Cuprins

Contents

Prefaţă

Lucrarea prezintă noţiunile de bază din două domenii matematice fundamentale, cu numeroase şi consistente aplicaţii în practica inginerească şi tehnologică: funcţiile complexe (analiza matematică în complex) şi transformările integrale şi discrete.

Teoria funcţiilor de o variabilă complexă, în pofida aspectului său abstract, are aplicaţii substanţiale în hidrodinamică, teoria profilurilor aerodinamice, teoria circuitelor şi reţelelor electrice, teoria cuantică a difuziei, studiul câmpului electromagnetic ş.a. În plus, teoremele şi metodele reziduurilor reprezintă elemente esenţiale în studiul transformărilor integrale şi discrete.

Transformările integrale şi discrete au devenit, în ultimele decenii, o componentă de bază în formarea specialiştilor IT. Sub impusul tehnicii de calcul, mereu mai performante, aplicaţiile acestor transformări au primit tot mai multă substanţă, iar ramurile beneficiare au devenit tot mai numeroase şi, uneori, surprinzătoare: procesarea imaginilor, recunoaşterea formelor, tomografia, recunoaşterea vocii (analiza semnalului vocal), analiza semnalelor seismice, radar sau geofizice, electromagnetismul.

Lucrarea se adresează, în primul rând, studenţilor de la specializările Automatică, Calculatoare, Electronică, Telecomunicaţii şi Ingineria Electrică din cadrul universităţilor cu profil tehnic, dar poate fi utilă, în egală măsură, masteranzilor, doctoranzilor, cercetătorilor şi tuturor celor interesaţi de domeniul vast, exploziv, cu frontiera în plină expansiune, al transformărilor integrale şi discrete.

Autorul a urmărit să îmbine expunerea matematică riguroasă cu spiritul ingineresc, practic şi intuitiv; în acest scop, s-a renunţat la demonstraţia unor teoreme care solicitau un aparat matematic laborios sau sofisticat, în schimbul unor exemple sau aplicaţii directe. De altfel, fiecare capitol se încheie cu o consistentă secţiune de probleme şi aplicaţii, urmate de soluţii, indicaţii sau răspunsuri.

Autorul

Partea I

Analiză matematică în complex

Capitolul 1

Operaţii cu numere complexe. Topologia corpului numerelor complexe

1 Reprezentarea numerelor complexe

Să considerăm corpul comutativ $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, cu operaţiile de "adunare" şi "înmulţire" definite prin $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, respectiv $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, $\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall\ (c, d) \in \mathbb{R}^2$. Mulţimea $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ este un subcorp al corpului $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, izomorf cu corpul $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ al numerelor reale, de aceea utilizăm identificarea $a = (a, 0)$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$. Punând $j = (0, 1)$ şi observând că $j^2 = (-1, 0) = -1$, elementul $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ se scrie sub forma:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + jy$$

Introducem notaţia

$$\mathbb{C} = \{z = x + jy : \ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ j^2 = -1\}$$

Corpul comutativ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, unde

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2); \quad z_1 z_2 = (x_1 y_1 - x_2 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$z_1 = x_1 + jy_1 \in \mathbb{C}, \quad z_2 = x_2 + jy_2 \in \mathbb{C},$$

se numeşte *corpul numerelor complexe*.

1.1. Reprezentarea algebrică a numerelor complexe

• Scrierea $z = x+jy$ se numeşte *reprezentarea algebrică* sau *forma algebrică* a numărului complex z.

• Fie $z = x + jy \in \mathbb{C}$. Numărul real x se numeşte *partea reală* a numărului complex z, iar numărul real y se numeşte *partea imaginară* a lui z; utilizăm notaţia $x = \operatorname{Re} z$; $y = \operatorname{Im} z$.

• Fie $z = x + jy \in \mathbb{C}$. Numărul complex $\overline{z} = x - jy$ se numeşte *conjugatul* numărului complex z.

• Fie $z = x + jy \in \mathbb{C}$. Numărul real pozitiv $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ se numeşte *modulul* numărului complex z.

1.2. Reprezentarea trigonometrică a numerelor complexe

(i) Planul complex

Să considerăm un sistem cartezian rectangular de coordonate Oxy în planul euclidian bidimensional.

• Fiind dat numărul complex $z = a + jb$, punctul $M(a, b)$ din planul Oxy se numeşte *imaginea geometrică* a lui z.

• Fiind dat punctul $M(a, b)$ din planul Oxy, numărul complex $z = a + jb$ se numeşte *afixul* punctului M.

• Se stabileşte astfel o corespondenţă biunivocă între mulţimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe şi planul euclidian Oxy. În acest context, planul Oxy se numeşte *planul complex*, axa Ox este *axa reală*, iar axa Oy este *axa imaginară*.

• Fie $z = a+jb \in \mathbb{C}$ şi $M(x, y)$ imaginea sa geometrică. Vectorul $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ se numeşte *imaginea vectorială* a lui z. Au loc egalităţile

$$|z| = OM = |\overrightarrow{r}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(ii) Noţiunea de argument al unui număr complex

Fie $z = a + jb$ un număr complex nenul dat şi $M(x, y)$ imaginea sa geometrică.

• Unghiul $t \in [0, 2\pi)$ dintre versorul $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{i}$ al axei Ox şi vectorul $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ se numeşte *argument redus* al lui z şi se notează $t = \arg z$ (Fig.1).

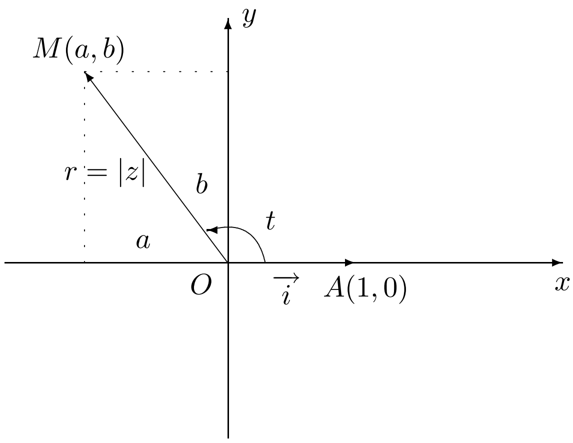


Fig.1.

• Mulţimea $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\} = \arg z + 2\pi\mathbb{Z}$ se numeşte *mulţimea argumentelor* numărului complex z.

• Numărul $\arg z$ se numeşte *determinarea principală* a argumentului iar $\operatorname{Arg} z$ se numeşte *determinarea generală* a argumentului lui z. Uneori determinarea principală se ia în intervalul $(-\pi, \pi]$.

Observaţie. Argumentul numărului complex $z = 0$ nu se defineşte.

(iii) Reprezentarea trigonometrică a unui număr complex

Fie $z = a + jb \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ şi $t = \arg z$. Notând $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ primim (vezi Fig.1): $a = r\cos t$ şi $b = r\sin t$, deci $z = r(\cos t + j\sin t)$.

Egalitatea $z = r(\cos t + j\sin t)$ se numeşte *reprezentarea trigonometrică* sau *forma trigonometrică* a numărului complex z. Este clar că egalitatea $z = r(\cos t + j\sin t)$ are loc pentru orice $t \in \operatorname{Arg} z$.

(iv) Determinarea modulului şi argumentului unui număr complex

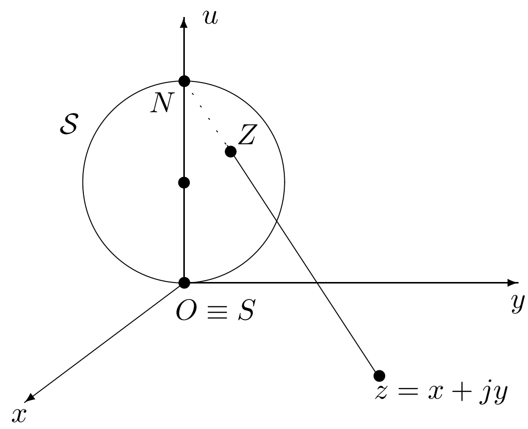
Fie $z = a + jb \in \mathbb{C}$. Atunci $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, iar pentru $z \neq 0$:

$$t = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}, & \text{dacă} \quad a > 0,\ b \geq 0 \text{ (cadranul I)} \\ \pi/2, & \text{dacă} \quad a = 0,\ b > 0 \text{ (semiaxa pozitivă } Oy\text{)} \\ \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a} + \pi, & \text{dacă} \quad a < 0,\ b \in \mathbb{R} \text{ (cadranele II şi III)} \\ 3\pi/2, & \text{dacă} \quad a = 0,\ b < 0 \text{ (semiaxa negativă } Oy\text{)} \\ \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a} + 2\pi, & \text{dacă} \quad a > 0,\ b < 0 \text{ (cadranul IV)} \end{cases}$$

2 Topologia corpului numerelor complexe

2.1. Planul complex extins

Să considerăm o sferă $\mathcal{S}$ aşezată cu "polul sud" S în originea planului complex şi tangentă la acest plan (Fig.2). Asociem fiecărui punct Z al sferei $\mathcal{S}$, diferit de "polul nord" N al sferei, punctul z al planului complex situat pe dreapta NZ. În acest mod, se stabileşte o corespondenţă biunivocă între punctele planului complex şi punctele sferei $\mathcal{S}$, diferite de N, numită *proiecţie stereografică*. Polului nord N al sferei $\mathcal{S}$ îi ataşăm un nou "număr" complex, notat ∞, numit "*punctul de la infinit*". Notăm cu $\overline{\mathbb{C}}$ (sau $\mathbb{C}_\infty$ sau $\widetilde{\mathbb{C}}$) mulţimea $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, numită *planul complex extins* sau *planul complex completat*.



$z = NZ \cap (Oxy)$

Fig.2. Sfera numerelor complexe

Regulile de calcul cu ∞ sunt următoarele:

$$a + \infty = \infty + a = \infty,\ \forall\ a \in \overline{\mathbb{C}};\ a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty,\ \forall\ a \in \overline{\mathbb{C}}^* = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\};$$

$$\frac{a}{0} = \infty,\ \forall\ a \in \overline{\mathbb{C}}^*;\ \frac{a}{\infty} = 0,\ \forall\ a \in \mathbb{C};\ |\infty| = \infty.$$

Nu se definesc "operaţiile" $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$.

2.2. Structura metrică în $\mathbb{C}$

(i) Funcţia $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, $\forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se numeşte *distanţă* sau *metrică* pe $\mathbb{C}$. Se arată fără dificultate că funcţia d verifică axiomele unei metrici, deci $(\mathbb{C}, d)$ este un spaţiu metric.

(ii) Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $r > 0$ numere date.

• Mulţimea $\Delta(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < r\} = \{z \in \mathbb{C} : \ d(z, z_0) < r\}$ se numeşte *disc centrat* în z_0 şi de rază r sau *disc deschis* de centru z_0 şi de rază r. Discul $\Delta(0; 1)$ se numeşte *disc unitate.*

• Mulţimea $\Gamma(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| = r\}$ se numeşte *cerc* de centru z_0 şi rază r; cercul $\Gamma(0; 1)$ se numeşte *cerc unitate.*

• Mulţimea $\overline{\Delta}(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| \leq r\}$ se numeşte *disc închis* de centru z_0 şi rază r.

(iii) Fie $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$, $R \in \mathbb{R}$ numere date, cu $0 < r < R$. Mulţimea $U(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : \ r < |z - z_0| < R\}$ se numeşte *coroană circulară de centru* z_0 *şi de raze* r *şi* R. Observăm că $U(z_0; r, R) = \Delta(z_0; R) \setminus \overline{\Delta}(z_0; r)$.

2.3. Topologia în $\mathbb{C}$ şi $\overline{\mathbb{C}}$

(i) Topologia în $\mathbb{C}$ rezultă din structura de spaţiu metric a lui $\mathbb{C}$. Astfel, o mulţime $G \subseteq \mathbb{C}$ este *deschisă* dacă există $z_0 \in \mathbb{C}$ şi există $r > 0$ astfel încât $\Delta(z_0; r) \subseteq \mathbb{C}$. Notând cu $\mathcal{G}$ familia mulţimilor deschise din $\mathbb{C}$, cuplul $(\mathbb{C}, \mathcal{G})$ devine un spaţiu topologic.

(ii) Fie $\widetilde{\mathcal{G}}$ reuniunea dintre familia $\mathcal{G}$ a submulţimilor deschise din $\mathbb{C}$ şi toate submulţimile lui $\overline{\mathbb{C}}$ care conţin mulţimi de forma $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| > r\} \cup \{\infty\}$, cu $r > 0$; cuplul $(\overline{\mathbb{C}}, \widetilde{\mathcal{G}})$ este un spaţiu topologic.

2.4. Mulţime conexă. Domeniu

(i) O submulţime A a lui $\mathbb{C}$ (sau $\overline{\mathbb{C}}$) se numeşte *mulţime conexă* dacă nu se poate reprezenta ca reuniune a două mulţimi deschise, nevide şi disjuncte. Dacă $A \subseteq \mathbb{C}$, atunci A este conexă dacă şi numai dacă orice două puncte din A pot fi unite printr-o curbă continuă, situată în A.

(ii) O mulţime $D \subseteq \mathbb{C}$ (sau $\overline{\mathbb{C}}$) se numeşte *domeniu* dacă D este o mulţime deschisă şi conexă. Un domeniu $D \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte *domeniu simplu conex* sau *domeniu cu conexiune simplă* dacă orice curbă închisă $\gamma \subseteq D$ are proprietatea că domeniul mărginit care are frontiera γ este inclus în D.

3 Şiruri şi serii de numere complexe

Fie $(z_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere complexe având reprezentarea algebrică $z_n = x_n + jy_n$, $x_n \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, respectiv reprezentarea trigonometrică $z_n = r_n(\cos t_n + j \sin t_n)$, $r_n \geq 0$, $t_n \in [0, 2\pi)$, $n \geq 1$.

3.1. Definiţie

• Spunem că şirul $(z_n)_{n\geq 1}$ din $\mathbb{C}$ **are limita** $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ dacă în orice vecinătate a lui z_0 se află toţi termenii şirului $(z_n)_{n\geq 1}$ începând de la un anumit rang n_0.

• Se notează $z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ sau $z_n \to z_0$.

• Şirul $(z_n)_{n\geq 1}$ se numeşte **şir convergent** dacă limita sa z_0 este finită, i.e. $z_0 \in \mathbb{C}$; în caz contrar (i.e. $z_0 = \infty$ sau şirul nu are limită), şirul $(z_n)_{n\geq 1}$ se numeşte **divergent**.

• $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \in \mathbb{C} \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$ astfel încât $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ avem $|z_n - z_0| < \varepsilon$

• $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$ astfel încât $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ avem $|z_n| > \varepsilon$.

3.2. Teorema de caracterizare a limitei

(i) *Fie* $z_0 = x_0 + jy_0$ *cu* $x_0 \in \mathbb{R},\ y_0 \in \mathbb{R}$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

(ii) *Fie* $z_0 = r_0(\cos t_0 + j \sin t_0),\ z_0 \neq 0,\ 0 < t_0 < 2\pi$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} r_n = r_0$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$.

3.3. Serii de numere complexe

Fie $(z_n)_{n\geq 1}$, $z_n = x_n + jy_n$, un şir de numere complexe şi $(s_n)_{n\geq 1}$ şirul de numere complexe definit prin $s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$, $n \geq 1$.

• Se numeşte *serie de termen general* z_n ansamblul şirurilor $((z_n), (s_n))$; se notează $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ sau $\sum\limits_{n\geq 1} z_n$.

• Şirul $(s_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *şirul sumelor parţiale* asociate seriei.

• Seria de termen general z_n este *convergentă* dacă şirul sumelor parţiale (s_n) este convergent; în acest caz $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ se numeşte *suma* seriei şi se notează $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$.

3.4. Teoremă

Seria de termen general z_n*, cu* $z_n = x_n + jy_n$*, este convergentă dacă şi numai dacă seriile de numere reale* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *sunt convergente. În acest* *caz are loc echivalenţa*

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} z_n;\ s = s_1 + js_2 \ \Leftrightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n = s_1 \quad \text{şi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = s_2.$$

4 Puterea complexă a numărului e

4.1. Exemplu

Fie $z \in \mathbb{C}$ un număr dat şi $(z_n)_{n\geq 1}$ şirul de numere complexe definit prin $z_n = \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$. Se ştie că dacă $z = x \in \mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = e^x$. Astfel, este natural să notăm cu e^z limita şirului $(z_n)_{n\geq 1}$, dacă această limită există. Punând $z = x + jy$, obţinem

$$r_n = \left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = \left(1 + \frac{2xn + x^2 + y^2}{n^2}\right)^{n/2},$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = e^x$.

Pe de altă parte, din relaţiile

$$\operatorname{Arg} z_n = n \operatorname{arctg} \frac{y}{n+x} + 2\pi\mathbb{Z};\ n > -x; \qquad \lim_{n\to\infty} n \operatorname{arctg} \frac{y}{n+x} = y,$$

deducem

$$\lim_{n\to\infty} (\arg z_n) \in y + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Notând $r_0 = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$ şi $t_0 = \lim\limits_{n\to\infty} (\arg z_n)$, rezultă

$$r_0 = e^x,\ \cos t_0 = \cos y \text{ şi } \sin t_0 = \sin y,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_0(\cos t_0 + j \sin t_0) = e^x(\cos y + j \sin y).$$

Aşadar, putem scrie

$$e^z = \lim_{n\to\infty} z_n = e^x(\cos y + j \sin y),\ z = x + jy.$$

4.2. Definiţie

Fiind dat numărul complex $z = x + jy \in \mathbb{C}$, definim $e^z \in \mathbb{C}$ prin egalitatea:

$$e^z = e^x(\cos y + j \sin y)$$

sau

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z}[\cos(\operatorname{Im} z) + j \sin(\operatorname{Im} z)].$$

- Luând $z = jt$ (deci $x = 0$, $y = t \in \mathbb{R}$), primim:

$$e^{jt} = \cos t + j \sin t, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

4.3. Proprietăţi

(i) $e^z \neq 0, \ \forall\, z \in \mathbb{C}$;
(ii) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$; $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}, \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
(iii) $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$; $(e^z)^n = e^{nz}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}, \forall\, n \in \mathbb{Z}$
(iv) $e^{jn\pi} = (-1)^n$, $e^{j\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)} = (-1)^n j, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$.
(v) $e^{z+2k\pi j} = e^z$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

4.4. Reprezentarea (forma) trigonometrică a unui număr complex

Dacă $z = r(\cos t + j \sin t) \in \mathbb{C}$ este dat, atunci $z = re^{jt}$; astfel,

$$z = |z|e^{j \arg z} \quad \text{sau} \quad z = |z|e^{jt}, \quad \text{cu} \quad t \in \operatorname{Arg} z.$$

5 Radicalul (rădăcina) de ordin n în complex

5.1. Definiţie

Fie $z \in \mathbb{C}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$ numere date. Se numeşte **rădăcină complexă de ordin** *n a lui z sau* **radical complex de ordin** *n al lui z mulţimea notată $\sqrt[n]{z}$ şi definită prin egalitatea*

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} : \ w^n = z\}.$$

5.2. Descrierea mulţimii $\sqrt[n]{z}$

Fie $z = r(\cos t + j\sin t) = re^{jt}$ şi $w = \rho e^{j\theta}$. Din egalitatea $w^n = z$ primim: $\rho^n e^{jn\theta} = re^{jt} \Leftrightarrow \rho^n = r$ şi $n\theta \in t + 2\pi\mathbb{Z}$, deci $\rho = \sqrt[n]{r}$ şi $\theta = \dfrac{t+2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Deoarece $e^{j(t+2s\pi)} = e^{jt}$, $\forall\ s \in \mathbb{Z}$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, este suficient să luăm $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Aşadar

Radicalul complex de ordin $n \in \mathbb{N}^*$ al unui număr complex nenul z are n elemente (numite şi **determinări** *ale radicalului), i.e.:*

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{r} e^{j(t+2k\pi)/n} \,:\, 0 \le k \le n-1 \right\}$$

sau

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{r} \left(\cos\frac{t+2k\pi}{n} + j\sin\frac{t+2k\pi}{n} \right) \,:\, 0 \le k \le n-1 \right\},$$

unde $z = r(\cos t + j\sin t)$, iar $\sqrt[n]{r}$ este radicalul "aritmetic" (adică singurul număr real pozitiv s cu proprietatea $s^n = r$).

Numărul complex $\sqrt[n]{r}e^{jt/n}$ (i.e. $k = 0$) se numeşte **determinare principală** *a radicalului.*

5.3. Observaţii

(i) $\sqrt[n]{0} = \{0\}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$

(ii) Egalitatea care defineşte $\sqrt[n]{z}$ se poate scrie astfel:

$$(\sqrt[n]{z})_{\mathbb{C}} = \left\{ (\sqrt[n]{|z|})_{\mathbb{R}} e^{j(t+2k\pi)/n} \,:\, 0 \le k \le n-1 \right\}.$$

Astfel, $(\sqrt{9})_{\mathbb{R}} = 3$, dar $(\sqrt{9})_{\mathbb{C}} = \{-3, 3\}$ şi $(\sqrt[3]{8})_{\mathbb{R}} = 2$, dar $(\sqrt[3]{8})_{\mathbb{C}} = \{2, 1 \pm j\sqrt{3}\}$.

5.4. Ecuaţii binome

• Sunt ecuaţii de forma $az^n + b = 0$, unde $a, b, z \in \mathbb{C}$, $a \ne 0$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă $z^n = -b/a$, cu soluţia

$$S = \{z_k \,:\, 0 \le k \le n-1\};\ z_k = \sqrt[n]{r}e^{j(t+2k\pi)/n};\ r = |-b/a|;\ t \in \operatorname{Arg}\left(-\frac{b}{a}\right).$$

• **Rădăcinile de ordinul n ale unităţii** sunt rădăcinile ecuaţiei $z^n = 1$, i.e. $z_k = e^{2k\pi j/n}$, $0 \le k \le n-1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

• Ecuaţiile de forma $az^{2n} + bz^n + c = 0$, unde $z, a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \ne 0$, $b \ne 0$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, se numesc **ecuaţii trinome**. Soluţiile acestei ecuaţii se determină punând $z^n = u$.

6 Logaritmul unui număr complex

6.1. Definiţie

Se numeşte **logaritm (complex)** *al unui număr complex nenul z, notaţie $\mathrm{Ln}\, z$ sau $\mathrm{Log}\, z$, mulţimea numerelor $w \in \mathbb{C}$ cu proprietatea $e^w = z$. Aşadar $\mathrm{Ln}\, z = \{w \in \mathbb{C} : \ w^n = z\}$, $z \in \mathbb{C}^*$.*

• Logaritmul numărului complex 0 nu se defineşte.

6.2. Descrierea mulţimii $\mathrm{Ln}\, z$

Fie $w = x + jy$, cu $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ şi $z = re^{jt}$, $r = |z|$, $t \in \mathrm{Arg}\, z$. Din $e^w = z$ obţinem $e^x e^{jy} = re^{jt}$, deci $e^x = r$ şi $y = t + 2\pi\mathbb{Z}$. Aşadar:

Logaritmul complex al numărului complex $z = re^{jt}$ are în $\mathbb{C}$ o infinitate de elemente (numite **determinări***), anume:*

$$\mathrm{Ln}\, z = \{\ln r + j(t + 2k\pi) : \ k \in \mathbb{Z}\} = \ln r + j(t + 2\pi\mathbb{Z}),$$

unde $r = |z|$, $t \in \mathrm{Arg}\, z$ şi $\ln r$ este logaritmul (real) al numărului $r > 0$.

• Putem scrie, de asemenea, pentru $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + j(\arg z + 2\pi\mathbb{Z}) = \{\ln z + j(\arg z + 2k\pi) : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

• Numărul complex $\ln|z| + j \cdot \arg z$ se numeşte **determinare principală** a logaritmului complex; scriem $\ln z = \ln|z| + j \arg z$, $z \in \mathbb{C}^*$.

6.3. Exemple

(i) $\mathrm{Ln}\,(\sqrt{3} - j) = \mathrm{Ln}\,(2e^{-j\pi/6}) = \left\{\ln 2 + j\left(-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right) : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ $= \ln 2 + j\left(-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. Deseori se scrie $\mathrm{Ln}\,(\sqrt{3} - j) = \ln 2 + j\left(-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$; $k \in \mathbb{Z}$. Determinarea principală a logaritmului $\mathrm{Ln}\,(\sqrt{3} - j)$ este $\ln(\sqrt{3} - j) = \ln 2 + \dfrac{11\pi}{6}j$, deoarece $\arg(\sqrt{3} - j) = \dfrac{11\pi}{6}$.

(ii) $\mathrm{Ln}\,(-j) = \mathrm{Ln}\,(1 \cdot e^{3\pi j/2}) = j\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$ sau $\mathrm{Ln}\,(-j) = j\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Determinarea principală este $\ln(-j) = \dfrac{3\pi j}{2}$; observăm că $\mathrm{Re}\, \ln(-j) = 0$ şi $\mathrm{Im}\, \ln(-j) = \dfrac{3\pi}{2}$.

(iii) $\mathrm{Ln}\,(-e) = \mathrm{Ln}\,(e \cdot e^{j\pi}) = 1 + \pi j(2\mathbb{Z} + 1)$ sau $\mathrm{Ln}\,(-e) = 1 + j(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Determinarea principală este $\ln(-e) = 1 + \pi j$, deci $\mathrm{Re}\, \ln(-e) = 1$ şi $\mathrm{Im}\, \ln(-e) = \pi$.

(iv) Dacă $x \in \mathbb{R}$ şi $x > 0$, atunci $\operatorname{Ln} x = \operatorname{Ln}(xe^{j\cdot 0}) = \ln x + 2k\pi j$, $k \in \mathbb{Z}$, iar determinarea principală este $\ln x = \ln x$ (i.e. $(\ln x)_{\mathbb{C}} = (\ln x)_{\mathbb{R}}$); aşadar *determinarea principală a logaritmului complex al numărului real $x > 0$ coincide cu logaritmul real (standard) al numărului x.*

7 Puterea complexă a unui număr complex nenul

7.1. Definiţie

Fie $z \in \mathbb{C}^*$ şi $\alpha \in \mathbb{C}$ numere date. Prin **puterea α a numărului** *z, se înţelege mulţimea notată z^α şi definită prin $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$.*

• *Fiecare din elementele mulţimii z^α se numeşte* **determinare** *a puterii z^α. Numărul $e^{\alpha \ln z}$, unde $\ln z = \ln|z| + j\arg z$ se numeşte* **determinare principală** *a puterii z^α.*

7.2. Exemple

(i) $j^{-j} = e^{-j\operatorname{Ln} j} = e^{-j\left[\ln 1 + j\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right]} = e^{(\pi/2)+2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, deci $j^{-j} \subseteq \mathbb{R}$. Determinarea principală este $e^{\pi/2} \in \mathbb{R}$.

(ii) $(-1+j)^j = e^{j\operatorname{Ln}(-1+j)} = e^{j[\ln 2 + j(3\pi/4+2k\pi)]} = e^{-(2k\pi+3\pi/4)}e^{j\ln\sqrt{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$. Determinarea principală este

$$e^{-3\pi/4}e^{j\ln\sqrt{2}} = e^{-3\pi/4}\left[\cos\left(\frac{\ln 2}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\ln 2}{2}\right)\right].$$

8 Probleme

Enunţuri

1. *Să se determine următoarele mulţimi din planul complex ($z = x + jy$):*
$A_1 = \{(x,y):\ 2 < |2z+2-j| \le 4\}$
$A_2 = \{(x,y):\ |z+2| + |z-1-j| = 4\}$
$A_3 = \{(x,y):\ |z-1+2j| - |z-j| = 3\}$
$A_4 = \{(x,y):\ |z-2+3j| = |z+3-j|\}$
$A_5 = \left\{(x,y):\ 0 < \arg\dfrac{j-z}{j+z} \le \dfrac{\pi}{4}\right\}$
$A_6 = \{(x,y):\ |z-1| + \operatorname{Im} z \le 1\}$
$A_7 = \{(x,y):\ z^2 + \overline{z}^2 = 4\}$.

2. *Să se determine următorii radicali complecşi:*
(i) $\sqrt[4]{j}$; **(ii)** $\sqrt[3]{-j}$; **(iii)** $\sqrt[50]{1-j}$; **(iv)** $\sqrt[10]{\dfrac{5j-1}{2+3j}}$.

3. *Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţiile:*
(i) $(z+1+j)^n = (z+1-j)^n$; **(ii)** $(2-3j)z^6+1+5j=0$;
(iii) $z^8+(2j-1)+z^4-j-1=0$; **(iv)** $z^n=\overline{z}$ $(n\in\mathbb{N})$; **(v)** $z^3=\overline{z}^2$.
4. *Să se calculeze:*
(i) $\mathrm{Ln}\,\dfrac{1-j}{\sqrt{2}}$; **(ii)** $\mathrm{Ln}\,(-j^2)$; **(iii)** $(-1)^j$.
5. *Să se precizeze partea reală şi partea imaginară pentru determinările principale ale logaritmilor sau puterilor complexe de mai jos:*
(i) $\ln(-\sqrt{3}-j)$; **(ii)** $\ln(-\sqrt{3})$; **(iii)** $(1+j\sqrt{3})^{-j}$; **(iv)** $(-1)^{j+1}$.

