}}$$




# Metoda Coardei

$$\boxed{x_{m+1} = x_m - f(x_m) \frac{x_{m-1} - x_m}{f(x_{m-1}) - f(x_m)}}$$

Ordinul de convergență este $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$




intersecția

# Metoda lui Newton

Pp că $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f$ derivabilă, $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in[a,b]$, $f$ monotonă, derivata a 2-a nu schimbă semnul $\Rightarrow f''(x)\neq 0$

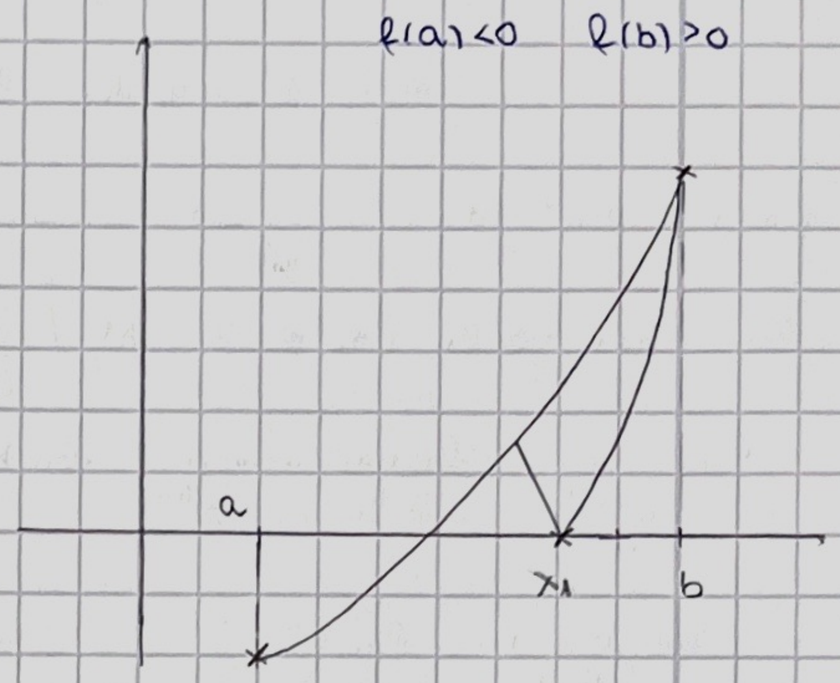
$x_{n+1}$ $\quad (x_n, f(x_n))$

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x-x_n)$$

$$y=0 \Rightarrow -f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)$$

$$x_{n+1}-x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ x_0=b} \quad (1)$$




$\longrightarrow$ duc tangenta din $b$ în $x_0$ și $\cap\, Ox$

$\longrightarrow$ $(x_1, f(x_1))$ duc tangenta la curbă și $\cap\, Ox$ în $x_2$

$\longrightarrow$ în $(x_2, f(x_2))$ duc tangenta la curbă ...

Converge la $f(x)=0$?

Presupunem că $x_n$ e convergent

$x_n \to x^*$

$x_{n+1}\to x^*$

vrem să arătăm că $\Rightarrow f(x^*)=0$

Din (1) $\Rightarrow \cancel{x^*} = \cancel{x^*} - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} \Rightarrow f(x^*)=0$ dacă converge

F lui Taylor $f(x^*) = f(x_n) + (x^*-x_n)f'(x_n) + \frac{(x^3-x_n)^2}{2}\cdot f''(\theta_n)$

restul Taylor cu F lui Lagrange

$\theta_n$ cuprins între $\min(x_n, x^*)$ și $\max$.

( $f'\neq 0 \Rightarrow f$ NU are mai mult de o soluție

$f$ strict monotonă și injectivă $\Rightarrow$ nu poate să se anuleze decât într-o soluție )

$$0 = \underbrace{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x^*-x_n}_{\text{vreau să îi evaluez}} + \frac{(x^*-x_n)^2}{2}\cdot\frac{f''(\theta_n)}{f'(x_n)}$$

am nevoie de câtul $\frac{x^*-x_n}{(x^*-x_n)^2}$ pentru a determina ordinul de convergență

$$0 = -x_{n+1} + x^* + (x^*-x_n)^2\cdot\frac{f''(\theta_n)}{2f'(x_n)}$$

$$|x_{n+1}-x^*| = \left|\frac{x^*-x_n}{2}\right|^2\cdot\frac{|f''(\theta_n)|}{|f'(x_n)|}$$

$$\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|f''(\theta_n)|}{|f'(x_n)|}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|f''(x^*)|}{|f'(x^*)|} \qquad x_n<\theta_n<x^*$$

BRUNNEN

$$\frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{\|f''\|}{m_1} = \frac{1}{2} \frac{M_2}{m_1} M$$

unde $M_2$ e norma lui $f''$

$m_1$ e minimul lui $f'$ pe intervalul $[a,b]$

$$\Rightarrow e_{n+1} \le e_n^2 \cdot M$$

$$\ln e_{n+1} - 2 \ln e_n \le \ln M \;/ \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{\ln e_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\ln e_n}{2^n} \le \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \ln M$$

$$\frac{\ln e_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{\ln e_k}{2^k} \le \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \ln M$$

$$\frac{\ln e_n}{2^n} - \frac{\ln e_0}{2^0} \le \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\cancel{\frac{1}{2}}} \cdot \ln M$$

$$\frac{\ln e_n}{2^n} \le \ln e_0 + \ln M^{1 - \frac{1}{2^n}}$$

$$e_n \le \ln e_0^{2^n} \cdot M^{2^n - 1}$$

$$|x_n - x^*| \le \frac{(x_0 - x^*)^{2^n} \cdot M^{2^n}}{M}$$

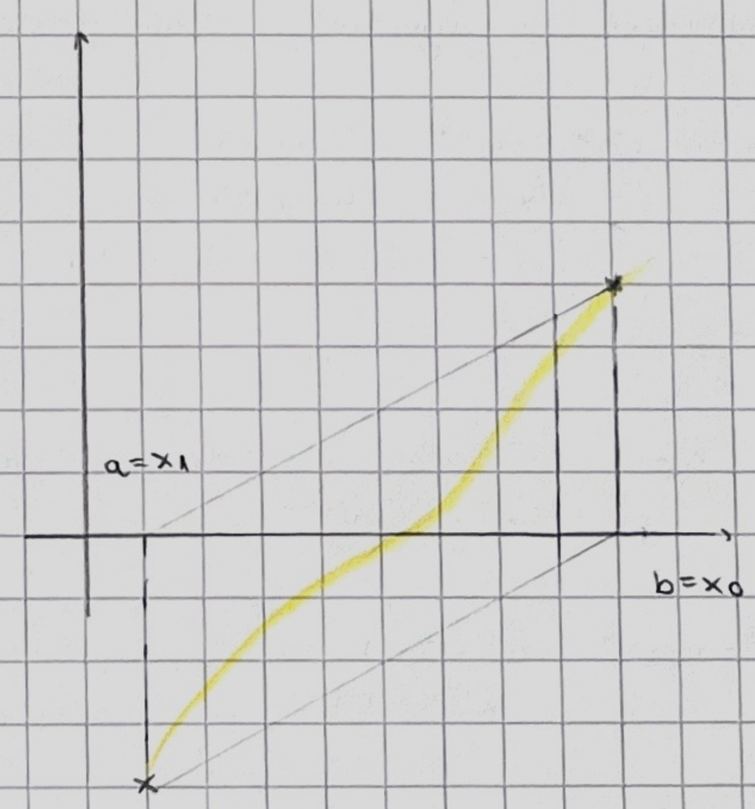
$$\Rightarrow (|x_0 - x^*| \cdot M)^{2^n} \longrightarrow 0$$

