(1)

02.05.2018

Curs 10

ELECTROTEHNICĂ

2. Rezonanța în circuite electrice

Fenomenul de rezonanță apare doar în circuite cu elemente reactive (bobine și condensatoare).

Condiția de rezonanță este: reactanța circuitului (X) sau susceptanța (B) sunt egale cu zero.

La rezonanță, curentul de intrare este în fază cu tensiunea de intrare.

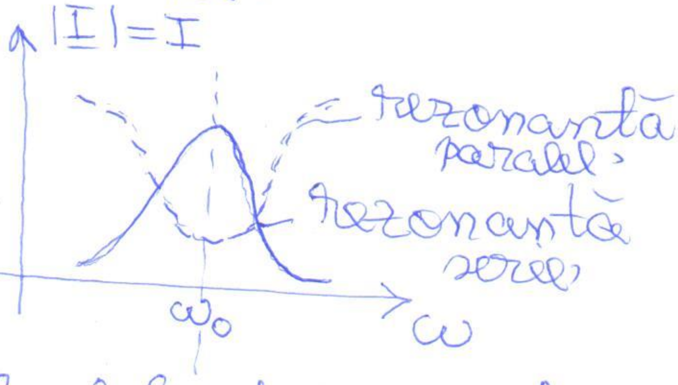
$\boxed{X=0}$ sau $\boxed{B=0}$ și $\boxed{\varphi=0}$

$X=0$ ↓ rezonanță serie

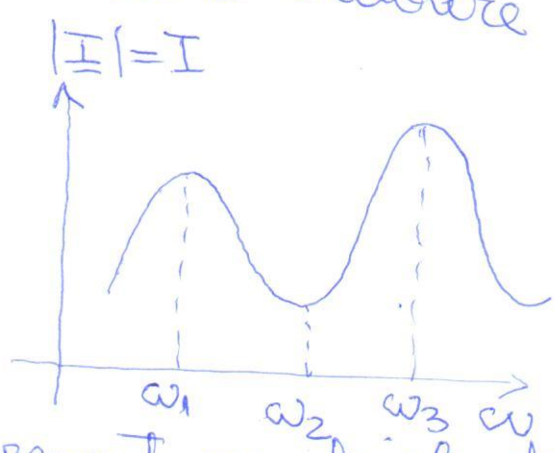
$B=0$ ↓ rezonanță paralel

φ - defazajul dintre $\underline{U}$ și $\underline{I}$

La rezonanță, curentul are o valoare extremă.



Curbele de rezonanță



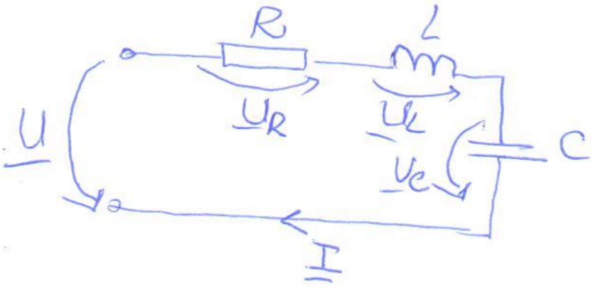
Frecvențe multiple de rezonanță

Este posibil să avem mai mult de o frecvență de rezonanță.

! După o rezonanță serie (ω_1) apare o rezonanță paralel (ω_2) și așa mai departe...

2.1. Rezonanța în circuitul serie (Rezonanța de tensiune)

Se consideră un circuit serie R, L, C:



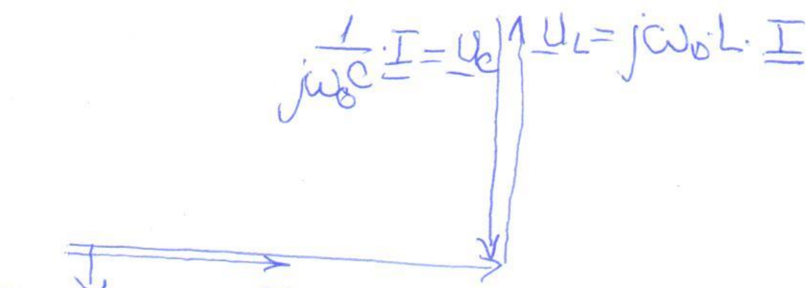
$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$$