Soluţii. Indicaţii. Răspunsuri

1. $A_1 = U(z_0;1;2)\cup\Gamma(z_0;2)$; $z_0=-1+j/2$

A_2 este elipsa cu focarele $F_1(-2,0)$, $F_2(1,1)$ şi cu semiaxa focarelor de lungime 2

A_3 este o ramură a hiperbolei cu focarele $F_1(1-2j)$ şi $F_2(j)$, având semiaxa focarelor de lungime 3/2

A_4 este mediatoarea segmentului AB, cu $A(2,-3)$ şi $B(-3,1)$

$A_5 = \overline{\Delta}(-1,\sqrt{2})\cap\{(x,y):\ x>0\}$

$A_6 = \left\{(x,y):\ y\le x-\dfrac{x^2}{2}\right\}$

A_7 este hiperbola echilateră $x^2-y^2=2$

2. (iv) $\sqrt[10]{1+j} = \left\{\sqrt[20]{2}\cdot\exp j\left(\dfrac{\pi}{40}+\dfrac{k\pi}{5}\right):\ 0\le k\le 9\right\}$.

3. (ii) $z^6=1-j$, deci $S=\left\{\sqrt[12]{2}\cdot\exp j\left(-\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{3}\right):\ 0\le k\le 5\right\}$

(iii) Punem $z^4=a$; obţinem $u_1=1-j$, $u_2=-j$, deci

$$S=\left\{\sqrt[8]{2}\exp j\left(-\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right):0\le k\le 3\right\}\cup\left\{\exp j\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right):0\le k\le 3\right\}$$

(iv) Notând cu S_n mulţimea soluţiilor, obţinem:

$$S_0=\{1\};\quad S_1=\mathbb{R};\quad S_n=\{0\}\cup\left\{\exp\frac{2k\pi}{n+1}j:\ 0\le k\le n\right\},\ \text{pentru } n\ge 2$$

4. (i) $\mathrm{Ln}\,\dfrac{1-j}{\sqrt{2}} = j\left(\dfrac{7\pi}{4}+2\pi\mathbb{Z}\right)$;

(ii) $\mathrm{Ln}\,(-j^2)=2\pi j\mathbb{Z}$; **(iii)** $\exp\pi(2\mathbb{Z}-1)$

5. (i) $\mathrm{Re}\,z=\ln 2$; $\mathrm{Im}\,z=\dfrac{7\pi}{6}$; **(ii)** $\mathrm{Re}\,z=(\ln 3)/4$; $\mathrm{Im}\,z=\pi$

(iii) $\mathrm{Re}\,z=e^{\pi/3}\cos(\ln 2)$; $\mathrm{Im}\,z=-e^{\pi/3}\sin(\ln 2)$; **(iv)** $z=-e^{-\pi}$.

Capitolul 2

Funcţii olomorfe

1 Noţiunea de funcţie complexă

1.1. Definiţii. Partea reală şi partea imaginară ale unei funcţii complexe

• Fie $E \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime dată. Se numeşte **funcţie complexă de variabilă complexă** orice funcţie $f : E \to \mathbb{C}$.

• Funcţia $f : E \to \mathbb{C}$ ataşează fiecărui număr complex $z \in E$ numărul complex $f(z) \in \mathbb{C}$.

(i) Scriind $z = x + jy$, reprezentarea algebrică a numărului $f(z)$ este:

$$f(z) = P(x, y) + jQ(x, y), \quad (x, y) \in E.$$

Funcţiile reale $P : E \to \mathbb{R}$ şi $Q : E \to \mathbb{R}$ se numesc *partea reală* a funcţiei f, respectiv *partea imaginară* a funcţiei f şi se notează $P = \operatorname{Re} f$, $Q = \operatorname{Im} f$.

(ii) Scriind $z = re^{jt}$, reprezentarea trigonometrică a numărului $f(z)$ este:

$$f(z) = R(r, t)e^{jT(r,t)}, \quad r = |z|, \quad t = \arg z,$$

unde $R(s, t) = |f(z)|$ şi $T(r, t) = \arg f(z)$.

Aşadar, definirea unei funcţii complexe de variabilă complexă revine la definirea a două funcţii reale de două variabile reale.

• Dacă $E \subseteq \mathbb{R}$, atunci $f : E \to \mathbb{R}$ este o **funcţie complexă de variabilă reală** i.e. $f(t) = P(t) + jQ(t)$, $t \in E$. De obicei o asemenea funcţie se notează cu $z(t)$, iar părţile sale reală şi imaginară se notează cu $x(t)$ şi $y(t)$, i.e. $z(t) = x(t) + jy(t)$, $t \in E$.

• Fiind dată o funcţie complexă $f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, punem $Z = f(z)$ sau $w = f(z)$ şi spunem că f este o *transformare* (sau o *reprezentare*) a mulţimii

E din planul Oxy al variabilei z în planul OXY al variabilei Z (sau în planul Ouv al variabilei w). Dacă $Z = w = X + jY$, atunci această transformare este dată prin egalităţile $X = P(x, y)$, $Y = Q(x, y)$, unde $P = \operatorname{Re} f$ şi $Q = \operatorname{Im} f$.

1.2. Limita unei funcţii complexe într-un punct

• Se spune că *funcţia* $f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *are în punctul* $z_0 \in E'$ *limita egală cu* $L \in \overline{\mathbb{C}}$ dacă pentru orice vecinătate V a lui L există o vecinătate U a lui z_0 astfel încât pentru fiecare $z \in E \cap U$ să avem $f(z) \in V$. Scriem $L = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

• Dacă $f(z) = P(x, y) + jQ(x, y)$, $z_0 = x_0 + jy_0$ şi $L = L_1 + jL_2$, atunci are loc echivalenţa:

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = L \;\Leftrightarrow\; \exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} P(x, y) = L_1 \text{ şi } \exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} Q(x, y) = L_2.$$

1.3. Continuitatea unei funcţii complexe

• Funcţia complexă (uniformă) $f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este *continuă în punctul* $z_0 \in E$, prin definiţie, dacă există $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ şi $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

• Funcţia f este continuă pe o submulţime $E_1 \subseteq E$ dacă f este continuă în fiecare punct din E_1.

• Dacă $f(z) = P(x, y) + jQ(x, y)$ şi $z_0 = x_0 + jy_0 \in E$, atunci f este continuă în z_0 dacă şi numai dacă funcţiile P şi Q sunt continue în punctul (x_0, y_0).

1.4. Comportarea unei funcţii complexe la infinit

Fie $f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă astfel încât $\infty \in E'$ (i.e. punctul de la infinit este punct de acumulare pentru mulţimea E). Introducem funcţia complexă g prin $g(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $\forall\, z \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $\dfrac{1}{z} \in E$. Deoarece funcţia $h : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $h(z) = \dfrac{1}{z}$, transformă orice vecinătate redusă a originii într-o vecinătate a lui ∞, *prin comportarea funcţiei* f *la* ∞ *se înţelege comportarea funcţiei* g *în origine.*

2 Funcţii monogene. Condiţiile Cauchy-Riemann

2.1. Definiţie

Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $z_0 \in G$ un punct fixat şi $f : G \to \mathbb{C}$ o funcţie dată.

• *Dacă există în $\overline{\mathbb{C}}$ limita $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, atunci această limită se numeşte* **derivata funcţiei f în punctul** z_0.

Scriem $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

• *Dacă limita $f'(z_0)$ este finită, i.e. $f'(z_0) \in \mathbb{C}$, atunci funcţia f se numeşte* **monogenă** *în z_0 sau* **derivabilă** *în z_0.*

• Pentru o *funcţie complexă de variabilă reală*, $z(t) = x(t) + jy(t)$, $t \in I$ (interval deschis din $\mathbb{R}$), se deduce că z este derivabilă într-un punct $t_0 \in I$ dacă şi numai dacă funcţiile reale x şi y sunt derivabile în t_0 şi, în această situaţie, are loc egalitatea $z'(t_0) = x'(t_0) + jy'(t_0)$.

Să presupunem, mai departe, că $f(z) = P(x, y) + jQ(x, y)$, $z = x + jy \in G$. Ne interesează legătura între monogenitatea funcţiei f în z_0 şi regularitatea funcţiilor reale P şi Q în punctul (x_0, y_0). Următorul exemplu arată, oarecum surprinzător, că regularitatea a funcţiilor P şi Q nu atrage în mod automat monogenitatea funcţiei f în punctele mulţimii G.

2.2. Exemplu

Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}^2 + 3z - 2\overline{z} + 1 + j$. Prin calcul direct rezultă $P(x, y) = \operatorname{Re} f = x^2 + x - y^2 + 1$, $Q(x, y) = 5y - 2xy + 1$ deci P şi Q sunt *polinoame* de gradul doi în x şi y.

• *Studiem monogenitatea funcţiei f în origine* ($z_0 = 0$).

Să calculăm această limită după direcţia axei Ox, i.e. $z = x + Oj$; obţinem

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = 3 + \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x}{x} = 3 - 2 = 1.$$

Mai departe, să calculăm aceeaşi limită după direcţia axei Oy, i.e. $z = O + jy$; obţinem

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = 3 + \lim_{y \to 0} \frac{-y^2 + 2jy}{jy} = 3 + 2 = 5.$$

Deoarece $1 \neq 5$, deducem că *nu există* $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0}$, deci f *nu este monogenă în* $z_0 = 0$.

• *Studiem monogenitatea funcţiei f în punctul $z_0 = 1$.*
Avem

$$\lim_{z\to 1}\frac{f(z)-f(1)}{z-1} = \lim_{z\to 1}\frac{\overline{z}^2+3z-2\overline{z}-2}{z-1}$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{(\overline{z}-1)^2+3(z-1)}{z-1} = 3+\lim_{z\to 1}\frac{(\overline{z}-1)^2}{z-1} = 3,$$

deoarece $\left|\dfrac{(\overline{z}-1)^2}{z-1}\right| = \dfrac{|\overline{z}-1|^2}{|z-1|} = |z-1| \to 0$ pentru $z \to 1$.

În concluzie, f *este monogenă în* $z_0 = 1$ *şi* $f'(1) = 3$.

Formulăm, mai departe, condiţii necesare şi condiţii suficiente de monogenitate a unei funcţii complexe într-un punct dat.

2.3 Teoremă (Condiţiile Cauchy-Riemann)

Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $z_0 \in G$ un punct dat, $z_0 = x_0 + jy_0$ şi fie $f : G \to \mathbb{C}$, $f(z) = P(x,y) + jQ(x,y)$, $z = x + jy \in G$, o funcţie complexă dată.

Dacă f este monogenă în z_0, atunci funcţiile P şi Q admit derivate parţiale în punctul (x_0, y_0) şi au loc egalităţile:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0), \tag{2.1}$$

numite **condiţiile de monogenitate Cauchy-Riemann în punctul** z_0.

Demonstraţie

Fie $z \in G$, $z = x + jy$, $z \neq z_0$. Deoarece f este monogenă în z_0, avem:

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \tag{2.2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{P(x,y)-P(x_0,y_0)+j[Q(x,y)-Q(x_0,y_0)]}{x-x_0+j(y-y_0)}.$$

• Luăm $z = x + jy_0$, $x \neq x_0$, $x \to x_0$. Din (2.2) obţinem:

$$f'(z_0) = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{P(x,y_0)-P(x_0,y_0)}{x-x_0} + j\frac{Q(x,y_0)-Q(x_0,y_0)}{x-x_0}\right].$$

Deoarece limita unei funcţii complexe când $z \to z_0$ există dacă şi numai dacă există limitele părţilor sale reală şi imaginară pentru $(x, y) \to (x_0, y_0)$, rezultă că există $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0)$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$ şi avem:

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + j\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{2.2.3}$$

• Similar, luând $z = x_0 + jy$, $y \neq y_0$, $y \to y_0$, avem $z \to z_0$ şi obţinem, via (2.2):

$$f'(z_0) = \lim_{y \to y_0}\left[\frac{Q(x_0, y) - Q(x_0, y_0)}{y - y_0} - j\frac{P(x_0, y) - P(x_0, y_0)}{y - y_0}\right].$$

Astfel, există $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$ şi are loc egalitatea:

$$f'(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - j\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{2.4}$$

Din relaţiile (2.3) şi (2.4) deducem:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0),$$

ceea ce încheie demonstraţia teoremei.

2.4. Teoremă

Fie $f : G \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă definită pe o mulţime deschisă G, $f(z) = P(x, y) + jQ(x, y)$, $z = x + jy \in G$.

Dacă funcţiile P şi Q admit derivate parţiale pe o vecinătate a unui punct dat $z_0 \in G$, care sunt continue în z_0 şi dacă sunt îndeplinite condiţiile de monogenitate Cauchy-Riemann (2.1), atunci funcţia f este monogenă în z_0.

Demonstraţia acestei teoreme se poate găsi în [11], [14], [15], [22].

2.5. Calculul derivatei unei funcţii monogene

Din (2.1), (2.3) şi (2.4) deducem că dacă $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este o funcţie monogenă în punctul $z_0 = x_0 + jy_0 \in G$, atunci au loc relaţiile:

- $f'(z_0) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + j\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$
- $f'(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$, unde $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + j\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

- $f'(z_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - j\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$
- $f'(z_0) = -j\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)$, unde $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial y} + j\dfrac{\partial Q}{\partial y}$
- $f'(z_0) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) - j\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$
- $f'(z_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) + j\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$

2.6. Exemple

(i) Reluăm Exemplul 2.2, $f(z) = \overline{z}^2 + 3z - 2\overline{z} + 1 + j$, cu $P(x, y) = x^2 + x - y^2 + 1$, $Q(x, y) = 5y - 2xy + 1$. Condiţiile de monogenitate Cauchy-Riemann (2.1), scrise într-un punct arbitrar $z = x + jy$, sunt:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y};\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \ \Leftrightarrow\ 2x + 1 = 5 - 2x;$$

$$-2y = 2y \ \Leftrightarrow\ x = 1,\ y = 0 \ \Leftrightarrow\ z = 1$$

Aşadar, singurul punct în care f este monogenă este $z_0 = 1$ şi

$$f'(1) = \frac{\partial P}{\partial x}(1, 0) + j\frac{\partial Q}{\partial x}(1, 0) = 3 + 0j = 3.$$

(ii) $f(z) = 2\overline{z}^2 + 5z + z\overline{z} + (10 + 9j)\overline{z} + 2j$, $z \in \mathbb{C}$.

Avem $P(x, y) = 3x^2 - y^2 + 15x + 9y$, $Q(x, y) = -4xy + 9x - 5y + 2$. Condiţiile de monogenitate Cauchy-Riemann (2.1) sunt:

$$6x + 15 = -4x - 5;\ -2y + 9 = 4y - 9 \ \Leftrightarrow\ x = -2,\ y = 3 \ \Leftrightarrow\ z = -2 + 3j.$$

Aşadar, singurul punct de monogenitate pentru f este $z_0 = -2 + 3j$ şi

$$f'(-2 + 3j) = \frac{\partial P}{\partial x}(-2, 3) + j\frac{\partial Q}{\partial x}(-2, 3) = 3 - 3j.$$

(iii) $f(z) = |z|^n - \dfrac{1}{2}\overline{z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$.

Avem $P(x, y) = (x^2 + y^2)^{n/2} - \dfrac{1}{2}x$, $Q(x, y) = \dfrac{1}{2}y$.

Din condiţiile Cauchy-Riemann (2.1) deducem:

$$nx(x^2 + y^2)^{n/2-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},\quad ny(x^2 + y^2)^{n/2-1} = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$y = 0 \text{ şi } nx|x|^{n-2} = 1.$$

Dacă $n = 1$ rezultă $y = 0$ şi $x > 0$, deci funcţia $f(z) = |z| - \frac{1}{2}\overline{z}$ este monogenă în toate punctele $z = x > 0$ (deci mulţimea de monogenitate este $\mathbb{R}_+^*$) şi $f'(z) = f'(x + 0j) = \frac{1}{2}$, $\forall\ z = x > 0$.

Dacă $n \geq 2$, rezultă $y = 0$ şi $x = 1/\sqrt[n-1]{n}$, deci singurul punct de monogenitate este $z_0 = \sqrt[n-1]{1/n}$ şi $f'(z_0) = \frac{1}{2}$.

3 Funcţii olomorfe

3.1. Definiţie

O funcţie $f : G \to \mathbb{C}$ se numeşte **olomorfă** *pe mulţimea deschisă $G \subseteq \mathbb{C}$ dacă f este olomorfă în fiecare punct $z_0 \in G$.*

• Mulţimea tuturor funcţiilor olomorfe pe G se notează $\mathcal{H}(G)$.

• Orice funcţie olomorfă pe $\mathbb{C}$ se numeşte *funcţie întreagă*; în consecinţă, $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ desemnează mulţimea funcţiilor întregi.

• În cele ce urmează vom nota cu $C^n(G)$ mulţimea funcţiilor $f : G \to \mathbb{C}$ cu proprietatea că funcţiile reale $\operatorname{Re} f$ şi $\operatorname{Im} f$ sunt de clasă $C^n(G)$, $n \in \mathbb{N}$.

3.2. Teoremă

Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $f : D \to \mathbb{C}$, $f = P + jQ$. Dacă funcţia f este olomorfă pe D şi $f \in C^2(D)$, atunci P şi Q sunt funcţii armonice pe D, i.e. $\Delta P = 0$ şi $\Delta Q = 0$ în D, unde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, este operatorul diferenţial (de ordinul al doilea) al lui Laplace.

Demonstraţie

Ipotezele teoremei asigură îndeplinirea (pe D) a condiţiilor Cauchy-Riemann $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ şi $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$, de unde deducem (prin derivare în raport cu x, respectiv y) egalităţile:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}.$$

Prin adunarea ultimelor două egalităţi şi utilizarea teoremei lui Schwarz rezultă

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

Analog se demonstrează egalitatea $\Delta Q = 0$.

3.3. Determinarea unei funcţii olomorfe cunoscând partea sa reală sau imaginară

Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex.

- Să presupunem că $P \in C^2(D)$ este o funcţie armonică pe D.

Din $\Delta P = 0$ rezultă

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

deci forma diferenţială $\omega = -\dfrac{\partial P}{\partial y}dx + \dfrac{\partial P}{\partial x}dy$ este o diferenţială totală exactă. De aici rezultă existenţa unei funcţii $Q \in C^1(D)$ cu proprietatea $dQ = \omega$, deci

$$Q(x,y) = \int_{x_0}^{x} -\frac{\partial P}{\partial y}(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,t)dt + c \tag{3.1}$$

sau

$$Q(x,y) = \int_{x_0}^{x} -\frac{\partial P}{\partial y}(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial x}(x,t)dt + c, \tag{3.2}$$

unde $(x_0, y_0) \in D$ este un punct fixat, iar $c \in \mathbb{R}$ este o constantă.

Din egalitatea $\omega = dQ$ deducem

$$-\frac{\partial P}{\partial y}dx + \frac{\partial P}{\partial x}dy = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy \quad (\text{în } D),$$

deci egalităţile $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ au loc în fiecare punct $(x,y) \in D$, ceea ce arată că funcţia $f : D \to \mathbb{C}$, $f = P + jQ$, este olomorfă pe D.

În concluzie, *dacă funcţia reală $P \in C^2(D)$ este armonică în D, atunci funcţia complexă $f = P + jQ$, unde $Q \in C^2(D)$ este definită prin (3.1) sau (3.2), este olomorfă pe D.*

• Similar, *dacă funcţia reală* $Q \in C^2(D)$ *este armonică în* D, *atunci funcţia complexă* $f = P + jQ$ *este olomorfă pe* D, *funcţia* $P \in C^2(D)$ *fiind dată de una din egalităţile*:

$$P(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial y}(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,t)dt + c \tag{3.3}$$

sau

$$P(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial y}(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,t)dt + c, \tag{3.4}$$

unde $(x_0, y_0) \in D$ este un punct fixat, iar $c \in \mathbb{R}$ este o constantă.

3.4. Exemple

(i) *Să se determine funcţia olomorfă* $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = P(x,y) + jQ(x,y)$, $z = x + jy$ *ştiind că* $D \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$P(x,y) = \operatorname{Re} f = \frac{y}{x^2+y^2} \quad \textit{şi} \quad f(j) = 1 + j.$$

Rezolvare. Se verifică egalitatea $\Delta P = 0$. Au loc relaţiile:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Luând $(x_0, y_0) = (0, 1)$, din (3.1) primim:

$$Q(x,y) = \int_0^x \frac{y^2 - t^2}{(t^2+y^2)^2}dt + \int_1^y 0dt + c = \int_0^x \left(\frac{t}{t^2+y^2}\right)' dt + c$$

$$= \left.\frac{t}{t^2+y^2}\right|_0^x + c = \frac{x}{x^2+y^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Astfel,

$$f(x) = \frac{y}{x^2+y^2} + j\frac{x}{x^2+y^2} + jc = \frac{j(x-jy)}{x^2+y^2} + jc = \frac{j\overline{z}}{z\overline{z}} + jc,$$

deci $f(z) = \dfrac{j}{z} + jc$, $c \in \mathbb{R}$. Din condiţia $f(j) = 1 + j$, deducem $1 + jc = 1 + j$, deci $c = 1$. În final, $f(z) = \dfrac{j}{z} + j$, $z \in D$.

Observaţie. Funcţia olomorfă $f(z)$ se poate determina, formal, în următoarele moduri:

• Am obţinut $f(z) = \dfrac{y}{x^2+y^2} + j\dfrac{x}{x^2+y^2} + jc$, $z = x + jy$. Luând $z \in \mathbb{R}$ (adică punând $y = 0$ şi $z = x$), obţinem $f(z) = \dfrac{j}{z} + jc$, $\forall\ z \in \mathbb{R}^*$; de aici, pe baza principiului identităţii funcţiilor olomorfe (Teorema 1.7, Capitolul 4), deducem $f(z) = \dfrac{j}{z} + jc$, $\forall\ z \in \mathbb{C}^*$.

• Din secţiunea 2.5 rezultă

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) - j\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + j\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\ \forall\ z \in \mathbb{C}^*.$$

Luând şi aici $z \in \mathbb{R}^*$ (deci $y = 0$ şi $z = x$), primim

$$f'(z) = \frac{-j}{z^2} = \left(\frac{j}{z}\right)',\ \forall\ z \in \mathbb{C}^*,$$

deci $f(z) = \dfrac{j}{z} + k$, $k \in \mathbb{C}$. Din condiţia $f(j) = 1 + j$ obţinem $k = j$, deci

$$f(z) = j\left(\frac{1}{z} + 1\right), \quad \forall\ z \in \mathbb{C}^*.$$

(ii) *Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = P(x,y) + jQ(x,y)$, $z = x + jy$, ştiind că $Q(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, iar $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ este o funcţie dată.*

Rezolvare. Utilizăm condiţia $\Delta Q = 0$. Notând $t = \dfrac{y}{x}$, obţinem

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \varphi'(t)t'_x = \frac{-y}{x^2}\varphi'(t) \quad \text{şi} \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}\varphi'(t) + \frac{y^2}{x^4}\varphi''(t);$$

similar $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = \dfrac{1}{x^2}\varphi''(t)$. De aici, $\Delta Q = 0 \ \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{x^2}\left[2\frac{y}{x}\varphi'(t) + \frac{y^2}{x^2}\varphi''(t) + \varphi''(t)\right] = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$2t\varphi'(t) + (1+t^2)\varphi''(t) = 0 \ \Leftrightarrow\ ((1+t^2)\varphi'(t))' = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(t) = \frac{C_1}{1+t^2} \ \Leftrightarrow\ \varphi(t) = C_1 \operatorname{arctg} t + C_2,\ \text{unde } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Astfel,

$$Q(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = C_1 \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C_2.$$

Din secţiunea 2.5 primim:

$$f'(z) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) + j\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = C_1\frac{x}{x^2+y^2} - C_1\frac{y}{x^2+y^2}j, \quad (x,y) \neq (0,0),$$

deci ($y = 0,\ z = x$): $f'(z) = \dfrac{C_1}{z}$ şi $f(z) = C_1 \ln z + k_1$, unde $C_1 \in \mathbb{R}$, $k_1 \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R}^*$. Din principiul identităţii funcţiilor olomorfe rezultă

$$f(z) = C_1 \ln z + k_1, \quad z \in \mathbb{C}^*,\ C_1 \in \mathbb{R},\ k_1 \in \mathbb{C}.$$

4 Diferenţiala unei funcţii complexe

4.1. Definiţie

Fie f o funcţie complexă de clasă $C^1(G)$, unde $G \subseteq \mathbb{C}$ este o mulţime deschisă, $f = P + jQ$.

Se numeşte **diferenţială** *a funcţiei f în punctul $z = x+jy \in G$ funcţionala (forma) liniară*

$$df(z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, \quad (df(z))(dx,dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z)dy,\ \forall\ (dx,dy) \in \mathbb{R}^2,$$

unde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + j\frac{\partial Q}{\partial x} \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + j\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Pe scurt, se poate scrie:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{4.1}$$

4.2. Operatorii $\dfrac{\partial}{\partial z}$ şi $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$

Din $z = x + jy$ şi $\overline{z} = x - jy$, obţinem, prin diferenţiere formală $dz = dx + jdy$ şi $d\overline{z} = dx - jdy$, deci $dx = \dfrac{1}{2}(dz + d\overline{z})$ şi $dy = \dfrac{1}{2j}(dz - d\overline{z})$. De aici şi din (4.1) rezultă:

$$df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - j\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\overline{z}, \tag{4.2}$$

ceea ce sugerează introducerea operatorilor $\dfrac{\partial}{\partial z}$ şi $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ prin:

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-j\frac{\partial}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Scriind acum f ca funcţie de z şi $\overline{z}$, i.e. $f(z,\overline{z})$, rezultă:

$$df=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z},$$

unde

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+j\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right) \\[2ex] 2\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\dfrac{\partial P}{\partial x}-\dfrac{\partial Q}{\partial y}+j\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}+\dfrac{\partial P}{\partial y}\right) \end{cases} \tag{4.3}$$

Relaţiile (4.3) s-au obţinut din (4.2) şi formulele pentru $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ din Definiţia 4.1. A doua relaţie din (4.3) conduce la următorul rezultat:

4.3. Teoremă

Condiţiile Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ *şi* $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *sunt echivalente cu egalitatea* $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$.

4.4. Exemplu

Reluăm funcţia $f(z)=\overline{z}^2+3z-2\overline{z}+1+j$ din Exemplele 2.2 şi 2.6.(i). Avem $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0 \ \Leftrightarrow \ 2\overline{z}-2=0 \ \Leftrightarrow \ \overline{z}=1 \ \Leftrightarrow \ z=1.$

Aşadar, singurul punct de monogenitate al funcţiei f este $z_0=1$.

5 Interpretarea geometrică a derivatei unei funcţii complexe. Transformări conforme

5.1. Interpretarea geometrică a derivatei unei funcţii complexe

Fie $D\subseteq\mathbb{C}$ un domeniu şi $f:D\to\mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Punem $Z=f(z)$ şi notăm cu Oxy, O_1XY planele variabilelor (z), respectiv (Z). Fie γ o curbă netedă din planul (z) şi $\Gamma = f(\gamma)$ imaginea sa în planul (Z) prin transformarea $Z = f(z)$. Notăm cu $M_0(z_0)$ un punct fixat pe (γ), $M(z)$ un punct arbitrar pe (γ) şi punem $Z_0 = f(z_0)$, $Z = f(z)$, $N_0(Z_0)$, $N(Z)$, vezi Fig.3.

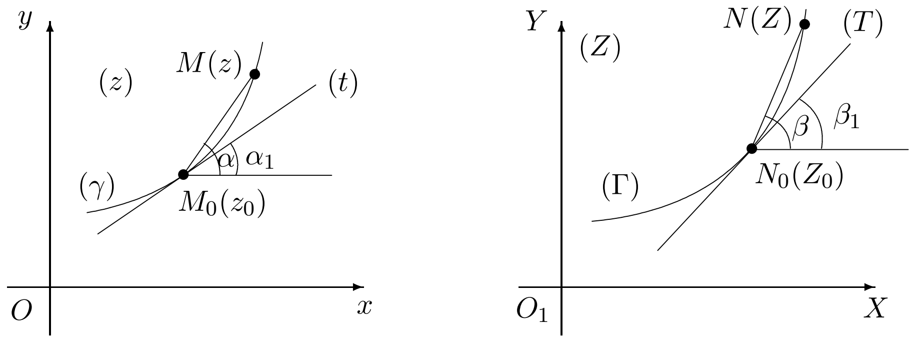


Fig.3

Fie $\alpha, \alpha_1; \beta, \beta_1$ unghiurile axelor Ox, O_1X, cu dreptele M_0M, (t); N_0N, (T), unde (t), (T) sunt tangentele în M_0 la (γ), respectiv în N_0 la (Γ).

Are loc egalitatea

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{N_0N \cdot e^{j\beta}}{M_0M \cdot e^{j\alpha}}.$$

Notând cu Δs, ΔS lungimile arcelor M_0M, respectiv N_0N şi cu ds, dS elementele de arc pe (γ), respectiv (Γ), obţinem:

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{N_0N}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta s}{M_0M} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta s} e^{j(\beta-\alpha)} = \frac{dS}{ds} e^{j(\beta_1-\alpha_1)},$$

deoarece

$$\lim_{z\to z_0} \frac{N_0N}{\Delta S} = \lim_{z\to z_0} \frac{\Delta s}{M_0M} = 1.$$

În concluzie,

$$f'(z_0) = \frac{dS}{ds} e^{j(\beta_1-\alpha_1)},$$

de unde rezultă

$$|f'(z_0)| = \frac{dS}{ds} \text{ şi } \arg f'(z_0) = \beta_1 - \alpha_1 \pmod{2\pi},$$

i.e.:

- Modulul derivatei, $|f'(z_0)|$, caracterizează deformarea (contracţia sau dilatarea) dimensiunilor liniare în punctul z_0. De aceea, numărul $|f'(z_0)|$ se numeşte *coeficient de deformare liniară* în punctul z_0 şi ne arată raportul în care se măresc sau se micşorează dimensiunile liniare (locale) în punctul z_0.
- Argumentul derivatei, $\arg f'(z_0)$, în ipoteza $f'(z_0) \neq 0$, reprezintă *unghiul de rotaţie* al tangentei la curba (γ) în punctul z_0 prin transformarea $Z = f(z)$; acesta reprezintă unghiul cu care se roteşte (în sens direct) tangenta la curba arbitrară (γ) în punctul M_0 pentru a ajunge pe direcţia tangentei în punctul $N_0 = f(M_0)$ la curba $\Gamma = f(\gamma)$.

