

MATEMATICI SPECIALE: Probleme de pregătire pentru examen 1

Combinatorică

Fiecare întrebare are un singur răspuns corect.

1 Fie a numărul de moduri în care 10 persoane se pot așeza la o masă circulară cu 10 locuri, iar b numărul de moduri în care 10 persoane se pot așeza la două mese circulare identice cu câte 5 locuri fiecare. Atunci raportul $\frac{a}{b}$ este: ☐ A $\frac{1}{2}$ ☐ B 9 ☐ C 5 ☐ D 10 ☐ E 2

2 Se scriu toate numerele naturale de 6 cifre, care folosesc fiecare din cifrele 1, 2, ..., 6 o singură dată, astfel încât cifra 1 se află între cifrele 2 și 3, nu neapărat consecutiv (spre exemplu: 65**2**4**1**3, 345**1**62, 563**1**24). Dacă se obțin N numere, atunci $\frac{N}{5!}$ este: ☐ A $\frac{3}{2}$ ☐ B 2 ☐ C 1 ☐ D 3 ☐ E $\frac{4}{3}$

3 Andrei are 8 bile albe, identice. El urmează să coloreze în albastru un număr impar de bile, după care să aranjeze toate cele 8 bile într-un șir. Câte configurații distincte se pot obține? ☐ A 252 ☐ B 45 ☐ C 120 ☐ D 128 ☐ E 84

Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.

4 Numărul submulțimilor lui A în care 3 este cel mai mic element este: ☐ A 64 ☐ B 255 ☐ C 256 ☐ D 126 ☐ E 128

5 Numărul submulțimilor lui A cu 4 elemente ce îl conțin pe 8 este: ☐ A 84 ☐ B 70 ☐ C 126 ☐ D 96 ☐ E 64

6 Numărul modurilor de partiționare a lui A în 2 părți este: ☐ A 45 ☐ B 280 ☐ C 511 ☐ D 56 ☐ E 255

7 Numărul modurilor de partiționare a lui A în 2 părți egale este: ☐ A 126 ☐ B 511 ☐ C 280 ☐ D 945 ☐ E 1024

8 Se consideră în plan un număr de 8 drepte distincte, oricare două neparalele și oricare trei neconcurente. Care este numărul punctelor de intersecție între drepte? ☐ A 70 ☐ B 56 ☐ C 36 ☐ D 72 ☐ E 28

9 Câte numere pare de patru cifre diferite nu conțin cifrele 6, 7 și 8? ☐ A 320 ☐ B 400 ☐ C 420 ☐ D 360 ☐ E 300

10 Câte numere de patru cifre, scrise cu cifre de la 1 la 5, au în scrierea lor cifrele 1 și 2? ☐ A 194 ☐ B 434 ☐ C 302 ☐ D 113 ☐ E 369

Câte numere naturale (în baza 10) de 4 cifre se pot scrie folosind doar cifrele ...

11 1, 2, 3, 4, dintre care obligatoriu pe 1? ☐ A 110 ☐ B 256 ☐ C 192 ☐ D 175 ☐ E 252

12 0, 1, 2, 3, dintre care obligatoriu pe 1 și 2? ☐ A 92 ☐ B 81 ☐ C 192 ☐ D 110 ☐ E 84

Se consideră expresia $E = (x + y + z)^{10}$.

13 Numărul termenilor (după gruparea termenilor asemenea) în dezvoltarea expresiei E este: ☐ A 220 ☐ B 165 ☐ C 91 ☐ D 66 ☐ E 78

14 Numărul termenilor (după gruparea termenilor asemenea) în dezvoltarea expresiei E ce conțin puteri ale lui x este: ☐ A 220 ☐ B 66 ☐ C 78 ☐ D 55 ☐ E 165

15 Coeficientul lui $x^2 y^2 z^6$ în dezvoltarea expresiei E (după gruparea termenilor asemenea) este: ☐ A 286 ☐ B 1260 ☐ C 660 ☐ D 1320 ☐ E 364

16 Care e valoarea sumei $\sum (-1)^a \frac{10!}{a! \cdot b! \cdot c!}$, indexată după tripletele (a, b, c) de numere naturale ce verifică $a + b + c = 10$? ☐ A -1 ☐ B 3^{10} ☐ C alt răspuns ☐ D 1 ☐ E 0

La o cofetărie se servesc 8 arome de înghețată, printre care *caramel* și *fistic*. Cofetăria dispune de boluri în care încap 3 globuri de înghețată, fiecare glob având o anumită aromă. În câte moduri se poate forma un bol (plin) cu înghețată dacă nu este permis să avem aromele de *caramel* și *fistic* simultan în același bol și ...

17 este permis să punem mai multe globuri din aceeași aromă? ☐ A 84 ☐ B 91 ☐ C 112 ☐ D 105 ☐ E 120

18 nu este permis să punem mai multe globuri din aceeași aromă? ☐ A 91 ☐ B 50 ☐ C 84 ☐ D 55 ☐ E 77

La o cofetărie se servesc 5 arome de înghețată: ciocolată, fistic, lămâie, portocală și vanilie. Un bol mic de înghețată constă în 2 globuri de înghețată, iar un bol mare constă din 3 globuri, fiecare glob dintr-o anumită aromă.

