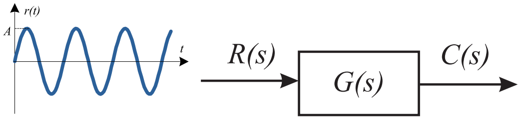
Răspunsul în frecvenţă. Aplicaţii

Paula Raica
Departmentul de Automatică
Str. Dorobantilor 71-73, sala C21, tel: 0264 - 401267
Str. Baritiu 26-28, sala M14, tel: 0264 - 401239
email: Paula.Raica@aut.utcluj.ro

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Introducere



semnalul de intrare: $r(t) = A \sin \omega t$

Răspunsul în frecvență:

$$c_{ss}(t) = A \underbrace{|G(j\omega)|}_{M} \sin(\omega t + \underbrace{\angle G(j\omega)}_{\varphi})$$

- Modulul: $M = |G(j\omega)|$
- Faza: $\varphi = \angle G(j\omega)$

Specificațiile răspunsului în frecvență

Se consideră un sistem de ordinul 2:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$$

Funcția de transfer în $j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n}(j\omega)^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}(j\omega) + 1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + 2j\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

cu modulul și faza:

$$M = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}, \quad \varphi = \angle G(j\omega) = atan\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

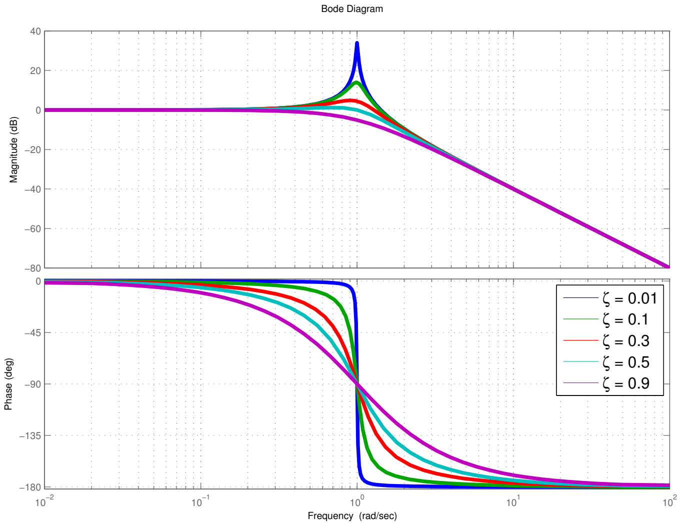
Pulsația de rezonanță

- Dacă $M = |G(j\omega)|$ are o valoare maximă la o anumită pulsație, aceasta este numită *pulsație de rezonanță*.
- Maximul modulului $M = \max |G(j\omega)|$ va apare dacă expresiade la numitor are un minim. Pulsația de rezonanță ω_r se obține din $dM/d\omega = 0$:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

  pentru $0 \leq \zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ (pentru că expresia de sub radical trebuie să fie pozitivă pentru valori reale ale pulsației ω)
- Observați că $\zeta \to 0, \quad \omega_r \to \omega_n$
- Pentru $\zeta > 0.707$ nu există un vârf al modulului: $M = |G(j\omega)|$ descrește monoton cu ω.

Exemplu. Diferite valori ale factorului de amortizare



C

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2+0.02s+1}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2+0.2s+1}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{s^2+0.6s+1}$$

