

## 6. Regimul permanent nesinusoidal Steady-state periodic non-sinusoidal regime

- se mai numește și regim deformant

(it is also called deformed regime)

- funcționarea circuitelor în regim nesinusoidal se întâlnește atât în tehnica curentilor tari cât și în electronică (the electric circuits working on non-sinusoidal regime is frequently found both in the technique of high currents and in electronics)

Există 2 situații: (There are 2 cases)

- când se dorește ca mărimile ce acționează în circuit să fie sinusoidale, dar din diverse cauze variația lor se abate mai mult sau mai puțin de la forma sinusoidală (when the circuit quantities must be sinusoidal, but for various reasons their variation deviates more or less from the sinusoidal waveform)

- când se dorește ca mărimile ce acționează în circuit să fie sinusoidale, cărui frecvență întâlnită în electronică sinusoidal, a comună casă în electronică

Cauzele producerii regimului deformant:  
(The causes of the deformation regime)

- abaterea de la forma sinusoidală a.t.e.m.  
(deviation from the sinusoidal waveform of the a.m. voltage)

- prezența elem. nelineare din circuit  
(presence of the non-linear elements in the circuit)

② Elemente de circuit deformante:

C - înălțătorește forma de undă a curentului  
(the capacitor worsens the waveform of the current)

Studiul circuitelor electrice în regim năumesoidal se bazează pe descompunerea mărimilor în serie de termeni sinusoidali (descompunerea Fourier).  
(study of non-sinusoidal regime of the electric circuit is based on Fourier analysis: a periodic non-sinusoidal function may be expressed as a series containing a constant term, together with a number of sinusoidal terms).

### 6.1. Série Fourier

#### Fourier expansion

O funcție periodică de temp  $f(t) = f(t + kT)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , poate fi dezvoltată în serie trigonometrică (serie Fourier), dacă îndeplinește anumite condiții.  
(f. cte marginita, monotonă pe porțiuni, etc.)  
(With certain limits of finiteness and continuity, periodic functions may be expressed as finite trigonometric series Fourier Series or Fourier expansion.)

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} A_k \sin(k\omega t + \phi_k) \quad (1)$$

2)  $A_0 = \text{constantă sau valoarea medie pe o perioadă}$   
 a funcției  $f(t)$

$A_0 = \text{constantă, reprezentând valoarea medie}$   
 de la  $f(t)$

$\sqrt{2} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$  - fundamentala sau prima  
 armonică, are aceeași perioadă ca și f-dia  
 originală

- termenul  $k$  din sumă reprezintă armonica  
 de ordin  $k$ , iar frecvența este de  $k$  ori mai  
 mare decât frecvența fundamentală ce  
 (the fundamental or first harmonic and  
 has the same period as the original function.  
 The  $k$ -th term in the summation is the  $k$ -th  
 harmonic; its frequency is  $k$  times the  
 fundamental frequency  $\omega$ ).

$\sqrt{2} A_k = A_m$  - amplitudinea armonicei de ordin  $k$   
 (the amplitude)

$A_k$  - valoarea efectivă (r.m.s. value)

$\varphi_k$  - fază armonică de ordin  $k$   
 (the phase of the  $k$ -th harmonic)

Ec. (1) poate fi rezcrită:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} A_k \cos \varphi_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} A_k \sin \varphi_k \cos k\omega t$$

$$④ f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} C_k \cos k\omega t (z)$$

$$B_k = A_k \cos \varphi_k ; \quad A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}$$

$$C_k = A_k \sin \varphi_k \quad \varphi_k = \arctg \frac{C_k}{B_k}$$

6.1.1. Determinarea coeficientilor seriei Fourier  
Finding the coefficients of the Fourier expansion

- aceasta presupune determinarea coeficientelor  
 $A_0, B_k$  și  $C_k$

Proprietăți ale funcțiilor "cos mat" și "sin mat"  
 $(m, m' \in N_f)$

$$\int_0^T \cos m\omega t dt = 0 ; \quad \int_0^T \sin m\omega t dt = 0$$

$$\int_0^T \cos^2 m\omega t dt = \frac{T}{2} ; \quad \int_0^T \sin^2 m\omega t dt = \frac{T}{2}$$

$$\int_0^T \cos m\omega t \cdot \sin m'\omega t dt = 0 ; \quad m, m'$$

$$\int_0^T \cos m\omega t \cdot \cos m'\omega t dt = 0 ; \quad m \neq m'$$

$$\int_0^T \sin m\omega t \cdot \sin m'\omega t dt = 0 ; \quad m \neq m'$$

Proprietățile de mai sus sunt valabile pt. orice limite de integrare, că definesc o perioadă completă.

5

(The above expressions hold for any limits of integration, which define one complete period)

a)  $A_0$

Integrăm ec. (2) - on ambele părți de la o lată (pe o perioadă):

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^T A_0 \cdot dt + \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} B_k \sin k\omega t dt +$$

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} C_k \cos k\omega t dt$$

$$\Rightarrow \int_0^T f(t) dt = \int_0^T A_0 \cdot dt + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} B_k \int_0^T \sin k\omega t dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} C_k \int_0^T \cos k\omega t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^T f(t) dt = \int_0^T A_0 \cdot dt$$

$$\Rightarrow A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt$$

- valoarea medie a unei funcții pe o perioadă

(the average value of the function over a period)

b)  $\sqrt{2} B_k$

Prin mutarea ambeia membre ai ec. (2) cu  $\sin k\omega t$  în integrām de la o lată

⑥ (Multiply both members of eq. (2) by the term  $\sin k\omega t$  and integrate from 0 to T)

$$\int_0^T f(t) \sin k\omega t \cdot dt = \int_0^T A_0 \sin k\omega t \cdot dt + \\ + \int_0^T \sin k\omega t \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} C_k \cos k\omega t \right] dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^T f(t) \sin k\omega t \cdot dt = A_0 \underbrace{\int_0^T \sin k\omega t \cdot dt}_{=0} + \\ + \sqrt{2} B_k \underbrace{\int_0^T \sin^2 k\omega t \cdot dt}_{=\frac{T}{2}} + \sqrt{2} C_k \underbrace{\int_0^T \sin k\omega t \cdot \cos k\omega t \cdot dt}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^T f(t) \cdot \sin k\omega t = \sqrt{2} B_k \cdot \frac{T}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{2} B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin k\omega t \cdot dt}$$

c)  $\sqrt{2} C_k$

$$\int_0^T f(t) \cos k\omega t \cdot dt = \int_0^T A_0 \cos k\omega t \cdot dt + \\ + \int_0^T \cos k\omega t \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} C_k \cos k\omega t \right] dt (=) \\ \Leftrightarrow \int_0^T f(t) \cos k\omega t \cdot dt = A_0 \underbrace{\int_0^T \cos k\omega t \cdot dt}_{=0} + \sqrt{2} B_k \underbrace{\int_0^T \cos k\omega t \sin k\omega t \cdot dt}_{=0} \\ + \sqrt{2} C_k \underbrace{\int_0^T \cos^2 k\omega t \cdot dt}_{T/2}$$

$$\textcircled{7} \Leftrightarrow \int_0^T f(t) \cos k\omega t = \sqrt{2} C_k \cdot \frac{I}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{2} C_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos k\omega t \cdot dt}$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt$$

$$; \sqrt{2} C_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t \cdot dt$$

$$\sqrt{2} B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin k\omega t \cdot dt$$

$\hookrightarrow$  formulele lui Euler

Observatie Analiza Fourier poate fi simplificata dacă variabila unei funcții date se exprimă în funcție de unghi decât în funcție de timp.