19 Câte posibilități de a obține un bol mic de înghețată există, dacă **nu** se acceptă mai multe globuri din aceeași aromă? ☐ A 20 ☐ B 21 ☐ C 15 ☐ D 10 ☐ E 35

20 Câte posibilități de a obține un bol mare de înghețată există, dacă se acceptă mai multe globuri din aceeași aromă? ☐ A 15 ☐ B 35 ☐ C 10 ☐ D 20 ☐ E 21

21 Câte posibilități de a obține un bol de înghețată (mic sau mare) există, dacă dorim aromă de lămâie, dar nu dorim aromă de fistic și se acceptă mai multe globuri din aceeași aromă?

☐ A 20 ☐ B 14 ☐ C 10 ☐ D 12 ☐ E 15

22 Câte posibilități de a obține un bol de înghețată (mic sau mare) există, dacă se acceptă mai multe globuri din aceeași aromă iar următoarele asocieri de arome nu sunt permise (în același bol nu se pot afla simultan globuri de înghețată având aromele menționate): ciocolată + fistic; ciocolată + portocală; vanilie + portocală?

☐ A 22 ☐ B 34 ☐ C 32 ☐ D 35 ☐ E 29

O gogoșărie vinde 6 tipuri diferite de gogoși. Aceasta folosește pentru ambalare cutii în care încap 10 gogoși. În câte moduri se poate *umple* o cutie cu gogoși (cutia trebuie să fie plină!), dacă:

23 nu există nicio restricție legat de tipurile de gogoși ce sunt puse în cutie? ☐ A 2002 ☐ B 1001 ☐ C 3003 ☐ D 715 ☐ E 1365

24 în cutie trebuie să fie cel puțin câte o gogoșă din fiecare tip? ☐ A 252 ☐ B 70 ☐ C 126 ☐ D 56 ☐ E 210

25 în cutie trebuie să fie exact 4 tipuri diferite de gogoși? ☐ A 600 ☐ B 420 ☐ C 280 ☐ D 1260 ☐ E 840

26 nu pot fi toate gogoșile de același tip? ☐ A 2997 ☐ B 1360 ☐ C 996 ☐ D 710 ☐ E 1996

27 în cutie nu pot fi mai mult de 3 tipuri diferite de gogoși? ☐ A 861 ☐ B 455 ☐ C 686 ☐ D 365 ☐ E 555

28 În câte moduri se pot permuta literele cuvântului **CALCUL** ? ☐ A 180 ☐ B 120 ☐ C 720 ☐ D 60 ☐ E 30

29 Câte dintre permutările de la problema anterioară au litere consecutive identice? (exemplu: **ACLLUC**) ☐ A 96 ☐ B 12 ☐ C 60 ☐ D 24 ☐ E 120

Un grup de 6 persoane se împarte în două echipe de mărime egală, după care persoanele se așază la o masă circulară cu 7 locuri (un loc va rămâne, deci, liber) astfel încât să nu stea alături persoane din aceeași echipă.

30 În câte moduri se pot forma cele două echipe? ☐ A 35 ☐ B 20 ☐ C 10 ☐ D 12 ☐ E 24

31 După ce echipele au fost stabilite, în câte moduri se pot așeza persoanele la masă? ☐ A 36 ☐ B 35 ☐ C 126 ☐ D 72 ☐ E 144

Câte numere naturale (în baza 10) de 3 cifre au cifrele scrise în ordine...

32 crescătoare? ☐ A 220 ☐ B 126 ☐ C 84 ☐ D 165 ☐ E 120

33 strict descrescătoare iar cifrele nu sunt numere consecutive? ☐ A 48 ☐ B 15 ☐ C 35 ☐ D 84 ☐ E 56

În câte moduri se poate termina o cursă (pot termina pe același loc mai mulți concurenți și nu abandonează niciunul cursa) dacă:

34 sunt 3 concurenți? A 10 B 6 C 16 D 13 E 9

35 sunt 4 concurenți, iar pe ultimul loc termină exact un concurent? A 52 B 16 C 40 D 72 E 13

36 sunt 5 concurenți, iar pe locul al treilea termină exact 2 concurenți? A 120 B 130 C 150 D 160 E 110

37 sunt 6 concurenți, iar pe locul întâi termină cel puțin 3 dintre ei? A 375 B 541 C 312 D 150 E 120

Andrei, Bogdan și Cristian merg împreună să vizioneze un film la cinematograful. Ei găsesc un rând complet liber, cu 13 locuri, așa că decid să se așeze. Câte configurații distincte se pot forma, dacă cei trei lasă cel puțin câte ...

