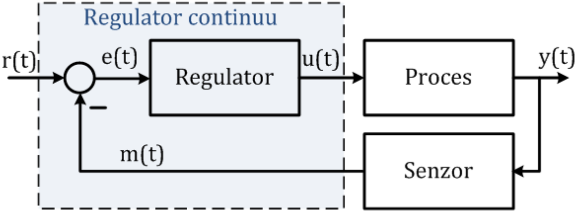
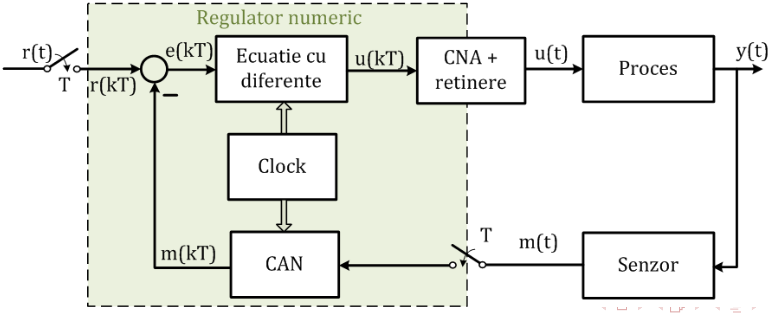
Sisteme cu eșantionare. Sisteme de control numerice

Paula Raica
Departmentul de Automatică
Str. Dorobantilor 71-73, sala C21, tel: 0264 - 401267
Str. Baritiu 26-28, sala C14, tel: 0264 - 202368
email: Paula.Raica@aut.utcluj.ro

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Control continuu vs. control numeric





Introducere

- Convertorul analog-numeric (CAN): eșantionează un semnal fizic $m(t)$ și îl convertește într-un număr binar.
- Conversia semnalului analogic $m(t)$ în cel discretizat $m(kT)$, are loc repetat la momente de timp separate de T secunde.
  - T - perioada de eșantionare
  - $1/T$ frecvența de eșantionare în Hertz.
- Algoritmul regulatorului este de obicei sub forma unei ecuații cu diferențe $\Rightarrow$ comanda discretă $u(kT)$ la fiecare moment de eșantionare.
- $u(kT)$ este convertit în semnal continuu $u(t)$ de convertorul numeric analogic (CNA) și menținut constant o perioadă de eșantionare:
  - CNA convertește numărul în semnal analogic,
  - un element de reținere menține semnalul constant pe durata perioadei de eșantionare.
- $u(t)$ continuu este aplicat elementului de execuție similar cu implementarea continuă.

Introducere

Avantajele controlului numeric

- Utilizarea senzorilor și traductoarelor numerice
- Sensibilitate scăzută la zgomotele de măsură
- Algoritmul de control se poate reconfigura ușor
- Aplicații diverse pentru echipamente numerice și comunicații
- Consum de energie scăzut pentru echipamentele numerice

Introducere

Două tehnici de bază pentru determinarea ecuațiilor cu diferențe ale regulatorului numeric:

- Echivalentul discret - constă în proiectarea regulatorului continuu și aproximarea funcției de transfer cu metode ce vor fi prezentate în secțiunile următoare.

$$G_c(s) \rightarrow G_c(z) \rightarrow \text{difference equation}$$

- Proiectare în domeniul timp discret - ecuația cu diferențe este determinată direct, utilizând tehnici de proiectare pentru sisteme discrete.

Eșantionare

Teorema lui Shannon

O funcție $f(t)$ care are o lățime de bandă ω_b este determinat în mod unic de un set de valori discrete dacă pulsația de eșantionare este mai mare decât $\omega_s = 2\omega_b$.