$$\underline{U} = R\cdot\underline{I} + j\omega L\cdot\underline{I} + \frac{1}{j\omega C}\cdot\underline{I}$$

$$\underline{U} = \Big[R + j\underbrace{\Big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\Big)}_{X = X_L - X_C}\Big]\cdot\underline{I}$$

$$X = 0 \Rightarrow \boxed{\omega L = \frac{1}{\omega C}} \text{ sau } \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Diagrama fazorială a circuitului:



③

Rezonanța se poate obține fie variind frecvența tensiunii de alimentare, fie variind parametri L sau C.

Observații: 1) $\underline{U} = \underline{U}_R = R \cdot \underline{I}$

2) $\underline{Z} = R + j\underbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}_{=0}$ și $|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \underbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}_{=0}} \Rightarrow$

Z este minim

3) $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \Rightarrow I = \frac{U}{Z} \Rightarrow$ I este maxim pentru o tensiune dată

4) La rezonanță, căderea de tensiune pe bobină și pe condensator poate fi mult mai mare decât tensiunea de intrare.

$U_L = U_C \gg U \Rightarrow$ aceste tensiuni se mai numesc și <u>Supra-tensiuni</u>

$$\frac{U_L}{U} = \frac{\omega_0 L \cdot I}{R \cdot I} = \frac{L}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} > 1$$

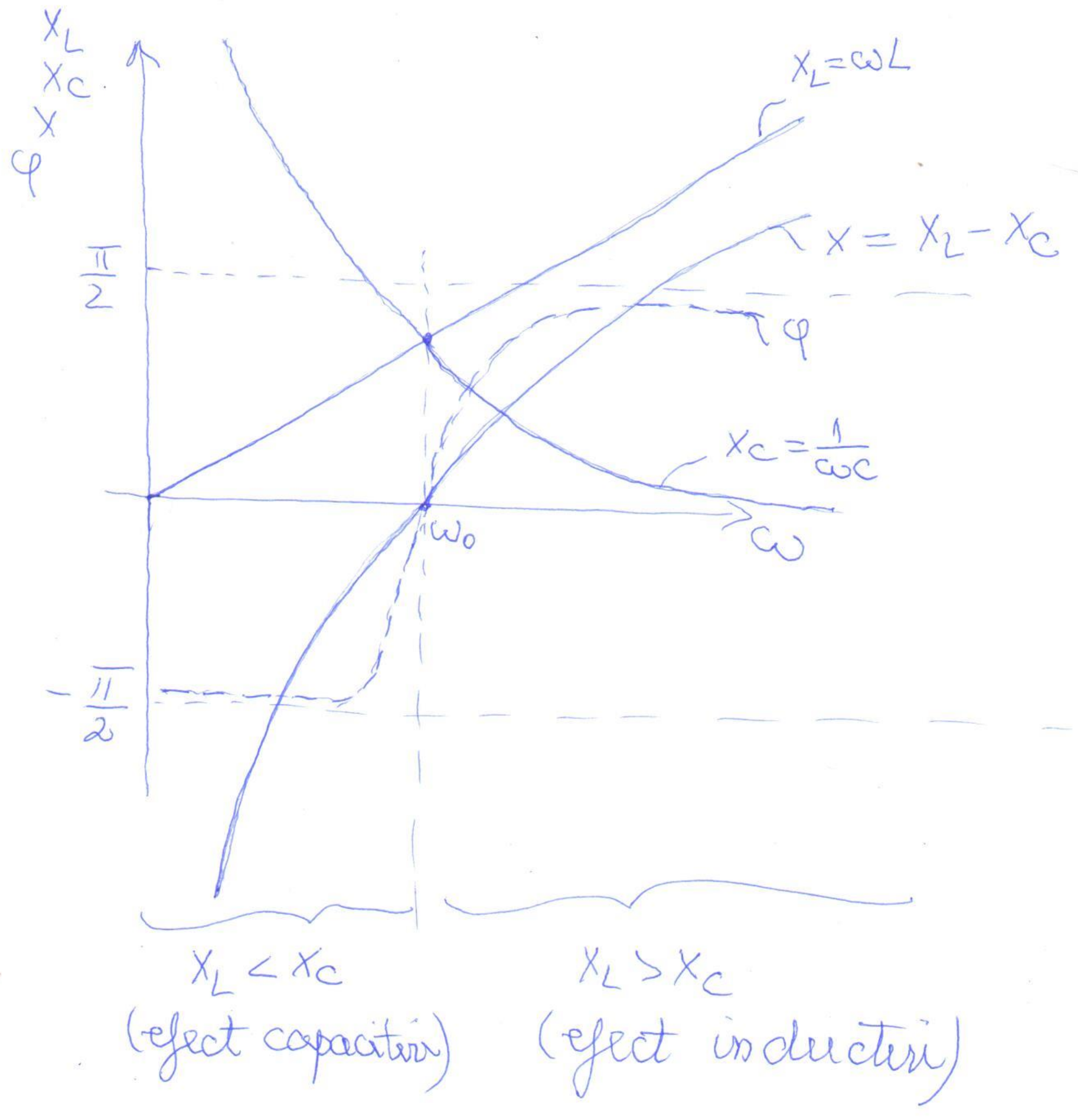
Notăm $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ - impedanța caracteristică a unui circuit serie rezonant