5.2. Transformări conforme

Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f : G \to \mathbb{C}$ o funcţie dată.

- Aplicaţia $f : G \to \mathbb{C}$ se numeşte *transformare conformă* în punctul $z_0 \in G$ dacă f este de clasă $C^1(G)$ şi păstrează unghiurile curbelor în punctul z_0, adică unghiul dintre orice curbe netede $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq G$ care trec prin z_0 este egal cu unghiul dintre curbele $\Gamma_1 = f(\gamma_1)$ şi $\Gamma_2 = f(\gamma_2)$ în punctul $f(z_0)$ din planul (Z).
- Transformarea f se numeşte *direct sau invers conformă* în z_0 dacă se păstrează şi sensul unghiurilor, respectiv nu se păstrează.
- Dacă $f'(z_0) \neq 0$, atunci transformarea f este direct conformă în z_0.
- Dacă $D \subseteq \mathbb{C}$, $D_1 \subseteq \mathbb{C}$ sunt domenii şi $f : D \to D_1$, atunci transformarea $w = f(z)$ se numeşte *conformă pe D* dacă f este bijectivă şi conformă în fiecare punct $z \in D$.

6 Funcţii întregi

Reamintim că o funcţie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se numeşte *funcţie întreagă* dacă f este olomorfă pe $\mathbb{C}$ (Definiţia 3.1).

6.1. Funcţia polinomială

- Fiind dat un număr natural n şi numerele complexe $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $a_n \neq 0$, funcţia $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

se numeşte *funcţie polinomială de grad n*.

- Se arată că p este monogenă în fiecare punct $z \in \mathbb{C}$ şi

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}, \ \forall\ n \geq 1.$$

6.2. Funcţia exponenţială

- Se numeşte *funcţie exponenţială* funcţia $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = e^z = e^x(\cos y + j \sin y), \ \forall\ z = x + jy \in \mathbb{C}.$$

- Părţile reală şi imaginară ale funcţiei exp sunt $P(x,y) = e^x \cos y$ şi $Q(x,y) = e^x \sin y$; deoarece $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} = e^x \cos y$ şi $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -e^x \sin y$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$, deducem că funcţia exponenţială este o funcţie întreagă.

- *Are loc egalitatea* $(e^z)' = e^z$.

Într-adevăr

$$(e^z)' = \frac{\partial P}{\partial x} + j\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x(\cos y + j \sin y) = e^z, \ \forall\ z \in \mathbb{C},$$

în conformitate cu Observaţia 2.5.

- **Proprietăţi ale funcţiei exponenţiale**

(i) $e^{z+2k\pi j} = e^z$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$ deci *funcţia exponenţială este o funcţie periodică de perioadă* $T_k = 2k\pi j$, $k \in \mathbb{Z}$; perioada $T_1 = 2\pi j$ este *perioada principală*.
(ii) $(e^z)^{(n)} = e^z$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$
(iii) $e^z \neq 0$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$

6.3. Funcţiile circulare şi funcţiile hiperbolice

• Definiţii

Funcţiile sinus (sin), *cosinus* (cos), *sinus hiperbolic* (sh) *şi cosinus hiperbolic* (ch) *se definesc astfel:*

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \sin z = \frac{1}{2j}(e^{jz} - e^{-jz}), \ \forall\ z \in \mathbb{C}$$

$$\cos:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\quad \cos z=\frac{1}{2}(e^{jz}+e^{-jz}),\ \forall\ z\in\mathbb{C}$$
$$\mathrm{sh}:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\quad \mathrm{sh}\,z=\frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z}),\ \forall\ z\in\mathbb{C}$$
$$\mathrm{ch}:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\quad \mathrm{ch}\,z=\frac{1}{2}(e^{z}+e^{-z}),\ \forall\ z\in\mathbb{C}$$

• **Olomorfie**

Funcţiile $\sin, \cos, \mathrm{sh}$ şi ch sunt funcţii întregi şi au loc egalităţile:

$$(\sin z)'=\cos z,\ (\cos z)'=-\sin z,\ (\mathrm{sh}\,z)'=\mathrm{ch}\,z,\ (\mathrm{ch}\,z)'=shz,\ \forall\ z\in\mathbb{C}.$$

• **Periodicitate**

Funcţiile sin şi cos au *perioada* $T=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, iar funcţiile sh şi ch au *perioada* $T=2k\pi j,\ k\in\mathbb{Z}$.

• **Relaţii între** sin**,** cos**,** sh **,** ch

Au loc egalităţile:

$$\mathrm{ch}\,(jz)=\cos z,\ \mathrm{sh}\,(jz)=j\sin z,\ \cos(jz)=\mathrm{ch}\,z,\ \sin(jz)=j\mathrm{sh}\,z,\ \forall\ z\in\mathbb{C}.$$

• Definiţii

Funcţiile tangentă (tg)*, cotangentă* (ctg)*, tangentă hiperbolică* (th) *şi cotangentă hiperbolică* (cth) *se definesc astfel:*

$$\mathrm{tg}:\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{C},\quad \mathrm{tg}\,z=\frac{\sin z}{\cos z}=-j\frac{e^{2jz}-1}{e^{2jz}+1}$$
$$\mathrm{ctg}:\mathbb{C}\setminus\{k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{C},\quad \mathrm{ctg}\,z=\frac{\cos z}{\sin z}=j\frac{e^{2jz}+1}{e^{2jz}-1}$$
$$\mathrm{th}:\mathbb{C}\setminus\left\{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)j:\ k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{C},\quad \mathrm{th}z=\frac{\mathrm{sh}\,z}{\mathrm{ch}\,z}=\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}$$
$$\mathrm{cth}:\mathbb{C}\setminus\{k\pi j:\ k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{C},\quad \mathrm{cth}z=\frac{\mathrm{ch}\,z}{\mathrm{sh}\,z}=\frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1}.$$

Funcţiile tg , ctg , th, cth sunt olomorfe pe orice domeniu (sau mulţime deschisă) inclus în mulţimea lor de definiţie. Derivatele lor sunt:

$$(\mathrm{tg}\,z)'=\frac{1}{\cos^2 z},\ (\mathrm{th}z)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 z},\ (\mathrm{ctg}\,z)'=-\frac{1}{\sin^2 z},\ (\mathrm{cth}z)'=-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 z}.$$

7 Funcţii raţionale. Funcţii omografice (circulare)

7.1. Funcţii raţionale

Fie p şi q polinoame date, prime între ele. Funcţia

$$R : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \; q(z) = 0\} \to \mathbb{C}, \quad R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

se numeşte *funcţie raţională.*

O funcţie raţională este olomorfă pe orice mulţime deschisă inclusă în mulţimea sa de definiţie şi

$$R'(z) = \frac{p'(z)q(z) - p(z)q'(z)}{q^2(z)}, \; \forall \; z \in \mathbb{C}, \; q(z) \neq 0.$$

7.2. Funcţii omografice (circulare)

• Definiţie

Fie $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ astfel încât $ad \neq bc$. Se numeşte *funcţie omografică* (*circulară*) funcţia raţională f definită prin

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & \text{dacă} \quad c \neq 0 \quad \text{şi} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \\ \dfrac{az+b}{d}, & \text{dacă} \quad c = 0 \quad \text{şi} \quad z \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Funcţia f se poate prelungi la $\overline{\mathbb{C}}$ prin $f\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$, pentru $c \neq 0$; $f(\infty) = \dfrac{a}{c}$, pentru $c \neq 0$; $f(\infty) = \infty$, pentru $c = 0$.

• Transformarea $Z = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ se numeşte *transformare omografică* sau *transformare circulară.*

• *Transformări omografice particulare*

(i) *Translaţia* $Z = f(z) = z + b$ $(a = d = 1, \; c = 0, \; b \in \mathbb{C})$

(ii) *Omotetia* $Z = f(z) = az$, cu $a \in \mathbb{R}, \; a > 0$

(iii) *Rotaţia* $Z = f(z) = e^{j\theta} z, \; \theta \in \mathbb{R}$

(iv) *Inversiunea* $Z = f(z) = \dfrac{1}{z}$

• *Proprietăţi ale transformărilor circulare (omografice)*

(i) Orice transformare omografică (circulară) este o succesiune de translaţii, rotaţii, omotetii şi inversiuni.

(ii) Orice transformare circulară (omografică) transformă orice cerc într-un cerc sau dreaptă şi transformă orice dreaptă într-un cerc sau dreaptă. (Această proprietate justifică denumirea de "transformare circulară".)

8 Aplicaţii multivoce

Există legi (corespondenţe) care ataşează unui număr complex z mai multe numere complexe, de exemplu $\sqrt[n]{z}$, cu $n \geq 2$, sau $\operatorname{Ln} z$. Orice astfel de lege (corespondenţă) se numeşte *funcţie (aplicaţie) multiformă sau multivocă*, iar o funcţie complexă standard, care atşează unui număr z un singur număr complex $f(z)$ se mai numeşte *funcţie uniformă*.

8.1. Aplicaţia (funcţia) radical

• Fie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(w) = w^n$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Funcţia g este o funcţie întreagă dar nu este injectivă: într-adevăr ecuaţia $g(w) = z$, $z \in \mathbb{C}^*$, i.e. $w^n = z$, $z \in \mathbb{C}^*$, are n soluţii distincte

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \exp\left(j\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right), \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

• Punem

$$D_k = \left\{w = \rho e^{j\theta} : \ \rho > 0, \ \frac{2k\pi}{n} < \theta < \frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\right\}$$

şi

$$d_k = \left\{w = \rho e^{j\theta} : \ \rho \geq 0, \ \theta = \frac{2k\pi}{n}\right\}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

Notăm $T = \{re^{jt} : \ r \geq 0, \ t = 0\}$, i.e. T este semiaxa pozitivă Ox şi fie $D = \mathbb{C} \setminus T$ (Fig. 4). Observăm că $g(d_k) = T$, iar funcţiile $g_k : D_k \to D$, $g_k(w) = w^k$, $0 \leq k \leq n-1$, sunt inversabile.

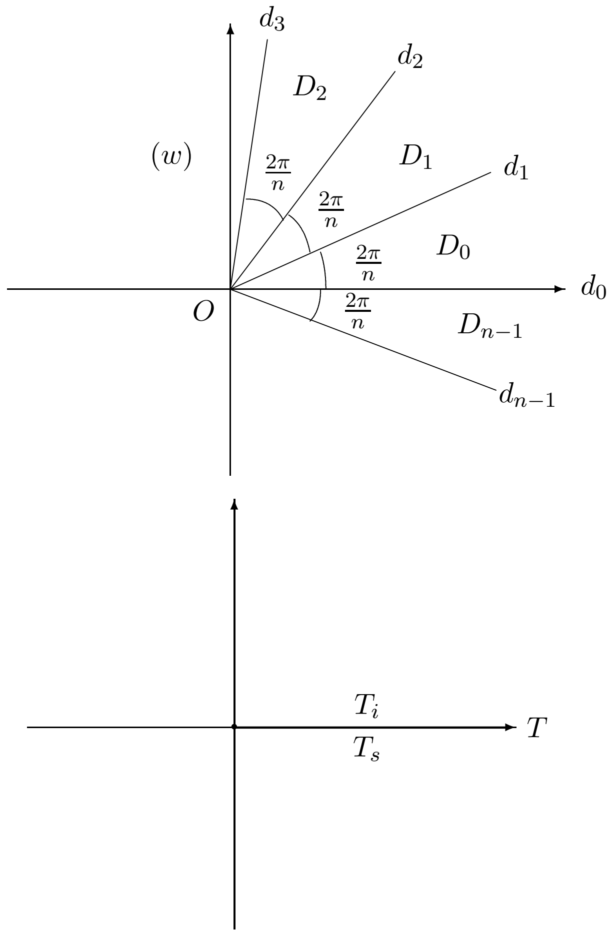


Fig.4

Semidreapta T, numită *tăietură* în $\mathbb{C}$, se concepe ca fiind formată din două borduri: *bordura inferioară* $T_i = \{re^{jt} :\ r \geq 0,\ t = 0\}$ şi *bordura superioară* $T_s = \{re^{jt} :\ r \geq 0,\ t = 2\pi\}$.

• Definiţii

Funcţiile $f_k = g_k^{-1} : D \to D_k$,

$$f_k(z) = \sqrt[n]{|z|} \exp\left(j\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right), \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

se numesc **ramurile uniforme** sau **determinările uniforme** ale aplicaţiei multiforme (multivoce) $z \mapsto \sqrt[n]{z}$.

• Funcţia $f_0 : D \to D_0$, $f_0(z) = \sqrt[n]{|z|}\exp\left(j\dfrac{\arg z}{n}\right)$ se numeşte *determinarea principală* sau *ramura principală* a aplicaţiei multiforme $z \mapsto \sqrt[n]{z}$.

• Funcţiile f_k se pot prelungi prin continuitate pe T, mai exact, prelungirea prin continuitate $\widetilde{f}_k : D \cup T \to D_k \cup d_k$ este

$$\widetilde{f}_k(z) = \begin{cases} f_k(z), & \text{dacă} \quad z \in D \cup T_i \\ f_{k+1}(z), & \text{dacă} \quad z \in T_s \end{cases} \qquad 0 \le k \le n-1, \ \text{cu } f_{n+1} = f_0.$$

• Punctul $z = 0$ se numeşte *punct critic* al aplicaţiei multiforme $z \mapsto \sqrt[n]{z}$.

• Funcţiile f_k sunt olomorfe pe D şi au loc egalităţile

$$f_k'(z) = \frac{f_k(z)}{nz}, \ \forall\, z \in D \text{ şi } \forall\, k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

8.2. Funcţia (aplicaţia) logaritmică

• Fie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $g(w) = e^w$. Funcţia g este o funcţie întreagă, dar nu este injectivă: într-adevăr, ecuaţia $e^w = z$, $z \in \mathbb{C}^*$ are o infinitate de soluţii $w_k = \ln|z| + j(\arg z + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

• Punem

$$D_k = \{w = u + jv : \ u \in \mathbb{R}, \ 2k\pi < v < 2k\pi + 2\pi\}$$

şi

$$d_k = \{w = u + jv : \ u \in \mathbb{R}, \ v = 2k\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Notând cu T semiaxa pozitivă Ox (vezi secţiunea 2.8.1), se constată că $g(d_k) = T$, iar funcţiile $g_k : D_k \to D = \mathbb{C} \setminus T$, $g_k(w) = e^w$, $k \in \mathbb{Z}$, sunt inversabile.

• Definiţie

Funcţiile $f_k = g_k^{-1} : D \to D_k$, $f_k(z) = \ln|z| + j(\arg z + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, se numesc **determinările uniforme** sau **ramurile uniforme** ale aplicaţiei multiforme $F : \mathbb{C}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$, $F(z) = \operatorname{Ln} z$.

• Funcţia $f_0 : D \to D_0$, $f_0(z) = \ln|z| + j\arg z$ se numeşte **determinarea principală** sau **ramura principală** a aplicaţiei multiforme $F(z) = \operatorname{Ln} z$, $z \in \mathbb{C}^*$.

• Punctul $z = 0$ se numeşte *punct critic* sau *punct de ramificaţie* al aplicaţiei multiforme $z \mapsto \operatorname{Ln} z$, $z \in \mathbb{C}^*$.

• Funcţiile f_k, $k \in \mathbb{Z}$, sunt olomorfe pe D şi au loc egalităţile

$$f_k'(z) = \frac{1}{z},\ \forall\ z \in D,\ \forall\ k \in \mathbb{Z}.$$

8.3. Aplicaţia (funcţia) putere

Fie $f_k : D \to D_k$, $k \in \mathbb{Z}$, determinările (ramurile) uniforme ale aplicaţiei logaritmice $z \mapsto \mathrm{Ln}\, z$, puse în evidenţă în secţiunea 8.2 şi $\alpha \in \mathbb{C}$.

• *Funcţiile $h_k : D \to D_k$, $h_k = \exp(\alpha f_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, se numesc determinările (ramurile) uniforme* ale aplicaţiei multiforme $F : \mathbb{C}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$, $F(z) = z^\alpha = \exp(\alpha \mathrm{Ln}\, z)$.

• Funcţia $h_0 : D \to D_0$, $h_0(z) = \exp(\alpha \ln z) = \exp[\alpha(\ln|z| + j \arg z)]$ se numeşte *determinarea (ramura) principală* a funcţiei multiforme $F(z) = z^\alpha$.

9 Probleme

Enunţuri

1. *Să se determine punctele în care următoarele funcţii complexe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sunt monogene şi să se calculeze valoarea derivatei în aceste puncte:*

(i) $f(z) = \overline{z}^3 + 2z^3 + z^2 - 3\overline{z}^2 + 20z + 15\overline{z} + 1 + j$

(ii) $f(z) = 2z^2 + z\overline{z} - \overline{z}^2 + 2(1+j)z - \overline{z} + 2 - j$

(iii) $f(z) = z^2\overline{z} + 2\mathrm{Re}\, z$

(iv) $f(z) = |z|^5 - \dfrac{1}{2}\overline{z}$

(v) $f(z) = |z|^{10} - \dfrac{1}{2}\overline{z}$

2. *Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + a\overline{z}^2 + 4z\overline{z} + 2z - 8\overline{z} + 1 + 2j$, $a \in \mathbb{C}$.*

(i) *Să se determine punctele în care f este monogenă şi să se calculeze valoarea derivatei în aceste puncte pentru fiecare din următoarele valori ale parametrului a: $a = 1 - j$; $a = 2$; $a = -2$; $a = 1 + j\sqrt{3}$.*

(ii) *Să se determine $a \in \mathbb{C}$ pentru care f nu este monogenă în nici un punct.*

3. *Să se determine $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ astfel încât funcţiile de mai jos să fie funcţii întregi (olomorfe pe $\mathbb{C}$) şi să se scrie expresiile lor în funcţie de variabila $z = x + jy$.*

(i) $f(z) = ax^2 + bxy + cy^2 + x - y + j(ax^2 + 2xy + dy^2 + x + ay)$

(ii) $f(z) = 8ax + a^2 \cos x \mathrm{ch}\, y + j(a^4 y - b \sin x \mathrm{sh}\, y)$

4. *Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = P(x,y) + jQ(x,y)$, $z = x + jy$ în următoarele situaţii:*

(i) $P(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-2xy$
(ii) $Q(x,y)=e^x(x\sin y+y\cos y);\ f(1)=e$
(iii) $Q(x,y)=x\operatorname{sh}x\sin y+y\operatorname{ch}x\cos y;\ f(1)=\operatorname{ch}1$
(iv) $Q(x,y)=\dfrac{1}{2}y\ln(x^2+y^2)+x\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x};\ f(j)=-\dfrac{\pi}{2}$
(v) $P(x,y)=\dfrac{x}{2}\ln(x^2+y^2)-y\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x};\ f(1)=j$
(vi) $P(x,y)=\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{ch}2y-\cos 2x};\ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$
(vii) $P(x,y)+Q(x,y)=e^x[(x+y)\cos y+(x-y)\sin y];\ f(0)=1-j$
(viii) $P(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x};\ x>0;\ f(e)=0$
(ix) $|f(z)|=(x^2+y^2)e^x;\ f(\pi j)=\pi^2$
(x) $P(x,y)-Q(x,y)=\dfrac{x-y}{2}\ln(x^2+y^2)-(x+y)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x};\ f(1)=2(1+j)$

5. *Să se determine funcţia olomorfă $f(z)=P(x,y)+jQ(x,y)$, $z=x+jy$, în fiecare din situaţiile de mai jos, ştiind că $\varphi\in C^2(\mathbb{R})$:*
(i) $P(x,y)=\varphi(x^2+y^2)$
(ii) $Q(x,y)=\varphi\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}\right)$
(iii) $Q(x,y)=\varphi(x^2-y^2)$
(iv) $P(x,y)=\varphi(x+\sqrt{x^2+y^2})$

6. *Fie $f:D\to\mathbb{C}$ o funcţie complexă olomorfă pe domeniul $D\subseteq\mathbb{C}$, $P=\operatorname{Re}f$ şi $Q=\operatorname{Im}f$.*
(i) *Să se arate că funcţia $g:D\to\mathbb{R}$, $g(x,y)=\ln|f(z)|$ este armonică.*
(ii) *Dacă funcţia Q^2 este armonică, atunci f este constantă.*
(iii) *Să se demonstreze relaţia:* $\dfrac{\partial P}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial Q}{\partial x}+\dfrac{\partial P}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial Q}{\partial y}=0.$

7. *Să se arate că dacă modulul sau argumentul derivatei funcţiei olomorfe $f:D\to\mathbb{C}$ este constant, atunci funcţia f este liniară pe domeniul $D\subseteq\mathbb{C}$ (adică $\exists\ a,b\in\mathbb{C}$ astfel încât $f(z)=az+b$, $\forall\ z\in D$).*

8. *Fie $f:G\to\mathbb{C}$ o funcţie de clasă $\mathcal{H}(G)$, $P=\operatorname{Re}f$ şi $Q=\operatorname{Im}f$. Punând $z=re^{jt}$, obţinem $f(z)=f(re^{jt})=u(r,t)+jv(r,t)$, unde $u(r,t)=P(x,y)$, $v(r,t)=Q(x,y)$ cu $x=r\cos t$, $y=r\sin t$. Să se demonstreze că au loc (în G) egalităţile*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-r\frac{\partial v}{\partial r}\quad \text{şi}\quad \frac{\partial v}{\partial t}=r\frac{\partial u}{\partial r},$$

numite **condiţiile Cauchy-Riemann în coordonate polare**.

9. *Să se determine:*

(i) *Deformarea liniară şi unghiul de rotaţie ale transformării*

$$Z = \frac{2z - j + 4}{2 + jz} \text{ în punctul } z_0 = j.$$

(ii) *Regiunile din plan care se dilată şi cele care se contractă prin transformarea* $Z = \dfrac{z + j}{jz + 3}$.

10. *Să se determine:*

(i) *Mulţimea din planul complex cu proprietatea că în fiecare punct al său coeficientul de deformare liniară al transformării* $Z = \dfrac{z + j}{2jz - 1}$ *este egal cu 1.*

(ii) *Mulţimea de puncte din plan cu proprietatea că unghiul de rotaţie prin transformarea* $Z = \dfrac{2z - j + 2}{j - z - 1}$ *este nul.*

11. *Să se determine transformarea circulară (omografică) care transformă punctele* z_k *în* Z_k, $1 \leq k \leq 3$, *în următoarele situaţii:*

(i) $z_1 = 1 + j,\ z_2 = j,\ z_3 = 0,\ Z_1 = \infty,\ Z_2 = 1 + j,\ Z_3 = 0$

(ii) $z_1 = 0,\ z_2 = -1,\ z_3 = 1 - j,\ Z_1 = \dfrac{2}{5}(4 - 3j),\ Z_2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{4}j,\ Z_3 = 1 - j$

(iii) $z_1 = \infty,\ z_2 = -j,\ z_3 = 0,\ Z_1 = 0,\ Z_2 = 1,\ Z_3 = \infty$

12. *Să se determine imaginile următoarelor domenii din planul complex prin transformările indicate:*

(i) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |z| = 1,\ 0 \leq \arg z \leq \dfrac{\pi}{20}\right\},\ Z = z^{10}$

(ii) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |z| > 2,\ 0 < \arg z < \dfrac{2\pi}{3}\right\},\ Z = z^6$

(iii) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |z| \leq 1\},\ Z = \dfrac{z + 2}{2z + 1}$

(iv) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x + y = -1\},\ Z = \dfrac{z - j}{z + 1}$

(v) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |z + j| = 1\},\ Z = \dfrac{j}{z}$.

13. *Să se determine partea reală şi partea imaginară pentru următoarele numere complexe:*

(i) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + j \ln 3\right);\ \operatorname{sh}\left(1 - j\dfrac{\pi}{2}\right)$

(ii) $\exp(1 - 2\pi j/3);\ \operatorname{tg}(1 - j)$.

14. *Să se rezolve în* $\mathbb{C}$ *ecuaţiile:*

(i) $\sin z - \cos z = 2$

(ii) $\sin z + 2 \cos z = 3$

(iii) $\operatorname{sh} z + 3\operatorname{ch} z = j$

15. *Să se demonstreze următoarele egalităţi:*

(i) $\mathrm{Im}\,(\mathrm{ch}\,z) = \mathrm{sh}\,x \sin y$
(ii) $\mathrm{Re}\,(\mathrm{tg}\,z) = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x + \mathrm{ch}\,2y}$
(iii) $|\cos z| = \sqrt{\mathrm{ch}^2 y - \sin^2 x}$
(iv) $|\mathrm{sh}\,z| = \sqrt{\mathrm{ch}^2 x - \cos^2 y}$

Soluţii. Indicaţii. Răspunsuri

1. (i) $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 3\overline{z}^2 - 6\overline{z} + 15 = 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{z} = 1 \pm 2j \;\Leftrightarrow\; z_{1,2} = 1 \pm 2j$
$f'(z_k) = 14z_k - 10,\ k \in \{1,2\};\ f'(z_1) = 4 + 28j;\ f'(z_2) = 4 - 28j$
(ii) $z_1 = -1;\ f'(-1) = 2j - 3$
(iii) $\pm j;\ f'(j) = f'(-j) = 3$
(iv), (v) Vezi Exemplul 2.6.(ii).

2. $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 2a\overline{z} + 4z - 8 = 0 \;\Rightarrow\; z(4 - a\overline{a}) = 4(2 - a)$
(i) $a = 1 - j \;\Rightarrow\; z_0 = 2(1 + j),\ f'(z_0) = 14 - 4j;\ a = 2 \;\Rightarrow$ $z_0 = 1 + jy_0,\ y_0 \in \mathbb{R},\ f'(z_0) = 8 - 2jy_0$; pentru $a = -2$ şi $a = 1 + j\sqrt{3}$, f nu este monogenă în nici un punct $z_0 \in \mathbb{C}$.
(ii) $a\overline{a} = 4$ şi $a \neq 2$.

3. Se utilizează condiţiile Cauchy-Riemann.
(i) $a = 1,\ b = -2,\ c = d = -1,\ f(z) = (1 + j)(z^2 + z)$
(ii) Avem $a^4 = 8a,\ b = a^2,\ f(z) = 4az + b\cos z$, unde
$(a, b) \in \{(0,0), (2,4), (-1 - j\sqrt{3}, -2 + 2j\sqrt{3}), (-1 + j\sqrt{3}, -2 - 2j\sqrt{3})\}$

4. Vezi Exemplul 2.3.4.(i).
(i) $f(z) = \dfrac{1}{z} + j(2 + z^2 + c),\ c \in \mathbb{R}$ **(ii)** $f(z) = ze^z$
(iii) $f(z) = z\mathrm{ch}\,z$ **(iv)** $f(z) = z \ln z$
(v) $f(z) = z \ln z + j$ **(vi)** $f(z) = \mathrm{ctg}\,z$
(vii) Se calculează $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ şi se utilizează condiţiile Cauchy-Riemann; $f(z) = z\exp(z) + 1 - j$.
(viii) $f(z) = j(1 - \ln z)$
(ix) $\ln f(z) = \ln|f(z)| + j\arg f(z)$, deci $\ln f(z) = x + \ln(x^2 + y^2) + j\arg f(z)$. Luăm $g(z) = \ln f(z)$, $P(x,y) = x + \ln(x^2 + y^2)$, $Q(x,y) = \arg f(z)$, $g = P + jQ$. Din $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{2y}{x^2 + y^2}$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial x} = 1 + \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$ deducem:

$$Q(x,y) = \int_0^x \frac{-2y}{x^2 + y^2}dt + \int_1^y (1 + 0)dt + C_1$$

$$= -2\operatorname{arctg}\frac{t}{y}\Big|_0^x + y + C_1 = 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + y + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

deoarece $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{a} = \dfrac{\pi}{2} sgna$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Astfel, $g(z) = z + \ln z^2 + Cj = \ln(z^2 e^{z+Cj})$, deci $f(z) = z^2 e^{z+Cj}$. Din condiţia $f(\pi j) = \pi^2$ rezultă $-\pi^2 e^{\pi j} e^{Cj} = \pi^2 \Leftrightarrow e^{Cj} = 0$, deci $C = 0$ şi $f(z) = z^2 e^z$.

(x) Analog **(vii)**; $f(z) = z \ln z + 2(1+j)$.

5. Se procedează similar cu Exemplul 3.4.(ii).

(i) $f(z) = C_1 \ln z + C_2,\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}$

(ii) $f(z) = \dfrac{jC}{z} + k$, unde $C \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{C}$

(iii) $f(z) = jC_1 z^2 + C_2,\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{C}$

(iv) $f(z) = C_1\sqrt{z} + C_2,\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{C}$

6. Se utilizează condiţiile Cauchy-Riemann.

(ii) $\Delta Q^2 = 2\left(\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial y}\right)^2\right) + 2\Delta P = 0$; deoarece $\Delta P = 0$, rezultă $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0$, deci $Q =$ constant, apoi $P =$ constant, prin urmare $f =$ constant.

7. Fie $f(z) = P(x,y) + jQ(x,y)$; avem $f'(z) = P'_x - jP'_y$.

1° **Să presupunem că** $|f'(z)| = a,\ \forall\ z \in D \subseteq \mathbb{C}$. Atunci $(P'_x)^2 + (P'_y)^2 = a^2$, de unde prin derivare în raport cu x şi y primim

$$P'_x P''_{xx} + P'_y P''_{xy} = 0, \quad P'_x P''_{xy} + P'_y P''_{yy} = 0.$$

Înmulţind prima egalitate cu P'_y şi a doua P'_x obţinem prin adunare

$$P'_x P'_y \Delta P + P''_{xy}[(P'_x)^2 + (P'_y)^2] = 0$$

şi utilizând faptul că P este o funcţie armonică primim $a^2 P''_{xy} = 0$.