Pulsația de eșantionare $\omega_s = 2\omega_b$ se numește *pulsație Nyquist*

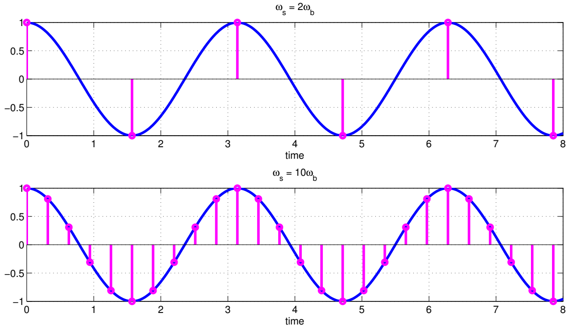
- O regulă utilă este ca eșantionarea să se facă cu o frecvență de 10 ori mai mare decât cea mai mare frecvență care se consideră posibil a fi prezentă.
- Perioada de eșantionare (sau timpul de eșantionare) se determină din ω_s (*in* rad/s):

$$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s} \quad \Rightarrow \quad T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

Eșantionare. Exemplul 1

$$u(t) = \cos 2t, \quad \text{pulsația este: } \omega_b = 2 \text{ rad/s}.$$

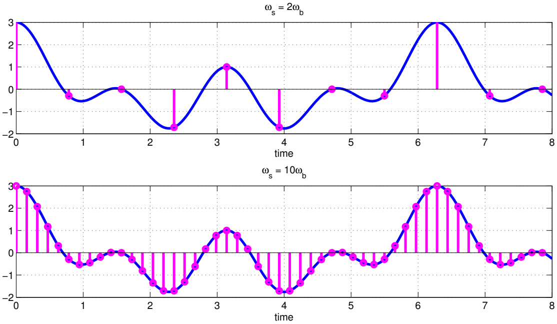
- $\omega_s = 2\omega_b = 4$ rad/s, $T = 2\pi/\omega_s = 1.57$s.
- $\omega_s = 10\omega_b = 20$ rad/s, $T = 2\pi/\omega_s = 0.314$s.



Eșantionare. Exemplul 2

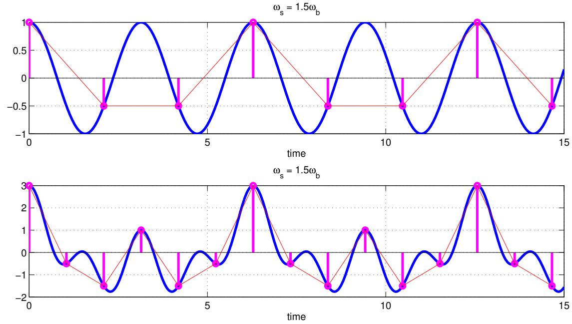
$$u(t) = \cos t + \cos 2t + \cos 4t \quad \text{cea mai mare pulsație este : } \omega_b = 4 \text{ rad/s.}$$

- $\omega_s = 2\omega_b = 8$ rad/s, $T = 2\pi/\omega_s = 0.78$s.
- $\omega_s = 10\omega_b = 40$ rad/s, $T = 2\pi/\omega_s = 0.157$s.



Eșantionare. Efectul alias

- Dacă un semnal este eșantionat sub limita indicată de Shannon, poate rezulta un semnal *alias* de frecvență mai joasă.
- Exemplu: $u(t) = cos(2t)$, și $u(t) = \cos t + \cos 2t + \cos 4t$, pulsația de eșantionare: $\omega_s = 1.5\omega_b$.
- Aparent, semnalul eșantionat are o formă diferită, cu frecvență mai joasă. Acest semnal se numește *alias*.



Eșantionare în controlul sistemelor

- Sunt disponibile mai multe posibilități.
- Este mai degrabă o problemă de experiență decât o procedură exactă.
- Teorema lui Shannon dă de obicei o limită inferioară a frecvenței de eșantionare.
- Alegeți pulsația de eșantionare ca:

$$6\omega_b < \omega_s < 25\omega_b$$

(2 - 9 eșantioane pe durata timpului de creștere al răspunsului la treaptă)

- De exemplu, pentru un sistem de ordinul 1 $G_1(s) = \dfrac{1}{T_0 s + 1}$, perioada de eșantionare poate fi aleasă ca:

$$\frac{T_0}{4} < T_s < T_0$$

Eșantionare. Exemplu

$$G_1(s) = \frac{1}{T_0 s + 1}, \quad G_2(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1}$$

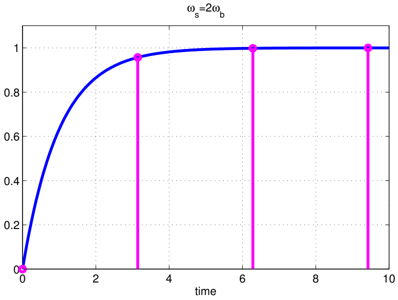
- Pentru $T_0 = 1$, $\zeta = 0.7$ și $\omega_n = 1$ lățimea de bandă poate fi aproximată cu $\omega_{b1} = 1/T_0$ and $\omega_{b2} = \omega_n$.
- Teorema lui Shannon:

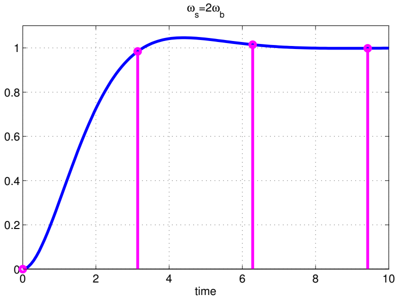
$$\omega_{s1} = 2\omega_{b1} = \frac{2\pi}{T_s}, \quad T_s = \frac{2\pi}{2\omega_{b1}} = \frac{2\pi T_0}{2} = \pi T_0$$

$$\omega_{s2} = 2\omega_{b2} = \frac{2\pi}{T_s}, \quad T_s = \frac{2\pi}{2\omega_{b2}} = \frac{2\pi}{2\omega_n} = \frac{\pi}{\omega_n}$$

Eșantionare. Exemplu

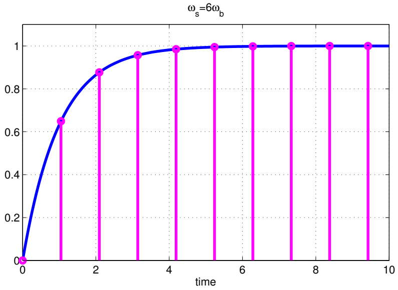
Teorema lui Shannon: $\omega_s = 2\omega_b$. Răspunsul la treaptă este:

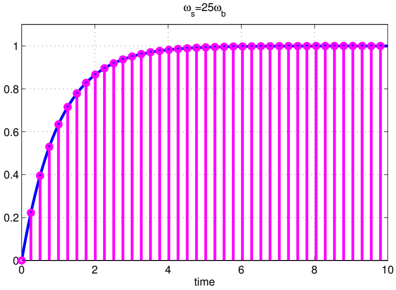




Eșantionare. Exemplu

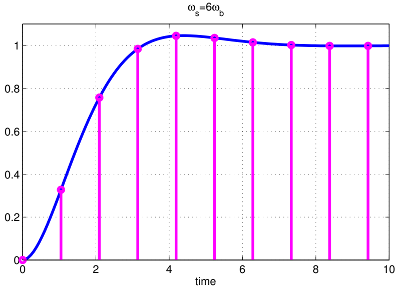
Pentru sistemul de ordinul 1: $\omega_{s1} = 6\omega_{b1}$ $(T_s \approx T_0 = 1)$ sau $\omega_{s1} = 25\omega_{b1}$ $(T_s \approx \frac{T_0}{4} = 0.25)$

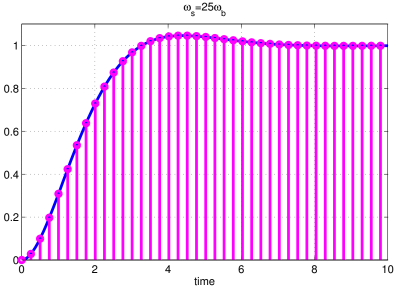




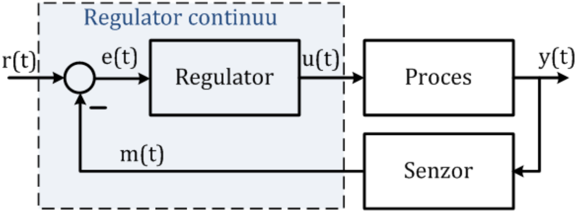
Eșantionare. Exemplu

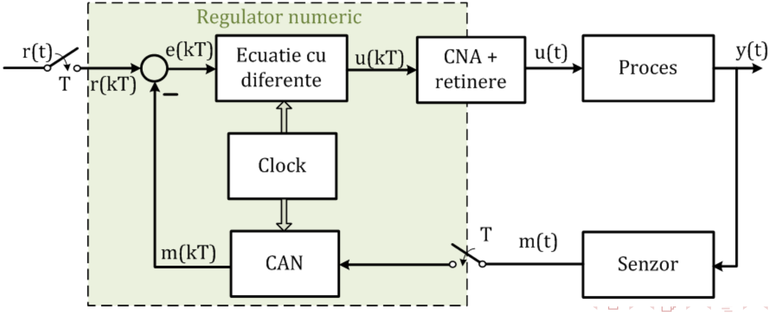
Pentru sistemul de ordinul 2 $\omega_{s2} = 6\omega_{b2}$ sau $\omega_{s2} = 25\omega_{b2}$