$$G_4(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$

$$G_5(s) = \frac{1}{s^2+1.8s+1}$$

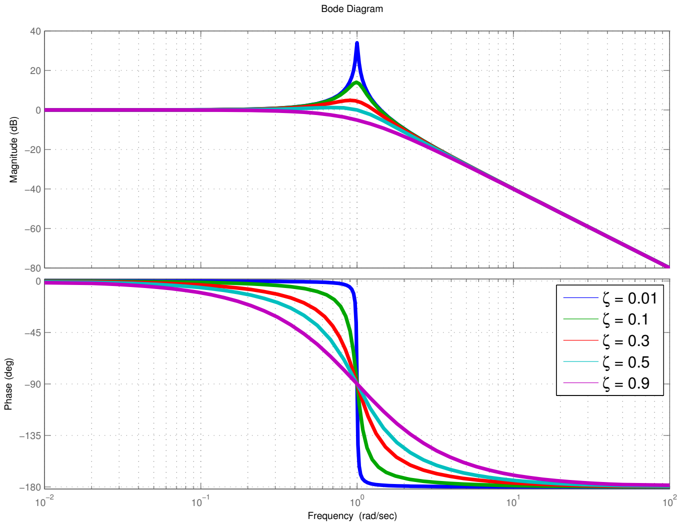
Pulsația de rezonanță

- Valoarea maximă a modulului M_r apare la pulsația de rezonanță ω_r.
- Valoarea modulului la pulsația de rezonanță se obține înlocuind ω_r în expresia lui M.
- Pentru $0 \leq \zeta \leq 0.707$:

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- Pentru $0.707 \leq \zeta \leq 1$: $M_r = 1$
- Dacă $\zeta \to 0$, $M_r \to \infty$.
- Modulul la pulsația de rezonanță este un indicator al stabilității relative a sunui sistem. O valoare mare a M_r indică prezența unei perechi de poli complex conjugați cu factor de amortizare mic.

Exemplu. Diferite valori ale factorului de amortizare



$$G_1(s) = \frac{1}{s^2+0.02s+1}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2+0.2s+1}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{s^2+0.6s+1}$$

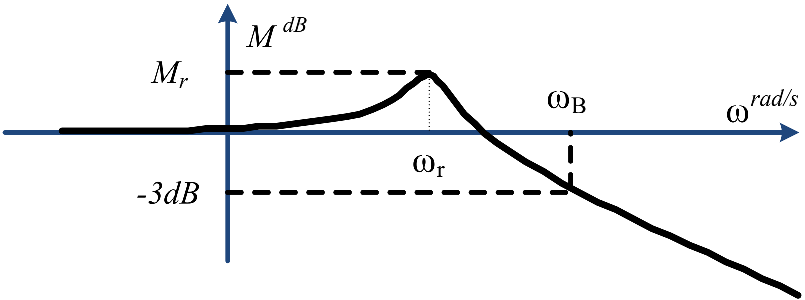
$$G_4(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$

$$G_5(s) = \frac{1}{s^2+1.8s+1}$$

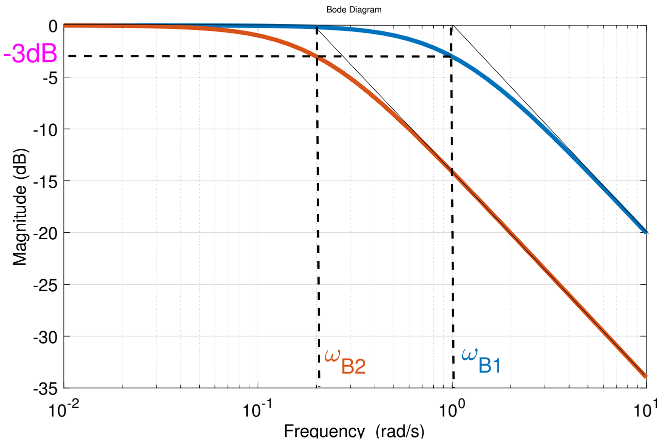
c

Lățimea de bandă

- Lățimea de bandă = pulsația la care modulul scade sub -3 dB.
- *Lățimea de bandă* ω_B este o măsură a abilității sistemului de a urmări un semnal de intrare.