Fourier analysis is somewhat simplified if we express the variable of a given function in terms of angle rather than time.

$\omega t = \alpha$  atunci :

$$f(\alpha) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} B_k \sin k\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} C_k \cos k\alpha$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) d\alpha ;$$

$$(4) \quad \sqrt{2} B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin k\alpha \cdot d\alpha$$

$$\sqrt{2} C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos k\alpha \cdot d\alpha$$

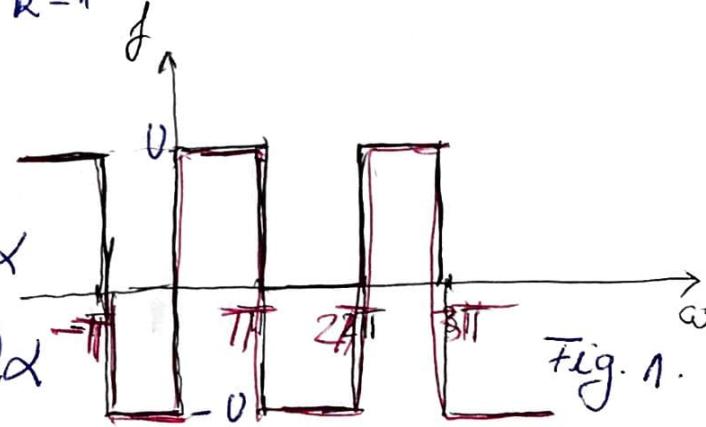


Fig. 1.

(8)

Ecuatiile deduse mai sus se utilizează doar atunci când: (3) și (4)

- există o expresie explicită a funcției originală  $f(t)$  sau  $f(x)$ ;
- putem efectua integralele din aceste relații.  
(existabile)

These conditions are met for a wide variety of waveforms encountered in electrical engineering practice.

The relations (3) + (4) are useful only when:

- we have an explicit expression for the original function  $f(t)$  or  $f(x)$ ;
- we can perform the integrations indicated by the relations.

These conditions are met for a wide variety of waveforms encountered in electrical engineering practice.

### Exemplu

Să se determine seria Fourier pt. forma de undă din figura 1. ( $\omega t = \alpha$ ).  $f(\alpha) = \begin{cases} U & 0 \leq \alpha \leq \pi \\ -U & \pi \leq \alpha \leq 2\pi \end{cases}$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cdot d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} U \cdot d\alpha - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-U) \cdot d\alpha = 0$$

$$\sqrt{2} B_R = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cdot \sin R\alpha \cdot d\alpha = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} U \sin R\alpha \cdot d\alpha - \int_{\pi}^{2\pi} (-U) \sin R\alpha \cdot d\alpha \right] =$$

(9)

$$= \frac{U}{\pi} \left[ -\cos \frac{kx}{L} \Big|_0^{\pi} + \frac{\cos kx}{k} \Big|_{\pi}^{2\pi} \right]$$

$$\text{pt. } k = 2p - \text{par} : \sqrt{2} B_{2p} = \frac{U}{2p\pi} (-\cos 2p\pi \Big|_0^{\pi} + \cos 2p\pi \Big|_{\pi}^{2\pi}) = \frac{U}{2p\pi} (-1+1+1-1) = 0$$

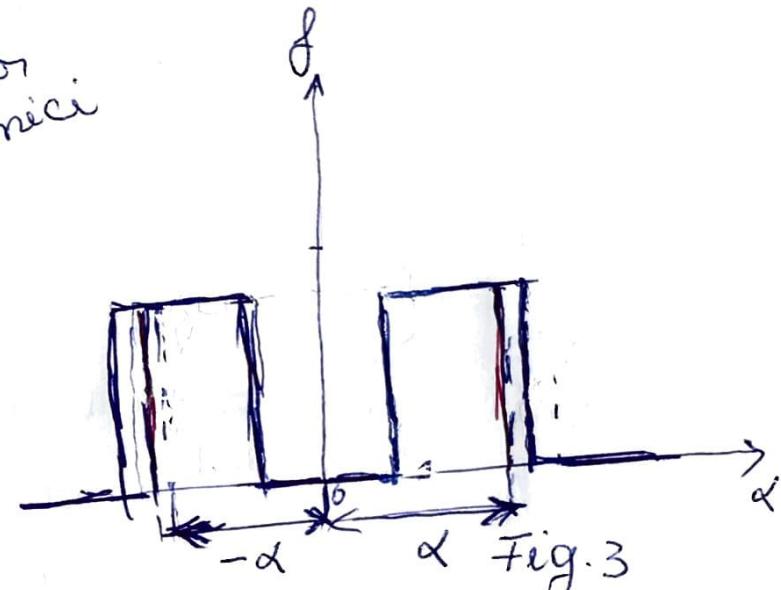
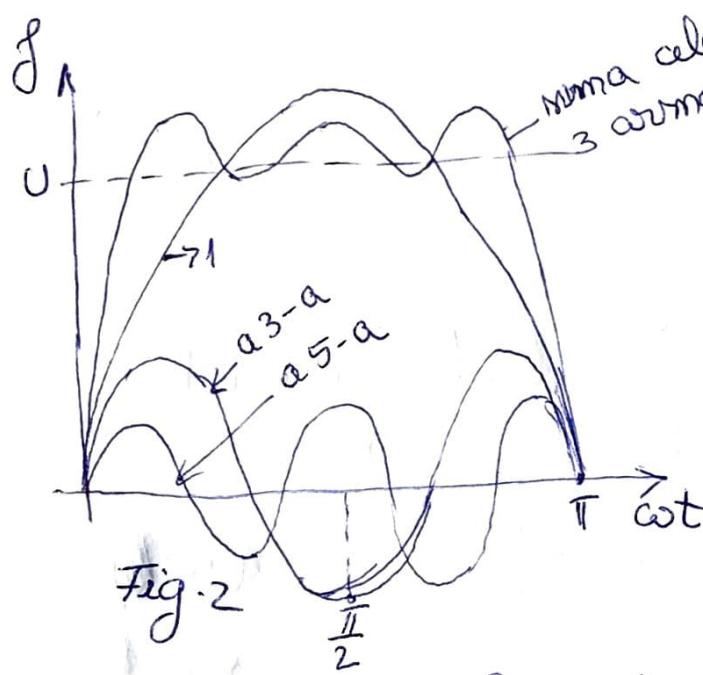
$$\text{pt. } k = 2p+1 - \text{impar} : \sqrt{2} B_{2p+1} = \frac{U}{(2p+1)\pi} \left[ -\cos(2p+1)\alpha \Big|_0^{\pi} + \cos(2p+1)\alpha \Big|_{\pi}^{2\pi} \right] = \frac{U}{(2p+1)\pi} \cdot (1+1+1-1) = \frac{4U}{(2p+1)\pi}$$

$$\sqrt{2} C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{U}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \cos kx dx - \int_{\pi}^{2\pi} \cos kx dx \right] =$$

$$= \frac{U}{k\pi} (\sin kx \Big|_0^{\pi} - \sin kx \Big|_{\pi}^{2\pi}) = 0$$

$$f(x) = \frac{4U}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx ; k - \text{impar}$$

$$\text{pt. } x = \omega t ; f(t) = \frac{4U}{\pi} (\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots) \rightarrow \text{Fig. 2}$$