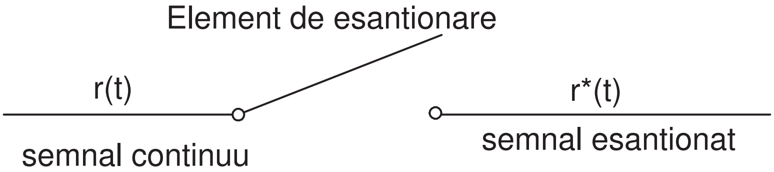


Control continuu vs. control numeric - din nou





Un **element de eșantionare** este un contact care se închide la fiecare T secunde pt un interval de timp foarte scurt.



Dacă intrarea este $r(t)$ și ieșirea $r^*(t)$ unde nT este timpul de eșantionare curent iar valoarea curentă a lui $r^*(t)$ este $r(nT)$:

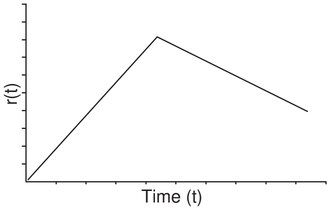
$$r^*(t) = r(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

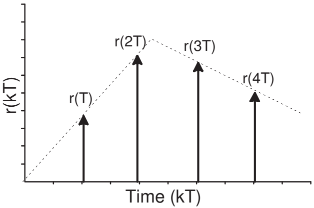
unde δ este funcția impuls ideal.

Sisteme cu eșantionare

$r^*(t)$ serie de impulsuri care încep la $t = 0$, despărțite de T secundeși de amplitudine $r^*(kT)$.

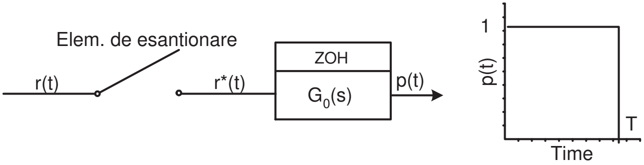
$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\delta(t - kT)$$





Sisteme cu eșantionare

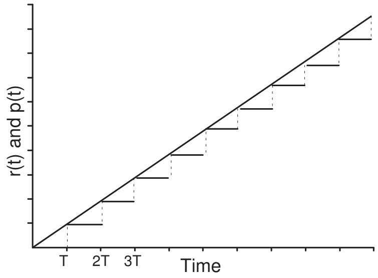
- Un convertor numeric-analogic CNA - convertește semnalul eșantionat $r^*(t)$ într-un semnal continuu $p(t)$ - se reprezintă printr-un **element de reținere de ordinul zero** (ZOH)
- (Figura) Un element de eșantionare și un ZOH (stânga); răspunsul unui ZOH pentru un impuls (dreapta):

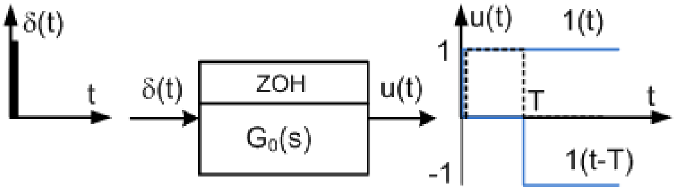


ZOH - ia valoarea lui $r(kT)$ și o menține constantă pentru $kT \leq t \leq (k+1)T$.