$$M^{2^n} \longrightarrow 0$$

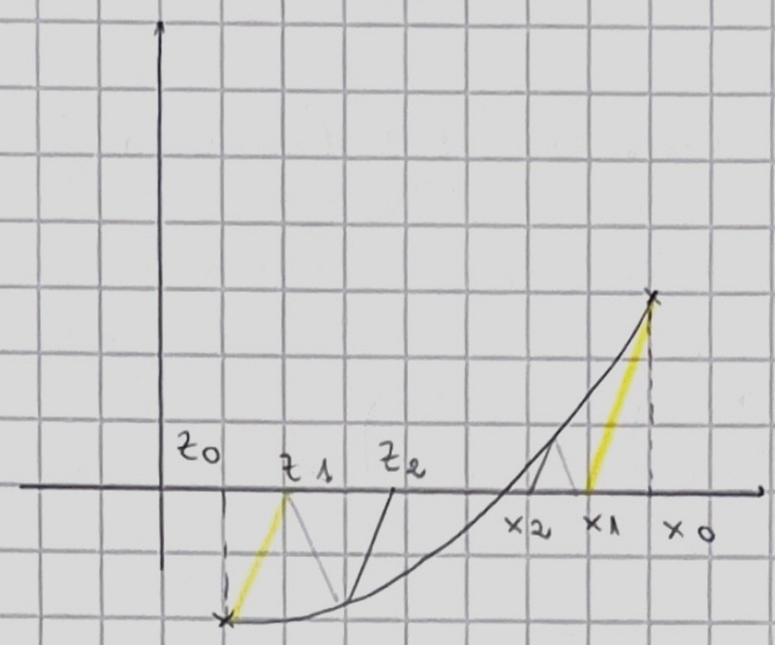
$$\frac{\|f'\|^{2^n}}{m^{2^n}} \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ Ordinul de convergenţă este 2.

pp că $f$ e crescătoare dar nu convexă



# Metoda Newton-Fourier




din $x_1$ tg la curbă
$z_0 \parallel$ la tg și $\cap Ox \Rightarrow z_1$

$y - f(z_m) = f'(x_m)(x - z_m)$

$f(z_m) - f'(x_m)|z_{m+1} - z_m|$

Metoda se folosește mai ales când $f$ e convexă sau concavă pe intervalul în care am localizat rădăcina.

$$\boxed{z_{m+1} = z_m - \frac{f(z_m)}{f'(x_m)}}$$

procedeu de oprire

$\varepsilon \rightarrow$ eroarea pentru care calculez rădăcina $|z_{m+1} - z_m| < \varepsilon$

# Sisteme de ecuații liniare

Sistem cu 2 ecuații și 2 necunoscute

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$$ nu e liniar

p.p. $f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

p.p. că funcția vectorială $F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ e diferențiabilă și are derivata inversabilă

($\subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ val de forma $(x_{m+1}, y_{m+1})$)

$$0 \simeq f_1(x_{m+1}, y_{m+1}) = f(x_m, y_m) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_m, y_m)(x_{m+1} - x_m) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_m, y_m)(y_{m+1} - y_m)$$

dezvoltăm cu F. lui Taylor

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_m, y_m)(x_{m+1} - x_m)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_m, y_m)(y_{m+1} - y_m)\right.$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_m, y_m)(y_{m+1} - y_m)^2$$

$$0 = (x_{m+1} - x_m)\frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_m, y_m) + (y_{m+1} - y_m)\frac{\partial f_1}{\partial y}(x_m, y_m) \quad \Big/ \frac{\partial f_2}{\partial x_m}$$

$$0 = (x_{m+1} - x_m)\frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x_m, y_m) + (y_{m+1} - y_m)\frac{\partial f_2}{\partial y}(x_m, y_m)$$

$$\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ y_{m+1} \end{pmatrix} = \left(F'(x_m, y_m)\right)^{-1} \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

M. lui Newton

$$f(x_{m+1}) = f(x_m) + (x_{m+1} - x_m)\cdot f'(x_m) + \cancel{(x_{m+1} - x_m)^2 \cdot f''(x_m)}$$

$$0 = f(x_m) + (x_{m+1} - x_m) f'(x_m)$$

$$0 = \frac{f(x_m)}{f'(x_m)} + x_{m+1} - x_m$$

$$X_{m+1} = X_m - \underset{(1,2)}{F(x_m, y_m)} \underset{(2,2)}{\left[F'(x_m, y_m)\right]^{-1}}$$

Dacă $X_m$ e o matrice linie coloană $\Rightarrow$ și $F$ este linie coloană

în 15 ianuarie examen

# Curs 9

# Sisteme de ec liniare

Rezolvare numerică

(1) $Ax = b$ A matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$

x vector coloană $x = (x_1 \dots x_n)^t$

b vector coloană $b = (b_1 \dots b_m)^t$

## Teoremă

Sistemul de ecuații (1) are soluții dacă și numai dacă

$$\boxed{\text{rang}A = \text{rang}(A, b)}$$

matricea extinsă

- dacă $m = n$ -

-

-

Ex.: 2 necunoscute $x, y$, $n$ ecuații, vrem să determinăm

$$\begin{cases} ax + by = c_1 \\ ax + by = c_2 \\ \dots \\ ax + by = c_n \end{cases}$$

(care sunt cele mai bune valori pentru a și b a.î. x=... și y=...)

Metoda celor mai mici pătrate

$$\sum_{i=1}^{n} (ax + by - c_i)^2 = F(a,b)$$

(dacă toate sunt verificate suma este 0)

(cele mai bune valori sunt cele pentru care $F(a,b)$ e cea mai mică)

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

pentru a găsi minimul găsesc punctele staționare și determin a și b

(sau x și y dacă $F(x,y)$)

BRUNNEN

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pătratică

sistem Crammer $\det A \neq 0 \Rightarrow x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}$ $i = \overline{1, n}$

(câte permutări pot să am $\Rightarrow$ atâți termeni în determinant)

pentru $n$ termeni $\Delta = n!$

$n+1$ termeni $\Delta = n! \, (n+1)(n+1)!$

(pentru mai mult de 10 ecuații Crammer nu se poate aplica)

**Def.**

O matrice L s.n. inferior triunghiulară dacă deasupra diagonalei principală toate elementele sunt 0.

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n+1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad L = [a_{ij}] \quad \begin{matrix} a_{i,j} \\ j \geq i \end{matrix}$$

$Lx = b$ $\qquad a_{11} x_1 = b_1$

$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2$

$\vdots$

$(a_{n1} \cdot x_1) + (a_{n2} \cdot x_2) + \dots + (a_{nn} \cdot x_n) = b_n$

Pentru soluție unică trebuie ca toate elementele de pe diagonala principală să fie $\neq 0$

$$L = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

**Def.**

O matrice U s.n. superior triunghiulară dacă toate elementele de sub diagonala principală sunt egale cu 0.

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\underset{\neq 0}{a_{nn}} \cdot x_n = b_n$ $\qquad a_{nn-1} \cdot x_{n-1} + a_{nn} \cdot x_n = b_{n-1}$

## Factorizare L,U

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pătratică s.n. *factorizare L,U* a matricei o scriere $\boxed{A = L \cdot U}$ unde L este matrice inferior triunghiulară și U este matrice superior triunghiulară.

$Ax = b$ $\qquad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$L \cdot U \cdot x = b$

Notez $U \cdot x = y$ $\quad y$ vector coloană

$y = (y_1, \dots, y_m)^t$

$L \cdot y = b$

$U \cdot x = y$
matricea e superior triunghiulară

## Teoremă

Matricea $A$ poate fi factorizată sub forma $L \cdot U$ dacă și numai dacă

$D(i) \neq 0$ pentru $\forall\, i = \overline{1, m}$ unde $D(i)$ e determinantul de ordinul $i$

format cu primele $m$ linii și $m$ coloane ale matricei $A$

$D(1) = a_{11}$ $\qquad D(2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$(X, \| \ \|)$
spațiu normat

Fie $X$ un spațiu vectorial, $\mathbb{C}$, dacă definim pe $X$ o normă $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$

și $\| \cdot \|$ îndeplinește condițiile:

a) $\forall x \in X$, $\|x\| \geq 0$ $\qquad$ a') $\|x\| = 0 \iff x = 0$

b) $\forall r \in \mathbb{C}$, $\forall x \in X$ $\quad \|rx\| = |r| \cdot \|x\|$

c) $\forall x, y \in X$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ inegalitatea triunghiului

$\Longrightarrow$ atunci $\| \cdot \|$ s.n. **normă** pe $X$, iar $(X, \| \ \|)$ **spațiu vectorial normat**

$\longrightarrow$ $d(x, y) = \|x - y\|$ este distanța generată de normă

$\longrightarrow$ $d(x, y) \geq 0$ $\qquad d(x, y) = 0$ daca $x = y$

$\longrightarrow$ simetrică

$\longrightarrow$ $\forall x, y, z$ $\quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

$\longrightarrow$ Ce înseamnă $x_n \to x$

$x_n \in X$ $\qquad \boxed{x_n \to x} \iff$ am $d(x_n, x) = \|x_n - x\| \to 0$

când $n \to \infty$

$\longrightarrow$ șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in X$, șirul s.n. fundamental dacă

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists H_\varepsilon$ a.î. $\forall n > H_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$

$\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$

BRUNNEN

Spațiul vectorial normat $(X, \| \|)$ s.n. spațiu Banach dacă orice șir fundamental este convergent și are limită în $X$.