6.1.2. Casuri particulare. Funcții pare și impare  
Particular cases. Even and odd functions

a) Funcția pară (Even function)

$f(x) = f(-x)$  - graficul funcției este simetric față de axa ordonatei (Fig. 3)

$$f(x) = A_0 + \sum_{B=1}^{\infty} \sqrt{2} B_B \sin Bx + \sum_{B=1}^{\infty} \sqrt{2} C_B \cos Bx$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad f(-\alpha) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} B_k \sin(-k\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} C_k \cos(-k\alpha) \\
 &= A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} B_k \sin k\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} C_k \cos k\alpha
 \end{aligned}$$

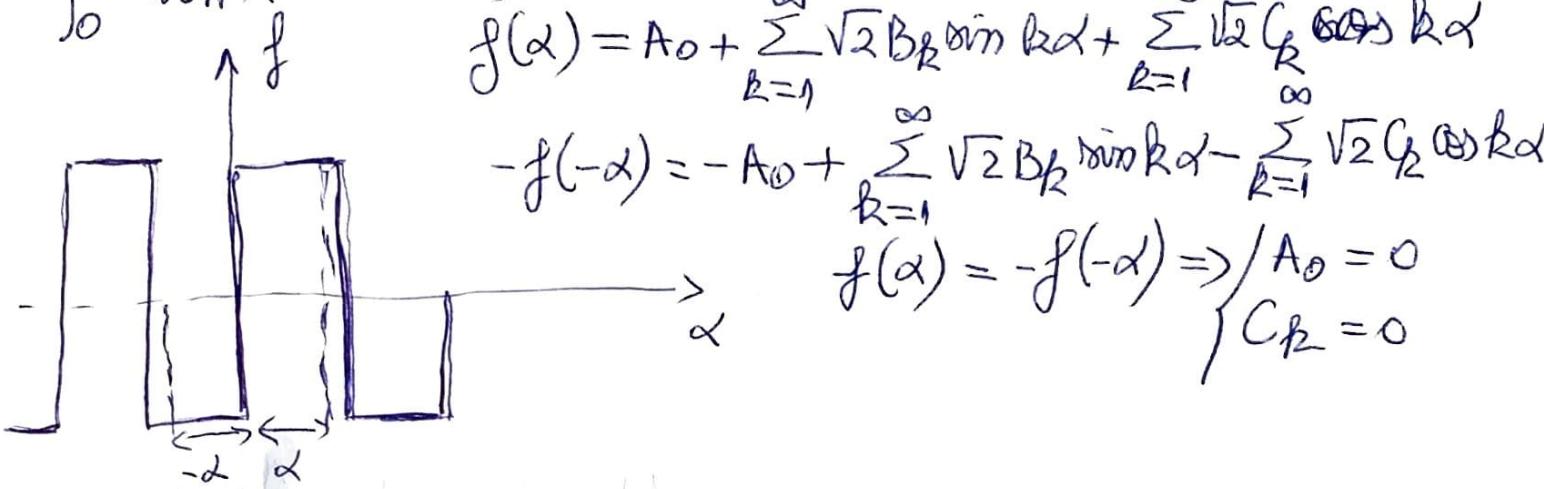
$$f(\alpha) = f(-\alpha) \Rightarrow \boxed{B_k = 0}$$

b) Funcția simetrică (Odd function)

$f(-\alpha) = -f(\alpha)$  - graficul funcției este simetric față de originea axelor

$$f(-x) = -f(x) ; f(x+T) = f(x)$$

$$\int_0^T \sin x dx = 0 ; T = 2\pi \text{ sau } T = 2k\pi ; k = 1, 2, 3, \dots$$



$$f(\alpha) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} B_k \sin k\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} C_k \cos k\alpha$$

$$-f(-\alpha) = -A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} B_k \sin k\alpha - \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} C_k \cos k\alpha$$

$$\begin{cases} f(\alpha) = -f(-\alpha) \Rightarrow A_0 = 0 \\ C_k = 0 \end{cases}$$

c) Simetria semi-undă (Half-Wave)

$$f(\alpha) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin k\alpha d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos k\alpha d\alpha$$

$$f(\alpha) = -f(\alpha + \pi) \Rightarrow -f(\alpha + \pi) = -A_0 - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + \pi) \sin(k(\alpha + \pi)) d\alpha -$$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + \pi) \cos(k(\alpha + \pi)) d\alpha$$

$$k = 2p - \text{par} \Rightarrow f(\alpha) = -f(\alpha + \pi)$$

$$A_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin 2p\alpha d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos 2p\alpha d\alpha =$$

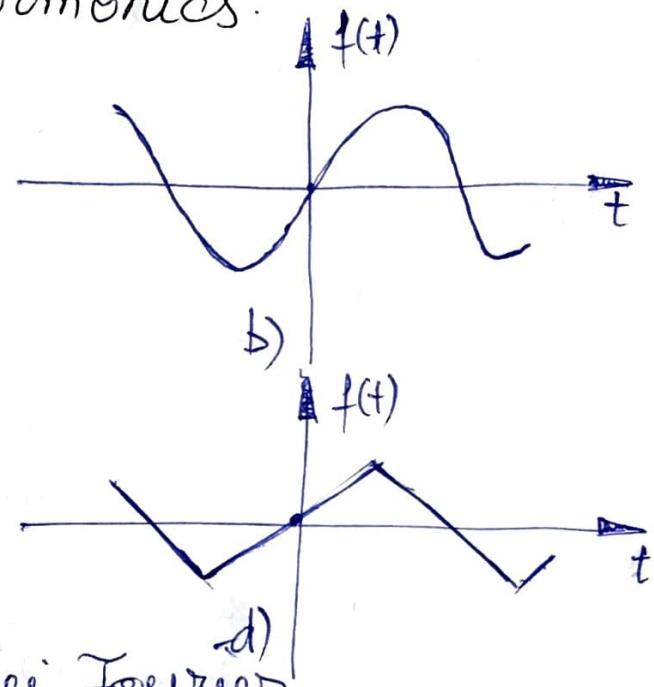
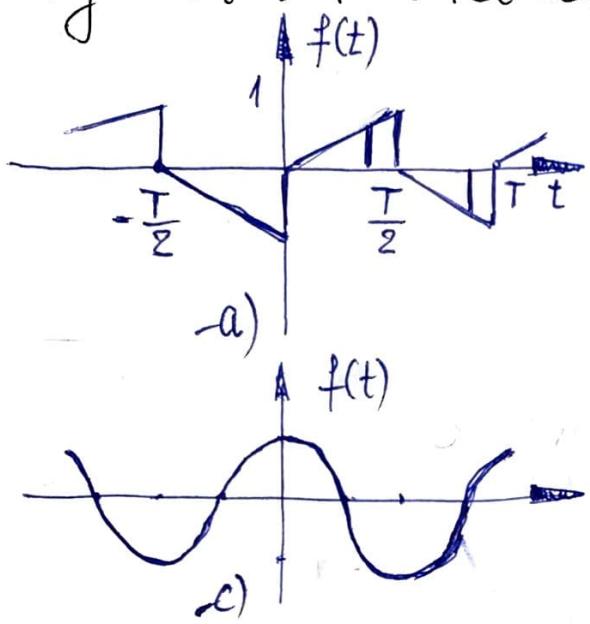
$$-A_0 - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + \pi) \sin 2p\alpha d\alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + \pi) \cos 2p\alpha d\alpha$$

