Să se găsească restul împărțirii polinomului

$$P(X) = X^{200} - 100X^{100} + X^{50} + 4$$

la polinomul $Q(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

Rezolvare

$\deg(P) = 200$, $\deg(Q) = 4$ $\Rightarrow \exists\, C, R \in \mathbb{R}[X]$ a.î.

$$\begin{cases} P(X) = Q(X)\cdot C(X) + R(X) \\ 0 \le \deg(R) < \deg(Q) = 4. \end{cases}$$

Obs. că $(X-1)Q(X) = (X-1)(X^4+X^3+X^2+X+1) = X^5 - 1$

$\Rightarrow$ rădăcinile lui Q sunt rădăcinile lui $X^5 - 1$ diferite de 1

Rădăcinile de ordinul n ale unității sunt $z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$

În cazul nostru $n = 5$. $Q(X)$ se poate scrie

$$Q(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)(X - z_4)$$

unde $z_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$, $k = \overline{1,4}$ și $z_k^5 = 1$

Restul împărțirii lui P la Q este polinomul de interpolare Lagrange asociat perechilor $(z_k, P(z_k))_{k=\overline{1,4}}$
(Q este polinomul nodal pt z_1, z_2, z_3 și z_4)

$$\Rightarrow R(z_k) = P(z_k),\ k = \overline{1,4}$$

Dar $P(z_k) = z_k^{200} - 100 z_k^{100} + z_k^{5} + 4 = 1 - 100 + 1 + 5 = -93\ \forall k = \overline{1,4}$

$\Rightarrow R(z_k) = -93\ \forall k = \overline{1,4}$ $\Rightarrow R \equiv -93$ (polinom constant egal cu -93)