• Dacă $a = 0$, atunci $P'_x = P'_y = 0$ deci $P =$ const. şi astfel f este constantă, i.e. $f(z) = 0 \cdot z + c$, $c \in \mathbb{C}$.

• Dacă $a \neq 0$, atunci $P''_{xy} = 0 \Leftrightarrow P(x,y) = g(x) + h(y)$, unde $g, h \in C^2(E)$, $E \subset \mathbb{R}$. Din $\Delta P = 0$ deducem $g''(x) + h''(y) = 0,\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$, de unde obţinem $g''(x) = -h''(y) = 2k$, $k =$ constant. Astfel,

$$P(x,y) = k(x^2 - y^2) + b_1 x + b_2 y + d, \quad d = d_1 + d_2.$$

Întrucât $(P'_x)^2 + (P'_y)^2 = a^2$, avem

$$(2kx + b_1)^2 + (-2ky + b_2)^2 = a^2,\ \forall\ x, y \in \mathbb{R},$$

deci $k = 0$. După calcule standard rezultă $P(x, y) = b_1x + b_2y + d$, unde $b_1, b_2, d \in \mathbb{R}$. Mai departe, din condiţiile Cauchy-Riemann obţinem $Q(x, y) = -b_2x + b_1y + b_3$, $\quad b_3 \in \mathbb{R}$. În final, $f(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha = b_1 - b_2j \in \mathbb{C}$, $\beta = d + b_3j \in \mathbb{C}$.

2° **Să presupunem că** $\arg f'(z) = \lambda_1 =$ **constant.** Deducem $\dfrac{P'_y}{P'_x} = -\operatorname{tg}\lambda_1 = \lambda$, deci $P'_y - \lambda P'_x = 0$. Derivând egalitatea în raport cu x şi y primim: $P''_{xy} - \lambda P''_{xx} = 0$, $P''_{yy} - \lambda P''_{xy} = 0$; înmulţind a doua egalitate cu $-\lambda$ şi adunând relaţiile rezultă $P''_{xy}(1 + \lambda^2) = \lambda\Delta P$, aşadar $P''_{xy} = 0$. Mai departe, se procedează ca la partea a doua din 1°.

8. Se utilizează regula de derivare a unei funcţii compuse; pentru detalii, vezi [15], [22].

9. (i) $Z' = \dfrac{3-4j}{(2+jz)^2}$; $Z'(j) = 3-4j$, deci deformarea liniară este $|Z'(j)| = 5$, iar unghiul de rotaţie este $\arg Z'(j) = 2\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$.

(ii) Se dilată mulţimile situate în discul $\Delta(3j; 2)$ şi se contractă cele din exteriorul discului.

10. (i) $|Z'| = 1 \;\Leftrightarrow\; \left|z + \dfrac{j}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; z \in \Gamma\left(-\dfrac{j}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

(ii) $Z' = j(j - z - 1)^{-2}$; $\arg Z' = 0 \;\Leftrightarrow\; \arg(j - z - 1) \in \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}$ şi $z \neq -1 + j$. Obţinem dreapta $x - y + 2 = 0$ fără punctul $(-1, 1)$.

11. (i) $Z = \dfrac{(j-1)z}{z-1-j}$

(ii) $Z = \dfrac{(4-j)z + 4j - 2}{(2+j)z + j - 2}$

(iii) $Z = \dfrac{1}{jz}$

12. (i) Sfertul de cerc unitate din cadranul I, împreună cu punctele (1,0) şi (0,1).

(ii) $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}(0; 64)$

(iii) $\mathbb{C} \setminus \Delta(0; 1)$

(iv) Din $Z = \dfrac{z-j}{z+1}$ rezultă $z = \dfrac{Z+j}{1-Z}$. Astfel $x + y = -1 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{z+\overline{z}}{2} + \dfrac{z-\overline{z}}{2j} = -1 \;\Leftrightarrow\; Z + \overline{Z} = 2 \;\Leftrightarrow\; X = 1$. Aşadar, dreapta $x + y = -1$ din planul (z) devine dreapta $X = 1$ din planul (Z).

(v) $X = -\dfrac{1}{2}$

13. (i) $\mathrm{Re}\cos\left(\frac{\pi}{2}+j\ln 3\right)=0$, $\mathrm{Im}\cos\left(\frac{\pi}{2}+j\ln 3\right)=-\frac{4}{3}j$.

14. (i) Se pune $e^{jz}=u$ şi se obţine ecuaţia $u^2-2(j-1)u-j=0$, cu soluţiile $u_{1,2}=(j-1)(\sqrt{2}+1)/\sqrt{2}$. În final, $z\in -j\mathrm{Ln}\, z_{1,2}=\frac{3\pi}{4}+2\pi\mathbb{Z}-j\ln(\sqrt{2}+1)$.

(ii) $e^{jz}=u$; $(1+2j)u^2-6ju+2j-1=0$; $u_1=j+2$; $u_2=\frac{1}{5}(j+2)$; $z\in\pm\frac{j}{2}\ln 5+\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+2\pi\mathbb{Z}$.

(iii) $e^z=u$; $2u^2-ju+1=0$; $z_1=j$; $z_2=-j/2$;
$z\in\{j(\pi/2+2k\pi);\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\ln 2+j(3\pi/2+2k\pi):\ k\in\mathbb{Z}\}$

15. (i) $\mathrm{ch}\, z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})=\frac{1}{2}(e^xe^{jy}+e^{-x}-e^{-jy})=\mathrm{ch}\, x\cos y+j\mathrm{sh}\, x\sin y$

(ii) $\mathrm{tg}\, z=\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x+\mathrm{ch}\, 2y}+j\dfrac{\mathrm{sh}\, 2y}{\cos 2x+\mathrm{ch}\, 2y}$

(iii) $\cos z=\cos x\mathrm{ch}\, y-j\sin x\mathrm{sh}\, y$

(iv) $\mathrm{sh}\, z=\mathrm{sh}\, x\cos y+j\mathrm{ch}\, x\sin y$.

Capitolul 3

Integrala în complex

1 Integrala unei funcţii complexe de o variabilă reală

1.1. Definiţie

Fie $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$ *şi* $z : [a, b] \to \mathbb{C}$*,* $z(t) = x(t) + jy(t)$*,* $a \leq t \leq b$*, o funcţie complexă continuă de o variabilă reală. Se numeşte* **integrală definită** *a funcţiei* z *pe intervalul* $[a, b]$ *numărul complex* $\displaystyle\int_a^b z(t)dt$ *dat de egalitatea*

$$\int_a^b z(t)dt = \int_a^b x(t)dt + j\int_a^b y(t)dt.$$

• Proprietăţile integralei complexe definite mai sus rezultă din proprietăţile integralei reale (liniaritate, aditivitate în raport cu intervalul ş.a.), vezi [22].

1.2. Primitivele unei funcţii complexe de o variabilă reală

- Funcţia complexă derivabilă $Z : [a, b] \to \mathbb{C}$ se numeşte *primitivă* a funcţiei $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ dacă egalitatea $Z'(t) = z(t)$ are loc pentru orice $t \in [a, b]$.
- Mulţimea tuturor primitivelor funcţiei $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ se numeşte *integrala nedefinită* a funcţiei $z(t)$ şi se notează $\displaystyle\int z(t)dt$. Are loc $\displaystyle\int z(t)dt = Z(t) + \mathcal{C}$, unde Z este o primitivă a funcţiei z, iar $\mathcal{C}$ este mulţimea funcţiilor complexe constante definite pe $[a, b]$.

- Dacă $Z(t)$ este o primitivă a funcţiei $z(t)$ atunci are loc *formula Newton-Leibniz*
$$\int_a^b z(t)dt = Z(b) - Z(a).$$
- Orice funcţie continuă $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ admite primitive.

2 Integrala curbilinie a unei funcţii complexe de variabilă complexă

2.1. Definiţie

Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă (nevidă) şi $f : G \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă continuă, $f = P + jQ$. Fie, de asemenea, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi (γ) o curbă netedă, (γ) : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, unde $x \in C^1[a, b]$, $y \in C^1[a, b]$ şi $|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 > 0$, $\forall\ t \in [a, b]$. Punem $z(t) = x(t) + jy(t)$, $a \le t \le b$ şi presupunem că $z(t) \in G$, $\forall\ t \in [a, b]$.

În condiţiile descrise, definim **integrala curbilinie** *a funcţiei f de-a lungul curbei (γ) sau pe curba (γ) drept numărul complex*
$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

- Scriind $f(z) = P(x, y) + jQ(x, y)$ şi $dz = dx + jdy$, obţinem:
$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} P(x, y)dx - Q(x, y)dy + j \int\limits_{\gamma} P(x, y)dy + Q(x, y)dx.$$

  În concluzie, calculul integralei curbilinii complexe revine la calculul a două integrale curbilinii reale.

- Dacă notăm cu $A(x(a), y(a))$ şi $B(x(b), y(b))$ extremităţile curbei (γ) şi $A \ne B$, se poate scrie $\int\limits_{\widehat{AB}} f(z)dz$ în loc de $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$.

- Dacă (γ) este o curbă netedă (drum neted) pe porţiuni, adică (γ) se obţine prin juxtapunerea unui număr finit de drumuri (curbe) netede

$(\gamma_1), (\gamma_2), \ldots, (\gamma_m)$, situate în G, atunci integrala curbilinie a funcţiei $f : G \to \mathbb{C}$ de-a lungul curbei γ se defineşte prin egalitatea

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} f(z)dz.$$

- *Dacă (γ) este frontiera unui domeniu mărginit din plan, atunci – în lipsa altei precizări – sensul de parcurgere a curbei închise γ se consideră a fi cel direct (trigonometric), i.e. punctele domeniului rămân "la stânga".*

2.2. Proprietăţi ale integralei curbilinii complexe

- Dacă $f, g : G \to \mathbb{C}$ sunt funcţii continue, atunci are loc egalitatea:

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g)(z)dz = \alpha \int_\gamma f(z)dz + \beta \int_\gamma g(z)dz, \ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

- Dacă $A(x(a), y(a))$ şi $B(x(b), y(b))$ sunt extremităţile curbei (γ), atunci are loc egalitatea

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = -\int_{\overset{\frown}{BA}} f(z)dz \quad \text{sau} \quad \int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz,$$

unde $\gamma = \overset{\frown}{AB}$, iar $\gamma^- = \overset{\frown}{BA}$ este "opusul" drumului (curbei) γ.

• Mărginirea superioară a modulului integralei curbilinii complexe

Dacă (γ) este o curbă netedă sau netedă pe porţiuni, $L(\gamma)$ este lungimea curbei (γ) şi $M = \sup\{|f(z)| : \ z \in \gamma\}$, atunci are loc inegalitatea

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq M \cdot L(\gamma).$$

2.3. Exemplu

Să se calculeze $I_n = \int_\gamma (z-a)^n dz$, unde $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ sunt date, iar γ este un cerc dat de centru a.

Rezolvare

Fie $a = a_1 + ja_2$ şi $r > 0$ raza cercului. Ecuaţiile parametrice ale cercului de ecuaţie $|z-a| = r$ sunt $x = a_1 + r\cos t$, $y = a_2 + r\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$; de aici rezultă ecuaţia în complex a cercului $|z-a| = r$, anume

$$z(t) = x(t) + jy(t) = a + re^{jt}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Astfel,

$$I_n = \int_0^{2\pi} (re^{jt})^n rje^{jt}dt = jr^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{jt(n+1)}dt.$$

• Dacă $n = -1$, atunci $I_{-1} = jt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi j$.

• Dacă $n \ne -1$, atunci $I_n = jr^{n+1}\frac{1}{j(n+1)}e^{jt(n+1)}\Big|_0^{2\pi} = 0$, deoarece $e^{2k\pi j} = 1$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$. În concluzie,

$$\int\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n dt = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad n \in \mathbb{Z},\ n \ne -1 \\ 2\pi j, & \text{dacă} \quad n = -1. \end{cases} = 2\pi j\delta_{-1}(n), \tag{2.1}$$

$\forall\ n \in \mathbb{Z}$, $\forall\ a \in \mathbb{C}$, $\forall\ r > 0$ unde $\delta_{-1}(n)$ este semnalul discret al lui Dirac (partea a doua, capitolul 1).

Egalitatea (2.1) va interveni în mod esenţial în deducerea formulei de calcul a reziduurilor unei funcţii complexe.

3 Teorema lui Cauchy. Formula lui Cauchy

Teorema lui Cauchy privind integrala curbilinie complexă este un rezultat fundamental din teoria funcţiilor complexe şi este specific acestui tip de funcţii.

3.1. Teoremă (Cauchy-Goursat)

Dacă $D \subseteq \mathbb{C}$ este un domeniu simplu conex, $f : D \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomorfă, iar (γ) este o curbă simplă, închisă şi netedă sau netedă pe porţiuni, situată în D, atunci integrala curbilinie complexă a funcţiei f de-a lungul curbei (γ) este nulă, i.e.

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Demonstraţie

Aplicăm formula lui Green din analiza reală, presupunând că $f \in C^1(D)$. Notând cu Δ domeniul mărginit de curba γ şi utilizând condiţiile Cauchy-Riemann $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ şi $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$, unde $f = P + jQ$, obţinem:

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_\gamma Pdx - Qdy + j\int\limits_\gamma Pdy + Qdx$$

$$= -\iint\limits_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + j\iint\limits_\Delta \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = 0,$$

ceea ce încheie demonstraţia.

3.2. Formulare întărită a Teoremei Cauchy-Goursat

Fie (γ) o curbă simplă, închisă şi rectificabilă (de exemplu netedă sau netedă pe porţiuni) şi fie D domeniul mărginit de (γ). Dacă funcţia complexă f este olomorfă pe D şi este continuă pe $D \cup (\gamma)$, atunci

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = 0.$$

3.3. Teorema lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe

Să presupunem că $D \subseteq \mathbb{C}$ este un domeniu multiplu conex şi fie $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ componentele conexe ale frontierei lui D, $n \geq 1$ (Fig.5). Fie γ o curbă simplă, închisă, netedă pe porţiuni (mai general rectificabilă), care conţine în interior componentele $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ (de exemplu $\gamma = \Gamma_0$, dacă Γ_0 are proprietăţile de mai sus ale curbei (γ)). Fie, de asemenea, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ curbe simple, închise, netede sau netede pe porţiuni care sunt conţinute în D, sunt exterioare una alteia, se află în interiorul domeniului mărginit de γ şi conţin în interior numai componenta $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ respectiv.

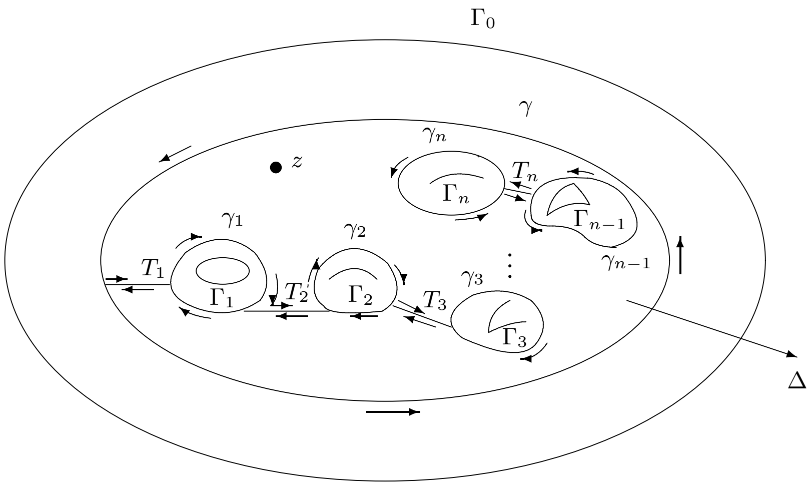


Fig.5

În aceste condiţii, pentru orice funcţie complexă f olomorfă pe D are loc egalitatea

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} f(z)dz. \tag{3.1}$$

Demonstraţie

Să unim un punct de pe (γ) cu un punct de pe (γ_1) printr-un arc simplu T_1, un punct de pe (γ_k) cu un punct de pe (γ_{k+1}) printr-un arc simplu T_{k+1}, $1 \leq k \leq n-1$, astfel încât arcele T_k, $1 \leq k \leq n$, numite *tăieturi*, să nu aibă puncte comune între ele şi nici cu (γ), (γ_k), $1 \leq k \leq n$, exceptând extremităţile. În acest mod, s-a format un domeniu simplu conex Δ având frontiera formată din curbele $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ şi tăieturile $T_1, T_2, \ldots, T_n$ descrise fiecare de două ori, în sensuri contrare. Deoarece f este olomorfă în acest domeniu şi pe frontiera sa, din Teorema Cauchy-Goursat rezultă $\int\limits_{Fr\Delta} f(z)dz = 0$; ţinând seama că $Fr\Delta = \gamma \cup \gamma_1^- \cup \cdots \cup \gamma_n^- \cup T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_n \cup T_1^- \cup \cdots \cup T_n^-$, iar integralele pe T_k şi T_k^- se reduc, $1 \leq k \leq n$, obţinem egalitatea (3.3.1) întrucât

$$\int\limits_{\gamma_k^-} f(z)dz = -\int\limits_{\gamma_k} f(z)dz.$$

3.4. Noţiunea de primitivă a unei funcţii complexe

- Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă dată. Se numeşte *primitivă* pe domeniul D a funcţiei f orice funcţie $F : D \to \mathbb{C}$ care este olomorfă pe D şi verifică egalitatea $F'(z) = f(z)$, $\forall\ z \in D$.

- *Dacă $D \subseteq \mathbb{C}$ este un domeniu simplu conex, atunci orice funcţie olomorfă $f : D \to \mathbb{C}$ admite primitive pe D.*

Într-adevăr se arată că, în acest caz, integrala $\int\limits_{\widehat{AB}} f(z)dz$ nu depinde de drumul (curba) care uneşte punctele $A(z_1)$ şi $B(z_2)$, integrala însăşi notându-se $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$, iar o primitivă a funcţiei f este $F : D \to \mathbb{C}$, $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(u)du$, unde $z_0 \in D$ este un punct fixat şi $z \in D$.

3.5. Formula lui Cauchy

Formula lui Cauchy arată, în esenţă, că valorile unei funcţii olomorfe într-un domeniu mărginit de o curbă simplă, netedă şi închisă sunt complet determinate dacă se cunosc valorile funcţiei pe frontiera domeniului. Mai precis are loc următorul enunţ:

Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex, a cărui frontieră γ este o curbă simplă, închisă şi netedă (sau netedă pe porţiuni). Dacă funcţia $f : D \cup \gamma \to \mathbb{C}$ este olomorfă pe D şi continuă pe γ, atunci pentru orice punct $z \in D$ are loc egalitatea

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} \frac{f(u)}{u - z} du,$$

numită **formula lui Cauchy**.

- Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu multiplu conex; presupunem că ne situăm în ipotezele descrise în secţiunea 3.3 (vezi şi Fig.5). Pentru orice $z \in \Delta$ are loc egalitatea

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} \frac{f(u)}{u - z} du - \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} \frac{f(u)}{u - z} du,$$

numită *formula lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe.*

Încheiem această secţiune prin enunţul unei teoreme al cărei conţinut pune în evidenţă o deosebire esenţială între cazul real şi cazul complex (o funcţie reală derivabilă, de exemplu pe un interval nu are în general derivate de ordin doi).

• **Formula generalizată a lui Cauchy**

Orice funcţie complexă $f : D \to \mathbb{C}$, olomorfă pe domeniul $D \subseteq \mathbb{C}$, admite pe D derivate de orice ordin.

Mai precis, fie $(\gamma) \subseteq D$ o curbă simplă, închisă şi netedă (sau netedă pe porţiuni) cu proprietatea că domeniul mărginit Δ având frontiera (γ) este inclus în D. Atunci, pentru orice $z \in \Delta$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}} du.$$

4 Probleme

Enunţuri

1. *Să se calculeze integrala* $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$ *în următoarele situaţii:*

(i) $f(z) = \overline{z}^2 + 2z + j\overline{z}$; $(\gamma) : |z| = 1$

(ii) $f(z) = \frac{1}{3}(6z + \overline{z})$; $(\gamma) = [AB]$; $A(2-3j)$; $B(1+j)$

(iii) $f(z) = |z - j| + \overline{z}$; $(\gamma) : z = j + 2e^{\pi j t}$; $-\frac{1}{2} \leq t \leq 1$

(iv) $f(z) = (2z + j)e^{-5z}$; (γ) *este arcul* $\overset{\frown}{AB}$, $A(0)$, $B(j)$

(v) $f(z) = \operatorname{Re} z + j\operatorname{Im}(z + j)$, $\gamma = [AB] \cup \overset{\frown}{BC}$, *unde* $[AB]$ *este segmentul de extremităţi* $A(1)$, $B(2j)$, *iar* $\overset{\frown}{BC}$ *este arcul de cerc de extremităţi* $B(2j)$, $C(-2)$.

2. *Utilizând Teorema lui Cauchy şi Formula lui Cauchy, să se calculeze următoarele integrale:*

(i) $\int\limits_{|z|=\ln 2} \frac{\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z}{\sin z + \cos z} dz$;

(ii) $\int\limits_{|z+j|=2} \frac{e^z}{z(2j+z)^3} dz$;

(iii) $$\int\limits_{|z|=1/2} \frac{[(z-1)(z-2)(z-3)+z^2]\exp(\sin z)}{z^2(z-1)(z-2)(z-3)}dz$$

Soluţii. Indicaţii. Răspunsuri

1. (i) -2π;

(ii) $[AB]: x = 1+t,\ y = 1-4t \ \Leftrightarrow\ z = (1-4j)t + 1 + j,\ t \in [0,1]^-$; $\frac{1}{6}(19+94j)$;

(iii) $I = 2\pi j \int_{-1/2}^{1} [(2-j)e^{\pi j t} + 2]dt = -2 + 6j(1+\pi)$;

(iv) $\frac{1}{25}[2 - 15\sin 5 - 2\cos 5 + j(5 + 2\sin 5 - 15\cos 5)]$;

(v) $f(z) = x + j(y+1) = z + j$; $[AB]: x = t,\ y = 2-2t \ \Leftrightarrow\ z = t(1-2j) + 2j$, $t \in [0,1]^-$; $\widehat{BC}: z = 2e^{jt},\ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$;

$$I = -\int_0^1 (1-2j)[(1-2j)t + 3j]dt + 2j\int_{\pi/2}^{\pi} (2e^{jt} + j)e^{jt}dt = \frac{3}{2} - 3j.$$

2. (i) Funcţia $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z}{\sin z + \cos z}$ este olomorfă pe discul $\overline{\Delta}(0; \ln 2)$, deoarece rădăcinile ecuaţiei $\sin z + \cos z = 0$ sunt $z_k = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ şi $|z_k| > \ln 2,\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$; din Teorema lui Cauchy rezultă $I = 0$.

(ii) Punctele $z_1 = 0$ şi $z_2 = -2j$ sunt situate în discul $\Delta(-j; 2)$, deci

$$I = \int\limits_{|z+j|=2} \frac{e^z/(2j+z)^3}{z}dz + \int\limits_{|z+j|=2} \frac{e^z/z}{(2j+z)^3}dz$$

şi din formulele lui Cauchy deducem:

$$I = 2\pi j \frac{e^z}{(2j+z)^3}\Big|_{z=0} + \frac{2\pi j}{2!}\left(\frac{e^z}{z}\right)''\Big|_{z=-2j}$$
$$= \frac{\pi}{4}[-\cos 2 - 1 + 2\sin 2 + j(2\cos 2 + \sin 2)].$$

(iii) $$I = \int\limits_{|z|=1/2} \frac{\exp(\sin z)}{z^2}dz + \int\limits_{|z|=1/2} \frac{\exp(\sin z)}{(z-1)(z-2)(z-3)}dz$$

$$= 2\pi j(\exp(\sin z))'\Big|_{z=0} + 0 = 2\pi j.$$

Capitolul 4

Serii Taylor. Serii Laurent

1 Serii Taylor

1.1. Definiţie

Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ *şi* $a_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$, *numere date. Definim şirul* $(f_n)_{n\geq 0}$ *de funcţii (polinoame) complexe* $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$, $n \geq 0$ *şi punem* $s_n = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n$, $n \geq 0$.

• *Ansamblul şirurilor de funcţii* (f_n, s_n) *se numeşte* **serie Taylor** *sau* **serie de puteri** *de termen general* f_n *centrată în* z_0 *(sau dezvoltabilă în jurul lui* z_0*).*

• Seria Taylor se notează $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, iar numerele a_n, $n \geq 0$ se numesc *coeficienţii seriei.*

• Dacă $z_0 = 0$ atunci seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, se numeşte **serie Mc-Laurin**.

1.2. Rază de convergenţă. Disc de convergenţă

• Fiind dată o serie de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, numărul $R \in \overline{\mathbb{C}}$ definit de egalitatea

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

se numeşte **raza de convergenţă a seriei**, iar discul

$$\Delta(z_0; R) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < R\}$$

se numeşte **disc de convergenţă** asociat seriei.

• Dacă există limita $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = L \in [0, \infty]$, atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{L}$, deci $R = L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

• În discul $\Delta(z_0; R)$ seria converge absolut şi uniform pe compacte.

• Seria este divergentă pe $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}(z_0; R)$.

• Discul de convergenţă al seriei de puteri nu coincide, în general, cu mulţimea de convergenţă a seriei de puteri, deoarece natura seriei pe cercul $\Gamma(z_0; R) = Fr\Delta(z_0; R)$ este specifică fiecărei serii în parte.

• Suma S a seriei este olomorfă pe discul de convergenţă $\Delta(z_0; R)$.

• Seria derivată $\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$ are raza de convergenţă egală cu R şi suma egală cu S', adică seria dată se poate deriva "*termen cu termen*":

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}, \ \forall \ z \in \Delta(z_0; R).$$

• Are loc egalitatea $S^{(k)}(z_0) = k!a_k, \ \forall \ k \in \mathbb{N}$, deci

$$a_n = \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}, \ \forall \ n \geq 0;$$

astfel

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad \forall \ z \in \Delta(z_0; R).$$

1.3. Definiţie

Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi fie $f : G \to \mathbb{C}$.

• *Funcţia f este* **dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului** *$z_0 \in G$ (sau* **într-o vecinătate a punctului** *$z_0 \in G$) dacă există un disc $\Delta(z_0; r) \subseteq G$, cu $r > 0$ şi o serie de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ convergentă pe $\Delta(z_0; r)$, astfel încât*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \ \forall \ z \in \Delta(z_0; r);$$

această egalitate se numeşte **dezvoltarea funcţiei f în serie Taylor în jurul punctului** z_0, iar membrul drept al egalităţii se numeşte **seria Taylor ataşată funcţiei f în jurul punctului z_0 (sau într-o vecinătate a punctului z_0)**.

• Funcţia f este **analitică** pe G dacă f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul fiecărui punct $z_0 \in G$.

1.4. Teorema dezvoltării în serie Taylor

Dacă f este o funcţie olomorfă pe o mulţime deschisă $G \subset \mathbb{C}$, atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul fiecărui punct din G (adică f este analitică pe G), iar coeficienţii seriei Taylor (numiţi coeficienţi Taylor ai funcţiei f în punctul z_0) sunt daţi de egalitatea

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}} du,$$

unde (γ) este un cerc arbitrar cu centrul în z_0, situat în G.

Pentru demonstraţie, vezi [22].

1.5. Teorema analiticităţii funcţiilor olomorfe

O funcţie complexă f definită pe o mulţime deschisă G este olomorfă pe G dacă şi numai dacă f este analitică pe G.

1.6. Serii Taylor importante

Prezentăm în această secţiune seriile Taylor cele mai utilizate în practică (în fapt, serii Mc-Laurin).

(i) Seria geometrică

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \ \forall\, z \in \Delta(0;1), \ \text{i.e. } |z| < 1$$

Punând $z := -z$, primim

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \ \forall\, z \in \mathbb{C}, \ |z| < 1.$$

Mai general, pentru $a \neq 0$, $b \neq 0$, scriind $\dfrac{1}{az+b} = \dfrac{1}{b} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{a}{b}z}$, primim:

$$\frac{1}{az+b} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n}{b^{n+1}} z^n, \quad |z| < \left|\frac{b}{a}\right|, \quad a \in \mathbb{C}^*, \ b \in \mathbb{C}^*.$$

(ii) Serii exponenţiale, circulare, hiperbolice

$$\exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \ \forall \ z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \ \forall \ z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \ \forall \ z \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \forall \ z \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \ \forall \ z \in \mathbb{C}$$

(iii) Seria logaritmică

Fie $f(z) = \ln(1+z)$ ramura uniformă în $\Delta(0;1)$ a funcţiei multivoce $F(z) = \operatorname{Ln}(1+z)$, astfel încât $f(0) = 0$. Primim:

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \ \forall \ z \in \Delta(0;1), \ \text{i.e.} \ |z| < 1.$$

(iv) Seria binomială

Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ şi $f(z) = (1+z)^\alpha$ ramura uniformă în $\Delta(0;1)$ a funcţiei multivoce $F(z) = (1+z)^\alpha$ pentru care $f(0) = 1$. Primim:

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \ \forall \ z \in \Delta(0;1), \ \text{i.e.} \ |z| < 1.$$

Observaţie

Pentru a dezvolta funcţia olomorfă $f : G \to \mathbb{C}$ în serie Taylor în jurul unui punct $z_0 \in G$, punem $u = z - z_0 \ \Leftrightarrow \ z = u + z_0$, după care se dezvoltă funcţia $g(u) = f(u + z_0)$ în serie Taylor în jurul originii.

