Introducere în modelarea sistemelor

Paula Raica
Departamentul de Automatică
Str. Dorobantilor, sala C21, tel: 0264 - 401267
Str. Baritiu, sala C14, tel: 0264 - 202368
email: Paula.Raica@aut.utcluj.ro

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Transformata Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Liniară	$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(s) \pm F_2(s)$
Inmultirea cu constanta	af(t)	aF(s)
Deplasare complexă	$e^{\pm at}f(t)$	F(s$\pm$a)
Deplasare reală	f(t-T)	$e^{-Ts}F(s)$, T$\geq$0
Scalare	f($\frac{t}{a}$)	$aF(as)$
Prima derivată	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
A doua derivată	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
A n-a derivată	$\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	$s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$
Integrala	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{s}F(s)$

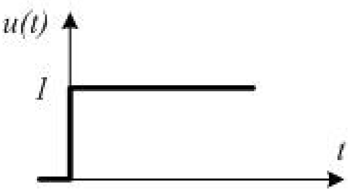
Transformata Laplace

Table: Transformata Laplace a unor funcții

	f(t)	F(s)
1	Impuls Dirac δ (t)	1
2	Treaptă unitară u(t)=1	$\frac{1}{s}$
3	Rampă unitară v(t)=t	$\frac{1}{s^2}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
6	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
8	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

1. Treapta unitară:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

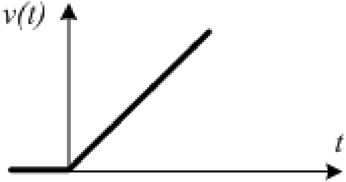


Transformata Laplace a funcției treaptă:

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

2. Rampa unitară

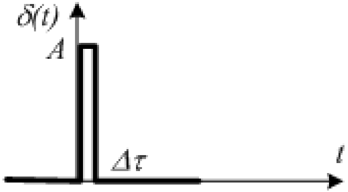
$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$$



Transformata Laplace a funcției rampă:

$$\mathcal{L}[v(t)] = \frac{1}{s^2}$$

3. Impulsul ideal (Dirac)



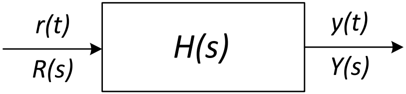
$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \;\; and \;\; t > \Delta\tau \\ A, & 0 \le t \le \Delta\tau \end{cases} \quad , \quad \lim_{\Delta\tau \to 0} \int_0^{\Delta\tau} \delta(t)dt = 1$$

Transformata Laplace a impulsului:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

Funcția de transfer

Funcția de transfer = Raportul dintre transformata Laplace a semnalului de ieșire și transformata Laplace a semnalului de intrare în condiții inițiale nule.



$$H(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{r(t)\}}, \quad \text{în condiții inițiale nule}$$

- Pentru ecuația diferențială liniară și omogenă:

$$a_0 r(t) + a_1 \frac{dr(t)}{dt} + \ldots + a_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} = b_0 y(t) + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + \ldots + b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n}$$

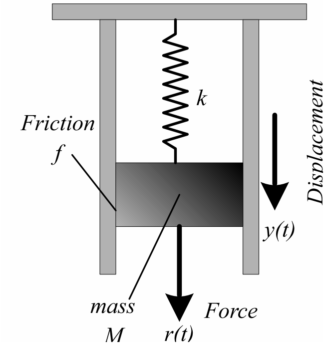
unde $r(t)$ și $y(t)$ sunt semnalele de intrare și ieșire.

- Se aplică transformata Laplace în condiții inițiale nule:

$$(a_0 + a_1 s + \ldots + a_m s^m) R(s) = (b_0 + b_1 s + \ldots + b_n s^n) Y(s)$$

și funcția de transfer este: $H(s) = \dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{a_0 + a_1 s + \ldots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + \ldots + b_n s^n}$

Exemplu



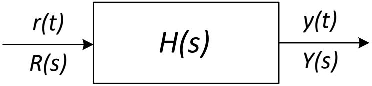
$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + f\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = r(t)$$

Se aplică transformata Laplace în condiții inițiale nule și se obține:

$$Ms^2Y(s) + fsY(s) + kY(s) = R(s)$$

$$(Ms^2 + fs + k)Y(s) = R(s)$$

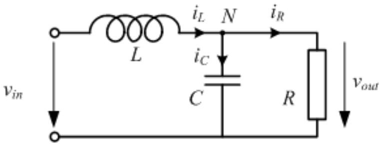
$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ms^2 + fs + k}$$



"iesire = conținut x intrare"

O funcție de transfer $H(s)$ arată cum intrarea este transferată la ieșire.

