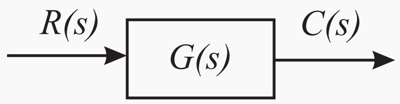
Teoria sistemelor. Laborator 5: Soluţii la probleme selectate



Pentru un sistem cu funcţia de transfer $G(s)$, cu un semnal de intrare sinusoidal: $r(t) = A \sin \omega t$ semnalul de ieşire **în regim staţionar** este:

$$c_{ss}(t) = A \underbrace{|G(j\omega)|}_{M} \sin(\omega t + \underbrace{\angle G(j\omega)}_{\varphi})$$

- $M > 1$: amplitudinea ieşirii $>$ amplitudinea intrării
- $M < 1$: amplitudinea ieşirii $<$ amplitudinea intrării
- $\varphi > 0$: avans de fază
- $\varphi < 0$: întârziere de fază

Exercitiul 1. Se consideră un sistem cu funcţia de transfer:

$$G_4(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s + 10}$$

Soluţie

1. Desenaţi răspunsul sistemului la o intrare sinusoidală $r(t) = sin(t)$, cu funcţia Matlab *lsim* pentru un interval de timp $t \in [0,\ 30]$ sec.

   Funcţia *lsim* simulează şi desenează răspunsul sistemului la un semnal de intrare dat. Forma generală este:

   `lsim(SYS,U,T)`

   Funcţia va desena răspunsul unui sistem dinamic SYS la un semnal de intrare U, pentru un interval de timp T. Un script exemplu, pentru funcţia de transfer G_4 este dat mai jos.

Listing 1: sin_plots.m

```
close all
clear all
clc
% plot the system response to a sin input
t = 0:0.01:30;                          % create the time vector
input = sin(t);                         % create the sin input

G4 = tf([1 1 1], [1 1 10]);             % create the transfer function G4
lsim(G4,input,t), grid on               % simulate the response of G4 to a sin input
```

2. Analizaţi amplitudinea şi defazajul semnalului de ieşire şi comparaţi-l cu semnalul de intrare. Determinaţi dacă sistemele au avans sau întârziere de fază.

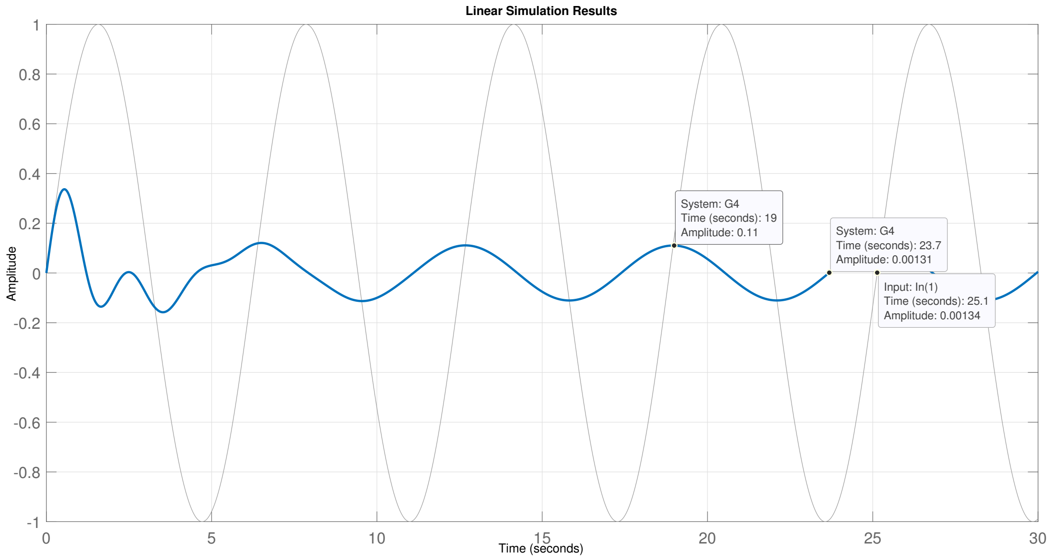


Figure 1: Răspunsul la intrare sin pentru sistemul G_4 (linie albastra). Intrarea sin(t) (linie gri)

- Calculaţi modulul $M = |G(j\omega)|$ şi faza $\varphi = \angle G(j\omega)$, unde ω este pulsaţia semnalului de intrare.
  Un script exemplu care calculează modulul şi faza lui $G(j\omega)$, unde $\omega = 1 rad/s$, este dat mai jos.