Sisteme cu eșantionare

- Un element de eșantionare și un ZOH pot urmări un semnal de intrare cu precizie dacă T este mic în comparație cu variația semnalului.
- (Figura) Răspunsul unui elem. de eșantionare și ZOH pentru o intrare rampă $r(t) = t$





(intrare: $u(t) = \delta(t)$, ieșire: $y(t) = 1(t) - 1(t-T)$, $1(t) =$ treaptă unitară)
Funcția de transfer a unui ZOH:

$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT} = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

Transformata z

Ieșirea unui element de eșantionare ideal $r^*(t)$=serie de impulsuri cu amplitudinea $r(kT)$:

$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\delta(t - kT), \quad t > 0$$

$$L[r^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)e^{-ksT}, \qquad z = e^{sT}$$

$\Rightarrow$ Transformata z:

$$Z[r(t)] = Z[r^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)z^{-k}$$

Tabel cu transformate Z

Domeniu timp	*Transformata Laplace*	*Transformata Z*
$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	$F(z) = \mathcal{Z}[f(t)\|_{t=kT}] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$
$\delta(t)$	1	1
1	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{z\sin aT}{z^2-2z\cos aT+1}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{z(z-\cos aT)}{z^2-2z\cos aT+1}$

Proprietăile transformatei Z

Proprietate	*Timp discret* $f(kT)$	*Domeniu-z* $F(z) = \mathcal{Z}[f(kT)]$
Liniaritate	$af_1(kT) + bf_2(kT)$	$aF_1(z) + bF_2(z)$
Deplasare la dreapta cu T	$f((k-1)T)$	$z^{-1}F(z)$
Deplasare la dreapta cu nT	$f((k-n)T)$	$z^{-n}F(z)$
Deplasare la stânga cu T	$f((k+1)T)$	$zF(z) - zf(0)$
Deplasare la stânga cu nT	$f((k+n)T)$	$z^nF(z) - \sum_{i=0}^{n-1} f(iT)z^{k-i}$
Prima diferentă	$f(kT) - f((k-1)T)$	$(1 - z^{-1})F(z)$
Teorema valorii finale)	$f(\infty) = \lim_{k\to\infty} f(kT)$	$\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$ dacă polii lui $(z-1)F(z)$ sunt in cercul unitate

Funcția de transfer in z

Funcția de transfer in z - schema bloc

Dacă $C(z)$ este ieșirea în z a semnalului de ieșire, și intrarea este $R(z)$ $\Rightarrow$ funcția de transfer în z este

$$\frac{C(z)}{R(z)} = G(z)$$

Transformarea funcțiilor de transfer din s în z. 1 - ZOH

- Prima abordare pentru calculul unei funcții de transfer se bazează pe transformarea Z a funcției de transfer in s.
- Se dă o funcție de transfer în s: $G(s)$. Transformata sa în z se obține din:

$$G(z) = Z\{G_0(s)G(s)\} = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right\}$$

$$G(z) = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

unde $G_0(s)$ - funcția de transfer a ZOH și T - perioada de eșantionare.

- *S-au utilizat următoarele proprietăți ale transformatelor Laplace si Z:*

$$\mathcal{L}[x(t-T)] \rightarrow e^{-sT}X(s); \qquad Z[x(t-T)] \rightarrow z^{-1}X(z)$$

Transformarea funcțiilor de transfer din s în z. 2 - Aproximarea Euler

- Variabila z se poate aproxima prin diferite substituții pentru s în funcția de transfer a sistemului continuu.
- Comparație: înmulțirea cu s = derivare în timp; înmulțirea cu z^{-1} = întârziere cu o perioadă de eșantionare a semnalului discret.
- Obs. derivata în timp la un moment kT se poate aproxima cu:

$$\frac{de}{dt}\Big|_{kT} = \frac{e(kT) - e((k-1)T)}{T}$$

In domeniul z, unde $e(kT) \rightarrow E(z)$:

$$\frac{E(z) - E(z)\cdot z^{-1}}{T} = E(z)\frac{1-z^{-1}}{T} \quad \Rightarrow s = \frac{1-z^{-1}}{T}$$

Transformarea funcțiilor de transfer din s în z. 3 - Tustin

- Substituția Tustin, numită și transformarea biliniară:

$$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \quad \text{or} \quad s = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}$$

- O substituție mai complicată poate aproxima mai bine comportamentul unui regulator analogic utilizând o perioadă de eșantionare mai mare.