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ spațiu particular

$$\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$ pt. $x = 0 \Rightarrow 0$

dacă $p = 1 \Rightarrow \| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$p = 2 \Rightarrow \| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

! șterg modulul doar dacă sunt în $\mathbb{R}^n$

$\| \|_2$ $p = 2$ valoarea pentru care norma provine dintr-un produs scalar

$$\| x \|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $y \in (y_1, \dots, y_n)$ $x_i, y_i \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i}}$$

$\overline{y_i}$ conjugatul

pentru $\mathbb{R}^n$ fără $-$

$$\| x \|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

În mulțimea matricilor

$(\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}), +, \cdot)$ formează un spațiu vectorial

dimensiunea spațiului vectorial: $n \times n$

o bază a spațiului

Notez cu $E_{i,j}$ matricea care are toate elementele 0 inafară de pe elem. de pe $i,j$

$$E_{i,j} = \begin{array}{c} \\ i \\ i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\sum_{\substack{i=1,n \\ j=1,n}} a_{i,j} \cdot E_{i,j} = 0 \qquad E_{11} \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1}, & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Putem să definim norme pe mulțimea matricilor $\mathbb{C}^k$ unde $k = n \times n$

**Def.:**

Fie $A$ o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,m}$ s.n. normă de operator

$$|||A||| = \max_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_2$$

$x$ vector coloană $x \in (x_1, \dots, x_m)^t$ $m$ linii

$A \cdot x$ vector coloană $m$ linii

$(m = n)$

**Propoziție**

$$|||A||| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|$$

văd pe $\frac{1}{\|x\|}$ ca un $\lambda$ pozitiv

Notez cu $y = \frac{x}{\|x\|}$, $\|y\| = 1$ $\left( \|y\| = \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1 \right)$

$$= \max_{\|y\| = 1} \|A \cdot y\|$$

Vreau să arăt că $|||A|||$ normă

→ pozitivă

→ dacă $|||A||| = 0 \Rightarrow A = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, \dots & a_{1n} \\ a_{21}, \dots & a_{2n} \\ \dots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{11} = 0, \; a_{21} = 0 \dots$$

baza standard

→ $$|||A + B||| = \max_{x \neq 0} \frac{\|(A+B) \cdot x\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x + B \cdot x\|}{\|x\|} \leq \max_{x \neq 0} \left( \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|} + \frac{\|B \cdot x\|}{\|x\|} \right)$$

$$= |||A||| + |||B|||$$

**Prop.:** $|||A||| = \max_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|} \Rightarrow \|Ax\| \leq \|x\| \cdot |||A|||$

**Def.:** $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pătratice s.n. normă matriceală pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o normă care verifică proprietatea $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$|||A \cdot B||| \leq |||A||| \cdot |||B|||$$

Atenție Nu orice normă pe $\mathcal{M}_n$ e o normă matriceală

**Teoremă** Norma de operator e o normă matriceală.

BRUNNEN

Dem.: $$|||A \cdot B||| = \max_{x \neq 0} \frac{\|(A \cdot B)(x)\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|A(B \cdot x)\|}{\|B \cdot x\|} \cdot \frac{\|B \cdot x\|}{\|x\|} \leq |||A||| \cdot |||B|||$$

**Def.**

Fie o normă pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matricală, norma matricală s.n. compatibilă cu norma vectorială dacă are loc inegalitatea

$$\|A \cdot x\| \leq |||A||| \cdot \|x\|$$

Vrem să vedem cât de mare este norma lui A

Reamintim

A , $\lambda \in \mathbb{C}$ valoare proprie dacă $\exists\, x \neq 0$ a.î.

$A \cdot x = \lambda \cdot x$ x vector propriu

(valorile proprii = soluțiile ec. algebrice) $\Rightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$

**Def.**

Mulțimea tuturor valorilor proprii ale matricei A s.n. spectrul lui A.

S.n. rază spectrală a matricii A

$\rho_A = \max(|\lambda_1| \dots |\lambda_n|)$ unde $\lambda_k$ sunt valorile proprii

sau elementele din spectrul matricii

$|||\ |||$ compatibilă cu norma vectorială

Fie $\rho_A$ raza spectrală a lui A , x vector propriu corespunzător razei

$$A \cdot x = \rho_A \cdot x \xRightarrow[\text{vectorială}]{\|\ \|} \|\rho_A \cdot x\| = \|A \cdot x\| \leq |||A||| \cdot \|x\|$$

$$\Leftrightarrow \rho_A \|x\| \leq |||A||| \cdot \|x\| \Rightarrow \rho_A \leq |||A||| \leq \rho_A + \varepsilon$$

$/ : \|x\|$

$x \neq 0$

$\|x\| \neq 0$

Se arată că inegalitatea încercuită nu poate fi îmbunătățită

$\varepsilon > 0$ , $|||\ |||_\varepsilon$ a.î. $|||A|||_\varepsilon \leq \rho_A + \varepsilon$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Care e norma de operator indusă cu norma cu $p=1$?

$$|||A|||_1 = \max_{\|x\|_1} \|A \cdot x\|_1 \qquad A = (a_{i,j}) \quad i,j = \overline{1,n}$$

vector $x = (x_1 \dots x_n)^t$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1 \qquad A \cdot x = (y_1, y_2 \dots y_n)^t$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j$$

vreau să evaluez $\sum_{i=1}^{n} |y_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \cdot |x_j|$

$$= \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |x_i|}_{1} \cdot \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} (a_{i,j})$$

$$= \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$$

$$\Rightarrow |||A|||_1 \leq \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$$

Fie $j_0$ acea valoare a lui $j$ pentru care maximul e atins

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_{i,j_0})$$

$$j_0 \quad (0 \ldots \overset{j_0}{1}, 0 \ldots 0)^t$$

$(x_{j_0} = 1)$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots |x_n|) = |x_1|$$

$$\|x\|_p = |x_1| \left( 1 + \sum_{i=2}^{n} \left( \frac{|x_i|}{|x_1|} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow |x_1|$$

pot tinde ori la 0 ori la 1

# Curs 10

reamintim

→ $A \cdot x = b$ , $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pătratică

dimensiunea > 3

→ $|||\ \ |||$ normă de matrice

→ $|||A \cdot B||| \leq |||A||| \cdot |||B|||$

normă de operator $|||A||| = \max\limits_{\|x\|=1} |||A \cdot x||| = \max\limits_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|}$

→ $|||A \cdot x||| \leq |||A||| \cdot \|x\|$

$|||\ \ |||_1$ $\quad \underbrace{|||A|||_1 \geq \rho(A)}_{\text{cea mai mică}}$ unde $\rho(A)$ = raza spectrală $= \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$

$|||\ \ |||_\infty$

$\varepsilon > 0$ , $|||\ \ |||_\varepsilon$ $\quad |||A|||_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon$

→ $d(A, B) = |||A - B|||$

→ şir de matrici $A^k$ , când $\lim A^k = O_n$

condiţia necesară şi suficientă ?