  Listing 2: mag_phase.m

```

w = 1;                              % the frequency of the input (rad/s)
s = j*w;                            % replace s by jw
M = abs((s^2+s+1)/(s^2+s+10))       % compute the magnitude of G(jw)
phi = angle((s^2+s+1)/(s^2+s+10))   % compute the phase angle of G(jw)
```

  Rezultatele pentru G_4 ar trebui să fie: $M = 0.1104$ şi $\varphi = 1.4601$.
  Dacă intrarea este $r(t) = sin(t)$, amplitudinea intrării este $A = 1$ şi pulsaţia $\omega = 1rad/s$.
  Amplitudinea ieşirii este $B = A \cdot M = 1 \cdot 0.11 = 0.11$.
- Determinaţi modulul şi faza din figura rezultată din simulare. Din Figura 1 se observă că amplitudinea ieşirii este cea calculată anterior. Defazajul între intrare şi ieşire este pozitiv (avans de fază). Din figură se poate calcula ca diferenţa între momentele de timp la care intrarea şi ieşirea trec prin 0: $\varphi = 25.1 - 23.7 = 1.4$.

3. Desenaţi diagrama Bode, cu funcţia Matlab *bode* şi citiţi de pe grafic amplitudinea şi faza dacă intrarea este $r(t) = sin(t)$.
   O diagramă Bode (cu grid) se obţine cu:

   ```
   bode(G4), grid on
   ```

   Vezi Figura 2 pentru desen.
   Dacă intrarea este $r(t) = sin(t)$, amplitudinea intrării este $A = 1$ şi pulsaţia $\omega = 1rad/s$. Din diagrama de modul, pentru $\omega = 1rad/s$ se citeşte modulul în decibeli M^{dB} şi din diagrama de fază se citeşte defazajul în grade, φ.

$$M^{dB} = -19 \quad \Rightarrow 20\log_{10} M = -19 \quad \Rightarrow \quad \log_{10} M = -\frac{19}{20} \quad \Rightarrow \quad M = 10^{-19/20} = 0.11$$

$$\varphi^{deg} = 83.9 \quad \Rightarrow \quad \varphi^{rad} = 83.9 \cdot \frac{\pi}{180} = 1.46\, rad.$$

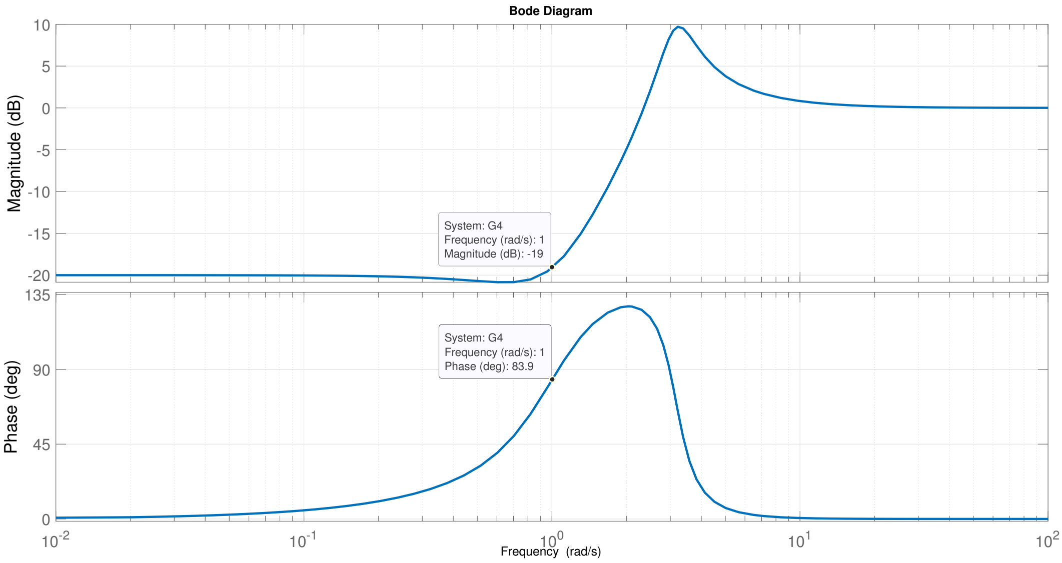


Figure 2: Diagrama Bode pentru G_4

Exerciţiul 2. 1. Schiţaţi diagrama Bode a sistemului cu funcţia de transfer:

$$G_1(s) = \frac{s^2}{(10s+1)^2}$$

2. Determinaţi pulsaţiile pentru care sistemul amplifică sau atenuează intrările sinusoidale.
3. Pentru fiecare sistem, determinaţi din diagrama de modul amplitudinea semnalului de ieşire, dacă intrarea este:

$$u_1(t) = sin(t), \qquad u_2(t) = 0.1sin(10^{-3}t), \qquad u_3(t) = 3sin(100t).$$

Soluţie

1. Schiţaţi diagrama Bode pentru:

$$G_1(s) = \frac{s^2}{(10s+1)^2} = s^2 \cdot \frac{1}{10s+1} \cdot \frac{1}{10s+1}$$

- $G_{01}(s) = s^2 = \frac{1}{s^{-2}} = \frac{k}{s^n} \quad \Rightarrow \quad k = 1, \;\; n = -2$
  - Diagrama de modul este o linie dreaptă, care:
    * are pante $-20 \cdot n = -20 \cdot (-2) = 40$ dB/dec
    * pentru $\omega = 1 = 10^0$ este egală cu $M^{dB}|_{\omega=1} = k^{dB} = 20\log_{10}(1) = 0$ dB.
  - Diagrama de fază este o linie constantă: $\phi_1 = -90 \cdot n = -90 \cdot (-2) = 180^o$.
  - Vezi Figura 3.
- $G_{02}(s) = G_{03}(s) = \frac{1}{10s+1} = \frac{1}{T_1 s + 1} \quad \Rightarrow \quad T_1 = 10$
  - Diagrama de modul:
    * asimptota la pulsaţii joase: 0 dB
    * asimptota la pulsaţii înalte are panta -20 dB/dec.
    * pulsaţia de frângere $\omega_{c1} = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{10} = 10^{-1}$ rad/s.
  - Diagrama de fază este o arctangentă , $\phi \in (0, \; -90^o)$, cu inflexiune la $(\omega_c = 10^{-1}, \; -45^o)$
  - Vezi Figura 4.