Funcții de transfer în z. Exemplu

Se consideră un sistem continuu cu funcția de transfer:

$$G(s) = \frac{1}{s+4}$$

- Vom determina mai întâi funcția de transfer in z cu metoda care utilizează elementul de reținere de ordinul 0 (ZOH):

$$G_1(z) = Z\{G_0(s)G(s)\} = Z\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s+4}\} = (1-z^{-1})\frac{1}{4}Z\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+4}\}$$

- Din tabel se determină transformatele z ale funcțiilor elementare:

$$G_1(z) = \frac{z-1}{z}\frac{1}{4}(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-4T}}) = \frac{1}{4}\frac{1-e^{-4T}}{z-e^{-4T}}$$

Funcții de transfer în z. Exemplu

- Cu substituția Euler $s = \dfrac{1 - z^{-1}}{T}$, funcția de transfer in z este:

$$G_2(z) = \frac{1}{\frac{1-z^{-1}}{T} + 4} = \frac{T}{1 + 4T - z^{-1}}$$

- Utilizând substituția Tustin, funcția de transfer in z este:

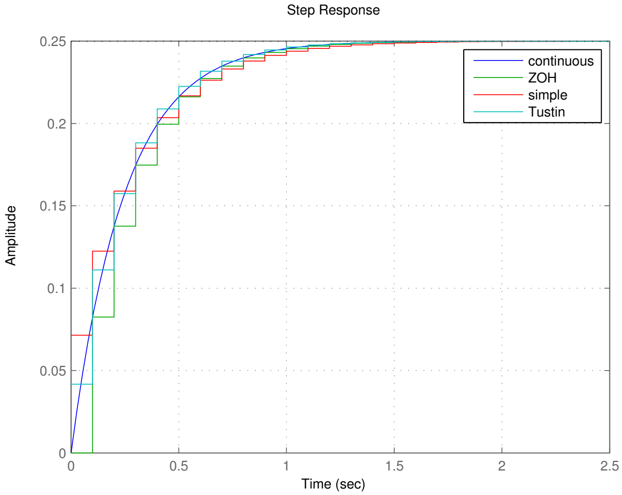
$$G_3(z) = \frac{1}{\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})} + 4} = \frac{T(1 + z^{-1})}{2 + 4T + (4T - 2)z^{-1}}$$

- Pentru $T = 0.1$, funcțiile de transfer (scrise în termenii variabilei z în loc de z^{-1}) în cele trei cazuri sunt:

$$G_1(z) = \frac{0.08242}{z - 0.6703}, \quad G_2(z) = \frac{0.1z}{1.4z - 1}, \quad G_3(z) = \frac{0.04167z + 0.04167}{z - 0.6667}$$

Funcții de transfer în z. Exemplu

Răspunsul la semnal de intrare treaptă, simulat, în cele trei cazuri este:



Transformarea inversă - Metoda seriilor de puteri infinite

Exemplu. Dacă transformata z a unui semnal se obține în forma:

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1.36z + 0.36},$$

prin împărțirea polinomului de la numărător la polinomul de la numitor se obține:

$$X(z) = z^2 \; : \; (z^2 - 1.36z + 0.36) = 1 + 1.36z^{-1} + 1.5z^{-2} + ...$$

Dacă se compară acest rezultat cu definiția transformatei z:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = x(0)z^0 + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + ...$$

se observă că:

$$x(0) = 1, \quad x(T) = 1.36, \quad x(2T) = 1.5, \quad \text{etc}$$

Transformarea inversă - Metoda ecuațiilor cu diferențe

- Se consideră un sistem în forma:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

unde a_i și b_i sunt coeficienti reali.

- Rezultă:

$$Y(z)(1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}) = X(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m})$$

sau

$$Y(z) = -(a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n})Y(z) + (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m})X(z)$$

$$Y(z) = -a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) + \cdots + a_n z^{-n} Y(z) + b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \cdots + b_m z^{-m} X(z)$$

Transformarea inversă - Metoda ecuațiilor cu diferențe

- Utilizând proprietatea:

$$Z[f(kT - T)] = z^{-1}F(z), \text{ unde } F(z) = Z[f(kT)]$$

ecuatia obtinută anterior se poate exprima ca o ecuatie cu diferente de forma:

$$y(kT) = -a_1 y((k-1)T) + a_2 y((k-2)T) + \cdots + b_0 x(kT) + b_1 x((k-1)T) + b_2 x((k-2)T) + \ldots$$

- Sau cu o notatie simplificată:

$$y_k = -a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \ldots + b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + b_2 x_{k-2} + \ldots$$

unde s-a notat valoarea semnalului la timpul kT prin indicele k (și similar, $(k-1)T$ cu indicele $k-1$, etc.)