$|||A^k - O_n||| = |||A^k||| \leq |||A^k||| \longrightarrow 0$

(şir $A^k$

$\lim\limits_{k \to \infty} A^k = 0$ dacă şi numai dacă $|A| = 0$)

## Teorema

Fie $A$ o matrice pătratică şi fie $B = I - A$ dacă $|||A||| < 1$ atunci matricea $B$ e inversabilă

şi are loc egalitatea:

$$\boxed{(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k}$$

seria geometrică generalizată

$I$ e de ordin $n$
matrice unitate

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

în complex

$(1-z)^{-1}$

Dem.: Notăm $S_k = \sum_{i=0}^{k} A^i$ şir

suma parţială a seriei

$$(I-A)\left(\sum_{i=0}^{k} A^i\right) = \sum_{i=0}^{k} A^i - \sum_{i=0}^{k} A^{i+1} = I - A^{k+1}$$

din ipoteză $|||A||| < 1$

$A^{k+1} \longrightarrow O_n$ $\quad (I-A)\sum_{i=0}^{k} A^i = I - A^{k+1}$ tinde la matricea nulă $\quad / \lim_{k\to\infty}$

$$\Rightarrow (I-A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = I$$

$$\Rightarrow (I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad (*)$$ pot obţine o evaluare a normei

Corolar $\boxed{|||A||| < 1 \Rightarrow |||(I-A)^{-1}||| < \frac{1}{1-|||A|||}}$

Dem.:

din $(*) \Rightarrow |||(I-A)^{-1}||| = \left|\left|\left|\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right|\right|\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} |||A^k||| \le \sum_{k=0}^{\infty} |||A|||^k$

$z = |||A||| \Rightarrow \quad = \frac{1}{1-|||A|||}$

Cum arăt că A e inversabilă?

$A = I - \underbrace{(I-A)}_{B} = I - B \qquad |||I - A||| < 1 \Rightarrow A$ inversabilă

$|||B||| < 1 \Rightarrow I - B$ inversabilă

şi are loc egalitatea $A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I-A)^k$

---

$Ax = b$ $\quad$ A pătratică, sistemul are soluţie unică $\Rightarrow$ A inversabilă (det $\neq 0$)

→ construiesc un şir

$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots x_n^{(k)})^t$ x matrice coloană

→ găsesc un $x^{(k)}$ a.î. diferenţa dintre soluţia exactă x şi $x^k$ < eroarea $\varepsilon$

$$|||x - x^k||| < \varepsilon$$

→ scriu A ca sumă de 3 matrici

$A = L + D + U \qquad D = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad D = [a_{ii}]_{i=\overline{1,n}}$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$ matrice inferior triunghiulară

BRUNNEN

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Pp. că $a_{ii} \neq 0 \quad \forall\, i = \overline{1,n}$

$Ax = b$

$(L+D+U)x = b$

$Dx = b - (L+U)x$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$D = [a_{ii}] \quad i = \overline{1,n} \qquad D^{-1} = \left[\frac{1}{a_{ii}}\right] \quad i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow x = D^{-1}[b - (L+U)x]$

$x = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{\text{matrice}}x + \underbrace{D^{-1}b}_{\text{termen care nu depinde de } x}$ !

$(x^{(k)})\ k \in \mathbb{N} \quad x^{k+1} = D^{-1}(-(L+U))x^{(k)} + D^{-1}\cdot b$

## Metoda Jacobi

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}\cdot x_i^{(k)} + b_i}{a_{ii}}} \qquad x^{k+1} = \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ \vdots \\ x_i^{k+1} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} \end{pmatrix}$$

$Ax = b \qquad (I-T)x = c$

$x = Tx + C \qquad A = I - T$

$\boxed{x^{k+1} = Tx^{k} + C}$ ** → când un șir e construit astfel e convergent

$(x = Tx + C)$

$\lim_{k\to\infty} x^{k+1}$ există și e egal cu $x$

$\forall$ ar fi condiția inițială $x^0$

→ trebuie ca șirul $x = Tx$ să aibă soluție unică

$x^{k+1} = Tx^{k} \rightarrow$ să convearga la soluția nulă

$(I-T)x = 0 \Rightarrow (I-T)^k x = 0$

$(I-T)^k \longrightarrow O_n$ când $k \to \infty$

când $|||I - T||| < 1$

Trebuie să existe $|||T||| < 1$

$x^1 = T\cdot \underset{\text{oarecare}}{x^0} \qquad x^2 = T\cdot x^1 = T^2\cdot x^0 \dots x^{k+1} = T^{k+1}\cdot x^0$

e necesar și suficient ca $|||T^{k+1}||| \longrightarrow 1$

$0 < \|x^{k+1}\| = \|T^{k+1}\|\cdot x^0 \leq |||T|||^{k+1}\cdot \|x^0\| \Rightarrow$ din clește $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = 0$

M. Jacobi $x^{k+1} = \underbrace{D^{-1}(-(L+U))}_{T} x^{(k)} + D^{-1} b$

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \, x_i^{(k)} + b_i$$

## Def

Fie A o matrice cu elementele $[a_{ij}]_{\mathbb{C}}$ $i=\overline{1,n}$

A s.n. dominantă pe linii dacă

$$\boxed{|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|} \qquad |a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|$$

A s.n. dominantă pe coloană dacă

$$\boxed{|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |a_{k,i}|} \qquad |a_{11}| \leq |a_{21}| + |a_{31}| + \dots + |a_{n1}|$$

s.n. strict diagonal dominantă (pe linii sau pe coloane) dacă

avem $>$ fără egal
$\geq$

Metoda Jacobi converge pentru matrici strict dominante.

$$\frac{|a_{1,2}| + |a_{1,3}| + \dots + |a_{1,n}|}{|a_{ii}|} < 1$$

Dacă matricea $T = D^{-1}(-(L+U)x^{(k)})$ e strict diagonal dominantă pe linii

$|||T|||_\infty < 1$ atunci șirul $x^k$ (Jacobi) e convergent $\forall$ ar fi punctul de pornire $x_0^0$.

## Metoda Gauss-Seidel

$Ax = b$

$(L+D+U)x = b \qquad (L+D)x = b - Ux$

$(L+D)x^{k+1} = b - U \cdot x^k \iff Lx^{k+1} + Dx^{k+1} = b - U \cdot x^k$

$D \cdot x^{k+1} = -Lx^{k+1} - Ux^k + b$

pp. că $a_{ii} \neq 0$ pentru $i = \overline{1,n}$ $\Rightarrow$ D are inversă

$\Rightarrow x^{k+1} = D^{-1}(-Lx^{k+1} - Ux^k + b)$

$$\boxed{x_i^{k+1} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ii} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ii} \cdot x_j^{(k)} + b_i}{a_{ii}}}$$

de la i încolo toate elementele lui L sunt 0

Metoda e mai avantajoasă deoarece se folosesc deja $x^{k+1}$ calculate $(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots x^{k+1})$

$x^{(k-1)} - x^{(k)}$ $\qquad x = Tx + b \qquad x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + b$

$x^{(1)} - x^{(0)} = Tx^0 + b - x^0 = (T - I)\, x^0 + b$

$x^{(2)} - x^{(1)} = Tx^1 - Tx^0 = T^2 x^0 + Tb - Tx^0 = (T^2 - T)\, x^0 + Tb$

$x^{(3)} - x^{(2)} = Tx^2 + b - Tx^1 + b = T\,(x^2 - x^1) = T\,(x^1 - x^0)$

$x^2 = Tx^1 + b$

$x^1 = Tx^0 + b$

$$\boxed{x^{k+1} - x^k = T^k\,(x^1 - x^0)}$$

$x^{k+p} - x^k = (x^{k+p} - x^{k+p-1}) + (x^{k+p-1} - x^{k+p-2}) + \dots + (x^{k+1} - x^k)$

$\| x^{k+p} - x^k \| = \| (T^{k+p-1} + T^{k+p-2} + \dots + T^k)(x^1 - x^0) \|$

$\leq \| T^{k+p-1} + T^{k+p-2} + \dots + T^k \| \cdot \| x^1 - x^0 \|$

$= \| T^k (I + T + \dots + T^{p-1})(x^1 - x^0) \|$

$p \to \infty \Rightarrow k + p \to \infty \Rightarrow x^{k+p} \to x$ soluția sistemului