$$\Rightarrow A_0 = 0 ; B_{2p} = 0 ; C_{2p} = 0 .$$

$$k = 2p + 1 - \text{impar} ; \text{ prin analogie obținem } \begin{cases} B_{2p+1} \neq 0 \\ C_{2p+1} \neq 0 \end{cases}$$

$$11) f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} B_{2p+1} \sin(2px+1)x + \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} C_{2p+1} \cos(2px+1)x$$

Simetria: semi-wndă: serie Fourier conține doar funcție impară sinuses și armonice în cosinus.  
Half-wave symmetry: the Fourier series contains only odd sin and cos harmonics.



Expressile coeficienților seriei Fourier

Jtip simetrie	Condiție simetrie	$A_0$	$\sqrt{2} B_k$ $k=1,2,3\dots$	$\sqrt{2} C_k$ $k=1,2,3\dots$
—	—	$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt$	$\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin kt \cdot dt$	$\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos kt \cdot dt$
Pară	$f(t) = f(-t)$	$\frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot dt$	0	$\frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \cos kt \cdot dt$
Impară	$f(t) = -f(-t)$	0	$\frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \sin kt \cdot dt$	0

12

## Symmetry Properties

Coeficientul	Descriere	Simetrie $f(t)$		
		Pară	Impară	Semicircular
$A_0$	c.c.	$\neq 0$	0	0
$\sqrt{2}B_k (k=1,3,\dots)$	armonică impară termeni în sin	0	$\neq 0$	$\neq 0$
$\sqrt{2}B_k (k=2,4,\dots)$	armonică pară termeni în sin	0	$\neq 0$	0
$\sqrt{2}C_k (k=1,3,\dots)$	armonică impară termeni în cos	$\neq 0$	0	$\neq 0$
$\sqrt{2}C_k (k=2,4,\dots)$	armonică pară termeni în cos	$\neq 0$	0	0

6.2. Valori caracteristice ale funcțiilor periodice nesinusoidale

Characteristic values for periodic non-sinusoidal functions

a) Valoarea maximă (maximum or peak value)

- cea mai mare valoare a funcției periodice nesinusoidale pe o perioadă (the biggest value of periodic non-sinusoidal function over a period)

b) Valoarea medie (the average mean value)

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt$$

c) Valoarea efectivă (the effective or r.m.s value)

$$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) \cdot dt}$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) \cdot dt}$$

(13)

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [A_0 + \sqrt{2} A_1 \sin(\omega t + \delta_1) + \sqrt{2} A_2 \sin(2\omega t + \delta_2) + \dots]^2 dt}$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[ A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 A_k^2 \sin^2(k\omega t + \delta_k) + 2 A_0 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \underbrace{\sin(k\omega t + \delta_k)}_{\int_0^T \dots dt = 0} \right.} \\ \left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{2 A_k \cdot A_n \sin(k\omega t + \delta_k) \cdot \sin(n\omega t + \delta_n)}_{\int_0^T \dots dt = 0} \right] dt$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T A_0^2 dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_k^2 2 \sin^2(k\omega t + \delta_k) dt}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T A_k^2 2 \sin^2(k\omega t + \delta_k) dt = \frac{A_k^2}{T} \int_0^T [1 - \cos 2(k\omega t + \delta_k)] dt =$$

$$= \frac{A_k^2}{T} \left[ \int_0^T dt - \int_0^T \cos 2(k\omega t + \delta_k) dt \right] = A_k^2$$

$$A = \sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + \dots} = \sqrt{A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2}$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots}$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots}$$

$$\text{Exemple: } i(t) = 5 + 20\sqrt{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{3}) + 10 \sin(5\omega t - \frac{\pi}{4})$$

$$I = \sqrt{5^2 + 20^2 + \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx 23 \text{ A.}$$

14

mai multe informații despre funcțiile nesinusoidale;

a) factorul de formă (form factor)

$$k_f = \frac{A}{A_{\text{ha}}} \quad A - \text{valoarea efectivă}$$

$A_{\text{ha}}$  - valoarea medie pe o semiperioadă  
(half-period average value)

pt. sinusoidă  $k_f = \pi/2\sqrt{2} = 1,11$

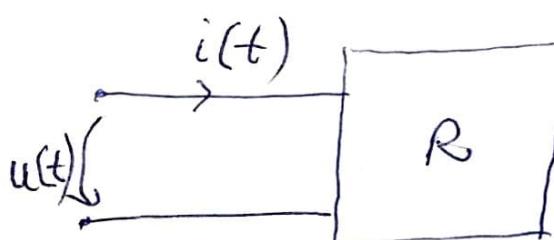
b) factorul de varf (peak factor)

$$k_{pf} = \frac{A_m}{A}; \quad \text{pt. sinusoidă } k_{pf} = \sqrt{2} = 1,41$$

c) factorul de distorsiune (distortion factor)

$$k_d = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} A_k^2}}{\sqrt{A_0^2}} = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + \dots}}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \dots}}$$

6.3. Putere în regim nesinusoidal  
Power in non-sinusoidal regime



$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} U_k \sin(k\omega t + \delta_{uk}) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(k\omega t)$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sqrt{2} \sin(k\omega t + \delta_{ik}) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} i_k(k\omega t)$$

(15)

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} i_k e^{j\omega_k t}$$

În regim sinusoidal:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi [W]$$

$$Q = U \cdot I \sin \varphi [VAR]$$

$$S = U \cdot I [VA]$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}; S^2 = P^2 + Q^2$$

În regim nesinusoidal:

$$p(t) = u$$

a) puterea instantană (the instantaneous power)

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \left( U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k e^{j\omega_k t} \right) \cdot \left( I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} i_k e^{j\omega_k t} \right)$$

b) puterea activă (the active power)