1.7. Teorema (principiul) identităţii funcţiilor olomorfe

Fie f şi g două funcţii olomorfe pe un domeniu D. Egalitatea $f = g$ are loc dacă şi numai dacă este verificată una din condiţiile:

(i) *Mulţimea $\{z \in D : \ f(z) = g(z)\}$ are puncte de acumulare în D.*

(ii) *Există $a \in D$ astfel încât $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a), \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.*

• În particular, dacă $D = \mathbb{C}$ şi $f(x) = g(x)$, $\forall \ x \in \mathbb{R}$, atunci $f(z) = g(z)$, $\forall \ z \in \mathbb{C}$. De exemplu, egalitatea $\sin(\pi - z) = \sin z$ are loc pentru orice $z = x \in \mathbb{R}$, în consecinţă ea este valabilă pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

2 Serii Laurent

2.1. Exemplu

Să considerăm funcţia $f : \mathbb{C} \setminus \{-j, 0\} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{2}{z} + \exp\left(\frac{1}{z+j}\right),$$

olomorfă pe orice mulţime deschisă inclusă în $\mathbb{C} \setminus \{-j, 0\}$ şi să dezvoltăm (formal) funcţia în jurul punctului $z_0 = -j$. Punem $u = z + z_0 = z + j$ şi obţinem:

$$g(u) = f(u - j) = \frac{2}{u - j} + \exp\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{2j}{1 + uj} + \exp\left(\frac{1}{u}\right).$$

Utilizând rezultatele din secţiunea 1.6.(i), (ii) primim:

$$g(u) = 2j \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^n u^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{u^n}, \quad |u| < 1, \ u \neq 0, \quad \text{i.e.}$$

$$f(z) = g(z + j) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n j^{n+1} (z + j)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(z + j)^n}, \quad \text{i.e.}$$

$$\frac{2}{z} + \exp\left(\frac{1}{z+j}\right) = \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(z+j)^n} + \cdots + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{(2+j)^2} \tag{2.1}$$

$$+ \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{z+j} + (1 + 2j) + 2(z + j) - 2j(z + j)^2$$

$$-2(z + j)^3 + \cdots + 2(-1)^n j^{n+1} (z + j)^n + \ldots,$$

unde $|z+j|<1$, $z\neq -j$, i.e. $z\in\Delta(-j,1)\setminus\{-j\}$.

Observăm că în dezvoltarea (2.1) apar atât termeni care conţin *puterile pozitive* ale lui $z-z_0=z+j$, cât şi termeni care conţin *puterile negative* ale lui $z-z_0=z+j$.

2.2. Definiţie

Fie $z_0\in\mathbb{C}$ un punct fixat. Se numeşte **serie Laurent** *centrată în z_0 orice serie de funcţii de forma:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} +$$

$$+a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \ldots,$$

unde $a_n\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{Z}$.

• În Exemplul 2.1 avem: $a_{-n}=\dfrac{1}{n!}$, $n\geq 1$ sau $a_n=\dfrac{1}{(-n)!}$, $n\leq -1$; $a_0=1+2j$, $a_n=2(-1)^n j^{n+1}$, $n\geq 1$, $z_0=-j$.

2.3. Definiţie

• *Unei serii Laurent i se asociază seriile de funcţii*

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} \;\; \text{şi} \;\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

care se numesc **partea principală**, *respectiv* **partea tayloriană** *ale seriei Laurent. Avem:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

• *Spunem că seria Laurent* **converge** *(simplu sau uniform) pe o mulţime $E\subseteq\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ dacă atât partea principală cât şi partea tayloriană converg (simplu respectiv uniform) pe E.*

Pentru fiecare $z\in E$, să notăm cu $s_1(z)$ şi $s_2(z)$ suma părţii principale, respectiv a părţii tayloriene din seria Laurent. În acest caz suma $s(z)$ a seriei Laurent se defineşte prin:

$$s(z)=s_1(z)+s_2(z), \quad z\in E.$$

2.4. Teorema coroanei de convergenţă

Fiind dată seria Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, *notăm*

$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \quad \text{şi} \quad R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$$

şi presupunem că $r < R$. *Desemnăm prin* $U(z_0; r, R)$ *coroana circulară cu centrul în* z_0, *de raze* r *şi* R, *adică*

$$U(z_0; r, R) = \Delta(z_0; R) \setminus \overline{\Delta}(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : \ r < |z - z_0| < R\}.$$

Atunci:

(i) Seria Laurent converge absolut şi uniform pe compacte în coroana circulară $U(z_0; r, R)$;

(ii) Seria Laurent este divergentă în $\mathbb{C} \setminus \overline{U}(z_0; r, R)$;

(iii) Suma $s(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *este o funcţie olomorfă pe* $U(z_0; r, R)$.

2.5. Teorema dezvoltării în serie Laurent

Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ *un domeniu,* $z_0 \in \mathbb{C}$ *un punct dat şi* $f : D \to \mathbb{C}$ *o funcţie olomorfă. Presupunem că există o coroană circulară* $U = U(z_0; r, R)$, *cu* $0 < r < R$, *astfel încât* $\overline{U} \subseteq D$. *Notăm cu* γ *cercul* $\Gamma(z_0; \rho)$ *având centrul în* z_0 *şi raza* $\rho > 0$ *astfel încât* $r \le \rho \le R$ *şi fie*

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}} du, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

În aceste condiţii seria Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *este convergentă pe* U *şi are suma* $f(z)$, *adică are loc egalitatea*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \ \forall\, z \in U. \tag{2.3}$$

2.6. Definiţie

Dacă dezvoltarea în serie Laurent (2.3) a funcţiei f are loc în coroana circulară $U(z_0; r, R)$ pentru orice $r > 0$, atunci:

- *se spune că* **funcţia f este dezvoltabilă în serie Laurent în jurul punctului z_0**
- *egalitatea (2.3) se numeşte* **dezvoltarea funcţiei f în serie Laurent în jurul punctului z_0**
- *seria din membrul drept al egalităţii (2.3) se numeşte* **seria Laurent ataşată funcţiei f relativ la punctul z_0 (sau în jurul punctului z_0)**.

În acest caz, dezvoltarea (2.3), cu coeficienţii a_n daţi de (2.2), este valabilă pe domeniul $\{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z - z_0| < R\} = \Delta(z_0; R) \setminus \{z_0\}$, situaţie care are loc dacă z_0 este singurul punct din $\Delta(z_0; R)$ în care f nu este monogenă.

2.7. Exemplu

Să se dezvolte în serie Laurent funcţia raţională

$$f(z) = \frac{5z - 3}{(z-1)^3(z+1)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$$

în fiecare din următoarele situaţii:
(i) *în jurul originii*
(ii) *în jurul punctului $z_0 = 1$*
(iii) *în jurul punctului $z_0 = -1$*
(iv) *în domeniul $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - 1| > 2\}$.*

Rezolvare

(i) Deoarece f este olomorfă în discul $\Delta(0; 1)$, seria Laurent a lui f în jurul originii se reduce la o serie Taylor (Mc-Laurin). Descompunerea în fracţii simple a funcţiei raţionale $f(z)$ este:

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{1-z} + \frac{2}{(1-z)^2} - \frac{1}{(1-z)^3}. \tag{2.4}$$

Utilizând seria geometrică (secţiunea 1.6.(i)) primim:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ şi } \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \ |z| < 1. \tag{2.5}$$

Derivând prima egalitate din (2.5) sau utilizând seria binomială (secţiunea 4.1.6.(iv)) cu $\alpha = -2$ şi $z := -z$, obţinem:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n, \quad |z| < 1. \tag{2.6}$$

Similar, prin derivarea egalităţii (2.6) sau prin utilizarea seriei binomiale cu $\alpha = -3$ şi $z := -z$ rezultă:

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)z^n, \quad |z| < 1. \tag{2.7}$$

Relaţiile (2.4), (2.5), (2.6) şi (2.7) conduc la următoarea dezvoltare:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + (-1)^n + 2(n+1) - \frac{(n+1)(n+2)}{2}\right] z^n, \quad |z| < 1.$$

(ii) Punem $u = z - 1$, deci $z = u + 1$. Din (2.4) primim:

$$f(z) = g(u) = \frac{1}{2+u} - \frac{1}{u} + \frac{2}{u^2} + \frac{1}{u^3}, \quad u \in \mathbb{C} \setminus \{-2, 0\}. \tag{2.8}$$

Dezvoltând $\dfrac{1}{2+u}$ după puterile lui u obţinem:

$$\frac{1}{2+u} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{u}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^n}{2^{n+1}}, \quad \left|\frac{u}{2}\right| < 1. \tag{2.9}$$

Din (2.8) şi (2.9) rezultă:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n, \quad |z-1| < 2,\ z \neq 1. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Relaţiile $|z-1| < 2$, $z \neq 1$ arată că dezvzoltarea în serie Laurent (2.10) este valabilă în orice coroană circulară $U(1; r, 2)$, cu $0 < r < 2$.

Observăm, de asemenea, că partea principală a seriei Laurent (2.10) a funcţiei $f(z)$ în jurul punctului $z_0 = 1$ conţine trei termeni.

(iii) Punând $u = z - 1$, i.e. $z = u + 1$, obţinem, via (2.4):

$$f(z) = h(u) = \frac{1}{u} + \frac{1}{2-u} + \frac{2}{(2-u)^2} - \frac{1}{(2-u)^3}, \quad u \in \mathbb{C} \setminus \{0, 2\}. \tag{2.11}$$

Pe de altă parte, utilizând seria geometrică (secţiunea 1.6.(i)), cu $z = \dfrac{u}{2}$, primim:

$$\frac{1}{2-u} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{u}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{2^{n+1}}, \quad |u| < 2. \tag{2.12}$$

Mai departe, similar cu deducerea relaţiilor (2.6) şi (2.7) rezultă:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(2-u)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} u^n \qquad \text{şi} \\ \\ \dfrac{1}{(2-u)^3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2^{n+4}} u^n, \quad |u| < 2. \end{cases} \tag{2.13}$$

În sfârşit, relaţiile (2.11), (2.12) şi (2.13) conduc la următoarea dezvoltare în serie Laurent a funcţiei $f(z)$ în jurul punctului $z_0 = -1$, adică în orice coroană circulară $U(-1; r, 2)$ cu $0 < r < 2$:

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(7-n)}{2^{n+4}} (z+1)^n, \quad |z+1| < 2, \; z \neq -1. \tag{2.14}$$

Observăm că partea principală a seriei Laurent (2.14) a funcţiei $f(z)$ în jurul punctului $z_0 = -1$ conţine un singur termen.

(iv) Punem $u = z - 1$ şi obţinem relaţia (2.8). Deoarece $|u| = |z - 1| > 2$ scriem

$$\frac{1}{2+u} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{u}};$$

de aici, ţinând seama că $\left|\dfrac{2}{u}\right| < 1$ şi utilizând seria lui $\dfrac{1}{1+z}$ (secţiunea 1.6.(i)) primim:

$$\frac{1}{2+u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{u^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1}}{u^n}, \quad |u| > 2. \tag{2.15}$$

Relaţiile (2.8), (2.15) şi $u = z - 1$ conduc la dezvoltarea în serie Laurent:

$$f(z) = \frac{5}{(z-1)^3} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{(z-1)^n},$$

valabilă pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z-1| > 2$, adică în orice coroană circulară $U(1;2;R)$ cu $R > 2$.

2.8. Exemplu

Să se dezvolte în serie Laurent funcţia

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sqrt{1-z^2} + \sqrt{4-z^2},$$

luând determinarea principală a radicalului, pe fiecare din domeniile:
(i) $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$
(ii) $\{z \in \mathbb{C} : \ 1 < |z| < 2\}$
(iii) $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| > 2\}$.

Rezolvare

Notând $g(z) = \sqrt{1-z^2}$, rezultă $f(z) = g(z) + 2g\left(\dfrac{z}{2}\right)$.

• Dacă $|z| < 1$, utilizând seria binomială (secţiunea 1.6.(iv)), cu $\alpha = \dfrac{1}{2}$ şi $z := -z^2$, obţinem:

$$g(z) = 1 - \frac{z^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)}{n!}(-z^2)^n$$

$$= 1 - \frac{z^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!(-1)^{n-1}}{2^n n!}(-1)^n z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!} z^{2n};$$

de aici şi din relaţia

$$(2n-3)!! = \frac{(2n-2)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)} = \frac{(2n)!}{2^n n!(2n-1)}$$

rezultă:

$$g(z) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)} z^{2n}, \text{ pentru } |z| < 1. \tag{2.16}$$

• Dacă $|z| > 1$, scriem $g(z) = jz\sqrt{1 - \left(\frac{1}{z}\right)^2}$ şi utilizând relaţia (2.16), cu $\frac{1}{z}$ în loc de z, primim:

$$g(z) = jz - j\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)} \cdot \frac{1}{z^{2n-1}}, \text{ pentru } |z| > 1. \tag{2.17}$$

(i) Din $|z| < 1$ rezultă $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ şi din (2.16) primim:

$$f(z) = g(z) + 2g\left(\frac{z}{2}\right) = 3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)} \left(1 + \frac{1}{2^{2n-1}}\right) z^{2n}.$$

(ii) Din $1 < |z| < 2$ rezultă $|z| > 1$ şi $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, deci relaţiile (2.17) şi (2.16) conduc la egalitatea:

$$f(z) = g(z) + 2g\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$= -j\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)} \cdot \frac{1}{z^{2n-1}} + 2 + jz - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{4n-1}(n!)^2(2n-1)} z^{2n}.$$

(iii) Din $|z| > 2$ rezultă $|z| > 1$ şi $\left|\frac{z}{2}\right| > 1$. Utilizând (2.17) pentru z şi $\frac{z}{2}$ obţinem:

$$f(z) = 2jz - j\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)} (1 + 2^{2n}) \frac{1}{z^{2n-1}}.$$

3 Probleme

Enunţuri

1. *Să se dezvolte următoarele funcţii în serii de puteri în jurul punctelor indicate (precizând şi domeniul de convergenţă).*

(i) $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+3z+2}$, $z_0 = 0$, $z_0 = -1$, $z_0 = j-1$

(ii) $f(z) = z^2\cos(z-2j)$, $z_0 = 2j$

(iii) $f(z) = \ln(1-2z+4z^2)$, $z_0 = 0$, $f(0) = 0$

(iv) $f(z) = \frac{\arcsin z}{\sqrt{1-z^2}}$, $z_0 = 0$

(v) $f(z) = \ln \dfrac{2j+z}{2j-z}, \ z_0 = 0, \ f(0) = 2\pi$

2. *Să se dezvolte următoarele funcţii în serie Laurent în jurul punctelor indicate sau pe domeniile indicate:*

(i) $f(z) = z^m e^{1/z}, \ m \in \mathbb{Z}, \ z_0 = 0$

(ii) $f(z) = \dfrac{1+4z-z^2}{(z-2)(z^2-1)}, \ z_0 = 0, \ z_0 = 2$

(iii) $f(z) = \dfrac{1}{z}\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{z-1}\right), \ z_0 = 1$

(iv) $f(z) = \dfrac{2z-2}{z^2-2z-3}, \ |z| < 1, \ 1 < |z| < 3, \ |z| > 3$

(v) $f(z) = \dfrac{\mathrm{sh}\, z}{z-j}, \ z_0 = j.$

Soluţii. Indicaţii. Răspunsuri

1. (i) $f(z) = \dfrac{3}{z+2} - \dfrac{1}{z+1}$

• pentru $z_0 = -1$, avem $f(z) = -\dfrac{1}{z+1} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} 3 \cdot (-1)^n (z+1)^n$, $z \in \Delta(-1,1) \setminus \{-1\}$

• pentru $z_0 = j-1$ punem $u = z - z_0 \ \Leftrightarrow \ u = z - j + 1 \ \Leftrightarrow \ z = u - 1 + j$, deci

$$f(z) = \frac{3}{u+1+j} - \frac{1}{u+j} = \frac{1-j}{2} \cdot \frac{3}{1+(1-j)2^{-1}u} + j\frac{1}{1-ju},$$

deci

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[3(-1)^n \left(\frac{1-j}{2}\right)^{n+1} + j^{n+1}\right](z+1-j)^n, \quad z \in \Delta(j-1,1)$$

(ii) Punem $z - 2j = u$.

(iii) $f(z) = \ln(1+8z^3) - \ln(1+2z)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(8z^3)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(2z)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

unde $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} 2^n$ pentru $n \neq 3k$, $a_{3k} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{3k} 2^{3k+1}$, $|z| < \dfrac{1}{2}$.

(iv) Din $\sqrt{1-z^2} f(z) = \arcsin z$ obţinem $(1-z^2)f'(z) = zf(z) + 1$, relaţie care se derivează de $(n-1)$ ori cu formula lui Leibniz; rezultă $f^{(2n)}(0) = 0$ şi

$f^{(2n+1)}(0) = 2^{2n}(n!)^2$, $n \geq 0$. În final,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad |z| < 1.$$

(v) $f(z) = \ln(1 - (jz)/2) - \ln(1 + (jz)/2)$

$$= 2\pi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} j \cdot 2^{-2n} z^{2n+1}, \quad |z| < 2$$

2. (i) $f(z) = \displaystyle\sum_{s=-m}^{\infty} \frac{z^{-s}}{(s+m)!}$; pentru $m \leq -1$, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{m} \frac{z^n}{(m-n)!}$, $z \in \mathbb{C}^*$; pentru $m \in \mathbb{N}$, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{(m-n)!} + \sum_{n=0}^{m} \frac{z^n}{(m-n)!}$, $z \in \mathbb{C}^*$.

(ii) $f(z) = \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{z+1} - \dfrac{2}{z+1}$; vezi Exemplul 2.7.

(iii) Punem $z - 1 = u$ şi efectuăm produsul seriilor

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \ldots$$

şi

$$\operatorname{sh} \frac{1}{u} = \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{u} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{u^3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{u^5} + \ldots$$

De exemplu, $a_0 = -\left(\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!} + \ldots \right) = -\operatorname{sh} 1$.

(iv) $f(z) = \dfrac{1}{z+1} + \dfrac{1}{z-3}$ şi se procedează similar cu Exemplele 2.7, 2.8.

(v) Punem $z - j = u$, deci

$$f(z) = \frac{1}{u} \operatorname{sh}(j + u) = \frac{1}{u}(j \sin 1 \operatorname{ch} u + \cos 1 \operatorname{sh} u) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-j)^n,$$

unde $a_{2n} = \dfrac{\cos 1}{(2n+1)!}$, $n \geq 0$ şi $a_{2n+1} = \dfrac{j \sin 1}{(2n+2)!}$, $n \geq -1$.

Capitolul 5

Teorema reziduurilor. Aplicaţii

1 Singularităţi ale unei funcţii complexe

Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă.

1.1. Definiţie

Un punct $a \in D$ *se numeşte* **punct ordinar** *pentru funcţia* f *dacă există un disc* $\Delta(a, r)$, $r > 0$, *astfel încât* $\Delta(a, r) \subseteq D$ *şi* f *este olomorfă pe* $\Delta(a, r)$.

• În acest caz, funcţia f se poate dezvolta în serie Taylor în jurul punctului a (i.e. seria Laurent a funcţiei f în jurul lui a se reduce la partea sa tayloriană).

1.2. Definiţie

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. *Un punct ordinar* $a \in D$ *se numeşte* **zero de ordin** n *al funcţiei* f *dacă există o funcţie olomorfă* $g : D \to \mathbb{C}$ *astfel încât* $f(z) = (z - a)^n g(z)$, $\forall\ z \in D$ *şi* $g(a) \neq 0$.

• Dacă $n = 1$, $n = 2$ sau $n = 3$, zeroul a al funcţiei f se numeşte zero *simplu*, *dublu* respectiv *triplu*.

1.3. Punct singular

• Un punct $a \in \mathbb{C}$ se numeşte **punct singular** al funcţiei f dacă în orice disc $\Delta(a; r)$, $r > 0$, există puncte în care f este monogenă şi puncte în care f nu este monogenă.

• Punctul singular $a \in \mathbb{C}$ al funcţiei f se numeşte **punct singular izolat** dacă există un disc $\Delta(a;\rho)$, $\rho > 0$, astfel încât punctul a este unicul punct singular al funcţiei f în acest disc.

De exemplu, punctul $a = 0$ este *punct singular neizolat* pentru funcţia $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = (\sin z^{-1})^{-1}$.

1.4. Singularităţi eliminabile. Puncte regulare

• Un punct singular izolat a al funcţiei f se numeşte *eliminabil* dacă există o funcţie $\widetilde{f} : D\cup\{a\} \to \mathbb{C}$ astfel încât $\widetilde{f}$ este olomorfă pe $D\cup\{a\}$ şi $\widetilde{f}(z) = f(z)$, $\forall\ z \in D$, i.e. f se poate prelungi olomorf pe $D \cup \{a\}$ şi $\widetilde{f}|_D = f$.

De exemplu, punctul $a = 0$ este singularitate eliminabilă pentru funcţia $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$; într-adevăr, punem $\widetilde{f}(0) = 1$.

• Punctele mulţimii de olomorfie D, împreună cu punctele singulare eliminabile ale funcţiei f, se numesc **puncte regulare** pentru f.

1.5. Caracterizarea punctelor singulare eliminabile

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1° $z = a$ este punct singular eliminabil pentru funcţia f.

2° Există limita *finită* $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

3° Partea principală a seriei Laurent a funcţiei f în jurul lui a este nulă (adică $a_n = 0$, $\forall\ n \le -1$).

1.6. Clasificarea punctelor singulare izolate neeliminabile

Echivalenţa afirmaţiilor 1° şi 2° din secţiunea 1.5 conduce la următoarea clasificare a punctelor singulare neeliminabile:

• *Dacă a este un punct singular izolat al funcţiei f şi dacă există $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, atunci punctul a se numeşte* **pol** *pentru f.*

• *Dacă a este un punct singular izolat al funcţiei f şi dacă f nu are limită în a, atunci punctul a se numeşte* **punct singular esenţial** *pentru f.*

1.7. Teorema de caracterizare a polilor

Fie a un punct singular izolat al funcţiei olomorfe $f : D \to \mathbb{C}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) *a este un pol al funcţiei f.*

(ii) *a este un punct regular pentru funcţia $\dfrac{1}{f}$ şi anume un zero.*

(iii) *Există un singur* $n \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât egalitatea*

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \ldots$$

are loc pentru orice $z \neq a$ *situat într-un disc* $\Delta(a;r) \subseteq D$, $r > 0$.

(iv) *Există un singur* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi o unică funcţie olomorfă* $g : D \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ *astfel încât* $f(z) = (z-a)^{-n} g(z)$, $\forall\ z \in D$ *şi* $g(a) \neq 0$.

1.8. Noţiunea de ordin al unui pol

Numărul natural nenul n pus în evidenţă în Teorema 1.7 (3° sau 4°) se numeşte **ordinul** polului $z = a$.

Aşadar, ordinul polului $z = a$ pentru funcţia f coincide cu ordinul zeroului $z = a$ pentru funcţia $g = \dfrac{1}{f}$.

Dacă $n = 1, 2$ sau 3, atunci polul $z = a$ se numeşte pol *simplu*, *dublu* respectiv *triplu*.

1.9. Caracterizarea punctelor singulare izolate prin serii Laurent

Fie $z = a$ un punct ordinar, o singularitate eliminabilă sau un punct singular izolat pentru funcţia f.

• *Dacă partea principală a seriei Laurent a funcţiei* f *în jurul punctului* a *este nulă (adică seria Laurent se reduce la o serie Taylor), atunci punctul* $z = a$ *este un* **punct ordinar** *pentru* f *sau o* **singularitate eliminabilă**.

• *Dacă partea principală a seriei Laurent a funcţiei* f *în jurul punctului* a *conţine un număr finit de termeni, adică* $a_{-m} = 0$, $\forall\ m \geq n+1$, $n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $a_{-n} \neq 0$, *atunci* $z = a$ *este un* **pol de ordin** n *pentru* f.

• *Dacă partea principală a seriei Laurent a funcţiei* f *în jurul punctului* a *conţine o infinitate de termeni, atunci* $z = a$ *este* **punct singular esenţial** *pentru* f.

1.10. Exemple

• Fie $f : \mathbb{C} \setminus \{0, j\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{\sin z}{z(z-j)}$.

Punctul $a = 0$ este o singularitate eliminabilă deoarece

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} \lim_{z\to 0} \frac{1}{z-j} = \left(\lim_{z\to 0} \frac{\sin z - \sin 0}{z - 0} \right) j$$

$$= j(\sin z)'_{z=0} = j\cos 0 = j.$$

Punctul $a = j$ este un pol simplu deoarece $\lim\limits_{z\to j} f(z) = \infty$, iar funcţia

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = (z-j)\frac{z}{\sin z}$$

are $z = j$ drept zero simplu.

• Fie $f : \mathbb{C} \setminus \{-j, 0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{2}{z} + \exp\left(\dfrac{1}{z+j}\right)$, vezi Exemplul 2.1, Capitolul 4. Din formula (2.1), Capitolul 4 se deduce că $z = -j$ este punct singular izolat. Se constată fără dificultate că $z = 0$ este pol simplu.

• Fie $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{5z-3}{(z-1)^3(z+1)}$.

Utilizând dezvoltarea în serie Laurent (secţiunea 2.7, Cap.4), deducem că $z = 0$ este un punct ordinar, $z = -1$ este un pol simplu, iar $z = 1$ este un pol triplu.

1.11. Funcţii meromorfe

• Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă. O funcţie $f : G_1 \subseteq G \to \mathbb{C}$ se numeşte *meromorfă* pe G dacă f nu are în G alte singularităţi decât poli sau singularităţi eliminabile.

• *Funcţiile raţionale sunt funcţii meromorfe pe* $\mathbb{C}$. Dacă $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, unde P şi Q sunt polinoame prime între ele, atunci f nu are în $\mathbb{C}$ alte singularităţi decât poli; mai precis, *punctul $z = a$ este un pol de ordinul n pentru f dacă şi numai dacă $z = a$ este un zero de ordin n pentru polinomul Q.*

• Funcţiile tg, ctg, th şi cth sunt, de asemenea funcţii meromorfe pe $\mathbb{C}$; de exemplu funcţia tg are polii $z_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, iar funcţia ctg are polii $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2 Reziduuri. Calculul reziduurilor

2.1. Definiţia noţiunii de reziduu

Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe domeniul $D \subseteq \mathbb{C}$ şi $z_0 \in \mathbb{C}$ un punct singular izolat (pol sau punct singular esenţial) al funcţiei f. Fie $r > 0$ astfel încât $\overline{\Delta}(z_0; r) \setminus \{z_0\} \subseteq D$ şi $\gamma = \Gamma(z_0; r)$. Se numeşte **reziduul funcţiei** f **în**

punctul z_0 *numărul complex notat* $Rez(f; z_0)$ *şi definit prin egalitatea*

$$Rez(f; z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} f(z)dz.$$

• Definiţia este corectă, întrucât valoarea integralei nu depinde de raza r a cercului γ (Teorema 3.3, Cap.3 cu $n = 1$).

2.2. Teorema privind calculul reziduului în cazul general

Fie $f : D \to \mathbb{C}$ *o funcţie olomorfă pe domeniul* $D \subseteq \mathbb{C}$ *şi* $z_0 \in \mathbb{C}$ *un punct singular izolat al funcţiei* f*. Presupunem că dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei* f *în jurul punctului* z_0 *este:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Atunci $Rez(f; z_0) = a_{-1}$*, adică reziduul funcţiei* f *în punctul* z_0 *este coeficientul lui* $\dfrac{1}{z - z_0} = (z - z_0)^{-1}$ *din seria Laurent ataşată funcţiei* f *relativ la punctul* z_0*.*

Demonstraţie

Utilizând Definiţia 2.1 primim:

$$Rez(f; z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right\} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int\limits_{\gamma} (z - z_0)^n dz = \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot 2\pi j \delta_{-1}(n)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta_{-1}(n) = a_{-1},$$

în conformitate cu Exemplul 2.3, Cap.3 şi egalitatea (2.1), Cap.3 Teorema este demonstrată.

2.3. Observaţie

În baza Teoremei 2.2, admitem că reziduul funcţiei f într-un punct ordinar (sau singularitate eliminabilă) este egal cu zero.

2.4. Exemple

(i) Funcţia $f : \mathbb{C} \setminus \{-j, 0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{2}{z} + \exp\left(\dfrac{1}{z+j}\right)$ are două singularităţi: $z_1 = 0$ şi $z_2 = -j$.

• Deoarece funcţia $z \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{z+j}\right)$ este olomorfă într-o vecinătate a originii (de exemplu $\Delta(0;1)$), deducem că seria sa Laurent nu conţine termeni în partea principală. Astfel, $f(z) = \dfrac{2}{z} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, deci $Rez(f;0) = a_{-1} = 2$ ($z_1 = 1$ este pol simplu).

• Din formula (2.1), Cap.4 deducem $Rez(f;-j) = a_{-1} = \dfrac{1}{1!} = 1$ ($z_2 = -j$ este punct singular esenţial).

(ii) Funcţia $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{5z-3}{(z-1)^3(z+1)}$ (Exemplul 2.7, Cap.4 şi Exemplul 1.10) are drept puncte singulare $z = -1$ (pol simplu) şi $z = 1$ (pol triplu). Din formulele (2.10) şi (2.14), Capitolul 4, deducem:

$$Rez(f;1) = \text{coeficientul lui } \frac{1}{z-1} \text{ din (2.10)} = -1$$

$$Rez(f;-1) = \text{coeficientul lui } \frac{1}{z+1} \text{ din (2.14)} = 1$$

2.5. Teorema privind calculul reziduurilor pentru poli

Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe domeniul $D \subseteq \mathbb{C}$ şi $z_0 \in \mathbb{C}$ un pol de ordinul $n \in \mathbb{N}^*$ al funcţiei f.