38 un loc liber între ei? A 990 B 165 C 1716 D 455 E 286

39 două locuri libere între ei? A 84 B 504 C 165 D 455 E 288

40 un loc liber între ei și niciunul nu se așază pe locul din mijlocul rândului? A 128 B 768 C 1380 D 230 E 376

Un număr de 12 bile se distribuie în 4 cutii. În câte moduri se poate face distribuția dacă:

41 bilele sunt numerotate (de la 1 la 12), cutiile sunt etichetate (de la 1 la 4), se distribuie toate bilele și nu rămân cutii goale? A $4! \cdot \binom{12}{4}$ B $\binom{15}{3}$ C $\binom{12}{4}$ D 4^{12} E $\binom{11}{3}$

42 bilele sunt identice (fără numere), cutiile sunt etichetate (de la 1 la 4), pot rămâne bile nedistribuite și nu rămân cutii goale? A $\binom{13}{5}$ B $\binom{11}{3}$ C $\binom{12}{4}$ D $4! \cdot \binom{13}{5}$ E $\binom{12}{4}$

43 bilele sunt numerotate (de la 1 la 12), cutiile sunt etichetate (de la 1 la 4), pot rămâne bile nedistribuite și pot rămâne cutii goale? A $\binom{16}{4}$ B $\binom{15}{3}$ C $5! \cdot \binom{12}{5}$ D $4! \cdot \binom{13}{5}$ E 5^{12}

Un număr de 8 bile se distribuie în 4 cutii. În câte moduri se poate face distribuția dacă:

44 bilele sunt numerotate (de la 1 la 8), cutiile sunt etichetate (de la 1 la 4), se distribuie toate bilele și se admit cutii goale? A 2^{12} B $24 \cdot \binom{8}{4}$ C 2^{16} D 5^8 E $\binom{8}{4}$

45 bilele sunt identice (fără numere), cutiile sunt etichetate (de la 1 la 4), nu este obligatoriu să se distribuie toate bilele și nu se admit cutii goale? A $\binom{12}{4}$ B $\binom{11}{3}$ C $\binom{8}{4}$ D $\binom{8}{4}$ E $\binom{7}{3}$

46 În câte moduri se poate partiționa mulțimea $\{1, 2, \dots, 10\}$ în 4 părți, dintre care 3 părți au câte 2 elemente fiecare? A 6930 B 5775 C 3150 D 2100 E 4620

Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

47 În câte moduri se poate partiționa A în 2 părți egale? A $\frac{1}{2} \binom{8}{4}$ B $2^7 - 2$ C $2 \cdot \binom{8}{4}$ D $\binom{8}{2}$ E 2^7

48 În câte moduri se poate partiționa A în 3 părți? A 1701 B 301 C 966 D 350 E 127

49 În câte moduri se poate partiționa A în 7 părți? A $\binom{8}{2}$ B $\binom{8}{7}$ C $2^7 - 1$ D 2^7 E 8^7

50 Câte dintre submulțimile lui A îl conțin pe 1 și 2, dar nu îl conțin pe 3? A $\binom{5}{3}$ B 2^5 C 2^6 D $7!$ E $\binom{6}{2}$

Într-un grup de 14 studenți sunt 4 fete și 10 băieți.

51 În câte moduri se pot împărți studenții în 2 echipe, fiecare echipă având în componența sa 2 fete și 5 băieți? A) 1680 B) 756 C) 1365 D) 1350 E) 2520

52 În câte moduri se poate împărți o sumă de 22 de lei între cei 14 studenți (nu se admit fracții dintr-un leu și se distribuie toată suma) astfel încât fiecare fată să primească cel puțin 2 lei iar fiecare băiat să primească cel puțin 1 leu? A) 1350 B) 2680 C) 2380 D) 4368 E) 1365

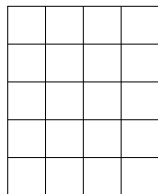


Figura 1

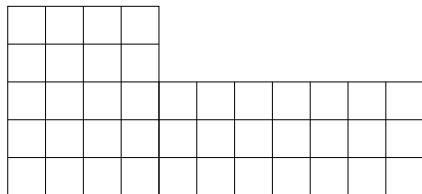


Figura 2

Câte dreptunghiuri (inclusiv pătrate!) se pot desena pe caroaiajul din ...

53 figura 1?

A) 220 B) 150 C) 100 D) 225 E) 60

54 figura 2?

A) 318 B) 486 C) 426 D) 519 E) 546

Fiecare dintre cei 31 de studenți ai unei grupe a participat la trei examene: la *Analiză Matematică* (AM), la *Algebră* (AL) și la *Matematici Speciale* (MS). Tabelul următor arată câți studenți au promovat examenele:

Au promovat examenul (examelele) de ... un număr de ... studenți						
AM	AL	MS	AM și AL	AM și MS	AL și MS	AM, AL și MS
14	16	18	8	9	7	5

55 Câți studenți nu au promovat niciun examen?

A) 1 B) 3 C) 2 D) 4 E) 6

56 Câți studenți au promovat un singur examen?

A) 13 B) 18 C) 15 D) 16 E) 19