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left( U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k \right) \left( I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} i_k \right) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \left( U_0 I_0 + U_0 \sum_{k=1}^{\infty} i_k + I_0 \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_k \cdot i_l \right) dt.$$

$$\begin{aligned}
 16) &= \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 dt + \frac{1}{T} Q_0 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \sqrt{2} I_k \underbrace{\sin(k\omega t + \delta_{ik})}_{=0} dt + \\
 &+ \frac{1}{T} I_0 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \sqrt{2} U_k \underbrace{\sin(k\omega t + \delta_{uk})}_{=0} dt + \\
 &+ \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T 2U_k I_n \sin(k\omega t + \delta_{uk}) \cdot \sin(n\omega t + \delta_{nk}) dt \\
 &\stackrel{!}{=} \int_0^T 2U_k I_n \sin(k\omega t + \delta_{uk}) \cdot \sin(n\omega t + \delta_{nk}) dt = \begin{cases} 0 & ; n \neq k \\ U_k I_k \cos(\delta_k) & ; n = k \end{cases}
 \end{aligned}$$

, unde  $\delta_k = \delta_{uk} - \delta_{ik}$

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \delta_k$$

[W].

c) Puterea reactivă (the reactive power)

- se obține în același mod ca și puterea activă

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \delta_k = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k ; [VAR]$$

d) Puterea aparentă (the apparent power)

$$S = U \cdot I = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + \dots} \cdot \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + \dots} [VA]$$

e) Puterea deformantă (the distortion power)

$$D = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_k^2 I_n^2 + U_n^2 I_k^2 - 2 U_k U_n I_k I_n \cos(\delta_k - \delta_n)} [VAd]$$

(17) f)  $k_p = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}}$  - factorul de putere  
 (the power factor)

În regim nesinusoidal  $S^2 = P^2 + Q^2 + D^2$

6.3. Analiza circuitelor în regim  
 nesinusoidal

Network analysis in non-sinusoidal  
 regime

$$u(t) \xrightarrow{i(t)} [R, L, C] = u_0 \oplus [u(\omega t)] + \dots +$$

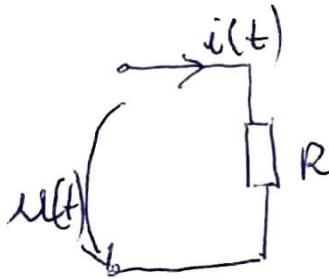
$$+ [u(k\omega t)] + \dots$$

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} U_k \sin(k\omega t + \delta_k)$$

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$\underline{Z}^{(k)} = R + jk\omega L + \frac{1}{jk\omega C}$$

(18) a) Rezistorul ideal (Ideal resistor)

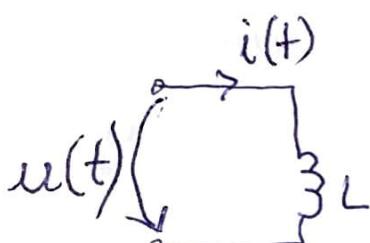


$$i(t) = \frac{U_0}{R} + \sqrt{2} \frac{U_1}{R} \sin(\omega t + \varphi_{u_1}) + \dots + \sqrt{2} \frac{U_k}{R} \sin(\omega_k t + \varphi_{u_k}) + \dots$$

$$i(t) = \frac{U_0}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} U_k}{R} \sin(\omega_k t + \varphi_{u_k})$$

- tensiunea și curentul sunt în fază  
(the voltage and the current are in phase)

b) Inductorul ideal (Ideal inductor)



Observație: Pp. că  $t \rightarrow \infty$ , prima componentă a curentului  $U_0 \cdot t / L$ , poate fi  $\infty$ . Astfel, nu se poate aplica o tensiune continuă la bornele unei bobine (având rezistență neglijabilă, un inductor ideal în c.c. reprezentă un scurtcircuit).

Remark: Assuming  $t \rightarrow \infty$ , the first component of the current  $U_0 \cdot t / L$ , could be  $\infty$ . Thus, it is forbidden to apply d.c. voltage across an inductance (having negligible resistance, an ideal inductance represents a short-circuit).

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$i(t) = \frac{U_0 \cdot t}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \frac{U_k}{\omega_k L} \sin(\omega_k t + \varphi_{u_k} - \frac{\pi}{2})$$

$$i = \frac{1}{L} \int u dt$$

$$\frac{U_0}{L} \cdot t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\rightarrow \infty}$$

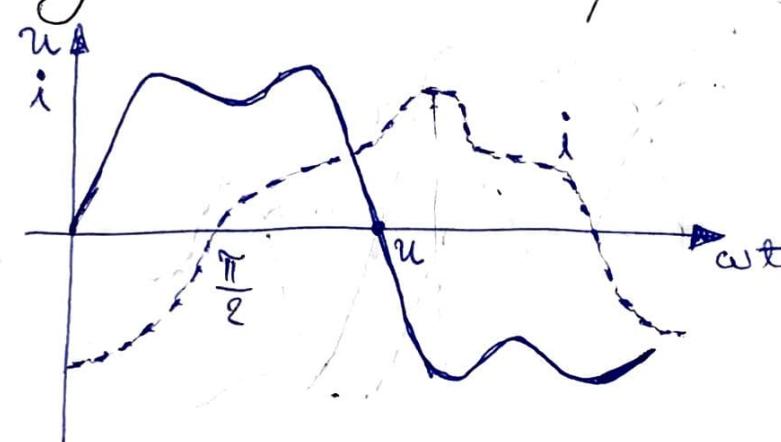
$$I_k = \frac{U_k}{\omega_k L}; \quad \varphi_R = \varphi_{u_k} - \varphi_{i_k} = \frac{\pi}{2}$$

(19)

$$\Rightarrow i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k \sqrt{2}}{R\omega L} \sin\left(k\omega t + \delta_{uk} - \frac{\pi}{2}\right)$$

Amplitudinea armonicilor de curent scade odată cu creșterea ordinului armonică. Se poate spune că, bineînțeleatatea formă de undă, în sensul că atenuază armonicele de tensiune.