$\| x^k - x \| \leq \| \underbrace{T^{(k)}}_{A} \underbrace{(I - T)^{-1}}_{B} \| \cdot \| x^{(1)} - x^{(0)} \|$ $\qquad$ suma parțială a seriei $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$

$\leq \| T^{(k)} \| \cdot \| (I - T)^{-1} \| \cdot \| x^1 - x^0 \|$

$\leq \dfrac{\| T \|^k}{1 - \| T \|} \cdot \| x^1 - x^0 \|$

$\| x^{k+1} - x^k \| = \| T^k (x^1 - x^0) \| \leq \| T^k \| \cdot \| x^1 - x^0 \|$ $\qquad \to 0$ când $k \to \infty$

$\| x^{k+1} - x^k \| < \varepsilon$

altă metodă

$A = M - N$, $M, N$ matrici pătratice

$(M - N)\, x = b$

$\Leftrightarrow Mx = Nx + b$

$x = M^{-1} N x + M^{-1} b \Rightarrow \boxed{x^{k+1} = M^{-1} N x^k + M^{-1} b}$ $\qquad (1)$

altă metodă

$M = \frac{D}{\omega} + L$ unde $L$ matrice inferior triunghiulară și elementele de pe diagonala principală $= 0$

$A = \underbrace{\frac{D}{\omega}}_{M} + L - \underbrace{\left(\frac{1-\omega}{\omega} D - U\right)}_{N}$

## Teoremă Kahane

Dacă $a_{ii} \neq 0$ și dacă $\omega \in (0,2)$ atunci metoda 1 converge.

$\omega \in (0,1)$ relaxării
$> 1$ super relaxării

# Curs 11

→ Avem o matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$\lambda$ valoare proprie dacă $\exists\, x$ un vector nenul a.î. $Ax = \lambda x$

→ $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \det(\lambda I - A)$

m!

## Metoda lui Krilov

→ Se bazează pe rezolvarea unor sisteme de ecuații

→ se bazează pe teorema Cayley - Hamilton :

orice matrice pătratică își verifică propriul polinom caracteristic

dacă P polinomul $\boxed{P(A) = O_n}$

$$\boxed{P(\lambda) = (-1)^n \cdot \lambda^n + P_1 \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + P_n = (-1)^n A^n + P A^{n-1} + \ldots + P_n \cdot I = O_n}$$

→ luăm un vector oarecare $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})^t$ transpus

$y^{(p)} = A\, y^{(p+1)}$ $\quad y^{(p)} = (y_1^{(p)}, y_2^{(p)}, y_3^{(p)}, \ldots, y_n^{(p)})^t$

$\Rightarrow$ prin inducție $y^{(p)} = A^p \cdot y^{(0)}$

$\Rightarrow (-1)^n \cdot y^{(n)} + P_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + P_n \cdot y^{(0)} = O_n \cdot y^{(0)} = O_{n,1}$ o matrice nulă pe coloană

$\Rightarrow P_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + P_n \cdot y^{(0)} = (-1)^{n+1} \cdot y^{(n)}$ vreau să găsesc pe $P_1, \ldots, P_n$

$$\begin{cases} P_1 \cdot y_1^{(n-1)} + P_2 \cdot y_1^{(n-2)} + \ldots + P_n \cdot y_1^{(0)} = (-1)^{n+1} \cdot y_1^{(n)} \\ \ldots\ldots \\ P_1 \cdot y_n^{(n-1)} + P_2 \cdot y_n^{(n-2)} + \ldots + P_n \cdot y_n^{(0)} = (-1)^{n+1} \cdot y_n^{(n)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ n ecuații cu n necunoscute $P_1, P_2, \ldots, P_n$

se rezolvă cu metode iterative

BRUNNEN

reamintim $Tr(A) =$ suma elementelor de pe diagonala principală $= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

dacă $\lambda$ valoare proprie atunci $\exists\, x$ a.î. $Ax = \lambda x$ suma val proprii

$$A^2 x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda A x = \lambda \cdot \lambda \cdot x = \lambda^2 x$$

$\Rightarrow A^k x = \lambda^k \cdot x$ unde $\lambda^k$ val. prop. pentru $A^k$

$$\boxed{S_k = \lambda_1^k + \dots + \lambda_n^k = \text{Trace}(A^k)}$$

Determinăm pol. caracteristic

Legăm $S_k$ de coeficienții polinomului caracteristic

$P(\lambda) = \lambda^n + q_1 \lambda^{n-1} + \dots + q_n$

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \rightarrow$ sumele din relațiile lui Viéte

$\rightarrow$ sumele simetrice ale rădăcinilor

$\sigma_1 = -q_1$

$\sigma_2 = q_2$

$\vdots$

$\sigma_k = (-1)^k q_k$

$\vdots$

$\sigma_n = (-1)^n q_n$

exprimăm $S_k$ în funcție de $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$

## Lemă (Newton)

are loc următoarea egalitate $\boxed{S_k - \sigma_1 S_{k-n} + \sigma_2 S_{k-2} + \dots + S_1 \sigma_{k-1} + (-1)^k k \sigma_k = 0}$

ex.: $x^3 + x + 1 = 0$ răd. $x_k$ $\qquad x^4 + x^3 - x^2 + 5 = 0$

să calculăm $S_k$ dacă $k \geq 3$ $\qquad S_k$ dacă $k \geq 4$

problema intervine la grad-1

$x_1^3 + x_1 + 1 = 0 \quad / \; x_1^{k-3}$

$x_2^3 + x_2 + 1 = 0 \quad / \; x_2^{k-3}$ $\qquad S_k + S_{k-2} + S_{k-3} = 0$

$x_3^3 + x_3 + 1 = 0 \quad / \; x_3^{k-3}$ $\qquad$ relația de recurență

$S_3 + 3 = 0$

$P(\lambda)$ polinomul caracteristic

$$\boxed{\frac{P'(\lambda)}{P(\lambda)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda-\lambda_k}, \quad \lambda \neq \lambda_k}$$

$[P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1) \dots (\lambda-\lambda_n)]$

nu ultăm de coeficienții lui $\lambda_n$ dar la noi e 1

unde $\lambda_k$ sunt rădăcinile polinomului $P(\lambda)$

știm că $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$$\Rightarrow \ln(P(\lambda)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(\lambda-\lambda_k) \quad /'$$

$$\frac{P'(\lambda)}{P(\lambda)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda-\lambda_k}$$

$$\frac{P'(\frac{1}{\lambda})}{P(\frac{1}{\lambda})} = \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_k \cdot \lambda}$$

$$P'(\lambda) = n\lambda^{n-1} - (n-1)\sigma_1 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P'(\frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda^{n-1}}(n-(n-1)\sigma_1 \cdot \lambda + (n-2)\sigma_2 \cdot \lambda^2 + \dots + (-1)^k (n-k)\sigma_k \cdot \lambda^k + \dots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} \cdot \lambda^{n-1}) \\ P(\frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda^n}(1-\sigma_1 \cdot \lambda + \sigma_2 \cdot \lambda^2 + \dots + (-1)^k \sigma_k \cdot \lambda^k + \dots + (-1)^n \sigma_n \cdot \lambda^n) \end{cases}$$

"$:$"

$$\Rightarrow \frac{P'(\frac{1}{\lambda})}{P(\frac{1}{\lambda})} = \frac{\cancel{\lambda} \cdot (n-(n-1)\sigma_1 \cdot \lambda + \dots + (-1)^k (n-k)\sigma_k \cdot \lambda^k + \dots + (-1)^n \cdot \sigma_{n-1} \cdot \lambda^{n-1}}{1-\sigma_1 \lambda + \sigma_2 \cdot \lambda^2 + \dots + (-1)^k \cdot \sigma_k \cdot \lambda^k + \dots + (-1)^n \cdot \sigma_n \cdot \lambda^n}$$

$$= \cancel{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_k^i \cdot \lambda^i$$

$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \ |z| < 1$ $\quad |\lambda \lambda_k| < 1, \ |\lambda| < \frac{1}{|\lambda_k|}$ minimul inverselor valorilor proprii

