

MATEMATICI SPECIALE: Probleme de pregătire pentru examen

Grafuri

Prin *graf* se va înțelege un graf fără bucle, fără muchii multiple și neorientat, cu un număr finit și nenul de vârfuri.

Un graf se numește k -regulă dacă toate vârfurile sale au gradul k . Care este numărul grafurilor neetichetate

- ...
1 2-regulare cu 12 vârfuri? ☐ A 12 ☐ B 2 ☐ C 9 ☐ D 6 ☐ E 8
2 10-regulare și neconexe cu 13 vârfuri? ☐ A 0 ☐ B 6 ☐ C 3 ☐ D 10 ☐ E 9

- 3** Numărul grafurilor (neetichetate) cu 9 vârfuri având toate gradul 2 este: ☐ A 3 ☐ B 2 ☐ C 4 ☐ D 0 ☐ E 1
4 Numărul grafurilor (neetichetate) cu 9 vârfuri având toate gradul 3 este: ☐ A 1 ☐ B 2 ☐ C 4 ☐ D 0 ☐ E 3

- 5** Numărul muchiilor unui graf autocomplementar cu 8 vârfuri este: ☐ A depinde de graf ☐ B 28 ☐ C 7 ☐ D 14 ☐ E alt răspuns
6 Numărul componentelor conexe ale unui graf autocomplementar cu 7 vârfuri este: ☐ A alt răspuns ☐ B 7 ☐ C 6 ☐ D depinde de graf ☐ E 1

- 7** Diametrul unui graf autocomplementar nu poate fi: ☐ A 2 ☐ B par ☐ C 3 ☐ D 4 ☐ E impar
8 Numărul muchiilor unui graf autocomplementar cu 13 vârfuri este: ☐ A 66 ☐ B alt răspuns ☐ C 78 ☐ D 33 ☐ E 39
9 Talia unui graf autocomplementar nu poate fi: ☐ A număr impar ☐ B 5 ☐ C infinit ☐ D 3 ☐ E număr par

Fie G graful (neetichetat) care are talia cea mai mare dintre toate grafurile cu șirul gradelor $(1, 2, 2, 2, 3)$.

- 10** Diametrul lui G este: ☐ A 3 ☐ B infinit ☐ C 4 ☐ D 2 ☐ E 5
11 Talia lui \overline{G} este: ☐ A 3 ☐ B infinit ☐ C 5 ☐ D 2 ☐ E 4
12 Numărul muchiilor grafului $G + \overline{G}$ este: ☐ A 20 ☐ B 30 ☐ C 25 ☐ D 35 ☐ E 40
13 Numărul arborilor de acoperire pentru graful G este:
[Observație: nu se ține cont de izomorfisme, se numără toți arborii de acoperire posibili; pentru a deosebi vârfurile grafului, acestea se pot eticheta.] ☐ A 5 ☐ B 4 ☐ C infinit ☐ D 2 ☐ E 3

Se consideră graful G , în care vârfurile sunt submulțimile cu două elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, iar două vârfuri (submulțimi) sunt adiacente dacă și numai dacă sunt disjuncte.

- 14** Numărul vârfurilor lui G este: ☐ A 16 ☐ B 15 ☐ C 12 ☐ D 10 ☐ E 21
15 Numărul muchiilor lui G este: ☐ A 15 ☐ B 45 ☐ C 30 ☐ D 90 ☐ E 105
16 Diametrul lui G este: ☐ A infinit ☐ B 2 ☐ C 1 ☐ D 4 ☐ E 3
17 Talia lui G este: ☐ A 4 ☐ B infinit ☐ C 3 ☐ D 5 ☐ E 2

Pentru orice $k \geq 1$ se notează prin Q_k graful ale cărui vârfuri sunt șirurile binare de lungime k , iar două vârfuri sunt adiacente când șirurile binare corespunzătoare diferă pe exact o singură poziție.