Atunci

$$Rez(f;z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} [(z-z_0)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

2.6. Calculul reziduurilor pentru poli simpli

Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ un pol simplu al funcţiei complexe $f : D \to \mathbb{C}$, olomorfă pe domeniul $D \subseteq \mathbb{C}$.

(i) *Are loc egalitatea $Rez(f;z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$.*

(ii) *Dacă f se poate reprezenta sub forma $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, unde h şi g sunt olomorfe într-o vecinătate a punctului z_0, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ şi $h'(z_0) \neq 0$,* *atunci*

$$Rez(f;z_0)=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Demonstraţie

(i) Rezultă din Teorema 2.5 pentru $n=1$.
(ii) Avem, succesiv:

$$Rez(f;z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

$$=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{g(z)}{h(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)}{\dfrac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}}=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

2.7. Exemple

(i) Fie $f:\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\dfrac{z^2+1}{\sin\pi z}$. Punctele $z=n$, $n\in\mathbb{Z}$ sunt poli simpli pentru f. Luând $g(z)=z^2+1$ şi $h(z)=\sin\pi z$, obţinem:

$$Rez(f;n)=\frac{g(n)}{h'(n)}=\frac{g(z)}{h'(z)}\Big|_{z=n}$$

$$=\frac{z^2+1}{\pi\cos\pi z}\Big|_{z=n}=\frac{n^2+1}{\pi(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{\pi}(n^2+1).$$

(ii) Fie $f:D\to\mathbb{C}$, $f(z)=\dfrac{z+1}{(z^2+1)^n}$, $n\in\mathbb{Z}$.

• Dacă $n\in\mathbb{Z}$, $n\le 0$, atunci $D=\mathbb{C}$ şi f este un polinom de grad $1-2n$, deci o funcţie întreagă (olomorfă pe $\mathbb{C}$).

• Dacă $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $D=\mathbb{C}\setminus\{\pm j\}$, iar punctele $\pm j$ sunt poli de ordin n. Să calculăm reziduul funcţiei f în punctul $z_0=-j$:

$$Rez(f;-j)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to -j}\left[(z+j)^n\frac{z+1}{(z+j)^n(z-j)^n}\right]^{(n-1)},$$

în conformitate cu Teorema 2.5. Mai departe, utilizând formula lui Leibniz şi egalitatea

$$[(az+b)^\alpha]^{(n)}=a^n\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(az+b)^{\alpha-n},$$

cu $a, b, \alpha \in \mathbb{C}$, primim:

$$Rez(f;-j) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to -j}[(z+1)(z-j)^{-n}]^{(n-1)}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to -j}\{C_{n-1}^{0}[(z-j)^{-n}]^{(n-1)}(z+1) + C_{n-1}^{1}[(z-j)^{-n}]^{(n-2)}(z+1)'\}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to -j}[(-n)(-n-1)\dots(-2n+2)(z-j)^{-2n+1}(z+1)$$

$$+(n-1)(-n)(-n-1)\dots(-2n+3)(z-j)^{-2n+2}]$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}[(-1)^{n-1}n(n+1)\dots(2n-2)(1-j)(-2j)^{1-2n}$$

$$+(-1)^{n-2}(n-1)n(n+1)\dots(2n-3)(-2j)^{2-2n}]$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{2^{2n-1}} - \frac{(n-1)n(n+1)\dots(2n-3)}{2^{2n-2}}\right.$$

$$\left. + \frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{2^{2n-1}}j\right]$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{n(n+1)\dots(2n-3)(2n-2-2n+2)}{2^{2n-1}} + \frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{2^{2n-1}}j\right]$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\frac{A_{2n-2}^{n-1}}{2^{2n-1}}j = \frac{2C_{2n-2}^{n-1}}{2^{2n}}j.$$

2.8. Observaţie

Utilizarea formulelor de calcul specifice pentru poli (formule date în secţiunile 2.5 şi 2.6) este preferabilă, în general, metodei generale de calcul a reziduurilor care constă în dezvoltarea funcţiei în serie Laurent (Teorema 2.2). Astfel, pentru funcţia $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{5z-3}{(z-1)^3(z+1)}$ (vezi secţiunile 2.7 (Cap.4) şi 1.10), avem:

- $$Rez(f;-1) = \left.\frac{(5z-3)/(z-1)^3}{(z+1)'}\right|_{z=-1} = \frac{-8}{(-2)^3} = 1,$$

conform secţiunii 2.6(ii);

- $$Rez(f;1) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^3\frac{5z-3}{(z+1)(z-1)^3}\right]''$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5z-3}{z+1}\right)''\Big|_{z=1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-16}{(z+1)^3}\Big|_{z=1} = -1,$$

conform Teoremei 2.5 cu $n = 3$.

Aceste reziduuri au fost obţinute şi în secţiunea 2.4.(ii), utilizând rezultatele din secţiunile 2.7 şi 1.10 (adică dezvoltarea în serie Laurent).

2.9. Reziduul unei funcţii în punctul de la infinit

Fie f o funcţie complexă olomorfă pe mulţimea $G = \mathbb{C}\backslash\overline{\Delta}(0;r)$, unde $r > 0$ este dat. Se numeşte **reziduul funcţiei f în punctul de la infinit** *numărul complex*

$$Rez(f;\infty) = -\frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma} f(z)dz = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma^-} f(z)dz,$$

unde $\gamma = \Gamma(0;R)$, cu $R > r$ fixat.

2.10. Calculul reziduului în punctul de la infinit

Presupunem că funcţia complexă f îndeplineşte condiţiile din secţiunea 2.9.

(i) *Dacă $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots$ este dezvoltarea funcţiei f în serie Laurent într-o coroană circulară $U(0;r,R_1)$, cu $R_1 > r$ oricât de mare (adică în vecinătatea punctului de la infinit), atunci $Rez(f;\infty) = -a_{-1}$.*

(ii) *Are loc egalitatea*

$$Rez(f;\infty) = -Rez\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right);0\right]. \tag{2.1}$$

2.11. Exemplu

Fie $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^s \exp\frac{j}{z}$, $s \in \mathbb{Z}$. Să calculăm $Rez(f;\infty)$, utilizând formula (2.1), Avem

$$g(z) = \frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^{s+2}}\exp(jz),$$

deci $Rez(f;\infty) = -Rez(g;0)$.

• Dacă $s \leq -2$, atunci $z = 0$ este punct ordinar pentru g, prin urmare $Rez(f;\infty) = -Rez(g;0) = 0$.

• Dacă $s \geq -1$, atunci $z = 0$ este pol de ordinul $(s+2)$ pentru g, aşadar

$$Rez(f;\infty) = -Rez(g;0) = -\frac{1}{(s+1)!}\lim_{z\to 0}[z^{s+2}g(z)]^{(s+1)}$$

$$= -\frac{1}{(s+1)!}(e^{jz})^{(s+1)}\Big|_{z=0} = -\frac{1}{(s+1)!}j^{s+1}e^{jz}\Big|_{z=0} = -\frac{j^{s+1}}{(s+1)!}.$$

3 Teorema reziduurilor

3.1. Teorema reziduurilor

Fie f o funcţie complexă, olomorfă în domeniul multiplu conex $D \subseteq \mathbb{C}$ şi γ o curbă simplă, închisă şi netedă (sau netedă pe porţiuni). Dacă f este olomorfă în interiorul curbei γ, exceptând un număr finit de singularităţi izolate (poli sau puncte singulare esenţiale) $z_1, z_2, \ldots, z_n$ şi f este continuă pe γ (în particular, curba γ este situată în D), atunci are loc egalitatea:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi j\sum_{k=1}^{n} Rez(f;z_k). \tag{3.1}$$

Demonstraţie

Întrucât punctele $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sunt izolate, putem construi cercurile $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ cu centrele în $z_1, z_2, \ldots, z_n$ şi razele $r_1, r_2, \ldots, r_n > 0$, respectiv, astfel încât discurile închise $\overline{\Delta}(z_k; r_k)$, $1 \leq k \leq n$, să fie disjuncte două câte două, iar reuniunea lor să fie inclusă în interiorul curbei (γ), vezi Fig.6; de altfel, din enunţul teoremei urmează că interiorul curbei γ, exceptând punctele $z_1, z_2, \ldots, z_n$, este inclus în D.

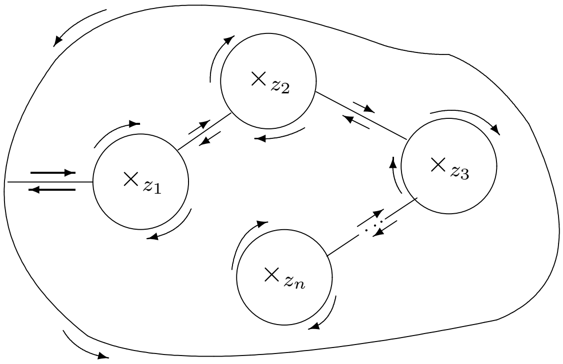


Fig.6

Din Teorema lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe (secţiunea 3.3, Cap.3) rezultă:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz. \tag{3.2}$$

Pe de altă parte, din Definiţia 2.1 primim:

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi j Rez(f; z_k). \tag{3.3}$$

Relaţiile (3.2) şi (3.3) conduc la formula (3.1) din enunţul teoremei.

3.2. Teoremă

Dacă $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *sunt numere complexe date şi* f *este o funcţie complexă, olomorfă pe domeniul* $D = \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$*, atunci are loc egalitatea:*

$$\sum_{k=1}^{n} Rez(f; z_k) + Rez(f; \infty) = 0. \tag{3.4}$$

Pentru demonstraţie, vezi [22].

Examinăm în continuare situaţia în care funcţia f are singularităţi şi pe curba (γ) care intervine în enunţul Teoremei reziduurilor 3.1 (membrul stâng al egalităţii (3.1)). În acest scop, introducem noţiunea următoare.

3.3. Valoarea principală în sens Cauchy a unei integrale complexe

Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu, $\gamma \subseteq D$ o curbă simplă, netedă sau netedă pe porţiuni şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe D. Fie $z \in \gamma$ un punct fixat, $\varepsilon > 0$ dat şi γ_ε arcul curbei (γ) care este situat în discul $\Delta(z; \varepsilon)$.

• Definiţie

Fie $g : D \setminus \{z\} \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă cu proprietatea

$$\lim_{u \to z} |g(u)| = \infty.$$

Presupunem că există şi este finită limita $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{\gamma \setminus \gamma_\varepsilon} g(u)du$. *Se numeşte* **valoare principală în sens Cauchy** *a integralei funcţiei g de-a lungul curbei γ numărul complex*

$$v.p. \int\limits_{\gamma} g(u)du = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{\gamma \setminus \gamma_\varepsilon} g(u)du.$$

• Dacă $g(u) = \dfrac{f(u)}{u - z}$, atunci valoarea principală

$$v.p. \int\limits_{\gamma} \frac{f(u)}{u - z} du = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{\gamma \setminus \gamma_\varepsilon} \frac{f(u)}{u - z} du$$

există.

În plus, dacă (γ) este o curbă închisă şi z este un punct regular al curbei (γ), atunci are loc egalitatea

$$v.p. \int\limits_{\gamma} \frac{f(u)}{u - z} du = \pi j f(z).$$

• Deseori, se scrie $\int\limits_{\gamma} g(u)du$ în loc de $v.p. \int\limits_{\gamma} g(u)du$, precizându-se în context faptul că integrala se ia în valoare principală.

3.4. Teorema semireziduurilor

Fie f o funcţie complexă şi γ o curbă simplă, închisă şi netedă astfel încât:

(i) *f este olomorfă în interiorul curbei γ cu excepţia unui număr finit de singularităţi izolate (poli sau puncte singulare esenţiale) $a_1, a_2, \ldots, a_n$;*

(ii) *f este continuă pe $\gamma \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, unde punctele $b_k \in \gamma$ sunt* **poli simpli** *pentru f, $1 \leq k \leq m$.*

Atunci are loc egalitatea

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} Rez(f; a_k) + \pi j \sum_{k=1}^{m} Rez(f; b_k), \tag{3.5}$$

integrala din membrul stâng al egalităţii fiind luată în valoare principală.

3.5. Exemplu

Să se calculeze integrala

$$I(r) = \int\limits_{|z-1|=r} \frac{1}{z} \exp\left(\frac{1}{1-z}\right) dz, \quad r > 0.$$

Rezolvare

Funcţia $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{z} \exp\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$ are două puncte singulare: $z = 0$ (pol simplu) şi $z = 1$ (punct singular esenţial izolat). Să calculăm $Rez(f; 0)$ şi $Rez(f; 1)$; avem:

$$Rez(f; 0) = \frac{\exp(1-z)}{z'}\bigg|_{z=0} = e. \tag{3.6}$$

Pentru a calcula $Rez(f; 1)$, dezvoltăm $f(z)$ în serie Laurent în jurul punctului $z = 1$. Punând $u = z - 1$, primim:

$$g(u) = f(1+u) = \frac{1}{1+u} \exp\left(-\frac{1}{u}\right)$$

$$= [1-u+u^2-u^3+\cdots+(-1)^n u^n+\ldots]\left[1 - \frac{1}{1!}\frac{1}{u} + \frac{1}{2!}\frac{1}{u^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{u^3} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{(-1)^n}{u^n} + \ldots\right].$$

Astfel,

$$Rez(f; 1) = \text{coeficientul lui } \frac{1}{u} \text{ din dezvoltarea } g(u) =$$

$$= -\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots\right);$$

deoarece

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots,$$

obţinem:

$$Rez(f;1) = 1 - e. \tag{3.7}$$

O altă metodă de calcul pentru $Rez(f;1)$ constă în aplicarea Teoremei 3.2, întrucât f este olomorfă pe $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$: are loc egalitatea $Rez(f;0)+Rez(f;1)+Rez(f;\infty) = 0$. Pe de altă parte, utilizând (2.1) rezultă

$$Rez(f;\infty) = -Rez\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right);0\right] =$$

$$= -Rez\left[\frac{1}{z}\exp\left(\frac{z}{z-1}\right);0\right] = -\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{1}{z}\exp\left(\frac{z}{z-1}\right) = -1,$$

deoarece $z = 0$ este pol simplu pentru funcţia

$$h(z) = \frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z}\exp\left(\frac{z}{z-1}\right).$$

Astfel, $Rez(f;1) = -Rez(f;0) - Rez(f;\infty) = 1 - e$.

Să aplicăm Teorema reziduurilor şi Teorema semireziduurilor.

• Dacă $r < 1$, atunci în interiorul cercului $|z-1| = r$ se află numai punctul singular $z = 1$, iar pe cercul $|z-1| = r$ nu există singularităţi; obţinem

$$I(r) = 2\pi j Rez(f;1) = 2\pi j(1-e), \quad \text{vezi (3.7)}.$$

• Dacă $r = 1$, atunci punctul singular $z = 1$ se află în interiorul cercului $|z-1| = 1$, iar polul simplu $z = 0$ se află pe acest cerc; utilizând Teorema semireziduurilor şi egalităţile (3.6), (3.7) primim:

$$I(r) = 2\pi j Rez(f;1) + \pi j Rez(f;0) = \pi j(2-e).$$

• Dacă $r > 1$, atunci ambele puncte singulare se află în interiorul cercului $|z-1| = r$; utilizând Teorema reziduurilor şi formulele (3.6), (3.7) rezultă

$$I(r) = 2\pi j[Rez(f;0) + Rez(f;1)] = 2\pi j.$$

3.6. Exemplu

Să se calculeze integrala

$$I = \int_{\gamma} \frac{z \sin \pi j z}{(z-j)(z^2+1)} dz,$$

unde (γ) este cercul de ecuaţie $|z-1-j| = 2$.

Rezolvare

Funcţia $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm j\} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{z \sin \pi j z}{(z-j)(z^2+1)} = \frac{z \sin \pi j z}{(z-j)^2(z+j)}$$

are drept singularităţi polul dublu $z = j$ şi polul simplu $z = -j$. Punctul $z = j$ se află în interiorul cercului dat deoarece $|j-1-j| = 1 < 2$, iar punctul $z = -j$ se află în exteriorul acestui cerc întrucât $|-j-1-j| = \sqrt{5} > 2$. Din Teorema reziduurilor 3.1 şi Teorema 2.5, cu $n = 2$ obţinem:

$$I = 2\pi j Rez(f; j) = 2\pi j \frac{1}{1!} \lim_{z \to j} [(z-j)^2 f(z)]'$$

$$= 2\pi j \lim_{z \to j} \left(\frac{z \sin \pi j z}{z+j} \right)' = 2\pi j \frac{(\sin \pi j z + j\pi z \cos \pi j z)(z+j) - z \sin \pi j z}{(z+j)^2} \Big|_{z=j}$$

$$= 2\pi j \frac{\pi \cdot 2j}{(2j)^2} = \pi^2.$$

În cele ce urmează vom prezenta o serie de **aplicaţii ale teoremei reziduurilor şi ale teoremei semireziduurilor la calculul unor tipuri de integrale reale**.

Desemnăm prin $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ sau $R(x,y) = \dfrac{p(x,y)}{q(x,y)}$ funcţii raţionale de una sau două variabile reale şi presupunem că polinoamele $p(x)$, $q(x)$, respectiv $p(x,y)$, $q(x,y)$ au proprietatea $(p,q) = 1$.

4 Integrale de tipul $\int_a^{a+2\pi} R(\sin x, \cos x) dx$, $a \in \mathbb{R}$ unde $q(\sin x, \cos x) \neq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$

Fie

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{p(\sin x, \cos x)}{q(\sin x, \cos x)},$$

unde $q(\sin x, \cos x) \neq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

4.1. Calculul integralei

Deoarece funcţiile sin şi cos sunt periodice de perioadă 2π, are loc egalitatea

$$I = \int_a^{a+2\pi} R(\sin x, \cos x)dx = \int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx.$$

Efectuăm substituţia $z = e^{jx}$, de unde rezultă

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \frac{z^2-1}{2jz}, \quad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$$

şi constatăm că dacă x parcurge intervalul $[a, a+2\pi]$ atunci z parcurge cercul unitate $|z| = 1$. Pe de altă parte $dz = jzdx$, deci $dx = \dfrac{1}{jz}dz$. Astfel,

$$I = \int_{|z|=1} R_1(z)dz,$$

unde

$$R_1(z) = \frac{1}{jz} R\left(\frac{z^2-1}{2jz}, \frac{z^2+1}{2z}\right).$$

Utilizând Teorema reziduurilor 3.1 obţinem următorul rezultat:

Dacă $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{p(\sin x, \cos x)}{q(\sin x, \cos x)}$, *unde* $q(\sin x, \cos x) \neq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, *atunci pentru orice* $a \in \mathbb{R}$ *fixat are loc egalitatea*

$$\int_a^{a+2\pi} R(\sin x, \cos x)dx = 2\pi j \sum_{|z_k|<1} Rez(R_1; z_k), \tag{4.1}$$

unde simbolul $\sum\limits_{|z_k|<1}$ *înseamnă că sumarea reziduurilor se efectuează relativ la toate punctele singulare (polii) funcţiei* R_1 *care îndeplinesc inegalitatea* $|z_k| < 1$, *adică sunt situaţi în discul unitate.*

• Observaţie

În mod similar se calculează integralele

$$I_1 = \int_a^{a+2\pi} R(\sin x, \cos x) \cos mx dx$$

şi

$$I_2 = \int_a^{a+2\pi} R(\sin x, \cos x) \sin mx dx,$$

$a \in \mathbb{R}$, ţinând seama de egalităţile

$$\cos mx = \frac{z^{2m}+1}{2z^m} \text{ şi } \sin mx = \frac{z^{2m}-1}{2jz^m}, \quad z = e^{jx}.$$

O altă modalitate de calcul pentru I_1 şi I_2 decurge din scrierea

$$I_1 + jI_2 = \int_a^{a+2\pi} R(\sin x, \cos x) e^{jmx} dx,$$

urmată de substituţia $e^{jx} = z$; rezultă

$$I_1 + jI_2 = \int\limits_{|z|=1} z^m R_1(z) dz,$$

care se calculează similar cu (4.1).

4.2. Exemplu

Să se calculeze integrala $I = \displaystyle\int_0^{4\pi} \frac{2+\cos x}{3\sin x + 5} dx$.

Rezolvare

Avem:

$$I = 2\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos x}{3\sin x+5} dx \overset{\exp(jx)=z}{=\!=\!=} 2 \int\limits_{|z|=1} \frac{z^2+4z+1}{z(3z^2+10jz-3)} dz.$$

Integrandul are polii simpli $z_1 = 0$, $z_2 = -j/3$ şi $z_3 = -3j$. Deoarece $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ şi $|z_3| > 1$ primim, în conformitate cu (4.1):

$$I = 4\pi j [Rez(f;0) + Rez(f;-j/3)], \quad \text{unde} \quad f(z) = \frac{z^2+4z+1}{z(3z^2+10jz-3)};$$

$$\begin{aligned} I &= 4\pi j \left[\lim_{z\to 0} z f(z) + \frac{z^2+4z+1}{z(3z^2+10jz-3)'}\Big|_{z=-j/3} \right] \\ &= 4\pi j \left(-\frac{1}{3} + \frac{8-12j}{24} \right) = 2\pi. \end{aligned}$$

5 Integrale de tipul $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$, unde $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ şi $\text{grad}q - \text{grad}p \geq 2$

5.1. Calculul integralei

Fie $r > 0$, $A(r, 0)$, $B(-r, 0)$ şi semicercul γ_r de diametru AB situat în semiplanul superior (deasupra axei Ox). Aplicăm Teorema reziduurilor 3.1 funcţiei $f(z) = R(z)$ relativ la curba γ obţinută prin reuniunea segmentului $[BA]$ cu semicercul γ_r, unde $r > 0$ este ales astfel încât toţi polii funcţiei $R(z)$, i.e. rădăcinile polinomului q, să fie situaţi în interiorul cercului $\Gamma(0; r)$, vezi Fig.7.

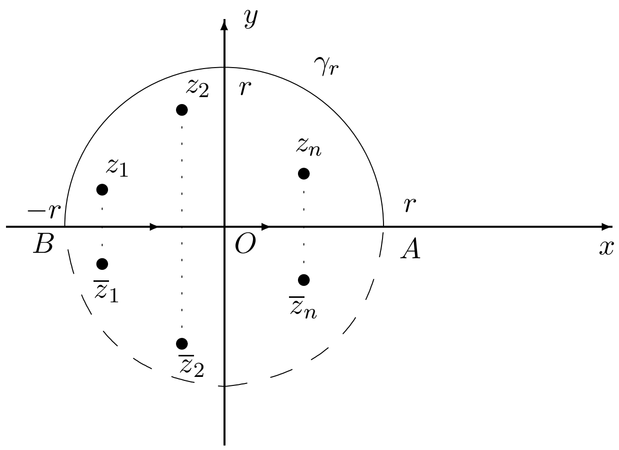


Fig.7

Obţinem:

$$\int_{\gamma} R(z)dz = 2\pi j \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} Rez(R; z_k), \tag{5.1}$$

unde suma se referă la toţi polii z_k, $1 \leq k \leq n$, ai funcţiei R situaţi deasupra axei Ox (deci având partea imaginară strict pozitivă).

Pe de altă parte, avem:

$$\int_{\gamma} R(z)dz = \int_{-r}^{r} R(x)dx + \int_{\gamma_r} R(z)dz, \tag{5.2}$$

deoarece ecuaţia segmentului $[BA]$ este $x = x,\ y = 0,\ |x| \le r \ \Leftrightarrow\ z = x;$ $-r \le x \le r.$

Din (5.1) şi (5.2) rezultă:

$$\int_{-r}^{r} R(x)dx + \int_{\gamma_r} R(z)dz = 2\pi j \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} Rez(R; z_k); \tag{5.3}$$

remarcăm că membrul drept al egalităţii (5.3) este constant relativ la valorile $r > 0$ cu proprietatea că toţi polii funcţiei R sunt situaţi în interiorul cercului $\Gamma(0; r)$.

Să evaluăm a doua integrală din membrul stâng al relaţiei (5.3). Utilizând rezultatul din secţiunea 2.2, Cap.3 privind mărginirea superioară a integralei complexe primim:

$$\left| \int_{\gamma_r} R(z)dz \right| \le M(r)L(\gamma_r) = \pi r M(r), \tag{5.4}$$

unde $M(r) = \max\{|R(z)| :\ z \in \gamma_r\} = \max\{|R(re^{jt}| :\ 0 \le t \le \pi\}$. Deoarece $\operatorname{grad} q - \operatorname{grad} p \ge 2$ rezultă că

$$\lim_{z\to\infty} zR(z) = \lim_{z\to\infty} z\frac{p(z)}{q(z)} = 0,$$

ceea ce implică

$$\lim_{r\to\infty} r|R(re^{jt})| = 0,\ \forall\ t \in [0, \pi],$$

deci

$$\lim_{r\to\infty} rM(r) = 0;$$

de aici şi din (5.4) deducem:

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} R(z)dz = 0. \tag{5.5}$$

Trecând acum la limită în egalitatea (5.3) pentru $r \to \infty$ şi utilizând (5.5) obţinem următorul rezultat:

Dacă $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ *este o funcţie raţională astfel încât* $\operatorname{grad} q \ge 2 + \operatorname{grad} p$ *şi* $q(x) \ne 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, *atunci are loc egalitatea:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi j \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} Rez(R; z_k), \tag{5.6}$$

unde suma din membrul drept se referă la toţi polii funcţiei raţionale R *situaţi în semiplanul superior.*

5.2. Exemplu

Să se calculeze $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+3}{(x^2+1)^2(x^2-2x+2)}dx.$

Rezolvare

Fie $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm j, 1 \pm j\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{2z+3}{(z^2+1)^2(z^2-2z+2)}$. Polii funcţiei raţionale f sunt $\pm j$ (poli dubli) şi $1 \pm j$ (poli simpli). Deoarece $\operatorname{Im}(-j) < 0$ şi $\operatorname{Im}(1-j) < 0$, din (5.6) şi din secţiunile 2.5 şi 2.6 primim:

$$I = 2\pi j[Rez(f; j) + Rez(f; 2j)]$$

$$= 2\pi j \left\{ \frac{1}{1!} \lim_{z \to j} [(z-j)^2 f(z)]' + \frac{2z+3}{(z^2+1)^2(z^2-2z+2)'}\Big|_{z=1+j} \right\}$$

$$= 2\pi j \left[\left(\frac{2z+3}{(z+j)^2(z^2-2z+2)} \right)' \Big|_{z=j} + \frac{2(1+j)+3}{(2j+1)^2(2+2j-2)} \right]$$

$$= \left(\frac{61\pi}{50} + \frac{26\pi j}{25} \right) - \left(\frac{7\pi}{25} + \frac{26\pi j}{25} \right) = \frac{47\pi}{50}.$$

5.3. Generalizare

Dacă funcţia complexă f este olomorfă pe semiplanul $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, exceptând polii $z_1, z_2, \ldots, z_n$, f este continuă pe axa reală $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$ şi f satisface condiţia $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} zf(z) = 0$, atunci are loc egalitatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} Rez(f; z_k) \tag{5.7}$$

5.4. Exemplu

Să se calculeze $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x^2/2)}{x^2-5x+7-j}dx.$

Rezolvare

Funcţia $f(z) = \dfrac{\sin(\pi z^2/2)}{z^2 - 5z + 7 - j}$ are polii simpli $z_1 = 3 + j$ şi $z_2 = 2 - j$. Din (5.7) obţinem:

$$I = 2\pi j Rez(f; 3 + j) = 2\pi j \frac{\sin(4 + 3j)\pi}{2(3 + j) - 5} = 2\pi j \frac{\sin(3\pi j)}{1 + 2j}$$

$$= \frac{2\pi j}{5} j(1 - 2j) \operatorname{sh} 3\pi = \frac{2\pi}{5}(2j - 1) \operatorname{sh} 3\pi.$$

6 Integrale de tipul $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{j\lambda x}dx$, unde $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, grad$q$ > grad$p$ şi $q(x) \neq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ sau q are în $\mathbb{R}$ numai rădăcini simple

6.1. Calculul integralei în cazul $q(x) \neq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ şi $\lambda > 0$

Aplicăm Teorema reziduurilor 3.1 funcţiei complexe $f(z) = R(z)e^{j\lambda z}$ relativ la curba $\gamma = [BA] \cup \gamma_1$ din Figura 7. Obţinem următorul rezultat:

Dacă $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ *este o funcţie raţională astfel încât* grad$q$ > grad$p$ *şi* $q(x) \neq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, *iar* $\lambda > 0$ *este un număr dat, atunci are loc egalitatea:*

$$\text{(6.1)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{j\lambda x}dx = 2\pi j \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} Rez[R(z)e^{j\lambda z}; z_k],$$

unde suma din membrul drept se referă la toate rădăcinile polinomului q (i.e. polii funcţiei f) situaţi în semiplanul superior.

6.2. Calculul integralei în cazul când polinomul q are în $\mathbb{R}$ numai rădăcini reale simple şi $\lambda > 0$

Se aplică Teorema semireziduurilor 3.4 curbei (γ) din secţiunea 6.1; obţinem următorul rezultat:

Dacă $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ *este o funcţie raţională astfel încât* grad$q$ > grad$p$ *şi polinomul q are în* $\mathbb{R}$ *numai rădăcinile simple* $b_1, b_2, \ldots, b_m$, *iar* $\lambda > 0$ *este un* *număr dat, atunci*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{j\lambda x}dx = 2\pi j \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} Rez[R(z)e^{j\lambda z}; z_k]+ \tag{6.2}$$

$$+\pi j \sum_{k=1}^{m} Rez[R(z)e^{j\lambda z}; b_k]$$

unde prima sumă din membrul drept al egalităţii (6.2) se referă la toate rădăcinile polinomului q situate în semiplanul superior, iar integrala se ia în valoare principală.