$\Rightarrow \rho > R$; $\boxed{Q = \frac{\rho}{R}}$ - factor de calitate

$\boxed{d = \frac{1}{Q}}$ - factor de amortizare

④ Curbele de variație parametrii - frecvență:

X_L, X_C, $X_L - X_C = X$, $\varphi = f(\omega)$



Curbele de variație tensiune - frecvență

$U_C(\omega)$; $U_L(\omega)$ și $I(\omega)$

1) $U_C = \frac{1}{\omega C} \cdot I = \frac{1}{\omega C} \cdot \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = U_C(\omega)$

⑤

$$\frac{\partial U_C}{\partial \omega} = 0 \Longrightarrow \omega_C = \omega_0 \sqrt{\frac{2-d^2}{2}}$$

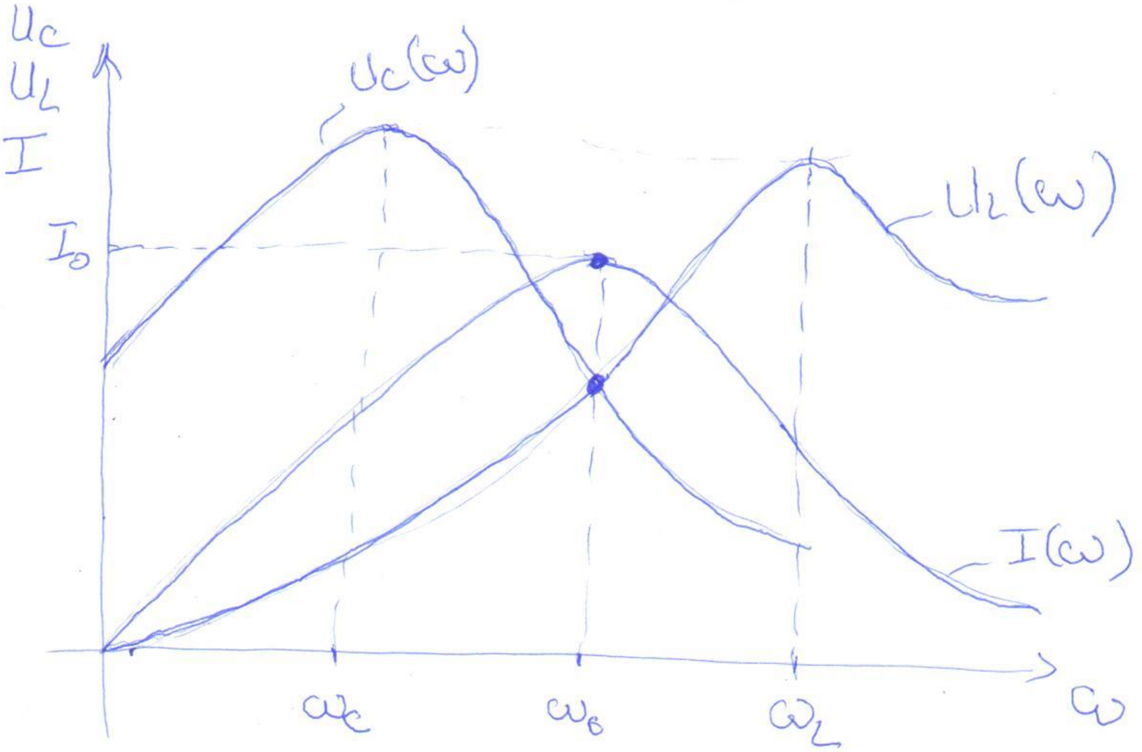
$\uparrow$ $U_C - max$

2) $U_L = \omega L \cdot I = \omega L \cdot \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = U_L(\omega)$

$$\frac{\partial U_L}{\partial \omega} = 0 \Longrightarrow \omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{2-d^2}}$$

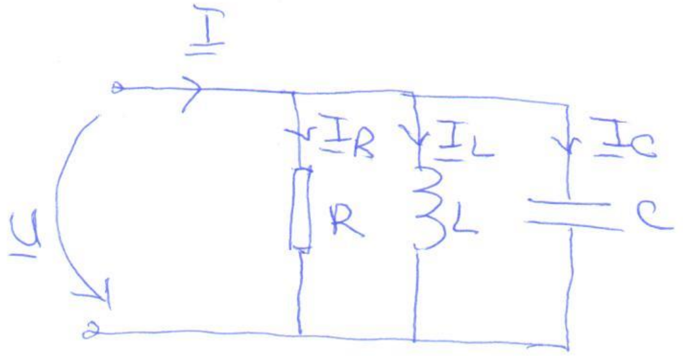
$\uparrow$ $U_L - max.$

3) $I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$



2.2. Rezonanța în circuitul paralel (Rezonanța curenților)

Se consideră un circuit R, L, C - paralel



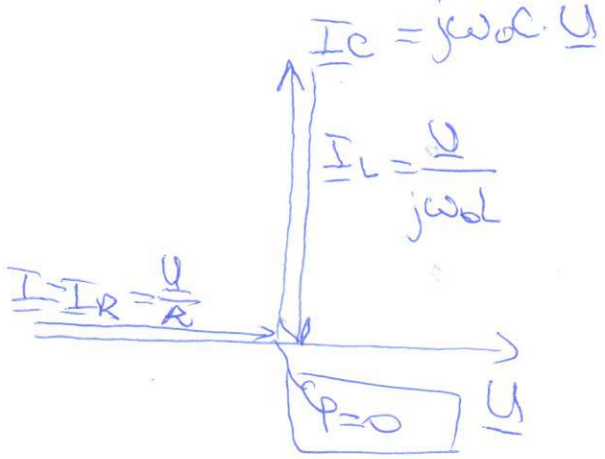
$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} + \frac{\underline{U}}{j\omega L} + \underline{U} \cdot j\omega C$$

$$\underline{I} = \underline{U}\left[G - j\underbrace{\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)}_{B}\right]$$

$$B = 0 \Rightarrow \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Diagrama fazorială pt. rezonanța curenților



Observații:

1. $\underline{I} = \underline{I}_R = \frac{\underline{U}}{R}$

$$I = U \cdot \underbrace{\sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}_{Y\text{-min.}} \Rightarrow I\text{-min } (I = U \cdot G)$$

(7)

2. $I_C = I_L$ (curenții sunt egali în modul, dar sunt în antifază)

3. $I_C = I_L >> I$. Dacă acești curenți sunt mult mai mari decât cel de intrare, aceștia se numesc supracurenți.

$$\frac{I_C}{I} = \frac{\omega_0 C \cdot U}{G \cdot U} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot C}{G} = \frac{\sqrt{\frac{C}{L}}}{G} = \frac{\gamma}{G}$$

Notăm $\sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma$; $R > \gamma > G$

$\boxed{Q = \frac{\gamma}{G}}$ - factor de calitate

$\boxed{d = \frac{1}{Q}}$ - factor de amortizare

Curbele de variație pt. rezonanța curenților.