The amplitude of the current harmonics decreases as the order of the harmonic increases. We can say that the inductor improves the waveform, in the sense that it attenuates the fluctuating harmonic components of the voltage.



c) Condensatorul ideal (Ideal capacitor)

$i(t)$

$u(t) \cap \frac{1}{C}$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

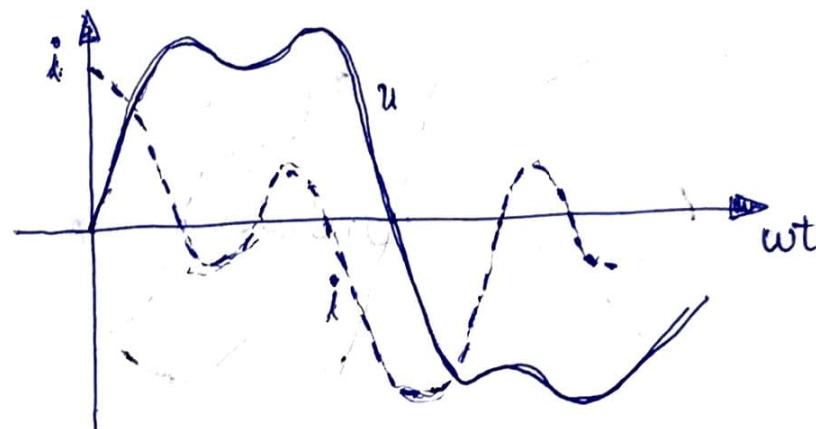
$$i = C \frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} k \omega C U_k \sin\left(k\omega t + \delta_{uk} + \frac{\pi}{2}\right)$$

20

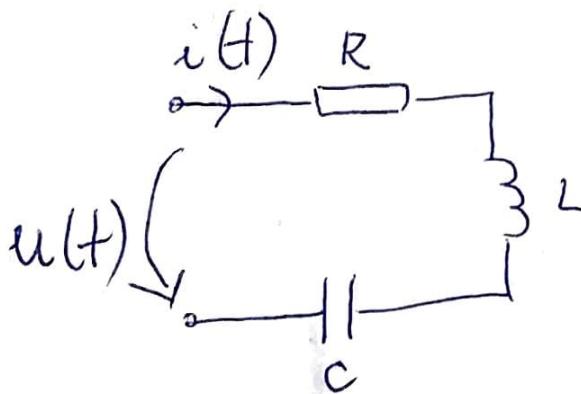
$$I_{k2} = \omega C \cdot U_2; \quad \varphi = \gamma_{U_2} - \gamma_{I_{k2}} = -\frac{\pi}{2}$$

Amplitudinea armonicilor de curenț ~~se mărește~~ crește odată cu creșterea ordinului armonicii. Se poate spune că, condensatorul înrauătășește forma de undă, în sensul că amplifică fluctuațiile armonicilor de tensiune.

The amplitude of the current harmonics increase as the order of the harmonics increases. We can say that the capacitor worsens the waveform, in the sense that it amplifies the fluctuating harmonic components of the voltage.



d) Circuitul RLC



$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sin(\omega_k t + \gamma_{uk})$$

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_k \sin(\omega_k t + \gamma_{ik})$$

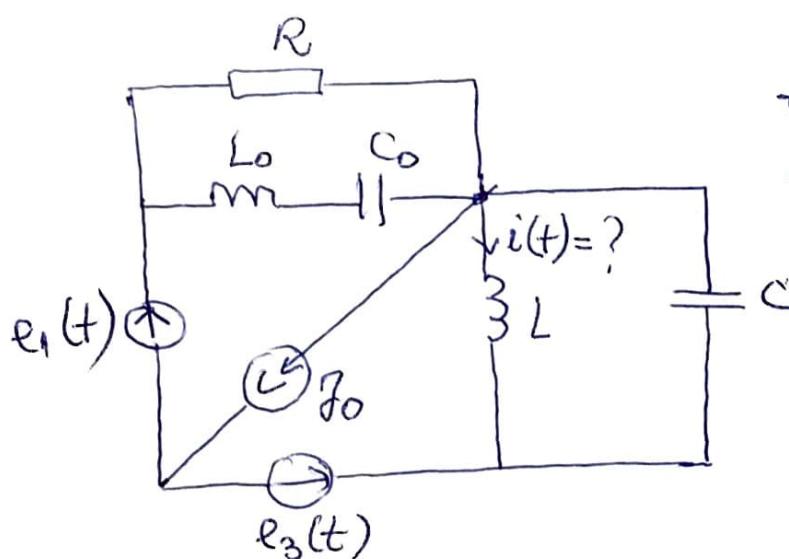
(21)  $I_2 = \frac{U_k}{\sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}} ; \quad \delta_{ik} = \delta_{uk} - \varphi_B$

 $\varphi_B = \arctg \frac{k\omega L - \frac{1}{k\omega C}}{R}$ 

Conditia de rezonanta  $\xrightarrow{\sim} X_2 = k\omega L - \frac{1}{k\omega C} = 0$   
 (Resonance condition)

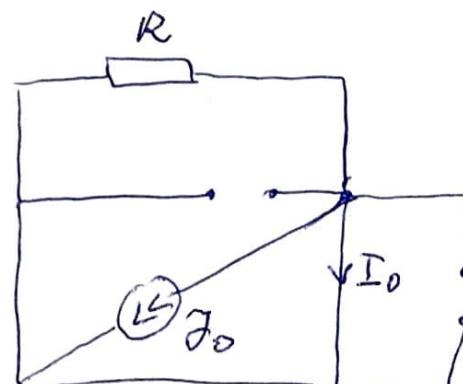
### Aplicatii

1. Sa se determine valoarea instantanea si valoarea efectiva a curentului  $i(t)$ , pt. circuitul din figura de mai jos, ce functioneaza in regim permanent sinusoidal.



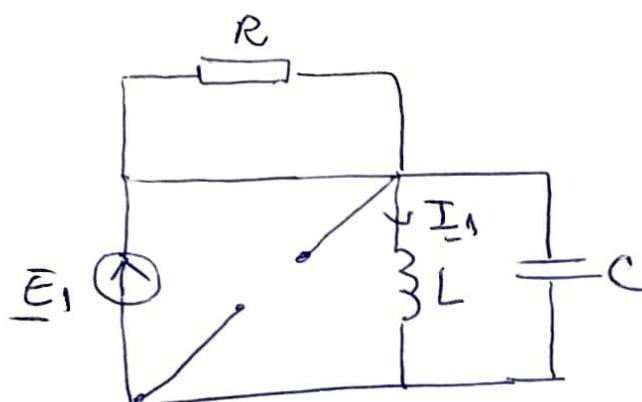
$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 &= 4 \text{ [A]} \\ e_1(t) &= 30\sqrt{2} \sin(\omega t) \text{ [V]} \\ e_3(t) &= 40\sqrt{2} \cos(3\omega t) \text{ [V]} \\ \omega L_0 &= \frac{1}{\omega C_0} = 10 \text{ [\Omega]} \\ R &= 10 \text{ [\Omega]} \\ \omega L &= 5 \text{ [\Omega]} \\ \frac{1}{\omega C} &= 45 \text{ [\Omega]} \end{aligned}$$

1) C.C.



$$I_0 = -\mathcal{I}_0 = -4 \text{ [A]}$$

(22)

2) armonica fundamentală  $k=1$ 
 $\omega L_0 = \frac{1}{\omega C_0} = 10 \Omega \Rightarrow \text{rezonanță}$   
 serie  $\Rightarrow$  se înlocuiește cu  
 scurtcircuit

$e_1(t) = 30\sqrt{2} \sin(\omega t) \rightarrow E_1 = 30 \text{ V}$

$I_1 = \frac{E_1}{j\omega L} = \frac{30}{5j} = -6j \Rightarrow i_1(t) = 6\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) [\text{A}]$