6.3. Calculul integralei în situaţia $\lambda < 0$

Punem $x = -t$ şi primim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{j\lambda x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} R(-t)e^{j\mu t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} R_1(t)e^{j\mu t}dt,$$

unde $\mu = -\lambda > 0$ şi $R_1(x) = R(-x)$. Se aplică formulele (6.1) sau (6.2) pentru R_1 în loc de R şi μ în loc de λ.

6.4. Calculul integralelor de tipul $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos\lambda x dx$ şi $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\lambda x dx$

Notând

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos\lambda x dx \quad \text{şi} \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\lambda x dx,$$

avem

$$I = I_1 + jI_2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{j\lambda x}dx,$$

care se calculează cu formulele (6.1) sau (6.2); în final $I_1 = \operatorname{Re} I$ şi $I_2 = \operatorname{Im} I$.

6.5. Exemplu

Să se calculeze $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{j\pi x}}{(x-1)(x^2+4x+5)}dx.$

Rezolvare

Funcţia $f : \mathbb{C} \setminus \{1, -2 \pm j\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{ze^{j\pi z}}{(z-1)(z^2+4z+5)}$ are drept singularităţi polul real simplu $z_1 = 1$ şi polii complecşi simpli $z = -2 \pm j$. Din (6.2) cu $\lambda = \pi > 0$ primim:

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi j Rez(f; -2+j) + \pi j Rez(f; 1) \\
&= \frac{2\pi j z e^{j\pi z}}{(z-1)(z^2+4z+5)'}\Big|_{z=-2+j} + \frac{\pi j z e^{j\pi z}}{(z-1)'(z^2+4z+5)}\Big|_{z=1} \\
&= \frac{2\pi j(-2+j)e^{-2\pi j}e^{-\pi}}{(j-3)\cdot 2j} + \frac{\pi j e^{\pi j}}{10} = \frac{\pi}{10\exp\pi}[7 - j(1+\exp\pi)].
\end{aligned}$$

6.6. Aplicaţie

Să se calculeze integrala

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2-a^2}dx, \quad a \in \mathbb{R},$$

integrală care apare în teoria cuantică a difuziei.

Rezolvare

Avem

$$I(a) = \frac{1}{2}\int_\infty^\infty \frac{x\sin x}{x^2-a^2}dx,$$

deoarece integrandul este par (integrala se ia în sensul valorii principale); mai departe, primim:

$$\begin{aligned}
I(a) &= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{xe^{jx}}{x^2-a^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{j}\int_{-\infty}^\infty \frac{xe^{jx}}{x^2-a^2}dx,
\end{aligned}$$

întrucât $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\cos x}{x^2-a^2}dx = 0$ (integrandul este impar). Aplicând formula (6.2) obţinem:

$$\begin{aligned}
I(a) &= \frac{1}{2j}\pi j\left[Rez\left(\frac{ze^{jz}}{z^2-a^2}; a\right) + Rez\left(\frac{ze^{jz}}{z^2-a^2}; -a\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{ze^{jz}}{2z}\Big|_{z=a} + \frac{ze^{jz}}{2z}\Big|_{z=-a}\right] = \frac{\pi}{4}(e^{ja}+e^{-ja}) = \frac{\pi}{2}\cos a
\end{aligned}$$

6.7. Generalizare

Dacă f este o funcţie complexă olomorfă în semiplanul $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, exceptând polii $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, f este continuă pe frontiera acestui semiplan $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$ şi f îndeplineşte condiţia $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} f(z) = 0$, iar $\lambda > 0$ este dat, atunci are loc egalitatea:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{j\lambda x}dx = 2\pi j \sum_{k=1}^{\infty} Rez(f; a_k). \tag{6.3}$$

6.8. Exemplu

Să se calculeze $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{x+j}}{x^2-x+1+j} e^{2jx}dx$, luând $\sqrt{j} = e^{\pi j/4}$.

Rezolvare

Funcţia $f(z) = \dfrac{\sqrt{z+j}}{z^2 - z + 1 + j} e^{2jz}$, unde pentru radical se alege determinarea principală, are polii simpli $z_1 = j$, $z_2 = 1 - j$. Din (6.3) primim:

$$I = 2\pi j Rez(f; j) = 2\pi j \frac{\sqrt{z+j}\,e^{2jz}}{2z-1}\Big|_{z=j} = 2\pi j \frac{\sqrt{2j} \cdot e^{-2}}{2j-1} = \frac{2\pi}{5e^2}(3 + j).$$

7 Integrale de tipul $\int_0^{\infty} x^{\alpha} R(x)dx$, unde $\alpha \in (-1, \infty) \setminus \mathbb{Z}$; $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, $1 + \alpha + \operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$

7.1. Calculul integralei în ipoteza $q(x) \neq 0$, $\forall\ x \geq 0$

Se aplică Teorema reziduurilor 3.1 curbei γ din Fig.8,

$$\gamma = \overset{\frown}{EA} \cup [AB] \cup \overset{\frown}{BD} \cup [DE].$$

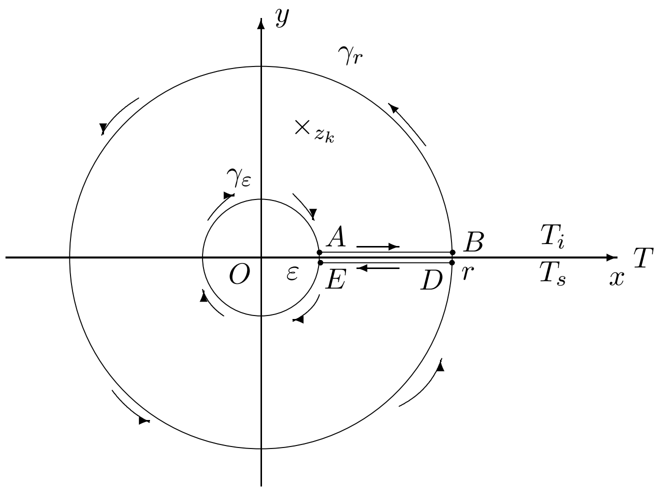


Fig.8

Alegem ε şi r astfel încât toţi polii z_k, $1 \leq k \leq n$, ai funcţiei $R(z)$ să fie situaţi în interiorul curbei γ (practic în coroana circulară $U(0;\varepsilon,r)$, deci $0 < \varepsilon < |z_k| < r$). Are loc egalitatea

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} Rez(f;z_k). \tag{7.1}$$

Pe de altă parte, avem:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{[AB]} f(z)dz + \int_{\gamma_r} f(z)dz + \int_{[DE]} f(z)dz - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz, \tag{7.2}$$

unde $\gamma_r = \Gamma(0;r)$ şi $\gamma_\varepsilon = \Gamma(0;\varepsilon)$.

Să evaluăm integralele din membrul drept al relaţiei (7.2).

• Pe segmentul $[AB]$, a cărui ecuaţie este $z = xe^{0\cdot j}$, $\varepsilon \leq x \leq r$, avem

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z} = e^{\alpha(\ln x + j\cdot 0)} = x^\alpha,$$

deci:

$$\int_{[AB]} f(z)dz = \int_\varepsilon^r f(x)dx = \int_\varepsilon^r x^\alpha R(x)dx. \tag{7.3}$$

• Pe segmentul $[DE]$, de ecuaţie $z = xe^{2\pi j}$, $x \in [\varepsilon, r]^-$ (adică x variază de la r la ε), avem

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z} = e^{\alpha(\ln x + 2\pi j)} = x^\alpha e^{2\pi j\alpha},$$

prin urmare:

$$\int_{[DE]} f(z)dz = -e^{2\pi j\alpha} \int_\varepsilon^r x^\alpha R(x)dx. \tag{7.4}$$

Se arată că integralele pe cercurile γ_r şi γ_ε din (7.2) tind spre 0 dacă $r \to \infty$ respectiv $\varepsilon \to 0$. Astfel, din (7.1)-(7.4) primim:

Dacă $\alpha > -1$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$ este un număr real dat, iar $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ este o funcţie raţională cu proprietăţile $q(x) \neq 0$, $\forall\ x \geq 0$ şi $1 + \alpha + \mathrm{grad}p < \mathrm{grad}q$, atunci are loc egalitatea

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x)dx = \frac{2\pi j}{1 - e^{2\pi j\alpha}} \sum_{k=1}^n Rez(z^\alpha R(z); z_k), \tag{7.5}$$

unde $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sunt rădăcinile polinomului q (i.e. polii funcţiei raţionale $R(z)$).

7.2. Calculul integralei în ipoteza că funcţia raţională R are pe semiaxa reală pozitivă doar poli simpli

Dacă $\alpha \in (-1, \infty) \setminus \mathbb{Z}$ este un număr real dat, iar $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ este o funcţie raţională cu proprietăţile:

• $1 + \alpha + \mathrm{grad}p < \mathrm{grad}q$

• *ecuaţia $q(z) = 0$ are rădăcinile $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ şi* **rădăcinile simple** *b_k, $1 \leq k \leq m$, cu $b_k \in \mathbb{R}$, $b_k > 0$,*

atunci are loc egalitatea

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x)dx = \frac{\pi j}{1 - e^{2\pi j\alpha}} \left[2\sum_{k=1}^n Rez(z^\alpha R(z); z_k) + \sum_{k=1}^m Rez(z^\alpha R(z); b_k^+) + \sum_{k=1}^m Rez(z^\alpha R(z); b_k^-) \right], \tag{7.6}$$

unde

• $b_k^+ = b_k e^{j\cdot 0}$ *(i.e. $b_k^+ \in T_i$)*

• $b_k^- = b_k e^{j\cdot 2\pi}$ *(i.e. $b_k^- \in T_s$),*

iar integrala din membrul stâng se ia în valoare principală (Cauchy).

7.3. Calculul integralelor de forma $\int_a^b \left(\frac{b-x}{x-a}\right)^\alpha R(x)dx$, unde $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$, $a < b$

Efectuăm schimbarea de variabilă $t = \frac{b-x}{x-a}$; rezultă

$$x = \frac{b+at}{1+t}, \quad dx = -\frac{b-a}{(1+t)^2}dt$$

şi obţinem

$$\int_a^b \left(\frac{b-x}{x-a}\right)^\alpha R(x)dx = \int_0^\infty t^\alpha R_1(t)dt,$$

unde

$$R_1(t) = \frac{b-a}{(1+t)^2} R\left(\frac{b+at}{1+t}\right),$$

adică integrala dată revine la o integrală de tipul celor descrise în secţiunile 7.1 şi 7.2.

7.4. Exemplu

Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt[4]{(1-x)(1+x)^3}}{1+x^2}dx.$$

Rezolvare

Avem

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1+x}{1+x^2}dx.$$

Punem $\frac{1-x}{1+x} = t$, de unde rezultă $x = \frac{1-t}{1+t}$ şi $dx = \frac{-2}{(1+t)^2}dt$ (secţiunea 7.3). Astfel,

$$I = 2\int_0^\infty \sqrt[4]{t} \cdot \frac{1}{(1+t)(1+t^2)}dt;$$

luăm $\alpha = \frac{1}{4}$ în (7.5) şi obţinem

$$I = \frac{4\pi j}{1-e^{\pi j/2}}[Rez(f;-1) + Rez(f;j) + Rez(f;-j)], \tag{7.7}$$

$$f(z) = \frac{z^{1/4}}{(1+z)(1+z^2)}.$$

Prin calcul direct obţinem reziduurile în polii simpli -1 şi $\pm j$:

- $Rez(f;-1) = \left.\dfrac{z^{1/4}}{1+z^2}\right|_{z=-1} = \dfrac{1}{2}(-1)^{1/4} = \dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{4}\ln(-1)} = \dfrac{1}{2}e^{\pi j/4} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+j)$

- $Rez(f;j) = \left.\dfrac{z^{1/4}}{2z(1+z)}\right|_{z=j} = \dfrac{j^{1/4}}{2j(1+j)} = \dfrac{-1-j}{4}e^{(\ln j)/4}$

  $= \dfrac{-1-j}{4}e^{j\pi/8} = \dfrac{-1-j}{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + j\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$

- $Rez(f;-j) = \dfrac{-1+j}{4}e^{\frac{1}{4}\ln(-j)} = \dfrac{-1+j}{4}\left(\cos\dfrac{3\pi}{8} + j\sin\dfrac{3\pi}{8}\right).$

Înlocuind aceste reziduuri în (7.7) şi ţinând seama de egalităţile $\sin\dfrac{\pi}{8} = \cos\dfrac{3\pi}{8}$ şi $\cos\dfrac{\pi}{8} = \sin\dfrac{3\pi}{8}$, primim, în final:

$$I = \frac{4\pi j}{1-j}\frac{1+j}{4}\left(\sqrt{2} - 2\cos\frac{\pi}{8}\right) = \pi\left(2\cos\frac{\pi}{8} - \sqrt{2}\right) = \pi(\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2}).$$

7.5. Aplicaţie

Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{x-u}dx,$$

unde $u \in (-1,1)$ este fixat.

Observaţie

Această integrală apare în aerodinamică, la studiul mişcării subsonice a unui profil subţire, [15].

Rezolvare

Putem $t = \dfrac{1-x}{1+x}$, de unde rezultă $x = \dfrac{1-t}{1+t}$ şi $dx = \dfrac{-2}{(1+t)^2}dt$, aşa încât

$$I = 2\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{(1+t)[1-u-t(1+u)]}dt;$$

utilizând formula (7.6) cu $\alpha = 1/2$, primim:

$$I = 2\frac{\pi j}{1-e^{\pi j}}[2Rez(f;-1) + Rez(f;b^+) + Rez(f;b^-)], \quad b = \frac{1-u}{1+u}. \tag{7.8}$$

Mai departe, obţinem:

- $Rez(f;-1) = \dfrac{z^{1/2}}{1-u-z(1+u)}\Big|_{z=-1} = \dfrac{(-1)^{1/2}}{2} = \dfrac{\exp\left[\frac{1}{2}(\ln 1 + j\pi)\right]}{2} = \dfrac{j}{2}$

- $Rez(f;b^+) = \dfrac{z^{1/2}}{-(1+u)(1+z)}\Big|_{z=b^+} = \dfrac{(b^+)^{1/2}}{-2}$
$$= -\frac{1}{2}\exp\left[\frac{1}{2}(\ln b + j\cdot 0)\right] = \frac{-\sqrt{b}}{2}$$

- $Rez(f;b^-) = \dfrac{(b^-)^{1/2}}{-2} = -\dfrac{1}{2}\exp\left[\dfrac{1}{2}(\ln b + j\cdot 2\pi)\right] = -\dfrac{1}{2}\sqrt{b}e^{j\pi} = \dfrac{\sqrt{b}}{2}$,

iar din (7.8) rezultă $I = -\pi$.

8 Probleme

Enunţuri

1. *Utilizând Teorema reziduurilor sau Teorema semireziduurilor, să se calculeze următoarele integrale:*

(i) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{z^n}{1+z}e^{1/z}dz, \ n \in \mathbb{N}$

(ii) $\displaystyle\int\limits_{|z-j|=r} \frac{\cos(jz)}{z(z+1)^3}dz, \ r > 0, \ r \neq \sqrt{2}$

(iii) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{z^n(z-a)}{z+b}, \ a \in \mathbb{C}, \ b \in \mathbb{C}^*, \ n \in \mathbb{Z}$

(iv) $\displaystyle\int\limits_{|z|=r} \frac{1}{z+1}e^{-1/z}dz, \ r > 0$

(v) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin(j/z)}{z^2(z^{30}-1)}dz$

(vi) $\displaystyle\int\limits_{|z|=r} \frac{z^n e^{1/z}}{1+z}dz,\ n\in\mathbb{N},\ r>0$

(vii) $\displaystyle\int\limits_{|z|=\pi} (1+z)\left(\exp\frac{1}{z}+\sin\frac{1}{z-1}+\cos\frac{1}{z-2}\right)dz$

(viii) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z}\mathrm{sh}\,\frac{1}{z-1}dz$

(ix) $\displaystyle\int\limits_{T} \frac{2z+1}{z^2-3z+3+j}dz$, *unde* T *este triunghiul având vârfurile de afixe* $0,\ 1+j$ *şi* $5-4j$

(x) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=\ln 2} \frac{z^{2n}}{(z+1)^n}dz,\ n\in\mathbb{Z}$

(xi) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=r} \frac{z}{z-1}\sin\frac{1}{z+1}dz,\ r>0$

(xii) $\displaystyle\int\limits_{|z|=\pi} \frac{\mathrm{tg}\,z}{z^2}dz$ **(xiii)** $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{tg}\,\pi z}{(z-1)^2}dz$ **(xiv)** $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{ctg}\,\pi z}{2z+1}dz$

2. *Să se calculeze următoarele integrale reale:*

(i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{3+\cos x}{7\sin x+25}dx$ **(ii)** $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{1+\sin x}{2-\cos x}dx$

(iii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{3\pi} \frac{\sin^2 nx}{p^2-2p\cos x+1}dx,\ n\in\mathbb{N},\ p\in\mathbb{R},\ p\neq\pm 1$

(iv) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 10x}{17-8\cos x}dx$ **(v)** $\displaystyle\int_{2\pi}^{8\pi} \frac{\cos^2 4x}{5-4\cos 2x}dx$

(vi) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} (1+\sin x)^n \sin nx dx,\ n\in\mathbb{N}$

(vii) $\displaystyle\int_{5\pi}^{7\pi} (1-\sin x)^{99}\sin(99x)dx$

(viii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2nx}{5 - 4\sin x} dx$

(ix) $\displaystyle\int_{-\pi}^{3\pi} (1 + \cos x)^{2n} \cos nx dx, \ n \in \mathbb{N}$

(x) $\displaystyle\int_{0}^{4\pi} (1 - \sin x)^{142} \sin(71x) dx$

3. *Să se calculeze integralele de mai jos:*

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 5x + 2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)^2} dx$ **(ii)** $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 + 1} dx$

(iii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx, \ n \in \mathbb{N}^*, \ a > 1$ **(iv)** $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx$

(v) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)} dx$ **(vi)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^6 + 1} dx$

(vii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x + 3}{(x^2 + 2x + 5)^3} dx$ **(viii)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n} + 1} dx$

(ix) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4jx - 5)^2} dx$ **(x)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{jx^2 - (j + 1)x + 1}{(x^2 - 2j)(x^2 + x + j + 1)} dx$

(xi) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos \pi x}{(x^2 + 2j)^2} dx$

4. *Să se calculeze următoarele integrale:*

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{jx}}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} dx$ **(ii)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\pi x}}{x^2 + 4x + 8} dx$

(iii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x(x^4 + 4)} dx$ **(iv)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^3 + 6x - 20} dx$

(v) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} dx$ **(vi)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jx}}{(x^2 + 4jx - 5)^2} dx$

(vii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(2x^2 - 2jx - 1)^2} dx$

5. *Să se calculeze integralele:*

(i) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^3 + 8} dx$ **(ii)** $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x^2 - 2x + 2)(1 - x)} dx$

(iii) $\displaystyle\int_{3}^{7} \frac{\sqrt[5]{(3 - x)^4(7 - x)}}{(x - 2)^3} dx$

(iv) $\dfrac{1-x}{1+x}\left(\sqrt[5]{\dfrac{x}{1-x}}\right)^2 dx$ **(v)** $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^3+1}dx$

6. *Să se demonstreze egalităţile:*

(i) $\displaystyle\int_0^{\infty}\cos(x^n)dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{2n},\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\infty}\sin(x^n)dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{2n},\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$

7. *Aplicând Teorema reziduurilor funcţiei* $f(z)=\dfrac{1}{z^2}\operatorname{ctg}\pi z$ *pe cercurile* $|z|=s+\dfrac{1}{2}$, $s\in\mathbb{N}$, *să se arate că* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

8. *Utilizând Teorema reziduurilor pentru funcţia* $f(z)=\dfrac{1}{z^2\sin\pi z}$ *pe cercurile* $|z|=s+\dfrac{1}{2}$, $s\in\mathbb{N}$, *să se demonstreze egalitatea*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

Soluţii. Indicaţii. Răspunsuri

1. (i) $I_n=2\pi jRez(f;0)+\pi jRez(f;-1)=(-1)^n\pi j\left[2\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}-\frac{1}{e}\right]$;

(ii) 0, dacă $r\in(0,1)$; πj, dacă $r=1$;
$2\pi j$, dacă $r\in\left(1,\sqrt{2}\right)$; $\dfrac{\pi j}{2}\left(3e-\dfrac{1}{e}+4\right)$, dacă $r>\sqrt{2}$;

(iii) • Dacă $n\geq 0$, atunci $I=2(-1)^{n+1}\pi j(a+b)b^n$.

• Dacă $n=-1$, atunci $I=2\pi j$ pentru $|b|<1$; $I=\pi j\left(1-\dfrac{a}{b}\right)$ pentru $|b|=1$; $I=-2\pi ja/b$, pentru $|b|>1$.

• Dacă $n\leq -2$, atunci $I=0$ pentru $|b|<1$; $I=(-1)^n(a+b)b^n$ pentru $|b|=1$; $I=2\pi j(-1)^n(a+b)b^n$ pentru $|b|>1$.

(iv) $I=2\pi j(1-e)$, dacă $r\in(0,1)$; $I=\pi j(2-e)$, dacă $r=1$;
$I=2\pi j$, dacă $r>1$.

(v) $I=-2\pi jRez(f;\infty)=0$;

(vi) De exemplu, pentru $r>1$, $I=2\pi j(-1)^n\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$;

(vii) $2\pi j$; **(viii)** 0;

(ix) $2\pi j Rez(j; 2-j) + \pi j Rez(j; 1+j) = \dfrac{\pi j}{5}(19+8j)$;

(x) 0, dacă $n \leq 0$; $2\pi j(-1)^{n+1}C_{2n}^{n+1}$ dacă $n \geq 1$.

(xi) De exemplu, dacă $r = 2$, $I = \pi j\left(2 - \sin\dfrac{1}{2}\right)$.

(xii) $1 - 8\pi^{-2}$; **(xiii)** $2j\left(\pi^2 - \dfrac{1936}{225}\right)$; **(xiv)** $4j/3$.

2. **(i)** $\dfrac{\pi}{4}$; **(ii)** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$;

(iii) $2\pi\dfrac{1-p^{2n}}{1-p^2}$, dacă $|p| < 1$; $2\pi\dfrac{p^{2n}-1}{p^{2n}(p^2-1)}$, dacă $|p| > 1$;

(iv) $\dfrac{\pi}{15}(1+4^{-20})$; **(v)** $\dfrac{17\pi}{16}$;

(vi) 0, pentru n par; $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi \cdot 2^{1-n}$, pentru n impar;

(vii) $\pi \cdot 2^{-98}$; **(viii)** $\pi(-1)^n \cdot 2^{1-2n} \cdot 3^{-1}$;

(ix) $I = 2\mathrm{Re}\displaystyle\int_0^{2\pi}(1+\cos x)^{2n}e^{jnx} \overset{e^{jx}=z}{=\!=\!=}$

$$2\mathrm{Re}\int\limits_{|z|=1}\frac{(z+1)^{4n}}{2^{2n}z^{2n}}\cdot z^n\frac{dz}{jz} = 2\cdot 2\pi\cdot 2^{-2n}\mathrm{Re}\left\{Rez\left[\frac{(z+1)^{4n}}{z^{n+1}};0\right]\right\}$$

$$= \pi\cdot 2^{2-2n}\frac{1}{n!}[(z+1)^{4n}]^{(n)}\Big|_{z=0} = \pi\cdot\frac{4}{2^{2n}n!}C_{4n}^{n}n! = \frac{4\pi C_{4n}^{n}}{2^{2n}}$$

(x) $\pi \cdot C_{284}^{71} \cdot 2^{-282}$.

3. **(i)** $7\pi/72$; **(ii)** $\pi\sqrt{3}/6$;

(iii) Avem:

$$I_n = \int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{1}{2}2\pi j Rez\left[\frac{1}{(z^2+a^2)^n};aj\right]$$

$$= \frac{\pi j}{(n-1)!}\lim_{z\to a_j}[(z+aj)^{-n}]^{(n-1)}$$

$$= \frac{\pi j}{(n-1)!}[-n(-n-1)\ldots(-n-n+1+1)(z+aj)^{-2n+1}]\Big|_{z=aj}$$

$$= \frac{\pi(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(2a)^{2n-1}}.$$

Integrala dată este

$$I_n + (1-a^2)I_{n+1} = \frac{\pi n(2n-2)!}{2^{2n}a^{2n+1}(n!)^2}(2n-1+a^2).$$

(iv) $\pi/8$; **(v)** $-2\pi/5$; **(vi)** $4\pi/3$; **(vii)** $3\pi/128$;
(viii) $\dfrac{\pi}{n}\text{cosec}\dfrac{2m+1}{2n}\pi$; **(ix)** 0;
(x) $2\pi j[Rez(f;1+j)+Rez(f;-1+j)]=\dfrac{\pi}{26}(6+17j)$;
(xi) $2\pi jRez(f;-1+j)=\dfrac{\pi^2}{4}(1+j)\text{sh}\,\pi$.
4. **(i)** $\dfrac{\pi j}{18e^2}(e+2)$; **(ii)** $\dfrac{\pi}{2}e^{-2\pi}$; **(iii)** $\dfrac{\pi}{8}(1+e^{-\pi})$;
(iv) $\dfrac{\pi}{9}[(\cos 1+7\sin 1)e^{-3}-2\sin 2)$; **(v)** $\pi\dfrac{e+2}{36e^2}$;
(vi) 0; **(vii)** $\dfrac{\pi}{e}(\sin 1-\cos 1)$.
5. **(i)** $\left(6\sqrt[3]{2}\sin\dfrac{4\pi}{9}\right)^{-1}$; **(ii)** $\dfrac{\pi}{2}\left(\sqrt{2+2\sqrt{2}}-2\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$;
(iii) $\dfrac{32\pi\sqrt[5]{5}}{625}\text{cosec}\dfrac{\pi}{5}$;
(iv) Substituind $\dfrac{x}{1-x}=t$, obţinem

$$I=\int_0^\infty\frac{t^{2/5}}{(2t+1)(t+1)^2}dt=\frac{2\pi j}{1-\exp(4\pi j/5)}\left[Rez\left(f;-\frac{1}{2}\right)+Rez(f;-1)\right],$$

unde $f(z)=z^{2/5}(2t+1)^{-1}(t+1)^{-2}$. Avem

$$Rez\left(f;-\frac{1}{2}\right)=2^{3/5}e^{2\pi j/5}$$

şi

$$Rez(f;-1)=[z^{2/5}/(2z+1)]'\Big|_{z=-1}=\frac{8}{5}e^{-3\pi j/5}.$$

În final, utilizând relaţia $\dfrac{\exp(j\alpha)}{1-\exp(2j\alpha)}=\dfrac{j}{2}\text{cosec}\alpha$, rezultă

$$I=\frac{\pi(8-5\sqrt[5]{8})}{5\sin\dfrac{2\pi}{5}};$$

(v) $\pi/3$.
6. Vezi [22], p.165-166.
7. Se poate consulta [22], p.167-168.
8. Vezi [22], p.167-168.

Partea II

Transformări integrale şi discrete

Capitolul 1

Noţiuni de teoria semnalelor

1 Spaţii de funcţii şi spaţii de şiruri fundamentale

Enumerăm succint un set de spaţii de funcţii şi de şiruri studiate în cadrul analizei matematice. Notăm prin K mulţimea numerelor reale sau mulţimea numerelor complexe ($K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) şi prin I un interval (cu interior nevid) al axei reale. Dacă X şi Y sunt mulţimi date, notăm prin Y^X mulţimea funcţiilor $f : X \to Y$.

1.1. Spaţiile $C^s(I)$, $s \in \mathbb{N}$

Fie $C(I)$ mulţimea funcţiilor continue $f : I \to K$. Dacă $s \geq 1$ este un număr întreg, desemnăm prin $C^s(I)$ mulţimea funcţiilor $f : I \to K$ care au derivate continue până la ordinul s inclusiv (i.e. $f^{(k)} \in C(I)$, $0 \leq k \leq s$); punem $C^0(I) = C(I)$; pentru $s \in \mathbb{N}$, spunem că o funcţie $f : I \to K$ este de **clasă** C^s **pe** I dacă $f \in C^s(I)$.

În cazul $s = 1$, funcţiile din $C^1(I)$ se numesc şi **funcţii netede**; mai general, o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ se numeşte **netedă pe porţiuni** sau **de clasă** C^1 **pe porţiuni** dacă f' este continuă pe orice subinterval mărginit al lui I cu excepţia unui număr finit de puncte în care f are derivate laterale finite.

O funcţie $f : I \to K$ este **indefinit (infinit) derivabilă** (sau este de clasă C^∞ pe I) dacă f este de clasă C^s pe I, $\forall\ s \in \mathbb{N}$.

Generalizare: funcţii de mai multe variabile reale

Dacă $E \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă şi nevidă, definim spaţiile $C^s(E)$, $s \in \mathbb{N}$, respectiv $C^\infty(E)$, drept mulţimea funcţiilor $f : E \to K$ care au derivate parţiale continue pe E până la ordinul s inclusiv, respectiv au derivate parţiale continue de orice ordin pe E.

1.2. Spaţiile $L^p(I)$

Fie $p > 0$ un număr real dat. Desemnăm prin $L^p(I)$ mulţimea funcţiilor $f : I \to K$ cu proprietatea că $|f|^p$ este o funcţie integrabilă, adică $\int_I |f(t)|^p dt < \infty$ (i.e.: integrala $\int_I |f(t)|^p dx$ există şi este finită).

În cazul $p = 2$ obţinem spaţiul $L^2(I)$ al funcţiilor "**de pătrat integrabil**" pe I, adică $\int_I |f(t)|^2 dt < \infty$, iar pentru $p = 1$ spaţiul $L^1(I)$ este spaţiul funcţiilor **absolut integrabile pe** I, i.e. $\int_I |f(t)| dt < \infty$.