Lățimea de bandă. Exemplu



- Albastru

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$T_1 = 1$$

$$\omega_{B1} = 1\ rad/s$$

- Roșu

$$G_2(s) = \frac{1}{5s+1}$$

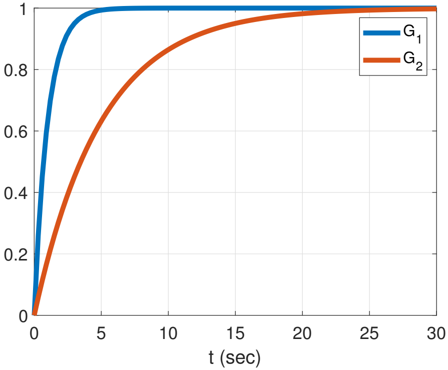
$$T_2 = 5$$

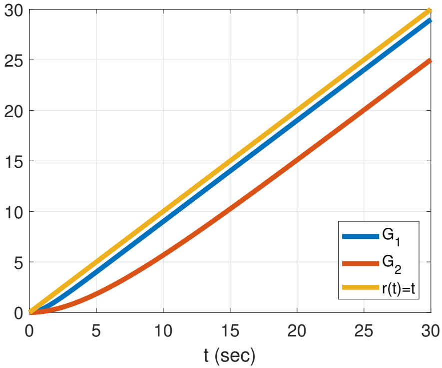
$$\omega_{B2} = 1/5 = 0.2\ rad/s$$

Sistemul 1 are o lățime de bandă mai mare decât sistemul 2.

Lățimea de bandă. Exemplu

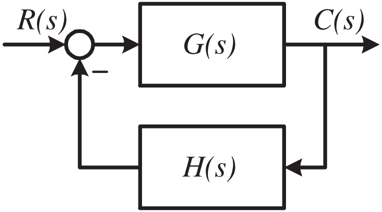
Un sistem cu o lățime de bandă mai mare are un răspuns mai rapid și urmărește mai precis un semnal de intrare.





Stabilitatea în domeniul frecvență

- Un criteriu de stabilitate în domeniul frecvență stabilește legătura între stabilitatea unui sistem **în buclă închisă** și răspunsul în frecvență al **sistemului deschis**.
- Problema este determinarea stabilității *sistemului închis* din diagrama Bode a *sistemului deschis*.
- Se consideră sistemul în buclă închisă din figură:



Stabilitatea în domeniul frecvență

- Funcția de transfer în buclă închisă:

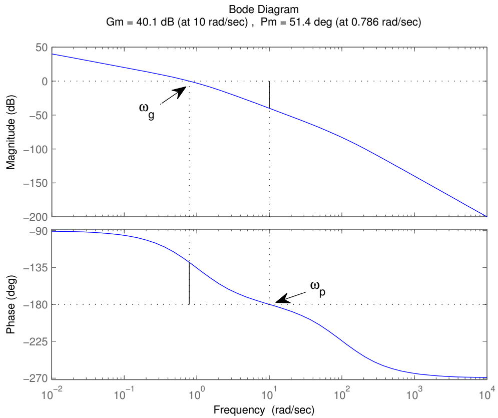
$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

- Funcția de transfer în buclă deschisă: $G(s)H(s) = GH(s)$.
- Un punct de pe axa imaginară $s = j\omega$ va fi o soluție a ecuației caracteristice (sistemul închis e la limita de stabilitate) dacă $|GH(j\omega)| = 1$ și $\angle GH(j\omega) = \pm 180^o$.
- Avem acces la $|GH(j\omega)|$ și $\angle GH(j\omega)$ din diagrama Bode: se determină intersecția cu axa imaginară determinând pulsațiile ω (dacă există) de pe diagramă, care satisfac condițiile:

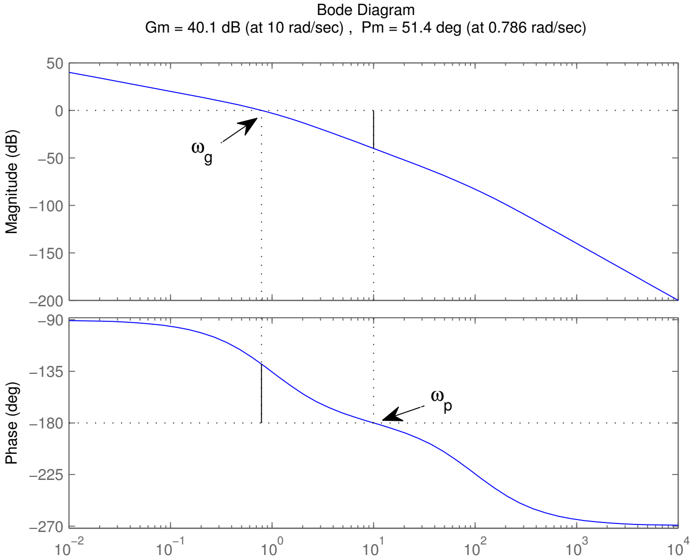
$$|GH(j\omega)| = 1 \quad \text{și} \quad \angle GH(j\omega) = \pm 180^o$$

