Să se calculeze diferența divizată

$$\left[x_0, x_1, \dots, x_n ; \frac{1}{(x+a)^2}\right] \quad , \quad x_i \neq x_j \; ; \; i \neq j$$

<u>Rezolvare</u> :

Ne vom folosi de faptul că

$$[x_0, x_1, \dots, x_n ; f] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\ell'(x_i)} \quad ,$$

unde $\ell(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n)$ este polinomul nodal

Deducem că

$$\left[x_0, x_1, \dots, x_n \; ; \; \underbrace{\frac{(x-x_0)\dots(x-x_n)}{(x+a)^2}}_{\text{pe poziția lui } f(x) \text{ anterior (în acest caz } f(x_i)=0)}\right] = 0$$

Avem

$$\underbrace{(x-x_0)\dots(x-x_n)}_{\text{gradul} = n+1} = (x+a)^2 \cdot \underbrace{P(x)}_{\deg(P) = n-1} + \alpha(x+a) + \beta$$

Pentru a determina β considerăm

$$x = -a \Rightarrow (-a-x_0)\dots(-a-x_n) = \beta \Rightarrow \beta = (-1)^{n+1}(x_0+a)\dots(x_n+a)$$

$$\Rightarrow \beta = (-1)^{n+1} \prod_{i=0}^{n} (x_i+a)$$

Pentru a determina α derivăm relația anterioară și obținem

$$(x-x_0)\dots(x-x_n)\left(\frac{1}{x-x_0} + \frac{1}{x-x_1} + \dots + \frac{1}{x-x_n}\right) = 2(x+a)P(x) +$$

$$+ (x+a)^2 \cdot P'(x) + \alpha$$

$$x = -a \Rightarrow (-a-x_0)\dots(-a-x_n)\left(\frac{1}{-a-x_0} + \dots + \frac{1}{-a-x_n}\right) = \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = (-1)^{n+1}(a+x_0)\dots(a+x_n) \cdot (-1) \cdot \left(\frac{1}{a+x_0} + \dots + \frac{1}{a+x_n}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = (-1)^{n+2} \prod_{i=0}^{n} (x_i+a) \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{x_i+a}$$

Luând în calcul cele de mai sus, ajungem la

$$0 = \left[x_0, x_1, \dots, x_m ; \frac{(x-x_0)\dots(x-x_m)}{(x+a)^2} \right] =$$

$$= \left[x_0, x_1, \dots, x_m ; \frac{(x+a)^2 P(x) + \alpha(x+a) + \beta}{(x+a)^2} \right] =$$

$$= \underbrace{\left[x_0, x_1, \dots, x_m ; P(x) \right]}_{\text{egală cu 0 deoarece } \deg(P) = m-1} + \left[x_0, x_1, \dots, x_m ; \frac{\alpha}{x+a} \right] + \left[x_0, x_1, \dots, x_m ; \frac{\beta}{(x+a)^2} \right]$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \alpha \left[x_0, x_1, \dots, x_m ; \frac{1}{x+a} \right] + \beta \left[x_0, x_1, \dots, x_m ; \frac{1}{(x+a)^2} \right]$$

$$\Rightarrow \left[x_0, x_1, \dots, x_m ; \frac{1}{(x+a)^2} \right] = -\frac{\alpha}{\beta} \left[x_0, x_1, \dots, x_m ; \frac{1}{x+a} \right]$$

Vom folosi

$$\left[x_0, \dots, x_m ; \frac{1}{c_1 x + c_2} \right] = (-1)^m \frac{c_1^m}{\prod_{i=0}^{m} (c_1 x_i + c_2)}$$

Pentru a calcula $\left[x_0, \dots, x_m ; \frac{1}{x+a} \right]$ avem $c_1 = 1$, $c_2 = a$

$$\Rightarrow \left[x_0, x_1, \dots, x_m ; \frac{1}{x+a} \right] = \frac{(-1)^m}{\prod_{i=0}^{m} (x_i + a)}$$

$$\left[x_0, x_1, \dots, x_m ; \frac{1}{(x+a)^2} \right] = \cancel{(-1)} \cdot \underbrace{\left((-1)^{m+2} \prod_{i=0}^{m} (x_i + a) \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{x_i + a} \right)}_{\alpha} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cancel{(-1)^{m+1}} \prod_{i=0}^{m} (x_i + a)}}_{1/\beta} \cdot$$

$$\cdot \frac{\cancel{(-1)^m}}{\prod_{i=0}^{m} (x_i + a)} = (-1)^{m+2} \frac{\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{x_i + a}}{\prod_{i=0}^{m} (x_i + a)} = (-1)^m \frac{\ell'(-a)}{\ell(-a)}$$

$$\Rightarrow \left[x_0, x_1, \dots, x_m ; \frac{1}{(x+a)^2} \right] = (-1)^m \frac{\ell'(-a)}{\ell(-a)},$$

unde $\ell(x) = (x-x_0)\dots(x-x_m)$ este polinomul nodal