Exemplu. Sistem electric



Legile lui Kirchhoff:

$$i_L = i_C + i_R$$

Bobina: $\dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{1}{L} v_L$

$$\begin{aligned} v_{in} &= v_L + v_C \\ v_C &= v_R = v_{out} \end{aligned}$$

Condensatorul: $\dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{1}{C} i_C$

Rezistența: $v_R = R i_R$

Se presupun condiții inițiale zero, se aplică transformata Laplace, se elimină toate variabilele în afară de intrare și ieșire.

$$\Rightarrow \quad H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1} = \frac{R}{RLCs^2 + Ls + R}$$

Pentru calculul detaliat vedeți notele de curs.

Funcția de transfer

Pentru un sistem **fizic realizabil** funcția de transfer $H(s)$ este un raport de două polinoame:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

ordinul lui $D(s) \geq$ ordinul lui $N(s)$.

Ecuația caracteristică

$$D(s) = 0$$

Rădăcinile lui $D(s)$: **poli**

Rădăcinile lui $N(s)$: **zerourile**

Ordinul sistemului: gradul polinomului de la numitor, $D(s)$
Polii și zerourile lui H(s) pot fi variabile complexe, $s = \sigma + j\omega$.

Exemplu 1

Se consideră un sistem descris de funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{s+2}{s^3+s^2+s+1}$$

- Sistem de ordinul 3
- Polinomul caracteristic și ecuația caracteristică:

$$D(s) = s^3+s^2+s+1 \qquad s^3+s^2+s+1 = 0$$

- Rădăcinile polinomului caracteristic = polii sistemului:

$$(s+1)(s^2+1) = 0, \text{ și polii sunt: } p_1 = -1,\ p_{2,3} = \pm j$$

- Polinomul de la numărător are o singură rădăcină = zeroul sistemului:

$$s+2 = 0, \text{ și zeroul este: } z_1 = -2$$

Exemplu 2

Se consideră un sistem descris de funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 2s + 2)}$$

- Sistem de ordinul 4
- Polinomul caracteristic și ecuația caracteristică:

$$D(s) = s^2(s^2 + 2s + 2) = s^4 + 2s^3 + 2s^2 \qquad s^4 + 2s^3 + 2s^2 = 0$$

- Rădăcinile polinomului caracteristic = polii sistemului:

$$s^2(s^2 + 2s + 2) = 0, \text{ iar polii sunt: } p_1 = p_2 = 0, \; p_{3,4} = -1 \pm j$$

- Numărătorul este un polinom de gradul zero ⇒ sistemul nu are zerouri

Răspunsul sistemelor

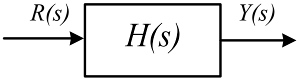


Figure: Schema bloc a unui sistem

Din definiția funției de transfer:

$$Y(s) = H(s) \cdot R(s)$$

Aplicând transformata Laplace inversă:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s) \cdot R(s)].$$

Exemplu

Sistemul masă-resort-amortizor, cu intrarea $r(t) = \delta(t)$ impuls ideal.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ms^2 + fs + k}, \; R(s) = \mathcal{L}[\delta(t)], \; y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s) \cdot 1]$$

$M = 1, f = 3, k = 2$

$$H(s) = Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

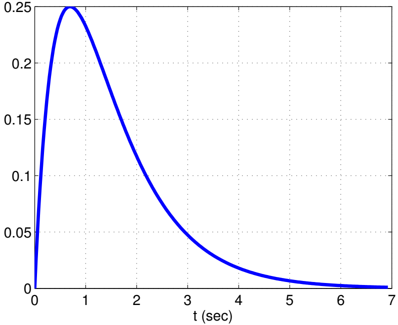
$M = 1, f = 1, k = 2$

$$H(s) = Y(s) = \frac{1}{s^2 + s + 2}$$

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{7}} e^{-t/2} sin(\frac{\sqrt{7}}{2} t)$$

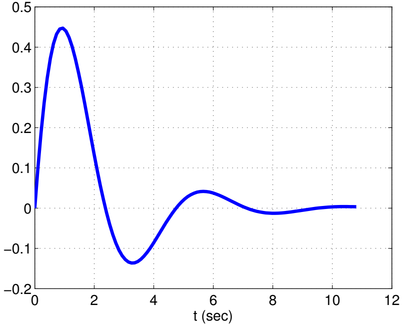
Exemplu

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$



Răspuns supra-amortizat.