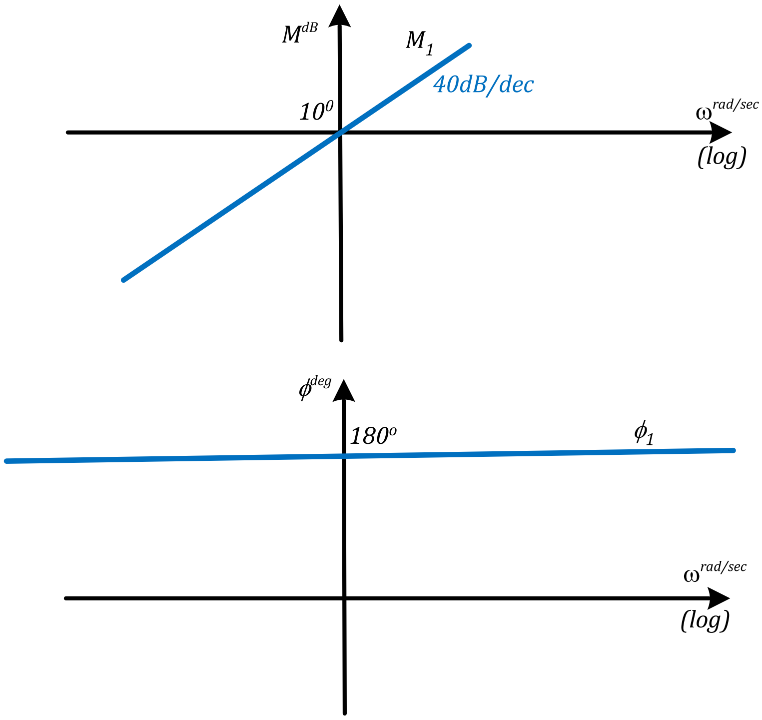


Figure 3: Diagrama BodeG_{01}

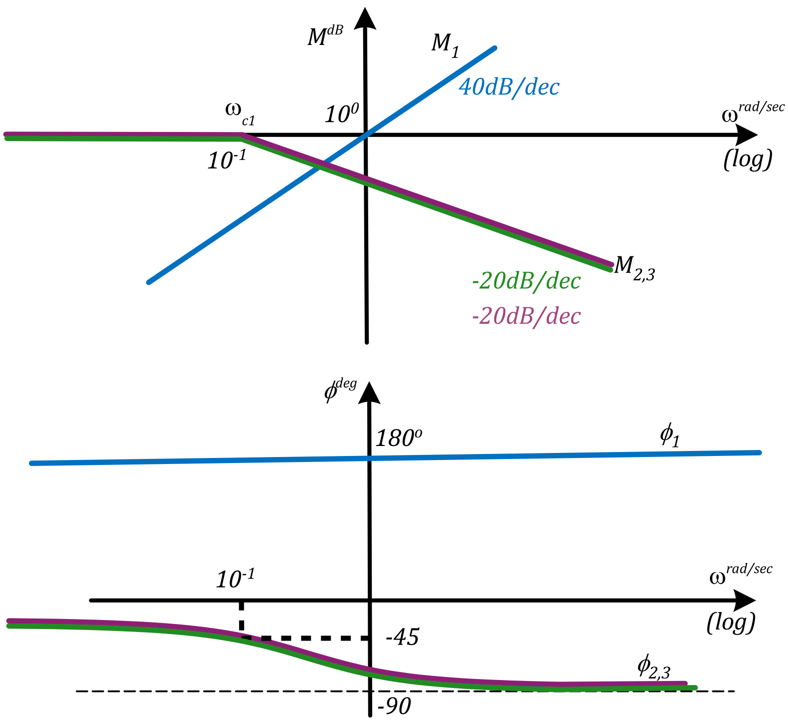


Figure 4: Diagrama Bode G_{01}, G_{02}, G_{03}

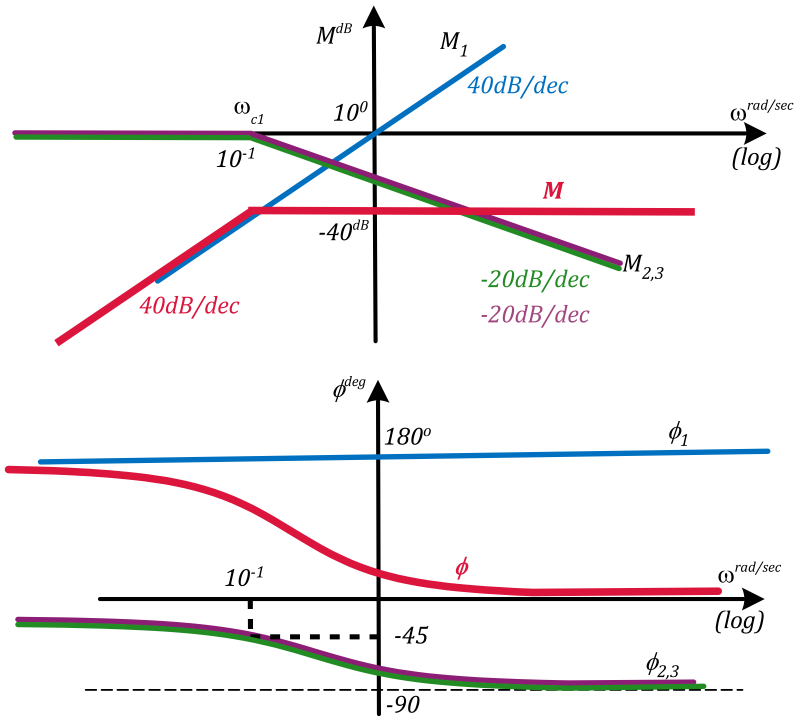


Figure 5: Diagrama Bode rezultantă $G_1(s)$

Diagrama rezultatntă este prezentată în Figura 5.