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^i$$

$S_i$ suma puterilor valorilor proprii de gradul $i$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \cdot S_i$$

2 serii de puteri sunt egale $\Leftrightarrow$ toți coeficienții sunt egali

$$\Rightarrow n-(n-1)\sigma_1 \lambda + \dots + (-1)^k (n-k)\sigma_k \lambda^k + \dots + (-1)^n \sigma_{n-1} \lambda^{n-1} = (1-\sigma_1 \lambda + \sigma_2 \lambda^2 + \dots + (-1)^k \sigma_{n-k} \lambda^k + \dots + (-1)^n \sigma_n \cdot k^n) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i S_i$$

identificăm coeficienții:

BRUNNEN

$$(-1)^k (n-k)\sigma_k = S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} + \dots + \cancel{(-1)^k \sigma_{n-k} \cdot n}$$

$$\cancel{(-1)^k \cdot n \cdot \sigma_k} - (-1)^k \cdot k \cdot \sigma_k = \dots$$

$k=1 \quad S_1 = -\sigma_1 \quad \Rightarrow \sigma_1 = -S_1$

$k=2 \quad S_2 = \sigma_1 \cdot S_1 + 2\sigma_2 = 0$

$k=3 \quad S_3 = \sigma_1 \cdot S_2 + \sigma_2 \cdot S_3 - 3\sigma_3 = 0$

$S_0 = \lambda_1^0 + \dots + \lambda_n^0$
$= 1 + 1 + \dots + 1 = n$

## Metoda lui Leve

la Examen

Se dă un polinom $P_{10}$. Să se găsească $S_5$.

$$P_{10}(x) = x^{10} + 8x^7 + 5x^5 - 4x + 5 = 0$$

→ scriu Relațiile lui Newton $\quad \sigma_1 = 0 \quad \sigma_3 = 0$

→ îl fac pe $k=5$ $\quad \sigma_2 = 8 \quad \sigma_4 = 5$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^2 - 2\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j$$

$$S_5 = S_1^2 - 2S_2 = 0^2 - 2 \cdot 8 = -16$$

## Metodă de a calcula raza spectrală a unei matrice

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

raza spectrală $\rho(A) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} (|\lambda_i|) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots |\lambda_n|)$

$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)} \qquad A \cdot x^{(k)} = \lambda_k x^{(k)} \qquad x^{(k)} \neq 0$

liniar independenți

- dacă iau un $y^0 = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \cdot x^{(k)}$

$$y^{(p)} = A \cdot y^{(p-1)} \Rightarrow y^{(p)} = A^p \cdot y^{(0)}$$

$$y^{(p)} = A^p \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot x^{(k)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{c_k}_{\text{constant}} \cdot A^p \cdot x^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \lambda_k^p \cdot x^{(k)}$$

- scriem pe componente

$$\begin{cases} y_i^{(p)} = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \cdot \lambda_k^p \cdot x_i^{(k)} \\ y_i^{(p+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \cdot \lambda_k^{p+1} \cdot x_i^{(k)} \end{cases}$$

Fie $z_p = \dfrac{y_i^{(p+1)}}{y_i^{(p)}} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \cdot \lambda_k^{p+1} \cdot x_i^{(k)}}{\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \cdot \lambda_k^p \cdot x_i^{(k)}}$

$$\lim_{p\to\infty} |z_p| = \lim_{p\to\infty} \left| \frac{\cancel{\lambda_1^{p+1}}\left(c_1 \cdot x_1^{(k)} + \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{p+1} \cdot x_i^{(k)}\right)}{\cancel{\lambda_1^{p}}\left(c_1 \cdot x_1^{(k)} + \sum_{k=2}^{m} c_k \cdot \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{p} \cdot x_i^{(k)}\right)} \right| = |\lambda_1|$$

dau factor comun pe cel mai mare de sus și de jos

exact raza spectrală

procedeu de oprire $|z_{p+1} - z_p| < \varepsilon$

raza spectrală = media aritmetică a 2 termeni consecutivi

$$\boxed{\lambda_1 \simeq \frac{z_p + z_{p+1}}{2}}$$

# Metode numerice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale

forma explicita:

$y' = f(x,y)$

în general forma implicita:

$F(x, y, y') = 0$

## Problema lui Cauchy

Pp. $f$ o funcție continuă $f: I \times A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

Să se gaseasca o soluție $y$ $y(x_0) = y_0$

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

problema Cauchy în punctul $x_0$

$y' = f(x,y)$

unde $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^t$ funcție vectorială

$f$ o funcție vectorială unde $f(x,y) = (f_1(x_1,y_1), \dots, f_m(x_m,y_m))^t$

$y' = (y_1', y_2', \dots, y_m')^t$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1' = f_1(x) \\ y_2' = f_2(\dots) \\ \dots \\ y_m' = f_m(\dots) \end{cases}$$

$x_0 \in I$ $y(x_0) = y_0$

$$\boxed{(y_1(x_0), y_2(x_0) \dots y_m(x_0))^t = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)}$$

condiția Cauchy pentru sistem

$y''' = a(x)y'' + b(x)\cdot y' + c(x)$ vreau să reduc sistemul

Notez $\begin{cases} y_1 = y \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = ay_2 + by_1 + c(x) \end{cases}$ sistem liniar

I $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

## Teorema de existență și unicitate

Dacă funcția $f$ este continuă în raport cu $x$ și $y$ și dacă este Lipschtziană în raport cu $y$ atunci problema I are soluție unică pt. $\forall\, x_0 \in I$.

$f$. Lipschtziană în raport cu $y$

$\Rightarrow \exists$ o constantă $M>0$ a.î. $\forall\, y_1, y_2 \in A$ și $\forall\, x \in I$ să aibă loc inegalitatea

$$\boxed{|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq M\,|y_1 - y_2|}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq M$$

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = |y_1 - y_2| \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, c)\right| \leq M\,|y_1 - y_2|$$

$\Rightarrow f$ este lipschtziană în raport cu a 2-a variabilă $y$

$f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^t$ $x$ e fix

$y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^t$

Pb. lui Cauchy $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y^{(0)} \end{cases}$ are soluție unică dacă $f$ e Lipschtziană în raport cu a 2-a variabilă

$$\Rightarrow d(f(x, y^{(i)}), f(x, y^{(j)})) \leq M \cdot d(y^{(i)}, y^{(j)})$$

$$f(x_1, y_1, y_2) = (f_1(x_1, y_1, y_2), f_2(x_1, y_1, y_2))^t$$

$$= d(f_1(x_1, y_1, y_2), f_2(x_1, y_1, y_2))$$

$$= \sqrt{(f_1(x_1, y_1, y_2) - f_1(x_1, y_1', y_2'))^2 + (f_2(x_1, y_1, y_2) - f_2(x_1, y_1', y_2'))^2}$$

$\begin{cases} y''' + xy = 1 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ $y''(0) = 1$ vrem să găsim o soluție

$y$ are derivată de orice ordin (prin inducție)

căutăm soluția analitică sub formă de serii de puteri

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{y^{(k)}_{(0)}}{k!}}_{a_k} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

trebuie să găsim $a_k$

derivez ambii membrii de $k$ ori

$\Rightarrow y'' + xy = 1$

$$y^{(k+2)} + x \cdot y^{(k)} + \overset{C_k^1}{\binom{k}{1}} y^{(k-1)} = 0$$

$$y^{(k+2)}_{(0)} = -k\, y^{(k-1)}_{(0)}$$

- pentru $k = 3p-2$

$$\Rightarrow y^{(3p)}_{(0)} = -(3p-2)\, y^{(3p-3)}_{(0)}$$

avem o relație de recurență din 1 în 1

$$\prod_{p=1}^{m} y^{(3p)}_{(0)} = (-1)^m \prod_{p=1}^{m} (3p-2) \prod_{p=1}^{m} y^{(3p-3)}_{(0)}$$

$$y^{(3m)}_{(0)} = (-1)^m \cdot \underbrace{5 \prod_{p=1}^{m} (3p-2)}_{y(0)}$$

- pentru $k = 3p-1$

$$y^{(3p+1)}_{(0)} = -(3p-1)\, y^{(3p-2)}_{(0)}$$

$$\Rightarrow y^{(3m+1)}_{(0)} = (0)$$

# Curs 12

$y' = f(x, y(x))$ , $y(x_0) = Y_0$ problema Cauchy

$Y(x)$ $\quad Y'(x) = f(x, Y(x))$ , $y(x_0) = Y^0 = Y(x_0)$

presupunem că condițiile inițiale sunt îndeplinite ($f$ continuă și Lipschtziană)