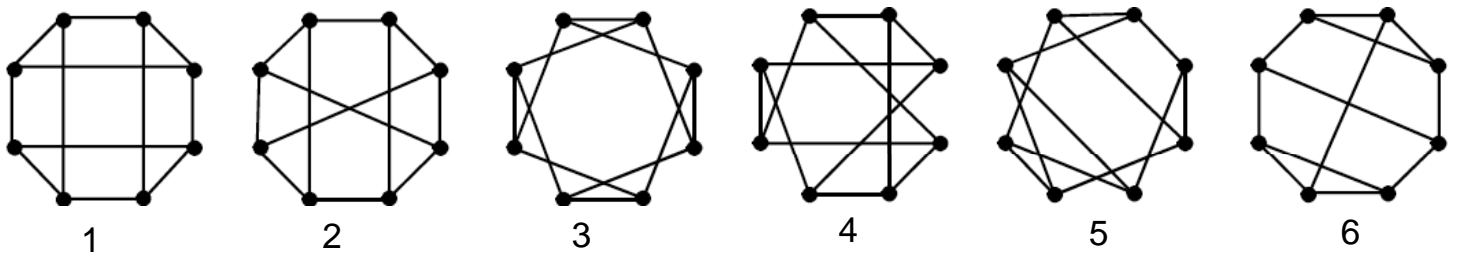
- 18** Numărul muchiilor lui Q_4 este: A 16 B 80 C 192 D 32 E 64
- 19** Câte dintre grafurile Q_k , cu $1 \leq k \leq 8$, sunt Euleriene? A 5 B 2 C 3 D 6 E 4
- 20** Câte dintre grafurile Q_k , cu $1 \leq k \leq 5$, sunt Hamiltoniene? A 2 B 3 C 1 D 0 E 4
- 21** Distanța dintre 001101 și 101001 în Q_6 este: A 2 B 5 C 1 D 3 E 4
- 22** Având la dispoziție 5 culori, se cere să se coloreze vârfurile lui Q_2 astfel încât oricare două vârfuri adiacente să aibă culori diferite. În câte moduri se poate face colorarea? (**Atenție:** graful Q_2 este etichetat, deci contează ce culoare primește fiecare vârf în parte, nu se ține cont de izomorfisme!) A 20 B 480 C 260 D 630 E 1024

- 23** Numărul muchiilor grafului $\overline{C_8 \cup \overline{C_{12}}}$ este: A 136 B 32 C 96 D 134 E 128
- 24** Diametrul grafului $\overline{C_8 + \overline{C_{12}}}$ este: A 2 B 3 C infinit D 4 E 6

- 25** Numărul muchiilor grafului $C_7 + \overline{C_{10}}$ este: A 119 B 116 C 112 D 121 E 107
- 26** Numărul ciclurilor elementare de lungime 3 din graful $\overline{C_{10}}$ este: A 77 B 30 C 112 D 50 E 0

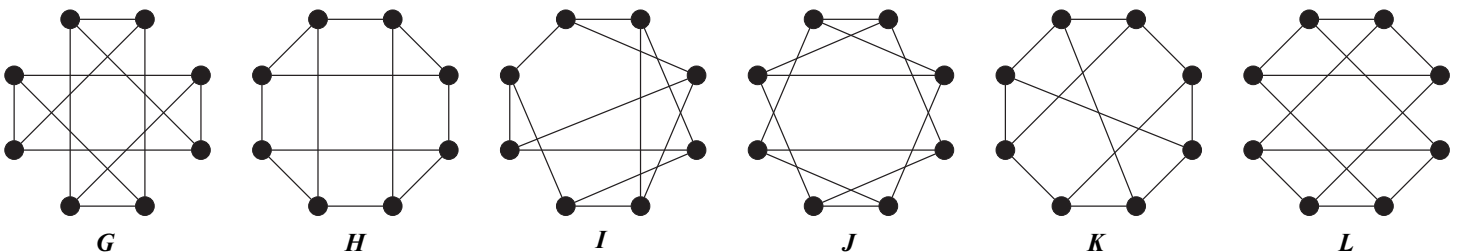
- 27** Numărul muchiilor grafului $K_5 + C_7$ este: A 29 B 52 C 61 D 64 E 69
- 28** Diametrul grafului $K_6 + C_6$ este: A 1 B 2 C 3 D alt răspuns E infinit

Se consideră următoarele 6 grafuri din figură:



- 29** Câte dintre grafurile din figură au talia egală cu 5? A 4 B 3 C 0 D 2 E 1
- 30** Câte dintre grafurile din figură sunt bipartite? A 1 B 2 C 0 D 4 E 3
- 31** Cele 6 grafuri formează 3 perechi de grafuri izomorfe. Aceste perechi sunt:
A $\{1, 6\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}$ B $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$
C $\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4, 6\}$ D $\{1, 3\}, \{2, 6\}, \{4, 5\}$ E $\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$

Se consideră următoarele 6 grafuri din figură:



- 32** Câte dintre grafurile din figură au talia egală cu 5? A 2 B 5 C 4 D 3 E alt răspuns
- 33** Câte dintre grafurile din figură nu sunt bipartite? A 2 B alt răspuns C 1 D 4 E 0
- 34** Diametrul grafului K este ... A 4 B 3 C 2 D 5 E alt răspuns
- 35** Grupând cele 6 grafuri în funcție de relațiile de izomorfism între ele, se formează două mulțimi. Astfel, grafurile din aceeași mulțime sunt izomorfe, iar grafuri din mulțimi diferite nu sunt izomorfe. Cât este cardinalul mulțimii ce conține graful G ? A 3 B 2 C alt răspuns D 5 E 4

36 Numărul arborilor neetichetați care au șirul gradelor $(1, 1, 1, 1, 3, 3)$ este:

☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C 3 ☐ D 4 ☐ E 2

37 Numărul arborilor neetichetați care au șirul gradelor $(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$ este:

☐ A 3 ☐ B 1 ☐ C 2 ☐ D 0 ☐ E 4

38 Care este diametrul maxim pe care îl poate avea un arbore cu 2022 vârfuri?

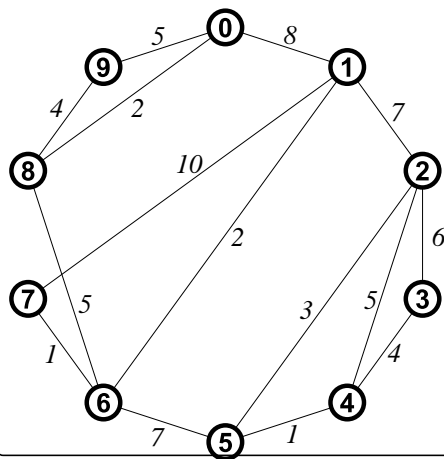
☐ A 1011 ☐ B 2022 ☐ C alt răspuns ☐ D 2021 ☐ E infinit

39 Dacă T este un arbore ce are un vârf de grad 3, unul de grad 4 și unul de grad 5, atunci numărul minim de frunze pe care T poate să-l aibă este:

☐ A 11 ☐ B 9 ☐ C 8 ☐ D 7 ☐ E 12

40 Vârfurile unui arbore cu 15 vârfuri trebuie colorate astfel încât oricare muchie să aibă extremitățile de culori diferite. Care este numărul minim de culori de care avem nevoie pentru a putea face colorarea?

☐ A 3 ☐ B 2 ☐ C depinde de arbore ☐ D 15 ☐ E 5



Fie G graful cu ponderi din figură și T un arbore de acoperire economic pentru G .

41 Ponderea maximă a unei muchii în T este:

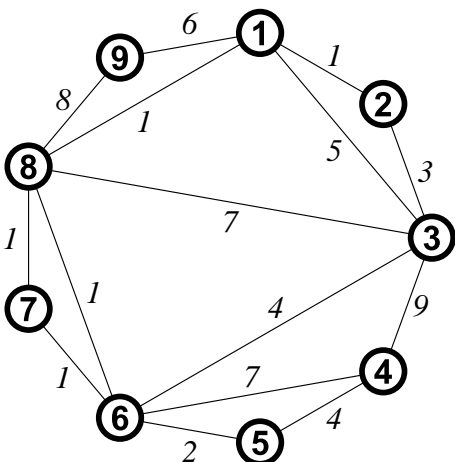
☐ A 7 ☐ B depinde de T ☐ C 6 ☐ D 5 ☐ E 8

42 Ponderea totală a lui T este:

☐ A 31 ☐ B 28 ☐ C 32 ☐ D 26 ☐ E 29

43 Numărul muchiilor pod ale lui T este:

☐ A 15 ☐ B alt răspuns ☐ C 9 ☐ D 8 ☐ E 0



Fie G graful cu ponderi din figură.