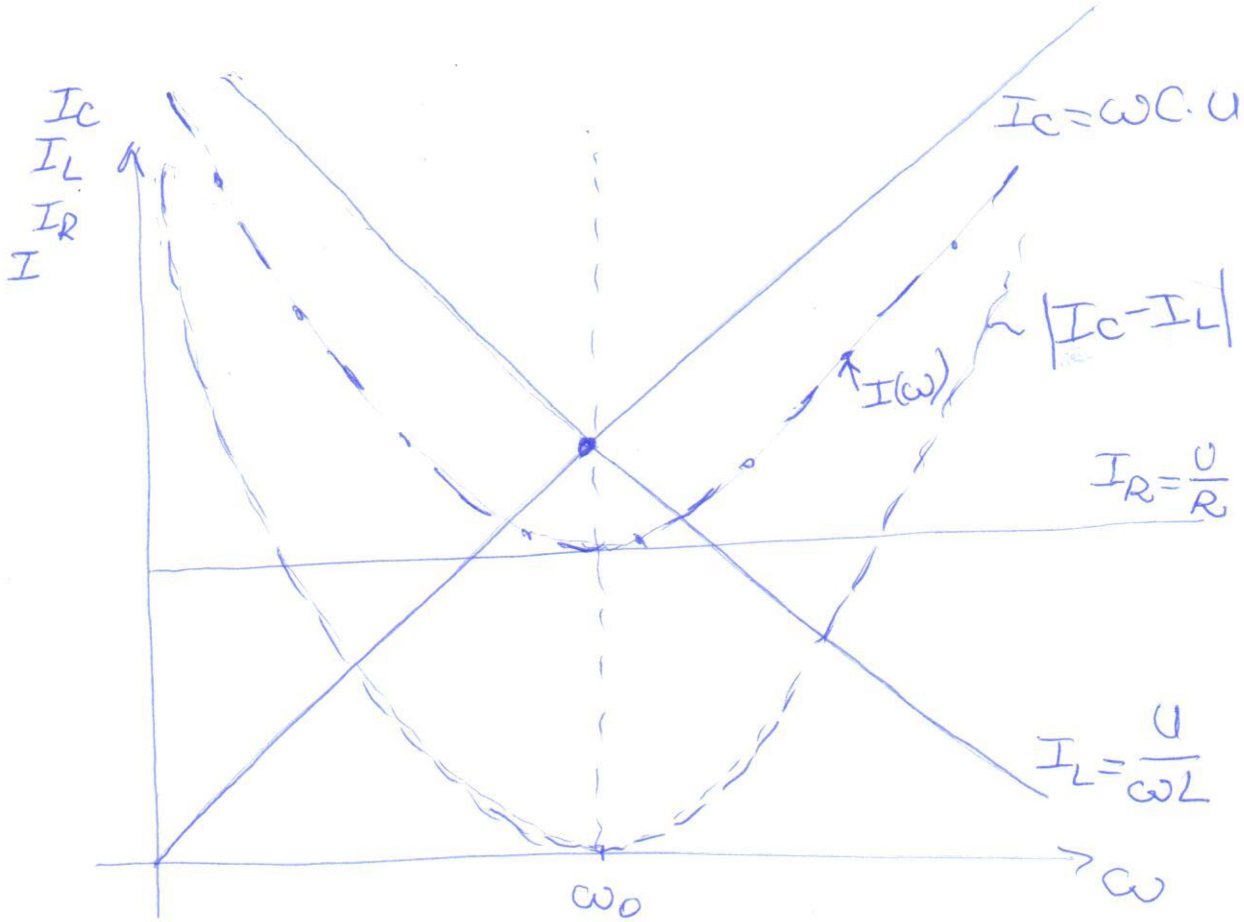
$I_C(\omega) = \omega C \cdot U$

$I_L(\omega) = \frac{U}{\omega L}$

$I_R = \frac{U}{R}$

$I(\omega) = U \cdot \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$

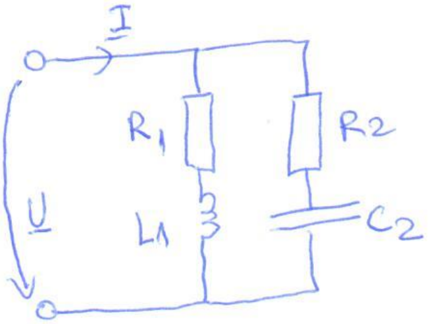
8



I_C
I_L
I_R
I
$I_C = \omega C \cdot U$
$|I_C - I_L|$
$I(\omega)$
$I_R = \frac{U}{R}$
$I_L = \frac{U}{\omega L}$
ω_0
ω

2.3. Rezonanța în circuite reale

Se consideră un circuit cu două laturi conectate în paralel, prima latură conținând o bobină reală (o rezistență și o inductivitate conectate în serie) și a doua latură un condensator real (o rezistență și o capacitate conectate în serie).



Impedanța și admitanța laturilor este:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 \Rightarrow \underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1 + j\omega L_1}$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \Rightarrow \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}}$$

$$\Rightarrow \underline{Y}_{echivalent} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_1 + j\omega L_1} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \underline{Y}_e$$

$$\underline{Y}_e = \frac{R_1 - j\omega L_1}{R_1^2 + (\omega L_1)^2} + \frac{R_2 + j\frac{1}{\omega C_2}}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C_2}\right)^2}$$

$$\underline{Y}_e = \underbrace{\frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C_2}\right)^2}}_{Re} - j\underbrace{\left(\frac{\omega L_1}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} - \frac{\frac{1}{\omega C_2}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C_2^2}}\right)}_{Be}$$

Condiția de rezonanță: $Be = 0$