2. Determinaţi pulsaţii pentru care sistemul amplifică sau atenuează intrările sinusoidale.
   În Figura 5, observaţi că pentru toate pulsaţiile $\omega \in (0,\ \infty)$, modulul M^{dB} este negativ (desenat cu linie roşie).

$$M^{dB} < 0 \quad \Rightarrow \quad 20\log_{10} M < 0 \quad \Rightarrow \quad \log_{10} M < 0 \quad \Rightarrow \quad M < 1$$

   Toate intrările sin vor fi atenuate pentru că amplitudinea ieşirii va rezulta mai mică decât a intrării: $A \cdot M < A$.

3. Din diagrama Bode (vezi Figura 6) se determină amplitudinea ieşirii, dacă intrarea este:

   - $u_1(t) = sin(t)$: $A = 1$, $\omega = 1$ rad/s.
     Din diagrama de modul se citeşte $M^{dB}|_{\omega=10^0} = -40$ dB.

$$20\log_{10} M = -40 \quad \Rightarrow \quad \log_{10} M = -\frac{40}{20} = -2 \quad \Rightarrow \quad M = 10^{-2}$$

     iar amplitudinea ieşirii este: $A \cdot M = 1 \cdot 10^{-2} = 10^{-2}$.
   - $u_2(t) = 0.1sin(10^{-3}t)$: $A = 0.1$, $\omega = 10^{-3}$ rad/s.
     Din diagrama de modul se citeşte $M^{dB}|_{\omega=10^{-3}} = -120$ dB.

$$20\log_{10} M = -120 \quad \Rightarrow \quad \log_{10} M = -\frac{120}{20} = -6 \quad \Rightarrow \quad M = 10^{-6}$$

     iar amplitudinea ieşirii este: $A \cdot M = 0.1 \cdot 10^{-6} = 10^{-7}$.
   - $u_3(t) = 3sin(100t)$: $A = 3$, $\omega = 10^2$ rad/s.
     Din diagrama de modul se citeşte $M^{dB}|_{\omega=10^2} = -40$ dB.

$$20\log_{10} M = -40 \quad \Rightarrow \quad \log_{10} M = -\frac{40}{20} = -2 \quad \Rightarrow \quad M = 10^{-2}$$

     iar amplitudinea ieşirii este: $A \cdot M = 3 \cdot 10^{-2} = 0.003$.

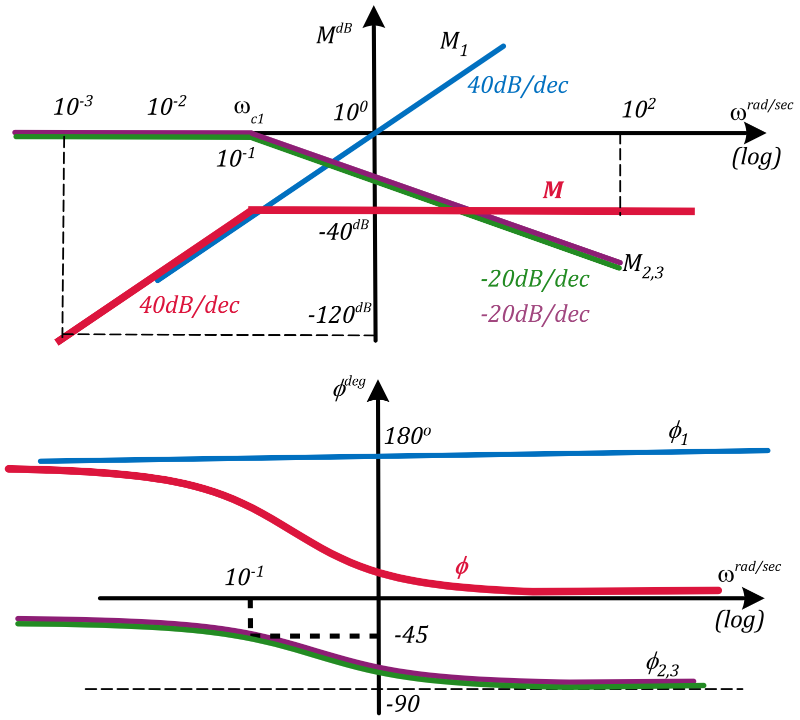


Figure 6: Diagrama Bode