3) armonica de rang 3;  $k=3$ 

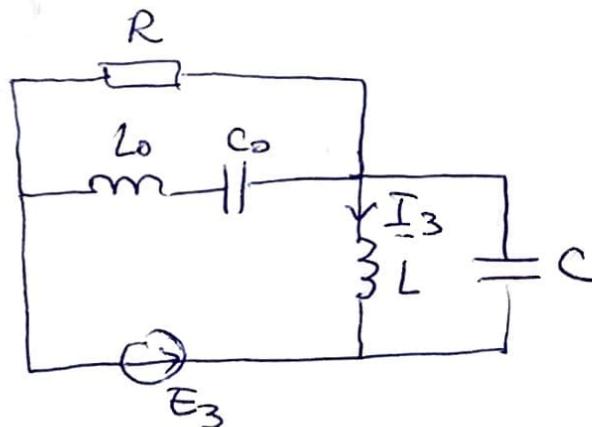
$3\omega L_0 = 30$

$\frac{1}{3\omega C_0} = \frac{10}{3}$

 $3\omega L = 15 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rezonanță paralel} \Rightarrow$ 
 $\frac{1}{3\omega C} = 15$ 
 $\Rightarrow$  se înlocuiește ac mers în gol

$e_3(t) = 60\sqrt{2} \cos 3\omega t = 60\sqrt{2} \sin\left(3\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

$\hookrightarrow E_3 = 60j$



$I_3 = -\frac{E_3}{j3\omega L} = -\frac{60j}{15j} = -4$

$i_3(t) = 4\sqrt{2} \sin\left(3\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

$i(t) = I_0 + i_1(t) + i_3(t) = -4 + 6\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + 4\sqrt{2} \sin\left(3\omega t + \frac{\pi}{2}\right) [\text{A}]$

$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{4^2 + 6^2 + 4^2} \approx 8,24 [\text{A}]$

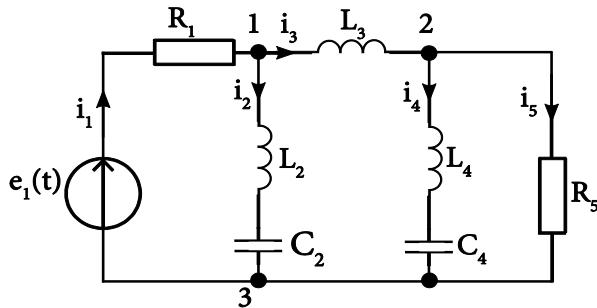
**Aplicatia 2** Se dă circuitul reprezentat în figură, cu datele numerice ale parametrilor:

$$X_{L_2} = \omega L_2 = 4[\text{k}\Omega], X_{C_2} = \frac{1}{\omega C_2} = 4[\text{k}\Omega], X_{L_3} = \omega L_3 = 3[\text{k}\Omega], R_1 = 3[\text{k}\Omega],$$

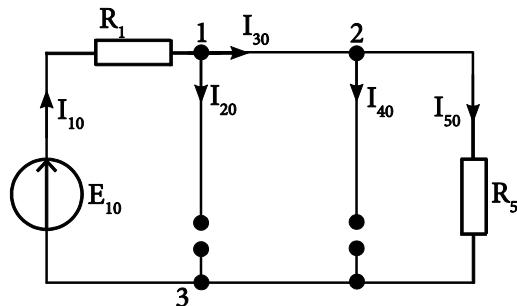
$$R_5 = 3[\text{k}\Omega], X_{L_4} = \omega L_4 = 2[\text{k}\Omega], X_{C_4} = \frac{1}{\omega C_4} = 8[\text{k}\Omega].$$

Tensiunea electromotoare  $e_1(t)$  are expresia:  $e_1(t) = 12 + 12\sqrt{2} \sin\left(10^6 t + \frac{\pi}{4}\right) + 12 \sin\left(2 \cdot 10^6 t + \frac{\pi}{2}\right)[\text{V}]$ .

Se cere: a) Să se calculeze valorile instantanee ale curentilor laturilor circuitului; b) Să se verifice bilanțul puterilor active și reactive; c) Să se determine puterile activă, reactivă, aparentă și deformantă de la bornele sursei ideale independente de tensiune. [7]



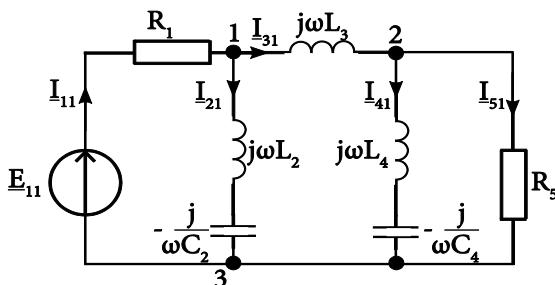
Primul indice reprezintă numărul laturii, iar al doilea ordinul armonicii.



Valorile curentilor sunt:

$$I_{10} = I_{30} = I_{50} = \frac{E_{1,0}}{R_1 + R_5} = 2[\text{mA}];$$

$$I_{20} = I_{40} = 0[\text{mA}].$$



Pentru *armonica de ordinul 1*,  $k=1$ , schema echivalentă în complex a circuitului este schițată în figura alăturată.

Impedanța complexă echivalentă  $Z_{45e1}$  a laturilor  $l_4$  și  $l_5$  conectate în paralel are expresia:

$$Z_{45e1} = \frac{R_5 \cdot j \cdot \left(\omega L_4 - \frac{1}{\omega C_4}\right)}{R_5 + j \cdot \left(\omega L_4 - \frac{1}{\omega C_4}\right)} = \frac{3 \cdot j \cdot (2-8)}{3 + j \cdot (2-8)} = -\frac{6j}{1-2j};$$

iar impedanța complexă echivalentă în raport cu bornele sursei ideale independente de tensiune  $e_1$ , corespunzătoare armonicii fundamentale, are expresia:

$$Z_{el} = R_1 + \frac{\left(j\omega L_3 + Z_{45e1}\right) \cdot \left(j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C_2}\right)}{j\omega L_3 + Z_{45e1} + j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C_2}} = 3 + \frac{\left(3j - \frac{6j}{1-2j}\right) \cdot (4j - 4j)}{3j - \frac{6j}{1-2j} + 4j - 4j} = 3.$$

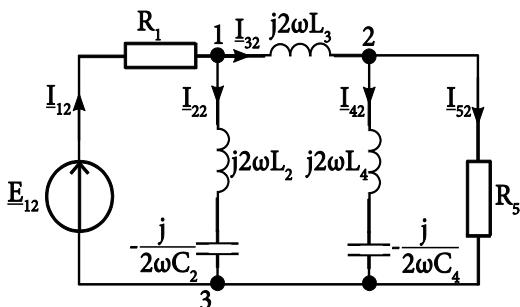
Același rezultat se obține direct, dacă se observă că latura  $l_2$  este la rezonanță pe armonica fundamentală. Prin urmare, valoarea complexă a intensității curentului din latura  $l_1$ , corespunzătoare fundamentaliei este:

$$I_{11} = \frac{E_{11}}{Z_{e1}} = \frac{12 \cdot e^{\frac{j\pi}{4}}}{3} = 4 \cdot e^{\frac{j\pi}{4}} \Rightarrow i_{11}(t) = 4\sqrt{2} \sin\left(10^6 t + \frac{\pi}{4}\right) [\text{mA}].$$