$$\Rightarrow \frac{\omega_0 L_1}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} = \frac{1}{\omega_0 C_2} \cdot \frac{1}{R_2^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C_2^2}} \Rightarrow \frac{\omega_0 L_1}{R_1^2 + \omega L_1^2} = \frac{1}{\cancel{\omega_0} \cancel{C_2}} \cdot \frac{\cancel{\omega_0^2} \cancel{C_2^2}}{R_2^2 \omega_0^2 C_2^2 + 1}$$

$$\Rightarrow L_1 (R_2^2 \omega_0^2 C_2^2 + 1) = C_2 (R_1^2 + \omega_0^2 L_1^2) \Rightarrow \boxed{\omega_0^2 (R_2^2 C_2^2 L_1 - C_2 L_1^2) = R_1^2 C_2 - L_1}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{R_1^2 C_2 - L_1}{R_2^2 C_2^2 L_1 - C_2 L_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \sqrt{\frac{\frac{L_1}{C_2} - R_1^2}{\frac{L_1}{C_2} - R_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \cdot \frac{\sqrt{\rho^2 - R_1^2}}{\sqrt{\rho^2 - R_2^2}}$$

Unde: $\boxed{\rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}}$

Observații:

1) Pentru ca rezonanța paralel să se producă,

$R_1 > \rho$ și $R_2 > \rho$ sau $R_1 < \rho$ și $R_2 < \rho \Rightarrow \omega_0$ Real

2) Dacă nu sunt satisfăcute condițiile anterioare, adică

$R_1 < \rho < R_2$ sau $R_1 > \rho > R_2$

atunci frecvența de rezonanță e un număr imaginar (complex), ceea ce înseamnă că nu există o frecvență la care să se producă rezonanța paralel.

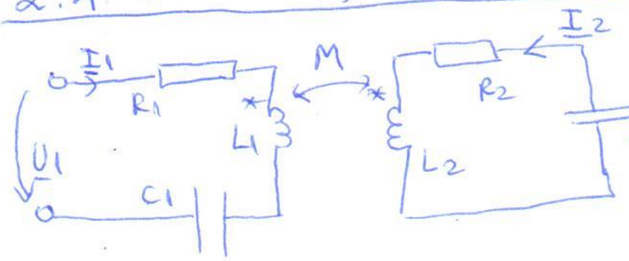
3) Dacă $R_1 = R_2 \neq \rho$, frecvența de rezonanță este $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}$ (aceeași ca și pentru un circuit serie rezonant)

4) Dacă $R_1 = R_2 = \rho$, $\omega_0 = \frac{0}{0} \Rightarrow$ rezonanța se poate produce la orice frecvență!