44 Dacă T este un arbore de acoperire economic pentru G , atunci ponderea totală a lui T este:

☐ A 19 ☐ B 21 ☐ C 17 ☐ D 20 ☐ E alt răspuns

45 Distanța dintre vârfurile 4 și 8 este:

☐ A 5 ☐ B 8 ☐ C alt răspuns ☐ D 7 ☐ E 9

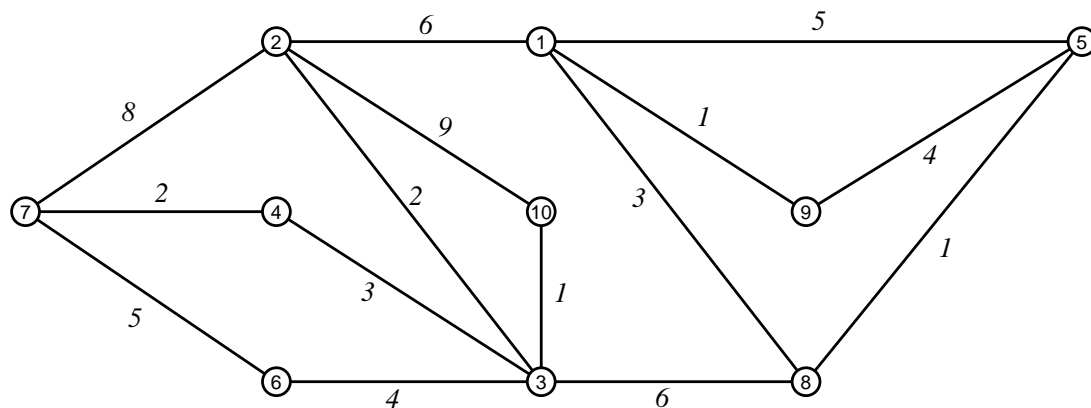
46 Distanța dintre vârfurile 4 și 9 este:

☐ A 15 ☐ B 16 ☐ C alt răspuns ☐ D 20 ☐ E 14

47 Costul total al traseului optim în problema poștașului chinez este:

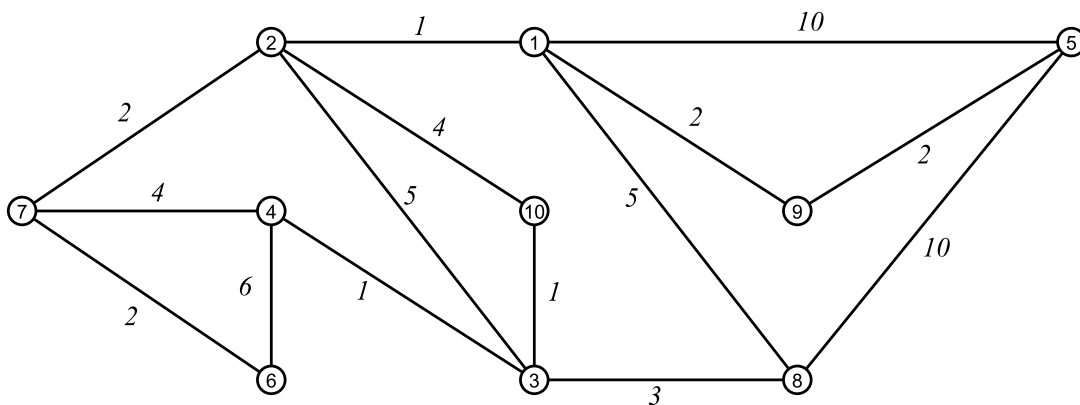
☐ A 72 ☐ B alt răspuns ☐ C 69 ☐ D 71 ☐ E 70

Fie G graful cu ponderi din figură și T un arbore de acoperire economic pentru G .



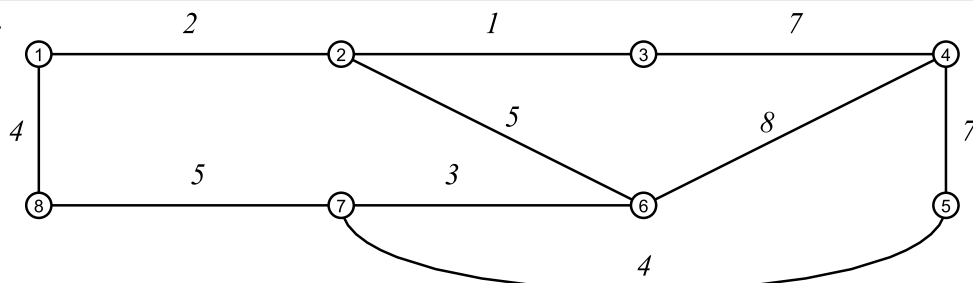
- 48** Numărul muchiilor pod ale lui G este: A 3 B alt răspuns C 1 D 2 E 4
- 49** Numărul muchiilor frontieră pentru T în G este: A 9 B 15 C alt răspuns D 6 E 5
- 50** Ponderea maximă a unei muchii în T este: A depinde de T B 8 C 5 D 6 E 9
- 51** Ponderea totală (adică, suma ponderilor muchiilor) lui T este: A 23 B 21 C 28 D 18 E 26
- 52** Subgraful lui G indus de mulțimea de vârfuri $\{2, 4, 6, 10\}$ este: A $N_2 \cup K_2$ B P_4 C $K_{2,2}$ D K_4 E N_4

Fie G graful cu ponderi din figură. Se definește *distanța dintre două vârfuri* ca fiind ponderea totală a drumului de cost minim dintre cele două vârfuri.



