5a) Să se determine formula de cuadratură de grad maxim de exactitate. Pt $f \in C^2[a,b]$ să se determine nucleul lui Peano, semnul acestuia și o evaluare a restului cu $\|f''\|_\infty$

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = A_0 f(x_0) + R(f)$$

Rezolvare

În cazul acesta funcția pondere este

$$w(x) = x^2 \;;\; w:[0,1] \to \mathbb{R}$$

Fiind două necunoscute considerăm condițiile

$$R(1) = R(x) = 0 \qquad \left(R(f) = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx - A_0 f(x_0)\right)$$

$$R(1) = \int_0^1 x^2 \cdot 1\,dx - A_0 \cdot 1 = 0$$

$$R(x) = \int_0^1 x^2 \cdot x\,dx - A x_0 = 0$$

Vom folosi: $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ și $\int_0^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$

și obținem sistemul: $\begin{cases} A_0 = \frac{1}{3} \\ A_0 x_0 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} x_0 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = \frac{1}{3} \\ x_0 = \frac{3}{4} \end{cases}$

Obținem formula de cuadratură

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{3} f\left(\frac{3}{4}\right) + R(f)$$

Mai mult

$$R(x^2) = \int_0^1 x^2 \cdot x^2\,dx - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{16} = {}^{16)}\frac{1}{5} - {}^{5)}\frac{3}{16} = \frac{x}{80} \neq 0$$

$\Rightarrow$ formula de cuadratură verifică

$$R(1) = R(x) = 0 \quad \text{și} \quad R(x^2) = \frac{1}{80} \neq 0$$

$\Rightarrow$ gradul de exactitate este 1

Pt a determina termenul rest vom folosi teorema lui Peano

"Fie $R: C^n[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcțională liniară a.î. $R(P) = 0 \ \forall P \in \Pi_{n-1}$ ($\operatorname{Ker} P = \Pi_{n-1}$). Atunci $\forall f \in C^n[a,b]$

$$R(f) = \int_a^b f^{(n)}(u)\, K(u)\, du$$ "

unde K reprezintă nucleul Peano definit prin

$$K(u) = \frac{1}{(n-1)!} R_x\left((x-u)_+^{n-1}\right), \quad u \in [a,b]$$

Indicele in R_x indică faptul că R "acționează" în raport cu variabila x (nu în raport cu u)

Mai mult, dacă nucleul K păstrează semn constant pe $[a,b]$ atunci $\exists\, \xi \in [a,b]$ a.î.

$$R(f) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} R(x^n)$$

În cazul nostru:

$$R: C^2[0,1] \to \mathbb{R}$$

$$R(f) = \int_0^1 x^2 f(x)\, dx - \frac{1}{3} f\left(\frac{3}{4}\right)$$

Avem $\operatorname{Ker}(R) = \Pi_1$ $(n-1 = 1 \Rightarrow n = 2)$

$$\Rightarrow R(f) = \int_0^1 K(u)\, f^{(2)}(u)\, du$$

unde nucleul lui Peano este dat de

$$K(u) = \frac{1}{(2-1)!} R_x\left((x-u)_+^{2-1}\right) = R\left((x-u)_+\right) = \int_0^1 x^2 (x-u)_+ \, dx - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} - u\right)_+ =$$

$$= \int_0^u x^2 \underbrace{(x-u)_+}_{=0 \ (x \le u)} dx + \int_u^1 x^2 \underbrace{(x-u)_+}_{(x-u) \ x \ge u} dx - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} - u\right)_+ = \int_u^1 x^2 (x-u)\, dx - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} - u\right)_+ =$$

$$= \int_u^1 x^3 dx - u \int_u^1 x^2 dx - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} - u\right)_+ = \frac{x^4}{4}\Big|_u^1 - u\frac{x^3}{3}\Big|_u^1 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} - u\right)_+ = \frac{1}{4} - \frac{u^4}{4} - \frac{u}{3} + \frac{u^4}{3}$$

$$- \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} - u\right)_+ = \frac{u^4}{12} - \frac{u}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} - u\right)_+ = \begin{cases} \dfrac{u^4 - 4u + 3}{12}, & u \ge \dfrac{3}{4} \\[2ex] \dfrac{u^4 - 4u + 3}{12} - \dfrac{1}{\cancel{3}} \cdot \dfrac{\cancel{3}}{4} + \dfrac{1}{3} u, & u \le \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{u^4 - 4u + 3}{12}, & u \ge \dfrac{3}{4} \\[2ex] \dfrac{u^4}{12}, & u \le \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow K(u) \ge 0 \ \forall u \in [0,1] \Rightarrow K$ nu schimbă semnul pe $[0,1] \Rightarrow \exists \xi \in [0,1]$ a.î. $R(f) = \dfrac{f^{(2)}(\xi)}{2!} R(x^2) = \dfrac{1}{160} f''(\xi)$