Stabilitatea în domeniul frecvență

- **Pulsația de tăiere**: Este pulsația ω_g la care $|GH(j\omega_g)| = 1$ (sau echivalent, $20\log_{10}|GH(j\omega_g)| = M^{dB}(\omega_g) = 0$).
- **Pulsația la care faza ajunge la $\pm 180^o$**: Pulsația ω_p pentru care $\angle GH(j\omega_p) = \pm 180^o$.



Stabilitatea în domeniul frecvență

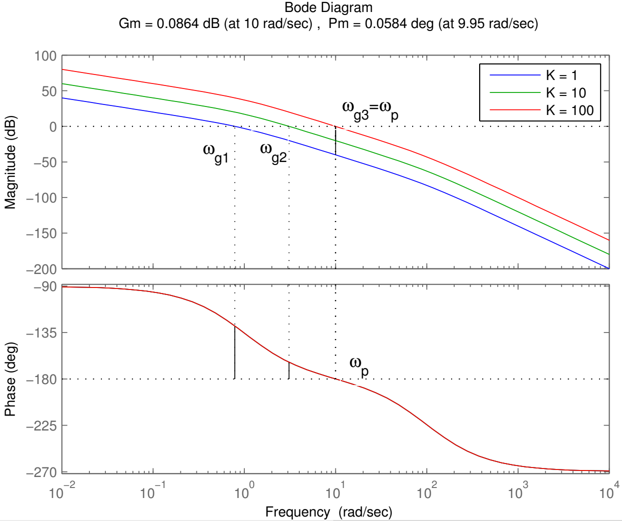


Stabilitatea în domeniul frecvență

Exemplu. Se consideră un sistem în buclă închisă cu funcția de transfer a buclei deschise::

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+1)(\frac{1}{100}s+1)}$$

Pentru $K = 1,\ 10,\ 100$, diagrama Bode este:



Stabilitate relativă

- **Marginea de câștig**: este numărul cu care K se poate înmulți înainte ca $|KGH(j\omega_p)| = 1$, sau $20log|KGH(j\omega_p)| = M^{dB}(\omega_p) = 0dB$ (adică pulsația de tăiere este egală cu pulsația la care faza ajunge la -180^o).
- Cu alte cuvinte, *marginea de câștig* este inversa modulului $|GH(j\omega)|$ pentru pulsația la care faza ajunge la -180^o.
- Marginea de câștig arată cât de mult se poate crește factorul de proporționalitate înainte ca sistemul să devină instabil.
- **Marginea de fază**: este cantitatea cu care faza la ω_g depășește -180^o.

- **Marginea de câștig** K_g:

$$K_g = \frac{1}{|GH(j\omega_p)|}, \quad \text{pentru} \quad \angle GH(j\omega_p) = -180^o$$

sau, în scară logaritmică:

$$K_g^{dB} = -M^{dB}(\omega_p)$$

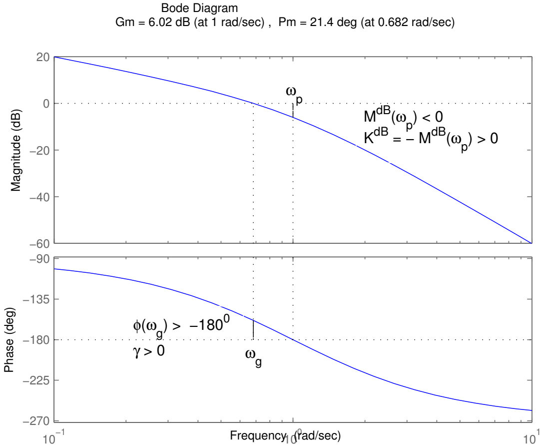
- **Marginea de fază,** γ:

$$\gamma = 180^o + \angle GH(j\omega_g), \quad \text{pentru} \quad M(\omega_g) = 1, \quad \text{sau} \quad M^{dB}(\omega_g) = 0$$