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M |y_1 - y_2|$$

→ e suficient să știu valorile în anumite puncte

→ considerăm punctul inițial $x_0$ $\quad \Delta_N : x_0 < x_1 < \dots < x_N < b$

diviziunea

$Y(x_0) = Y_0$

I. Metodă unipas

II. Metodă multipas

Notăm valoarea aproximată în $x_k$ cu $y_k = y(x_k) \simeq Y_k(x_k)$

→ vreau să găsesc valoarea aproximată în $Y_k(x_k)$

→ e suficient să cunosc pe $Y_k$

(dacă folosesc mai multe valori ⇒ multipas)

$y_{k+1}$

## I. Metoda lui Euler (a liniilor poligonale)

$$\boxed{x_k = k \cdot h + y_0}$$

$h$ pas de discretizare

$x_0 \qquad x_0 + h, \dots, x_0 + k \cdot h$

$k \in 0 \qquad x_N = x_0 + N \cdot h < b$

mă opresc

$x_{N+1} = x_0 + (N+1) \cdot h > b$

$$\left.\begin{aligned} N &< \frac{b - x_0}{h} \\ N+1 &> \frac{b - x_0}{h} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{b - x_0}{h} - 1 < N < \frac{b - x_0}{h}$$

$$\Rightarrow N = \left[\frac{b - x_0}{h}\right] - 1$$

reluăm ecuația

$Y$ soluția ecuației diferențiale $\Rightarrow$

$Y$ verifică $Y' = f(x, Y(x))$

$$Y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{Y(x+h) - Y(x)}{h}$$

$$\Rightarrow Y'(x) \simeq \frac{Y(x+h) - Y(x)}{h}$$

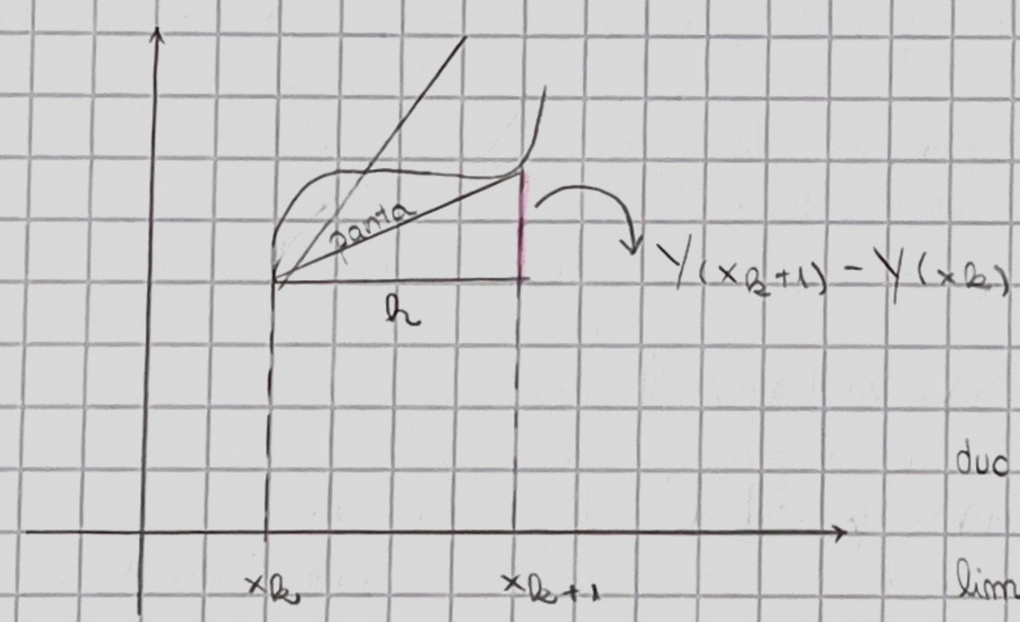
$\longrightarrow$ daca în loc de $x$ pun $x_k$ $\Rightarrow$ $\frac{Y(x_k + h) - Y(x_k)}{h} \simeq Y'(x_k)$

dacă $Y$ verifică ecuația diferențială $\Rightarrow$ o verifică și în $x_k$

$Y'(x_k) = f(x_k, Y(x_k))$

soluția aproximată $Y_{k+1} - Y_k = h \cdot f(x_k, y_k)$

Euler $\boxed{y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)}$ $f$ de recurență




duc panta în $x_k$

lim tg = lim pantelor coardelor

(1) $\boxed{Y' = f(x, Y(x))}$ integrez între $x_k$ și $x_{k+1}$ ambii membrii

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} Y'(x)\, dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, Y(x))\, dx$$

$$Y(x_{k+1}) - Y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, Y(x))\, dx$$

Formula de medie $f$ continuă pe interval $\Rightarrow \exists\, c_k$ între $x_k$ și $x_{k+1}$

a.î. $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx = (x_{k+1} - x_k) \cdot f(c_k)$

$$= (x_{k+1} - x_k) \cdot f(c_k, Y(c_k)) \simeq h \cdot f(x_k, Y(x_k))$$

$\Rightarrow y_{k+1} - y_k = h \cdot f(x_k, y_k)$

BRUNNEN

Vrem să vedem cum se comportă $y_N$ față de soluția exactă în punctul $x_N$

$Y(x_n+1) = Y(x_n+h)$ dezvolt în jurul lui 0

$= Y(x_n) + h\cdot Y'(x_n) + \frac{h^2}{2}\cdot Y''(x_n+\theta h)$ unde $\theta_h \in [0,1]$

scriu restul sub forma lui Lagrange

$= Y(x_n) + h\cdot f(x_n, Y(x_n))^{(1)} + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\theta_h, Y(\theta_h)) + \frac{\partial f}{\partial y}(\theta_h, Y(\theta_h))\cdot f(\theta, Y(\theta_h))\right]$

notez $\mathcal{C}(h) = \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot f(\dots)$

$$(I)\begin{cases} Y(x_k+1) = Y_k + h\cdot f(x_k, Y_k) + h\cdot \mathcal{C}(h) \\ \text{rel. aprox. } y_{k+1} = y_k + h\cdot f(x_k, y_k) \end{cases}$$

notăm $e_{k+1} = Y(x_{k+1}) - Y_{k+1}$ eroarea de aproximare

(I) scădem

$|e_{k+1}| = |e_k + h[f(x_k, Y_k) - f(x_k, y_k)] + h\,\mathcal{C}_h|$

$|e_{k+1}| \le |e_k| + h\cdot|f(x_k, Y_k) - f(x_k, y_k)| + h\cdot|\mathcal{C}_h|$

folosesc faptul că f verifică condițiile

f. Lip. în raport cu y $\Longrightarrow |e_{k+1}| \le |e_k| + h\cdot M|e_k| + h\cdot\|\mathcal{C}_h\|$

$|e_{k+1}| \le |e_k|(1+h\cdot M) + h\cdot\|\mathcal{C}_h\|$

$|e_{k+1}| - |e_k|(1+h\cdot M) \le h\cdot\|\mathcal{C}_h\|$ / indice $\cdot\frac{1}{(1+h\cdot M)^{k+1}}$

$\Rightarrow \frac{|e_{k+1}|}{(1+hM)^{k+1}} - \frac{|e_k|}{(1+hM)^k} \le h\cdot\|\mathcal{C}_h\|\cdot\frac{1}{(1+hM)^{k+1}}$ (II)

din (II) prin însumare obținem

sumă telescopică

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\underbrace{\frac{|e_{k+1}|}{(1+hM)^{k+1}}}_{c_{k+1}} - \underbrace{\frac{|e_k|}{(1+hM)^k}}_{c_k}\right] = h\|\mathcal{C}_h\|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(1+h\cdot M)^{k+1}}$$

progresie geometrică cu $q = \frac{1}{1+h\cdot M}$

$$\Rightarrow \frac{|e_n|}{(1+h\cdot M)^n} - \frac{\overbrace{|e_0|}^{0}}{1} \le h\|\mathcal{C}_h\|\cdot\frac{1}{1+hM}\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+hM)^n}}{1-\frac{1}{1+hM}}$$

