

Să se afle  $\|A\|_2$  pentru următoarele matrici

a)  $A = \begin{bmatrix} 2+j & 3 \\ -3 & j \end{bmatrix}$       b)  $A = \begin{bmatrix} 1+j & 2 \\ -2 & j \end{bmatrix}$

Știm că  $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$ , unde

$A^*$  - reprezintă transpusa conjugată a lui  $A$   
 $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$

$\rho(A^*A)$  - reprezintă raza spectrală a lui  $A^*A$

Raza spectrală este cea mai mare valoare proprie în modul  
 $\rho(A^*A) = \max \{ |\lambda| : \lambda - \text{valoare proprie a lui } A^*A \}$

a)  $A = \begin{bmatrix} 2+j & 3 \\ -3 & j \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} 2-j & -3 \\ 3 & -j \end{bmatrix}$

$$A^*A = \begin{bmatrix} 2-j & -3 \\ 3 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2+j & 3 \\ -3 & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6-6j \\ 6+6j & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^*A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 14-\lambda & 6(1-j) \\ 6(1+j) & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 24\lambda + 68 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = 2(6 - \sqrt{19}) \\ \searrow \lambda_2 = 2(6 + \sqrt{19}) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \rho(A^*A) = |2(6 + \sqrt{19})| \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{2(6 + \sqrt{19})}$$

b)  $A = \begin{bmatrix} 1+j & 2 \\ -2 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-j & -2 \\ 2 & -j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2-4j \\ 2+4j & 5 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A^*A = \begin{bmatrix} 1+j & 2 \\ -2 & j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-j & -2 \\ 2 & -j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2-4j \\ 2+4j & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^*A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2-4\lambda \\ 2+4j & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho(A^*A) = 10 \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{10}$$