Dacă $\underline{Z}_e = \rho \Rightarrow$ circuitul este pur rezistiv

$\Rightarrow$ Curentul este în fază cu tensiunea la orice frecvență și valoarea sa efectivă este $\boxed{I = \frac{U}{\rho}}$

2.4 Rezonanța în circuite cu cuplaje magnetice



$$\text{TKII}\begin{cases} \underline{U}_1 = \left(R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)\cdot \underline{I}_1 + j\omega M \cdot \underline{I}_2 \quad \Big| : \underline{I}_1 \\ 0 = \left(R_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right)\cdot \underline{I}_2 + j\omega M \cdot \underline{I}_1 \quad \Big| : \underline{I}_1 \end{cases}$$

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega M \cdot \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \\ 0 = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\left(R_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) + j\omega M \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = -\frac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} \Rightarrow \underline{Z}_e = R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)}$$

$$\Rightarrow \underline{Z}_e = R_1 + j\underbrace{\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)}_{X_1} + \frac{\omega^2 M^2 \left[R_2 - j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)\right]}{R_2^2 + \underbrace{\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2}_{X_2}}$$

(11) $\Rightarrow \underline{Z}e = Re(\underline{Z}e) + j\cdot \underbrace{\left(x_1 - \frac{\omega^2 M^2 x_2}{R_2^2+x_2^2}\right)}_{X_e}$

Condiția de rezonanță:

$$\boxed{X_e = 0}$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{\omega^2 M^2 x_2}{R_2^2 + x_2^2}$$

Observații: 1) Condiția de rezonanță nu depinde de rezistența circuitului primar, dar depinde de rezistența circuitului secundar.

2) Pentru frecvențe foarte mari (radio frecvențe) cu e foarte mare

$$\Rightarrow \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) = x_2 >> R_2$$

Atunci $x_2 \cdot x_1 = \omega^2 M^2 \Rightarrow \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) = \omega^2 \cdot M^2$

$$\Rightarrow (\omega^2 L_1 C_1 - 1)(\omega^2 L_2 C_2 - 1) = \omega^4 C_1 C_2 M^2$$

$$\Rightarrow \omega^4 (C_1 C_2 M^2 - L_1 C_1 L_2 C_2) + \omega^2 (L_1 C_1 + L_2 C_2) - 1 = 0 \quad | : L_1 C_1 L_2 C_2$$

$$\Rightarrow \omega^4 \left(\frac{M^2}{L_1 L_2} - 1\right) + \omega^2 \left(\frac{1}{L_2 C_2} + \frac{1}{L_1 C_1}\right) - \frac{1}{L_1 C_1} \cdot \frac{1}{L_2 C_2} = 0$$

Notăm: $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$ - coeficientul de cuplaj

$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ - pulsația de rezonanță a primarului (fără cuplaj mutual)

$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$ - pulsația de rezonanță a secundarului (fără cuplaj mutual)

$$\Rightarrow \omega^4 (k^2 - 1) + \omega^2 (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) - \omega_{01}^2 \cdot \omega_{02}^2 = 0$$

Soluția ecuației este:

$$\omega_0', \omega_0'' = \sqrt{\frac{-(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)^2 + 4(k^2-1)\omega_{01}^2 \cdot \omega_{02}^2}}{2(k^2-1)}}$$

Observații: 1) Sunt două rezonanțe serie (două valori maxime ale curentului). Există un minim între aceste două maxime, corespunzând unei rezonanțe paralel.

(12) 2) Când $k \to 1$, valorile maxime se contopesc, corespunzând unui cuplaj critic

$$k_{cr} = \sqrt{d^2 - \frac{d^4}{4}} \cong d \text{ (experimental)}$$