- 53** Distanța dintre vârfurile 7 și 8 este: A 12 B 8 C 3 D 10 E 7
- 54** Vârful aflat la distanța cea mai mare față de vârful 8 este: A 6 B 5 C 10 D 7 E 2
- 55** Dacă T este un arbore de acoperire de cost minim, atunci ponderea totală a lui T este: A 18 B 22 C 17 D 21 E 19

Fie G graful cu ponderi din figură.



56 Dacă T este un arbore de acoperire de cost minim pentru G , atunci ponderea totală a lui T este:
☐ A 24 ☐ B 25 ☐ C 27 ☐ D 26 ☐ E 23

57 Dacă T este un arbore de acoperire de cost minim pentru G , atunci ponderea maximă a unei muchii din T este:
☐ A depinde de arbore ☐ B 8 ☐ C 5 ☐ D 6 ☐ E 7

58 Numărul arborilor de acoperire de cost minim pentru graful G este:
☐ A 2 ☐ B 3 ☐ C 4 ☐ D 6 ☐ E depinde de metoda folosită la construirea arborilor

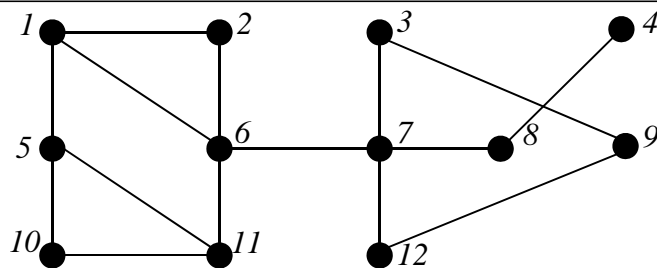
Ignorând ponderile, care este numărul minim de muchii care trebuie:

59 eliminate din G pentru ca graful rezultat să fie bipartit? ☐ A 1 ☐ B 0 ☐ C 4 ☐ D 2 ☐ E 3

60 adăugate între vârfurile lui G pentru ca graful rezultat să fie Eulerian? **Observație:** muchiile se vor adăuga între vârfuri neadiacente, convenabil alese pentru a obține un graf Eulerian; nu este permisă *dublarea* muchiilor existente, pentru că altfel nu s-ar mai obține un graf, ci un multigraf.

☐ A 3 ☐ B 2 ☐ C 0 ☐ D 4 ☐ E 1

Fie G graful din figură, H graful obținut din G prin eliminarea muchiei $\{6, 7\}$ și T un arbore de acoperire pentru G .



61 Numărul de *muchii pod* ale lui G este: ☐ A 1 ☐ B 0 ☐ C 3 ☐ D 4 ☐ E 2

62 Distanța în G dintre vârfurile 4 și 5 este: ☐ A 5 ☐ B 4 ☐ C 1 ☐ D 6 ☐ E 9

63 Câte muchii are T ? ☐ A 13 ☐ B 12 ☐ C 11 ☐ D depinde de T ☐ E 10

64 Câte muchii are $T + N_3$? ☐ A 50 ☐ B 47 ☐ C 14 ☐ D depinde de T ☐ E 12

65 Diametrul componentei conexe a lui H ce conține vârful 6 este: ☐ A 4 ☐ B 5 ☐ C 2 ☐ D 3 ☐ E 6

66 Subgraful lui G indus de mulțimea de vârfuri $\{1, 2, 3, 4\}$ este:
☐ A N_4 ☐ B P_4 ☐ C $K_{2,2}$ ☐ D K_4 ☐ E $N_2 \cup K_2$

67 Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, care este condiția necesară și suficientă pentru ca graful $K_{a,b,c}$ să fie Eulerian?
☐ A $a + b + c$ este par ☐ B $ab + bc + ac$ este par
☐ C a, b, c au aceeași paritate ☐ D a, b, c sunt pare ☐ E abc este par

68 Dacă un graf este hamiltonian, atunci este întotdeauna și ...
☐ A aciclic ☐ B semi-eulerian ☐ C eulerian ☐ D neconex ☐ E conex