Un sistem stabil are marginea de câștig (în dB) și marginea de fază pozitive:
$K_g^{dB} > 0, \quad \gamma > 0$

Sistem stabil

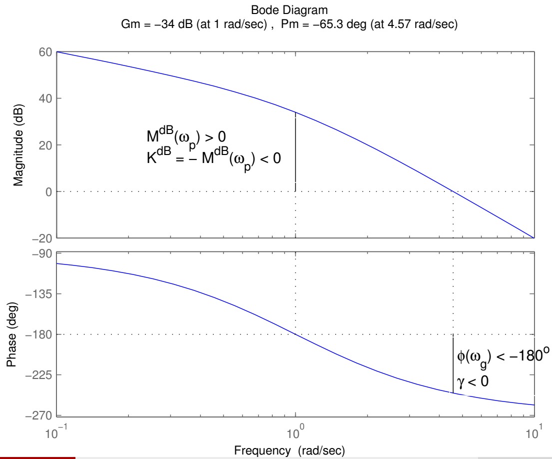
Se consideră un sistem în **buclă închisă** cu funcția de transfer în **buclă deschisă**:
$GH(s) = \dfrac{1}{s(s+1)^2}$. Diagrama Bode pentru sistemul deschis este:



Sistem instabil

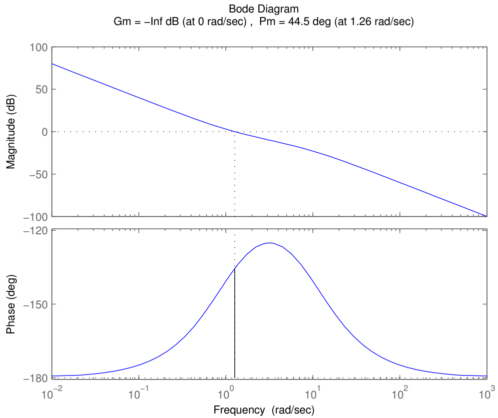
Se consideră un sistem în **buclă închisă** cu funcția de transfer în **buclă deschisă**:

$GH(s) = \dfrac{100}{s(s+1)^2}$ Diagrama Bode pentru sistemul deschis este:



Sistem stabil

Funcția de transfer în buclă deschisă: $GH(s) = \dfrac{10k(s+1)}{s^2(s+10)}$. Diagrama Bode pentru $k = 1$:



Margine de câștig infinită (nu există)!

Exerciţiu

Se consideră un sistem cu reacie negativă unitară cu funcţia de transfer în buclă deschisă: $G(s) = \dfrac{a(s+1)}{s^2}$. Determinaţi valoarea parametrului a astfel încât marginea de fază să fie 45^o.

- Marginea de fază este:

$$\gamma = 180^o + \angle G(j\omega_g), \quad \text{pentru o pulsație la care:} \;\; M(\omega_g) = |G(j\omega_g)| = 1$$

- Se înlocuieşte $s \to j\omega$ în funcţia de transfer:

$$G(j\omega) = \frac{a(j\omega + 1)}{(j\omega)^2}$$

- Faza:

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \angle a + \angle(j\omega + 1) - 2\angle j\omega = \arctan\omega - 2 \cdot 90^o$$

Exerciţiu

- Marginea de fază:

$$\gamma = 180^o + \varphi = \arctan\omega = 45^o \quad \Rightarrow \quad \omega = 1 = \omega_g$$

- Modulul la ω_g:

$$M(\omega_g) = |G(j\omega_g)| = \frac{a\sqrt{\omega_g^2 + 1}}{\omega_g^2} = \frac{a\sqrt{2}}{1} = 1$$

- Parametrul este $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.