Ceilalți curenți au expresiile:

$$I_{21} = I_{11} = 4e^{\frac{j\pi}{4}} \Rightarrow i_{21}(t) = 4\sqrt{2} \sin\left(10^6 t + \frac{\pi}{4}\right) [\text{mA}];$$

$$I_{31} = I_{41} = I_{51} = 0 \Rightarrow i_{31}(t) = i_{41}(t) = i_{51}(t) = 0 [\text{mA}].$$



Pentru *armonica de ordinul doi*,  $k=2$ , schema echivalentă în complex a circuitului este cea din figura alăturată. Impedanța complexă echivalentă  $Z_{45e2}$  a laturilor  $l_4$  și  $l_5$  conectate în paralel are expresia:

$$Z_{45e2} = \frac{R_5 \cdot j \cdot \left(2\omega L_4 - \frac{1}{2\omega C_4}\right)}{R_5 + j \cdot \left(2\omega L_4 - \frac{1}{2\omega C_4}\right)} = \frac{3 \cdot j \cdot (4-4)}{3 + j \cdot (4-4)} = 0;$$

iar impedanța complexă echivalentă în raport cu bornele sursei ideale independente de tensiune  $e_1$ , corespunzătoare armonicii de ordinul doi este:

$$Z_{e2} = R_1 + \frac{(j2\omega L_3 + Z_{45e2}) \cdot \left(j2\omega L_2 - \frac{j}{2\omega C_2}\right)}{j2\omega L_3 + Z_{45e2} + j2\omega L_2 - \frac{j}{2\omega C_2}} = 3 + \frac{6j(8j-2j)}{6j+8j-2j} = 3 + 3j.$$

Deci valoarea complexă a intensității curentului din latura  $l_1$ , corespunzătoare armonicii de ordinul doi este:

$$I_{12} = \frac{E_{12}}{Z_{e2}} = \frac{6\sqrt{2}e^{\frac{j\pi}{2}}}{3\sqrt{2}e^{\frac{j\pi}{4}}} = 2e^{\frac{j\pi}{4}} \Rightarrow i_{12}(t) = 2\sqrt{2} \sin\left(2 \cdot 10^6 t + \frac{\pi}{4}\right) [\text{mA}].$$

Conform regulii divizorului de curent rezultă:

$$I_{22} = I_{12} \cdot \frac{j2\omega L_3 + Z_{45e2}}{j2\omega L_3 + Z_{45e2} + j2\omega L_2 - \frac{j}{2\omega C_2}} = 1e^{\frac{j\pi}{4}} \Rightarrow i_{22}(t) = \sqrt{2} \sin\left(2 \cdot 10^6 t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Din prima teoremă a lui Kirchhoff în complex, aplicată nodului 1 se obține:

$$I_{32} = I_{12} - I_{22} = 1 \cdot e^{\frac{j\pi}{4}} \Rightarrow i_{32}(t) = \sqrt{2} \sin\left(2 \cdot 10^6 t + \frac{\pi}{4}\right) [\text{mA}].$$

Deoarece în latura  $l_4$  este în rezonanță pe armonica doi, avem:

$$I_{52} = 0 \Rightarrow i_{52}(t) = 0[\text{mA}]; I_{42} = I_{32} = e^{\frac{j\pi}{4}} \Rightarrow i_{42}(t) = \sqrt{2} \sin\left(2 \cdot 10^6 t + \frac{\pi}{4}\right)[\text{mA}].$$

Aplicând teorema superpoziției se obțin curenții din laturi:

$$i_1(t) = I_{10} + i_{11}(t) + i_{12}(t) = 2 + 4\sqrt{2} \sin\left(10^6 t + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2} \sin\left(2 \cdot 10^6 t + \frac{\pi}{4}\right)[\text{mA}];$$

$$i_2(t) = I_{20} + i_{21}(t) + i_{22}(t) = 4\sqrt{2} \sin\left(10^6 t + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(2 \cdot 10^6 t + \frac{\pi}{4}\right)[\text{mA}];$$

$$i_3(t) = I_{30} + i_{31}(t) + i_{32}(t) = 2 + \sqrt{2} \sin\left(2 \cdot 10^6 t + \frac{\pi}{4}\right)[\text{mA}];$$

$$i_4(t) = I_{40} + i_{41}(t) + i_{42}(t) = \sqrt{2} \sin\left(2 \cdot 10^6 t + \frac{\pi}{4}\right)[\text{mA}];$$

$$i_5(t) = I_{50} + i_{51}(t) + i_{52}(t) = 2[\text{mA}].$$

b) Puterea activă cedată de sursa independentă de tensiune  $e_1$  este:

$$P_g = E_{10}I_{10} + E_{11}I_{11} \cos \varphi_{11} + E_{12}I_{12} \cos \varphi_{12} = 84[\text{mW}].$$

Puterea reactivă cedată de această sursă are expresia:

$$Q_g = E_{11}I_{11} \sin \varphi_{11} + E_{12}I_{12} \sin \varphi_{12} = 12 \cdot 4 \cdot 0 + 6 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12[\text{mVAr}].$$

Puterea activă consumată în rezistoarele circuitului este:

$$P_R = R_1 I_1^2 + R_5 I_5^2 = 3(4+16+4) + 3(4+0+0) = 72+12=84[\text{mW}],$$

iar puterea reactivă consumată de elementele reactive ale circuitului are expresia:

$$\begin{aligned} Q_X &= \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) I_{21}^2 + \omega L_3 I_{31}^2 + \left(\omega L_4 - \frac{1}{\omega C_4}\right) I_{41}^2 + \left(2\omega L_2 - \frac{1}{2\omega C_2}\right) I_{22}^2 + \\ &+ 2\omega L_3 I_{32}^2 + \left(2\omega L_4 - \frac{1}{2\omega C_4}\right) I_{42}^2 = 12[\text{mVAr}]. \end{aligned}$$

Deci:  $P_g = P_R = 84[\text{mW}]$  și  $Q_g = Q_X = 12[\text{mVAr}]$ .

c)  $P_{e_1} = P_g = 84[\text{mW}]$ ;  $Q_{e_1} = Q_g = 12[\text{mVAr}]$ ;

$$S_{e_1} = E_1 I_1 = \sqrt{12^2 + 12^2 + 2 \cdot 6^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = 24\sqrt{15}[\text{mVA}];$$

$$D_{e_1} = \sqrt{S_{e_1}^2 - P_{e_1}^2 - Q_{e_1}^2} = \sqrt{24^2 \cdot 15 - 84^2 - 12^2} = 4\sqrt{83}[\text{mVAd}].$$

Interpretare: Din rezolvarea problemei se constată că laturile paralel LC acționează ca elemente de supresie pentru curenții armonici, adică absorb acești curenți.