Obtinerea ecuatiei cu diferente. Exemplu

Se consideră o funcție de transfer:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z - 0.368}$$

Împărțim numărătorul și numitorul funcției de transfer cu z la cea mai mare putere din funcția de transfer și obținem:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.368z^{-1}}$$

sau

$$(1 - 0.368z^{-1})Y(z) = X(z) \quad \text{sau} \quad Y(z) = 0.368z^{-1}Y(z) + X(z)$$

care se poate exprima ca o ecuație cu diferențe:

$$y_k = 0.368y_{k-1} + x_k$$

Dacă primele eșantioane sunt cunoscute, valorile lui y_k se determină printr-o procedură iterativă.

Analiza sistemelor discrete

Corespondența între planul s și planul z

Planul s și planul z sunt legate de o transformare conformă dată de:

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T}$$

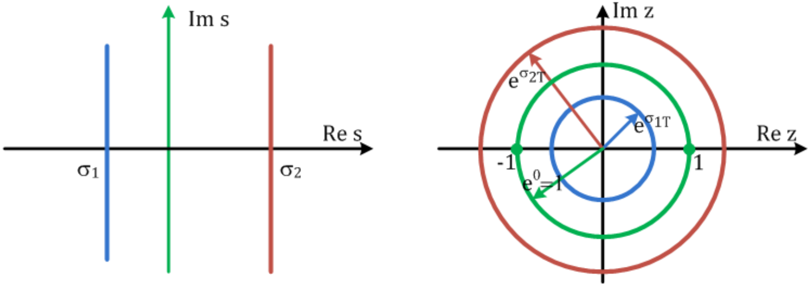
unde T este perioada de eșantionare și:

$$Re[s] = \sigma, \quad Im[s] = j\omega$$

$$|z| = e^{\sigma T}, \ \angle z = \omega T$$

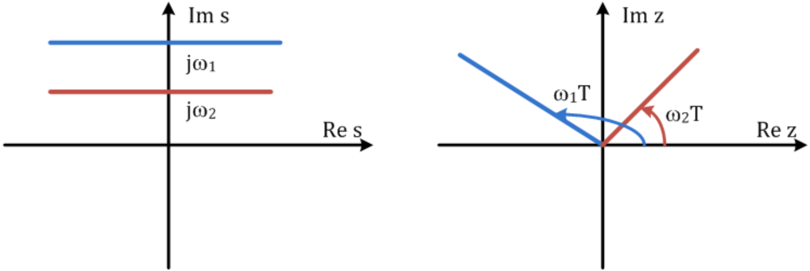
Corespondența între planul s și planul z

- Punctul $s = 0$ este transformat in planul z in $z = e^0 = 1$
- Toate numerele complexe $s = \sigma + j\omega$ cu partea reală σ constantă sunt transformate in planul z in cercuri cu centrul in origine și raza $e^{\sigma T}$.



Corespondența între planul s și planul z

- Un număr complex imaginar $s = +j\omega \rightarrow z = e^{j\omega T}$: punct complex in planul z cu faza ωT.
- Dacă $\omega T \rightarrow \pi$, punctul ajunge in planul z in -1, astfel descrie o jumătate de cerc. Dacă $\omega T \rightarrow -\pi$ se obtine cealaltă jumătate de cerc.
- Numerele complexe $s = \sigma + j\omega$ cu aceeași parte imaginară $j\omega$ sunt transformate in linii radiale cu unghiul constant ωT față de axa reală.



Analiza stabilității in planul z

- Un sistem liniar și continuu este stabil dacă toti polii functiei de transfer $G(s)$ sunt localizati in semiplanul stâng al planului s. Planul s și planul z sunt legate de transformarea:

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T}$$

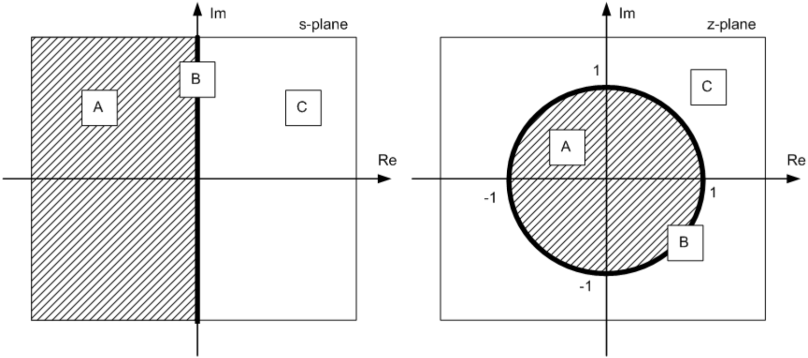
sau

$$|z| = e^{\sigma T}, \quad \angle z = \omega T$$

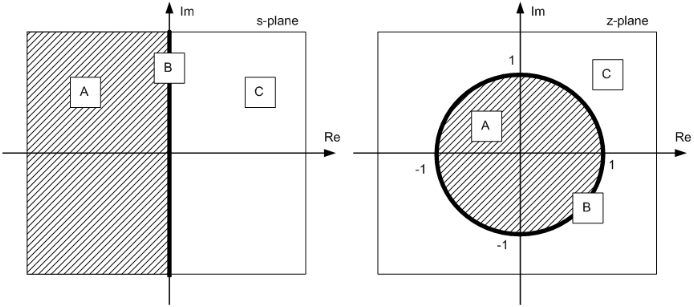
- In semiplanul stâng al planului s, partea reală a lui s, $\sigma < 0 \Rightarrow$ modulul lui z este intre 0 și 1: $0 < e^{\sigma T} < 1$.
- Axa imaginară a planului s corespunde cercului unitate in planul z, iar interiorul cercului unitate in planul z corespunde semiplanului stâng al planului s.

Analiza stabilității in planul z

Un sistem discret este stabil dacă toti polii functiei de transfer $G(z)$ sunt localizati in interiorul cercului unitate in planul z.



Analiza stabilității in planul z



- Numerele complexe cu partea reală negativă $\sigma < 0$ (semiplanul staâng al planului s, regiunea A) se transformă in interiorul cercului unitate din planul z.
- Numerele complexe de pe axa imaginară, $j\omega$, (regiunea B) au partea reală $\sigma = 0$ și corespund punctelor de pe circumferina cercului unitate in planul z.
- Numerele complexe cu partea reală pozitivă $\sigma > 0$ sunt localizate in semiplanul drept al planului s (regiunea C). Modulul punctelor corespunzatoare din planul z este $e^{\sigma T} > 1$, astfel acestea sunt in exteriorul cercului unitate in planul z.

Sisteme discrete - analiza stabilității. Sumar

Un sistem discret cu functia de transfer $G(z)$ este:

- *stabil* dacă toti polii functiei de transfer sunt localizati in interiorul cercului unitate in planul z,
- *instabil* dacă există poli in exteriorul cercului unitate și/sau există poli cu ordinul de multiplicitate mai mare decât 1 localizati pe circumferinta cercului unitate,
- *la limita de stabilitate* dacă polii cu ordin de multiplicitate 1 sunt pe cercul unitate și toti ceilalti poli (dacă există) se află in interiorul cercului unitate.

Sisteme discrete - analiza stabilității. Exemple

- Un sistem stabil: $G_1(z) = \dfrac{z}{4z^2 - 1}$ cu polii: $z_1 = \dfrac{1}{2},\ z_2 = -\dfrac{1}{2}$
  $|z_1| = |z_2| = \dfrac{1}{2} < 1$ - polii sunt in interiorul cercului unitate.
- Un sistem instabil: $G_2(z) = \dfrac{z}{z^2 + 2z + 2}$ cu polii $z_1 = -1 + j,\ z_2 = -1 - j$
  $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2} > 1$ - polii sunt in exteriorul cercului unitate.
- Un sistem la limita de stabilitate: $G_3(z) = \dfrac{z}{2z^2 - z - 1}$ cu polii $z_1 = 1,\ z_2 = -\dfrac{1}{2}$
  $|z_1| = 1$ și $|z_2| = \dfrac{1}{2} < 1$ - un pol pe cercul unitate, iar al doilea in interior.
- Un sistem instabil: $G_4(z) = \dfrac{z}{z^2 + 3z + 2}$ cu polii $z_1 = -1,\ z_2 = -2$
  $|z_1| = 1$ și $|z_2| = 2 > 1$ - un pol pe cercul unitate, iar al doilea in exterior.