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{7}} e^{-t/2} sin(\frac{\sqrt{7}}{2} t)$$

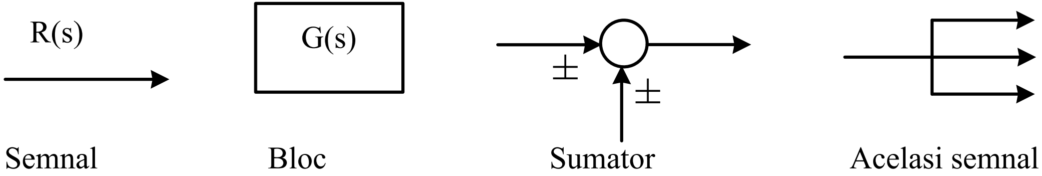


Răspuns subamortizat

Scheme bloc

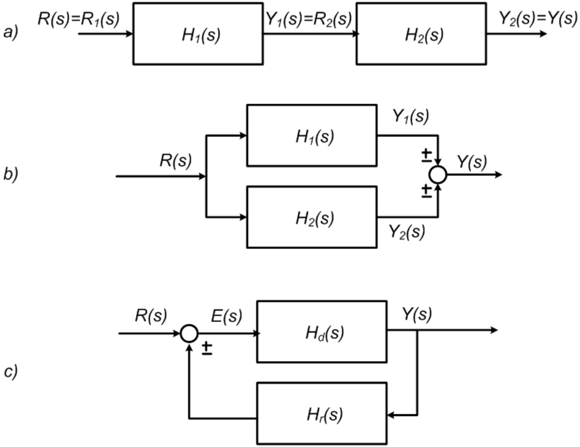
Scheme bloc

- Scheme bloc: compuse din blocuri (sisteme) *unidirectionale*, care reprezintă funcții de transfer
- Componente în scheme bloc:



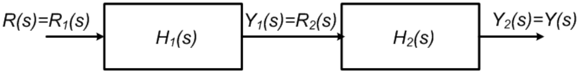
Scheme bloc

- Conexiuni de bază: a) serie, b) paralel și c) cu reacție.



Scheme bloc

- Conexiunea serie (cascadă)



$$Y(s) = Y_2(s) = H_2(s)R_2(s) = H_2(s)Y_1(s) = H_2(s)H_1(s)R_1(s)$$

$$Y(s) = H_2(s)H_1(s)R(s)$$

- Funcția de transfer echivalentă de la intrarea $R(s)$ la ieșirea $Y(s)$:

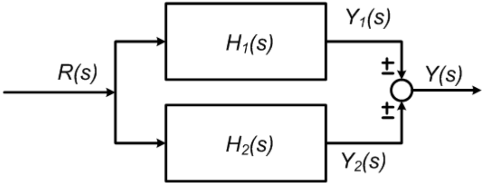
$$\text{serie:} \quad H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = H_1(s)H_2(s)$$

- Pentru n sisteme conectate în serie:

$$H(s) = \prod_{j=1}^{n} H_j(s)$$

Scheme bloc

- Conexiunea paralel



$$H_1(s) = \frac{Y_1(s)}{R(s)};\ H_2(s) = \frac{Y_2(s)}{R(s)};\ Y(s) = \pm Y_1(s) \pm Y_2(s) = \pm H_1(s)R(s) \pm H_2(s)R(s)$$

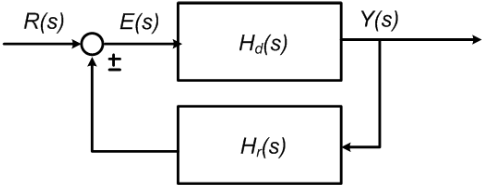
paralel: $$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \pm H_1(s) \pm H_2(s)$$

- Pentru n sisteme conectate în paralel:

$$H(s) = \sum_{j=1}^{n} (\pm H_j(s))$$

Scheme bloc

- Conexiunea cu reacție



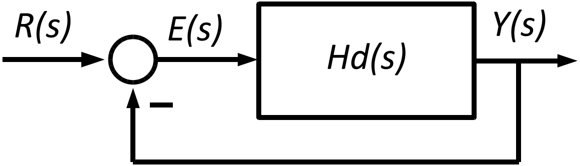
$$E(s) = R(s) \pm H_r(s) \cdot Y(s)$$

$$Y(s) = H_d(s) \cdot E(s) = H_d(s) \cdot (R(s) \pm H_r(s) \cdot Y(s))$$

cu reacție: $H(s) = \dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{H_d(s)}{1 \mp H_d(s) \cdot H_r(s)}$