$y_0$ sol. exactă
$e_0 = Y_0 - y_0$

$\Rightarrow |e_n| \le \cancel{h}\cdot\|\mathcal{C}_h\|_\infty\cdot\frac{(1+hM)^n-1}{\cancel{h}M}$

$$\boxed{\|e_n\| \le \|\mathcal{C}_h\|_\infty\cdot\frac{(1+hM)-1}{M}}$$

$e_n \to 0$ când $h\to 0$ $\quad \|\mathcal{C}_n\| = \frac{h\cdot\|Y''\|}{2}$

→ Metoda lui Euler tinde la 0 odată cu $h^2$

## II. Metoda punctului de mijloc

$Y'(x) = f(x, Y(x))$ integrez ambii membrii intre $[x_{m-1}, x_{m+1}]$

interval de lungime $2h$

punctul de mijloc e $x_m$

$$\Rightarrow Y(x_{m+1}) - Y(x_m) = \int_{x_{m-1}}^{x_{m+1}} f(x, Y(x))\,dx$$

pe $[a,b]$ formula lui Gauss pe un nod cu grad de multiplicitate maxim 2

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R$$

aplicăm Formula lui Gauss

$$Y(x_{m+1}) - Y(x_{m-1}) = (x_{m+1} - x_{m-1})\cdot f\left(\frac{x_{m+1}+x_{m-1}}{2}, Y\left(\frac{x_{m+1}+x_{m-1}}{2}\right)\right) + R$$

$$\boxed{y_{m+1} = y_{m-1} + 2h = f(x_m, y_m)}$$ neglijez restul

$\Rightarrow$ am obține o metodă multipas

are ordin de conv. $h^3$ (mai bun ca inainte)

---

$$Y(x_{m+1}) - Y(x_m) = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, Y(x))\,dx$$

Formula trapezelor

$$= \frac{x_{m+1} - x_m}{2}\left[f(x_{m+1}, Y(x_{m+1})) + f(x_m, Y(x_m))\right] + R$$

neglijez restul și găsesc valoarea aproximată

$$y_{m+1} - y_m = \frac{h}{2}\left[f(x_{m+1}, y_{m+1}) + f(x_m, y_m)\right]$$ formula trapezoidala

suprafață dată explicit: $z = f(x,y)$ implicit: $F(x,y,z) = 0$

dacă $f$ neliniară, pe $y_{m+1}$ folosim

## Metoda predictor - director (pt. m. implicite)

$m=0$ in metoda trapezului

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1))$$

calculăm $y_1$ cu metoda lui Euler $(y_1 = y_0 + h\cdot f(x_0, y_0))$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^1)\right]$$

$$|y_1 - y_1^1| < \varepsilon$$

$y_1^1$ calculez $y_1^2$ ($y_1^1$ in Euler)

BRUNNEN

$\Rightarrow \quad y_1^2 = y_1^1 + h \cdot f(x_1, y_1^1)$

calculez $|y_1^2 - y_1^1|$ și dacă este $< \varepsilon$ mă opresc

---

$y'(x) = f(x, Y(x))$

$$Y(x_{m+1}) - y(x_m) = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, Y(x))\,dx$$

folosesc Polinomul lui Lagrange

$x_{m-k} < x_{m-k+1} < \ldots < x_{m-1}$ avem $k$ puncte

aproximez cu polinomul lui Lagrange

$$f(x, Y(x)) \qquad L_{k-1}(f(x, Y(x)) = \sum_{i=m-k}^{m-1} l_i(x)\, f(x_i, Y(x_i))$$

$$y_{m+1} = y_m + \sum_{i=m-k}^{m-1} l_i(x) \cdot f(x_i, y_i)$$ $\Rightarrow$ formulă de aproximare multipas metode date explicit

consider diviziunea

$$x_{m-k} < x_{m-k+1} < \ldots < x_{m-1} < x_m < x_{m+1} \,|\, < \ldots < x_{m+p}$$

$\Rightarrow$ metode implicite

$$y_{m+1} = y_m + \sum_{y=m-k}^{m+1} l_i(x) \cdot f(x_i, y_i)$$

---

## Metode de tip Runge-Kutta

(unipas ce se obțin din Taylor)

$y' = f(x, y(x)) \qquad y(x_0) = x_0$

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$y''' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(x,y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + f(x,y)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

Vrem să fie metode independente de $f$ și să fie de tipul:

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot F(x_m, y_m)$$

dacă

$$y_{m+1} = \boxed{y_m + h \cdot f(x_m, y_m)}$$

↳ trebuie dezvoltat după puterile lui $h$

$y_{m+1} = y(x_m + h)$

$y(x_m + h) = f(x_m + h, y(x_m + h))$

$$y(x_m + h) = y_m + h \cdot y'(x_m) + \frac{h^2 (y''(x_m))}{2} + \ldots$$

$$y(x_m+h) = \underbrace{y_m + h \cdot f(x_m, y_m)}_{\text{coincid cu ce avem în formula lui Euler}} + \frac{h^2}{2} y''(x_m)$$

$\Rightarrow p=0$

f. Euler grad de exactitate de ordinul 0

$\exists$ o infinitate de formule de tip Runge-Kutta

---

$y' = f(x,y)$

$y_{m+1} = y_m + \alpha_0 K_0 + \alpha_1 K_1 + \dots + \alpha_p K_p$

$K_0 = h f(x_m, y_m)$

$K_1 = h f(\mu \cdot x_m + \mu \cdot h, y_m + \lambda_{1,0} \cdot K_0)$

$K_2 = h f(x_m + \mu_2 \cdot h, y_m + \lambda_{2,0} \cdot K_0 + \lambda_{2,1} \cdot K_1)$

$\dots$

$K_p = h f(x_m + \mu_p \cdot h, y_m + \lambda_{p,0} \cdot K_0 + \lambda_{p,1} \cdot K_1 + \dots + \lambda_{p,p-1} \cdot K_{p-1})$

$\mu, \mu_2, \mu_p, \lambda_{1,0}, \lambda_{2,0}, \lambda_{p,0}$ vrem să nu depindă de $f$

$\Rightarrow$ dacă depind $\Rightarrow$ $f$ e universală

$$y_{m+1} = y_m + \alpha K_0 + \alpha_1 K_1 = y_m + \alpha_0 \cdot h \cdot f(x_m, y_m) + \alpha_1 \cdot h \cdot f(x_m + \mu_1 \cdot h, y_m + a \cdot K_0)$$
$$= g(h)$$

notez $\lambda_{1,0} = a$

$\Rightarrow g(h) = g(0) + h \cdot g'(0) + \frac{h^2}{2} \cdot g''(0) + \dots$

(1) $g(h) = y_m + h \cdot f(x_m, y_m) \cdot \alpha_0 + \alpha_1 \cdot h \left[ f(x_m, y_m) + h \cdot \left( \mu_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot h \cdot f \right) \right]$

calculăm valoarea exactă a lui $y_{m+1}$

(2) $y(x_m+h) = y(x_m) + h f(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + f \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right)$

din (1), (2) $\Rightarrow f = f\alpha_0 + f\alpha_1 \Rightarrow \alpha_0 + \alpha_1 = 1$

egalăm coeficienții

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot f \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = a \cdot h \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f + \mu_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$$

vreau ca coeficienții să nu depindă de $f$

$\frac{1}{2} = \alpha_1 \cdot \mu_1$

$\cancel{\frac{f}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}} = a \cdot h \cdot \cancel{f \cdot \frac{\partial f}{\partial y}}$

4 necunoscute $\Rightarrow$ o infinitate de formule Runge-Kutta

2 relații

$\Rightarrow$ formula: $y_{m+1} = y_m + \frac{1}{2}(K_0 + K_1)$