Scheme bloc

Sistem cu reacție negativă unitară

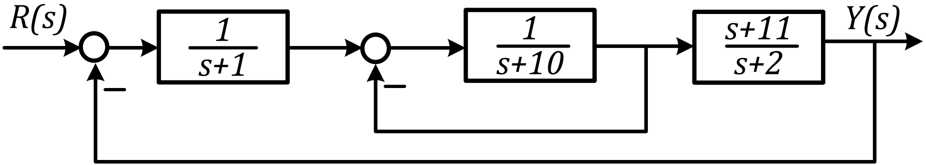


$$H_r(s) = 1$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{H_d(s)}{1 + H_d(s)}$$

Exemplu

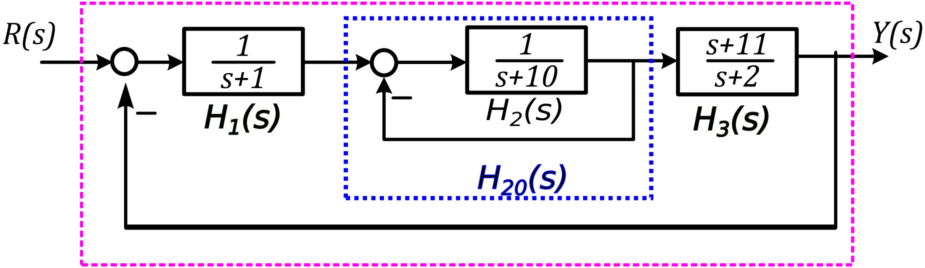
Calculați funcția de transfer echivalentă, de la intrarea $R(s)$ la ieșirea $Y(s)$ pentru următoarea schemă bloc:



Se notează:

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad H_2(s) = \frac{1}{s+10}, \quad H_3(s) = \frac{1}{s+1}$$

Exemplu

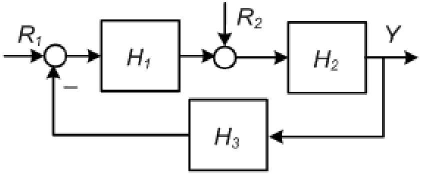


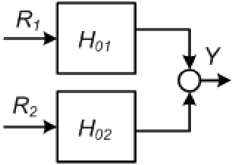
$$H_{20}(s) = \frac{H_2(s)}{1+H_2(s)} = \frac{\frac{1}{s+10}}{1+\frac{1}{s+10}} = \frac{1}{s+11}$$

$$H_0 = \frac{H_1(s)H_{20}(s)H_3(s)}{1+H_1(s)H_{20}(s)H_3(s)} = \frac{\frac{1}{s+1}\frac{1}{s+11}\frac{s+11}{s+2}}{1+\frac{1}{s+1}\frac{1}{s+11}\frac{s+11}{s+2}}$$

$$H_0(s) = \frac{\frac{1}{(s+1)(s+2)}}{1+\frac{1}{(s+1)(s+2)}} = \frac{1}{(s+1)(s+2)+1} = \frac{1}{s^2+3s+3}$$

Suprapunerea semnalelor





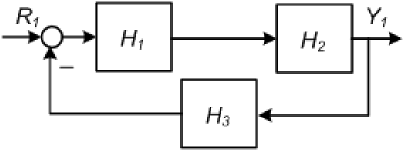
$$Y(s) = R_1(s) \cdot H_{01}(s)|_{R_2(s)=0} + R_2(s) \cdot H_{02}(s)|_{R_1(s)=0}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{H_1 H_2}{1 + H_1 H_2 H_3}}_{H_{01}} \cdot R_1(s) + \underbrace{\frac{H_2}{1 + H_1 H_2 H_3}}_{H_{02}} \cdot R_2(s)$$

Calculul pentru H_{01} și H_{02} este prezentat în continuare:

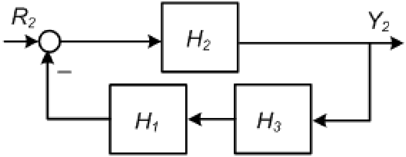
Suprapunerea semnalelor

$R_2(s) = 0$



$$H_{01}(s) = \frac{H_1 H_2}{1 + H_1 H_2 H_3}$$

$R_1(s) = 0$



$$H_{02}(s) = \frac{H_2}{1 + H_1 H_2 H_3}$$