Spaţiul $L^\infty(I)$

O funcţie $f : I \to K$ se numeşte **esenţial mărginită** dacă f este mărginită a.p.t. pe I (adică f este mărginită în afara unei mulţimi de măsură nulă). Notăm cu $L^\infty(I)$ spaţiul funcţiilor esenţial mărginite.

1.3. Spaţii de funcţii cu suport compact

Dacă $f : I \to K$ este o funcţie dată, numim **suportul** funcţiei f aderenţa (închiderea) mulţimii punctelor din I pe care f ia valori nenule:

$$\mathrm{supp} f = \overline{\{x \in I : \ f(x) \neq 0\}}.$$

Notăm cu $C_0^s(I)$ mulţimea funcţiilor de clasă $C^s(I)$, $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, care au **suportul compact** (adică mărginit).

Un caz remarcabil este $s = \infty$ şi $I = \mathbb{R}$, situaţie în care se obţine spaţiul $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R})$, numit **spaţiul standard al funcţiilor-test**, cu rol esenţial în teoria distribuţiilor; astfel o funcţie $\varphi : \mathbb{R} \to K$ este o *funcţie-test standard* dacă şi numai dacă φ este indefinit derivabilă şi are suport compact; exemplul clasic corespunzător spaţiului $\mathcal{D}$ este aşa-numita "funcţie-scufiţă" $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \exp \dfrac{1}{t^2 - 1}$, dacă $|t| < 1$ şi $\varphi(t) = 0$, dacă $|t| \geq 1$, al cărei grafic este redat în Fig.1; în acest caz, $\mathrm{supp}\varphi = [-1, 1]$.

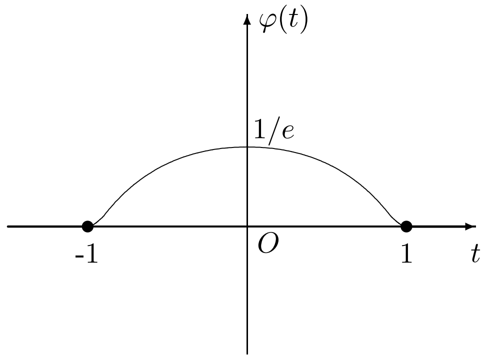


Fig.1. Funcţia scufiţă

Cazul $\mathbb{R}^n$

Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă nevidă şi $\varphi : A \to \mathbb{R}$, definim similar suportul funcţiei φ:

$$\mathrm{supp}\varphi = \overline{\{x \in A : \ \varphi(x) \neq 0\}}$$

şi notăm prin $C_0^s(A)$ mulţimea funcţiilor de clasă $C^s(A)$ care au suportul compact (adică mărginit), $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

1.4. Spaţiul funcţiilor local-integrabile

Fiind dat numărul real $p \geq 1$, o funcţie $f : \mathbb{R} \to K$ se numeşte **local p-integrabilă** dacă funcţia $|f|^p$ este integrabilă pe orice compact din $\mathbb{R}$; mulţimea acestor funcţii se notează cu L^p_{loc} şi are loc incluziunea $L^p(\mathbb{R}) \subseteq L^p_{loc}$. Cazul particular cel mai utilizat este spaţiul L^1_{loc} al funcţiilor $f : \mathbb{R} \to K$ care sunt absolut integrabile pe orice interval compact din $\mathbb{R}$, numit *spaţiul funcţiilor local integrabile*; aşadar $f \in L^1_{loc} \iff \forall\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ integrala $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ este convergentă; are loc incluziunea $C(\mathbb{R}) \subseteq L^1_{loc}$.

Produsul de convoluţie a două funcţii local-integrabile

Dacă $f, g \in L^1_{loc}$ şi dacă integrala $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx$ există pentru orice $t \in \mathbb{R}$, atunci funcţia $f * g : \mathbb{R} \to K$,

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx,\ \forall\ t \in \mathbb{R}$$

se numeşte *produsul de convoluţie* al funcţiilor f şi g.

Integrala care defineşte $(f * g)(t)$ există (cel puţin a.p.t. pe $\mathbb{R}$) în următoarele situaţii remarcabile:

(i) $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, situaţie în care $f * g \in L^1(\mathbb{R})$

(ii) $f \in L^1(\mathbb{R})$ şi g mărginită (sau invers)

(iii) f şi g au suporturi compacte

(iv) $\text{supp} f \subseteq [0, \infty)$ şi $\text{supp} g \subseteq [0, \infty)$, situaţie în care

$$(f * g)(t) = u(t) \int_0^t f(x)g(t - x)dx, \ \forall \ t \in \mathbb{R},$$

unde $u(t) = 0$ dacă $t < 0$ şi $u(t) = 1$ dacă $t \geq 0$.

Menţionăm următoarele proprietăţi ale produsului de convoluţie:

- *comutativitate* $f * g = g * f$
- *asociativitate* $(f * g) * h = f * (g * h)$
- *distributivitatea faţă de adunare*

$$f * (\alpha g + \beta h) = \alpha(f * g) + \beta(f * h), \ \forall \ \alpha, \beta \in K$$

- *derivarea.* Dacă $f \in L^1(\mathbb{R})$ şi $g \in C^1(\mathbb{R})$, iar g şi g' sunt mărginite, atunci $f * g \in C^1(\mathbb{R})$ şi $(f * g)' = f * g'$, iar funcţia $(f * g)'$ este mărginită (pe $\mathbb{R}$).

1.5. Spaţii de funcţii periodice

Fie $T > 0$ un număr real dat (cazul standard $T = 2\pi$). Desemnăm prin $L^s_P(0, T)$, cu $s > 0$ dat, mulţimea funcţiilor $f : \mathbb{R} \to K$ care sunt periodice cu perioada $T > 0$ şi cu puterea f^s absolut integrabilă pe intervalul $[0, T]$.

Cazurile particulare cele mai utilizate pe parcursul lucrării sunt:

$$L^1_P(0, T) = \left\{ f : \mathbb{R} \to K | f(t + T) = f(t), \ \forall \ t \in \mathbb{R} \text{ şi } \int_0^T |f(t)|dt < \infty \right\}$$

şi

$$L^2_P(0, T) = \left\{ f : \mathbb{R} \to K | f(t + T) = f(t), \ \forall \ t \in \mathbb{R} \text{ şi } \int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

Remarcăm, de asemenea, că elementele spaţiului $L^s_P(0, T)$ sunt funcţiile din $L^s(I)$, $I = [0, T)$, prelungite prin periodicitate (de perioadă T) la $\mathbb{R}$.

1.6. Spaţii de funcţii discrete (şiruri)

Desemnăm prin S_d mulţimea tuturor funcţiilor discrete (şirurilor) $x : \mathbb{Z} \to K$, care asociază fiecărui număr întreg n numărul $x(n) = x_n \in K$; utilizăm notaţia $x = (x(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ sau $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Este clar că S_d, împreună cu operaţiile uzuale de adunare a două şiruri şi de înmulţire a unui şir cu scalar (i.e. $x + y = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$; $\alpha x = (\alpha x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\forall\ x, y \in S_d$, $\forall\ \alpha \in K$) este un spaţiu vectorial (liniar) peste K.

Definim trei subspaţii remarcabile ale spaţiului S_d.

1° **Spaţiul şirurilor (funcţiilor discrete) cu suport pozitiv**

Fie $S_d^+ = \{x \in S_d :\ x(n) = 0,\ \forall\ n < 0\}$.

Orice element $x \in S_d^+$ se numeşte *şir cu suport pozitiv*; utilizăm notaţia $x = (x_n)_{n\geq 0}$ şi observăm că şirurile cu suport pozitiv reprezintă, în esenţă, şirurile clasice (standard) din analiza matematică.

2° **Spaţiul şirurilor periodice de perioadă $N \in \mathbb{N}^*$ sau spaţiul "semnalelor finite" de "lungime" N**

Fie $N \in \mathbb{N}^*$ un număr dat şi

$$K^N = \{x : \mathbb{Z} \to K|\ x(n) = x(n + N),\ \forall\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Orice element $x \in K^N$ este o funcţie discretă (şir) periodică de perioadă N şi se numeşte *semnal finit de lungime N*.

3° **Spaţiul** l^p Fie $p \geq 1$ un număr real dat. Definim spaţiul l^p prin

$$l^p = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in S_d :\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^p < \infty\right\}.$$

Aşadar $x \in l^p \iff$ seria de termen general $|x_n|^p$ este convergentă.

Detaliind cazurile particulare $p = 1$ şi $p = 2$ obţinem:

$$l^1 = \left\{x \in S_d :\ \sum_n |x_n| < \infty\right\}$$

$$l^2 = \left\{x \in S_d :\ \sum_n |x_n|^2 < \infty\right\}.$$

1.7. Spaţiul $\mathcal{S}$ al funcţiilor rapid descrescătoare (spre zero)

• *O funcţie $f : \mathbb{R} \to K$ se numeşte* **rapid descrescătoare** *(sau* **funcţie cu descreştere rapidă***) dacă $\forall\ m \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea*

$$\lim_{|t|\to\infty} |t^m f(t)| = 0.$$

• *Spaţiul* $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *este mulţimea tuturor funcţiilor* $f : \mathbb{R} \to K$ *cu următoarele proprietăţi:*

(i) $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

(ii) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, *derivata* $f^{(n)}$ *este rapid descrescătoare (spre zero).*

$\mathcal{S}$ *se numeşte* **spaţiul funcţiilor rapid descrescătoare** *(***spre zero***).*

De exemplu funcţia $f(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$ nu este un element al spaţiului $\mathcal{S}$ (deoarece f nu este derivabilă în origine), deşi f este o funcţie cu descreştere rapidă, în timp ce "clopotul" lui Gauss, $g(t) = e^{-at^2}$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$, aparţine spaţiului $\mathcal{S}$.

2 Noţiunea de semnal. Exemple

Noţiunea de semnal are un mare grad de generalitate, fiind utilizată tot mai frecvent în variate domenii ale ştiinţei: există semnale electromagnetice, optice, acustice, unde seismice, tensiuni electrice, neurosemnale, semnale vocale ş.a. Din punct de vedere "tehnologic", prin *semnal* se înţelege orice mărime fizică dependentă de timp (mai general şi de frecvenţă, spaţiu sau alte variabile) care poate să transmită informaţie (sau este purtătoare de informaţie). Definiţia matematică a noţiunii de semnal (deşi nu este exhaustivă) surprinde caracteristicile esenţiale ale diverselor tipuri de semnale întâlnite în practica tehnologică, facilitând astfel un studiu sistematic al semnalelor, impus de dezvoltarea tehnicii moderne de calcul.

2.1. Definiţie

Fiind date mulţimile $\mathcal{T}$ *(ale cărei elemente se numesc* **momente***) şi* $\mathcal{M}$*, împreună cu o relaţie* $\mathcal{R}$ *de ordine totală pe mulţimea* $\mathcal{T}$*, prin* **semnal** *definit pe mulţimea* $\mathcal{T}$ *(numită şi mulţime-timp) cu valori în mulţimea* $\mathcal{M}$ *se înţelege orice funcţie* $x : \mathcal{T} \to \mathcal{M}$*, care asociază fiecărui moment* $t \in \mathcal{T}$ *un element* $x(t) \in \mathcal{M}$ *numit* **eşantionul** *semnalului* x *la momentul* t*.*

De obicei $\mathcal{T}$ este o submulţime a lui $\mathbb{R}$ înzestrată cu relaţia de ordine uzuală "$\leq$", iar $\mathcal{M}$ este o submulţime a mulţimii $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$; asemenea semnale se numesc *semnale unidimensionale (1D)*; similar se definesc *semnalele bidimensionale (2D)*, unde $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^2$, sau *tridimensionale (3D)*.

2.2. Clasificarea semnalelor

Clasificarea semnalelor se realizează pornind de la diverse criterii, dintre care menţionăm următoarele:

(i) În funcţie de *valorile semnalului*, deosebim:

• *semnale reale*, dacă $x(\mathcal{T}) \subseteq \mathbb{R}$ şi

• *semnale complexe*, dacă $x(\mathcal{T}) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \neq \emptyset$.

(ii) În funcţie de *mulţimea ("domeniul") de definiţie* $\mathcal{T}$ distingem:

• *semnale continuale*, în cazul $\mathcal{T} = I$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval (care nu se reduce la un punct); frecvent se utilizează denumirea de *semnal continuu* în loc de semnal continual, situaţie în care menţionăm că adjectivul "continuu" nu se referă la continuitatea aplicaţiei $x : I \to K$.

• *semnale discrete* (numite şi *semnale eşantionate* sau *secvenţe*), dacă $\mathcal{T}$ este o mulţime finită sau numărabilă (numită şi *mulţime discretă*). Un prim exemplu de semnal discret se obţine alegând $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, unde $N \in \mathbb{N}^*$ este dat, cu notaţia $(x_n)_{0 \le n \le N-1}$; mulţimea acestor semnale (eventual extinse la $\mathbb{Z}$ prin periodicitate de perioadă N) se notează cu K^N şi constituie *clasa semnalelor finite de lungime* N (vezi paragraful 1.6 (2°)). Al doilea exemplu rezultă luând $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ (sau $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$), cu notaţia $(x_n)_{n \ge 0}$, respectiv $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

(iii) În funcţie de *mulţimea de definiţie* $\mathcal{T}$ a semnalului x şi de *mulţimea de valori* $x(\mathcal{T})$, avem următoarea clasificare:

• *semnal analogic*, dacă $\mathcal{T}$ şi $x(\mathcal{T})$ sunt mulţimi "continue"; de obicei $\mathcal{T}$ este un interval cu interior nevid $I \subseteq \mathbb{R}$, iar $x(\mathcal{T})$ este un interval (a, b), cu $-\infty \le a < b \le \infty$ (sau o mulţime care conţine un asemenea interval)

• *semnal cuantizat*, dacă $x(\mathcal{T})$ este o mulţime finită (adică semnalul are un număr finit de valori); în situaţia $\operatorname{card} x(\mathcal{T}) = 2$, semnalul cuantizat se mai numeşte *semnal logic* (dacă x este continual) sau *logic-eşantionat* (dacă x este discret)

• *semnal digital*, dacă $\mathcal{T}$ şi $x(\mathcal{T})$ sunt mulţimi discrete

(iv) În funcţie de modul în care semnalul depinde de alte evenimente deosebim:

• *semnale deterministe*, care sunt semnale cu valori bine determinate, situaţie în care se cunoaşte precis evoluţia semnalului (trecut, prezent şi viitor). Aceste semnale sunt asociate, de obicei, unei formule matematice, semnalele deterministe însele fiind o "idealizare" matematică absolut necesară studiului şi înţelegerii semnalelor aleatoare

• *semnale aleatoare*, care sunt o prezenţă universală în realitatea fizică. Valorile (evoluţia) acestor semnale pot fi precizate doar cu o anumită probabilitate (de exemplu semnale vocale sau seismice). În esenţă, aceste semnale reprezintă procese stochastice (în cazul semnalelor continuale), respectiv lanţuri (şiruri) de variabile aleatoare (în cazul semnalelor discrete), noţiuni specifice teoriei probabilităţilor.

2.3. Energia unui semnal

Dacă $f : I \to K$ este un semnal continual de clasă $L^2(I)$, numărul real şi pozitiv

$$E(f) = \|f\|_2^2 = \int_I |f(t)|^2 dt$$

se numeşte *energia* semnalului f.

De exemplu, dacă $f(t)$ reprezintă intensitatea curentului într-un circuit electric (la momentul t), atunci $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt$ este energia degajată de circuit dacă rezistenţa este de 1 ohm.

Noţiunea de energie se poate extinde la semnale $f : I \to K$ pentru care integrala $\displaystyle\int_I |f(t)|^2 dt$ există în $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$; din acest motiv, semnalele din $L^2(I)$ se mai numesc *semnale de energie finită*.

Dacă $x : \mathbb{Z} \to K$ este un semnal discret dat, energia sa se defineşte prin relaţia $E(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|^2$; în general $E(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, dar orice semnal $x \in l^2$ are energia finită.

2.4. Semnale remarcabile

Remarcăm pentru început că funcţiile din clasele $C^s(I)$, $L^p(I)$, S_d introduse anterior se pot considera, ele însele, semnale continuale sau discrete, după caz.

În continuare, vom enumera un set de semnale care sunt utilizate frecvent.

2.4.1. Semnalul sinusoidal (armonic)

Este semnalul $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) = A\sin(2\pi\nu t + \varphi)$$

sau

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos(2\pi\nu t + \varphi),$$

unde $A > 0$, $\omega > 0$, $\nu > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ sunt date şi $\omega = 2\pi\nu$.

Numărul $A = \max\{|f(t)| : \ t \in \mathbb{R}\}$ se numeşte *amplitudinea* semnalului, ν este *frecvenţa* (curentă) a semnalului, $\omega = 2\pi\nu$ este *pulsaţia* (sau *frecvenţa unghiulară*), iar φ este *faza* (iniţială) a semnalului. Dacă $T > 0$ este perioada semnalului, atunci $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ şi $\nu = \dfrac{1}{T}$.

• **Observaţie.** Funcţia $e_\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $e_\omega(t) = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$, se numeşte *semnal sinusoidal complex* (uneori *semnal armonic complex*).

2.4.2. Semnalul treaptă-unitate (Heaviside)

(i) *Varianta "continuă"*: este semnalul $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$; uneori se ia $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$

(ii) *Varianta discretă*: este semnalul $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $u(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$

2.4.3. Impulsul lui Dirac

(i) *Varianta "continuă"* $\quad \delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$

(ii) *Varianta discretă* $\quad \delta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $\delta(n) = \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{Z}^* \\ 1, & n = 0 \end{cases}$

Semnalul discret $\delta(n)$ se numeşte *eşantionul unitate.*

Mai general, fixând o valoare $\tau \in I$ (respectiv $k \in \mathbb{Z}$), definim impulsurile $\delta_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $\delta_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ prin

$$\delta_\tau(t) = \delta(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t = \tau \\ 0, & t \neq \tau \end{cases},$$

respectiv

$$\delta_k(n) = \delta(n - k) = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

Astfel $\delta = \delta_0$, iar semnalul δ_k se numeşte *eşantionul unitate întârziat cu k momente.* Au loc relaţiile

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta_k(n) \quad \text{şi} \quad x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k),$$

pentru $x \in S_d$.

2.4.4. Semnalul dreptunghiular sau "poartă temporală"

Fiind date numerele reale h, a, b astfel încât $h > 0$ şi $a < b$, definim *semnalul dreptunghiular de "înălţime" h* drept $\Pi_{a,b;h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\Pi_{a,b;h}(t) = \begin{cases} h, & \text{dacă } a \le t \le b \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Are loc relaţia $\Pi_{a,b;h}(t) = h[u(t-a) - u(t-b)]$, $t \neq b$.

Dacă luăm $h = 1$, semnalul dreptunghiular $\Pi_{a,b;1}$ devine *funcţia caracteristică* a intervalului $[a, b]$ şi se notează $\chi_{[a,b]}$.

Dacă schimbăm rolurile lui a, b şi luăm $b = -a$, semnalul dreptunghiular se notează $\Pi_{a;h}$ şi se numeşte *poartă simetrică de "înălţime" h şi "durată"* $2a$.

În general, dacă $h = 1$, atunci indicele h se omite; astfel $\Pi_a = \chi_{[-a,a]}$.

2.4.5. Semnalul triunghiular ("dinte de fierăstrău")

Se defineşte prin $f : \mathbb{R} \to K$,

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a}(t+a), & -a \le t < 0 \\ \frac{A}{a}(a-t), & 0 \le t \le a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

unde $a > 0$ şi $A > 0$ sunt numere date.

Se notează $f(t) = Tr(a, A; t)$; dacă $a = A$, se scrie $Tr(a; t)$. Literele a şi A se omit dacă iau valoarea 1; astfel, dacă $a = A = 1$, se scrie $f(t) = Tr(t)$, iar semnalul corespunzător se numeşte *semnal triunghiular unitar*.

Observăm că $f(t) = \dfrac{A}{a}[(t+a)u(t+a) + (t-a)u(t-a) - 2tu(t)]$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ şi $f(t) = Aa^{-1}(|a| - |t|)$, dacă $|t| \le a$.

2.4.6. Semnalul "sinus-atenuat" sau "funcţia fantă"

Se defineşte prin $sa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $sa(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$

Funcţia "sa" este pară (deci graficul său este simetric faţă de axa verticală) iar $\lim\limits_{|t| \to \infty} sa(t) = 0$. Graficul funcţiei "$sa$" are o infinitate de puncte de extrem, care descresc în modul spre zero când $t \to \mathbb{R}$ (sau $t \to -\infty$); are loc relaţia $|sa(t)| < sa(0) = 1$, $\forall\, t \neq 0$. În tehnică, semnalul "sa" se numeşte *funcţie de eşantionare* sau *funcţie de fantă.*

Alăturat redăm graficele semnalelor descrise în acest paragraf.

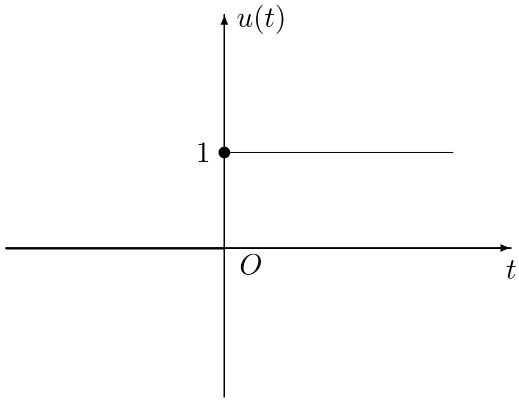


Fig.2. Semnalul treaptă-unitate "continuă" (Heaviside)

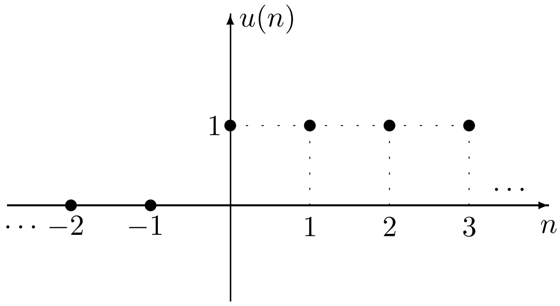


Fig.3. Semnalul treaptă-unitate "discretă"

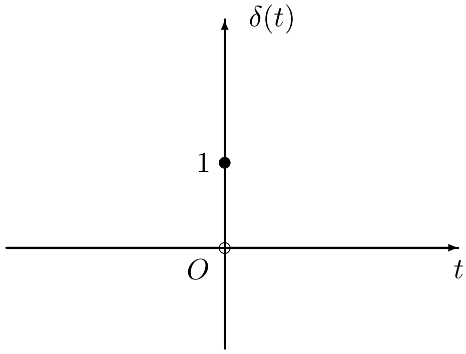


Fig.4. Impulsul "continuu" al lui Dirac

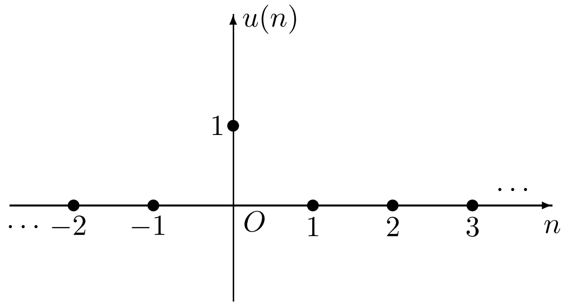


Fig.5. Impulsul "discret" al lui Dirac

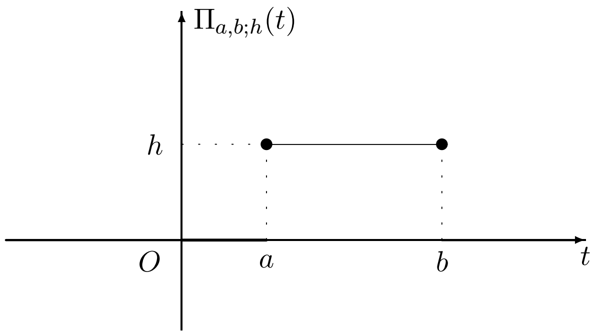


Fig.6. Semnalul dreptunghiular

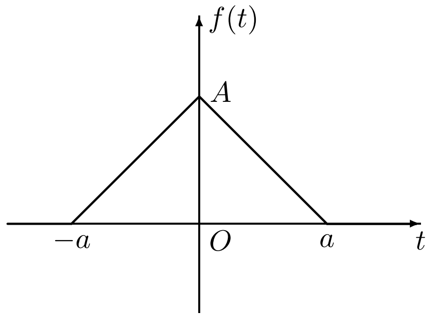


Fig.7. Semnalul triunghiular (dinte de fierăstrău)

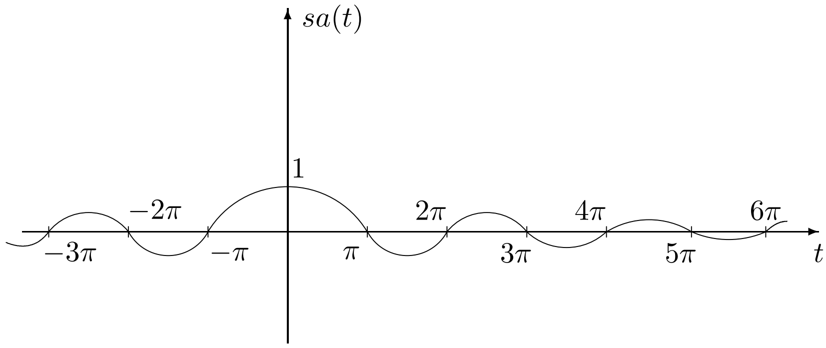


Fig.8. Semnalul "sinus atenuat" ("funcţia fantă")

3 Sisteme liniare. Filtre

3.1. Definiţie

Se numeşte **sistem liniar** *(pe scurt SL) orice triplet* (E, F, L) *în care* E *şi* F *sunt spaţii liniare (de exemplu spaţii de semnale continuale sau discrete), iar* $L : E \to F$ *este un operator liniar.*

Elementele $x \in E$ se numesc **intrări**, iar elementele $y = L(x) \in F$ se numesc **ieşiri** ale sistemului. Se notează $x \xrightarrow{L} y$. Cu o altă terminologie, intrările $x \in E$ se numesc **excitaţii** ale sistemului, iar $y = L(x)$ este **răspunsul** sistemului la "excitaţia" x.

3.2. Sisteme liniare analogice. Sisteme liniare discrete

Un sistem liniar (E, F, L) se numeşte:

(i) *Sistem liniar analogic* (SLA) dacă E şi F sunt spaţii de semnale continuale (de exemplu $L^1(\mathbb{R})$ sau $\mathcal{S}$).

(ii) *Sistem liniar discret* (SLD) dacă E şi F sunt spaţii de semnale discrete (de exemplu S_d sau S_d^+).

3.3. Sisteme liniare invariante în timp (SLIT)

(i) Un SLA se numeşte *invariant în timp* sau *staţionar* (SLAIT) dacă $\forall\ f = f(t) \in E$ are loc egalitatea

$$L(f(t - \tau)) = (L(f))(t - \tau),\ \forall\ t, \tau \in \mathbb{R}.$$

Altfel spus, $\forall\ f = f(t) \in E$, notând $g(t) = L(f(t)) \in F$, are loc egalitatea

$$L(f(t-\tau)) = g(t-\tau),\ \forall\ t, \tau \in \mathbb{R}.$$

(ii) Un SLD se numeşte *invariant în timp* (SLDIT) dacă $\forall\ x = x(n) \in S_d$ are loc egalitatea $L(x(n-k)) = (L(x))(n-k)$, $\forall\ n, k \in \mathbb{Z}$ *sau*
$L(x * \delta_k) = (Lx) * \delta_k$, $\forall\ x \in S_d$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$. Într-adevăr, deoarece $(x * y)(n) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k)y(k)$, $\forall\ x, y \in S_d$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, are loc egalitatea

$$(x * \delta_k)(n) = x(n-k),\ \forall\ n, k \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Răspunsul unui SLIT la impulsul Dirac (§2.4.3) se numeşte *funcţie pondere.*

Funcţia pondere se notează cu h; astfel $h = L(\delta)$.

(iv) Răspunsul unui SLIT la semnalul treaptă-unitate (§2.4.2) se numeşte *răspuns indicial.*

3.4. Sistem liniar cauzal

(i) Un SLA este *cauzal* sau *neanticipativ* dacă $\forall\ f \in E$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$ valoarea $g(t) = (L(f))(t)$ depinde numai de valorile $f(\tau)$ cu $\tau \le t$.

(ii) Un SLD este *cauzal* (sau *neanticipativ*) dacă $\forall\ x \in S_d$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ eşantionul $y(n) = L(x))(n)$ al ieşirii depinde numai de eşantioanele $x(m)$, cu $m \le n$, ale intrării.

Altfel spus, SL cauzale sunt sisteme liniare al căror răspuns nu poate precede excitaţia. În cazul unui SLIT cauzal, deoarece $h = L(\delta)$, avem $h(t) = 0$, $\forall\ t < 0$ sau $h(n) = 0$, $\forall\ n < 0$. Sistemele fizice sunt sisteme cauzale.

3.5. Filtru

Se numeşte *filtru* un SLIT (E, F, L) în care E şi F sunt (de obicei) spaţii normate, iar operatorul L este continuu. Noţiunea de *filtru cauzal* decurge din definiţia precedentă.

4 Analiza şi sinteza semnalelor continuale periodice

4.1. Seria Fourier asociată unui semnal periodic de energie finită

1. Definiţie

Fie $f \in L^2_P(0,T)$ un semnal periodic de energie finită. Numerele

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{T}(f, e_n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp\left(-\frac{2\pi j}{T}nt\right)dt, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{4.1}$$

se numesc **coeficienţii Fourier sub formă "complexă"** *ai semnalului f, iar numerele*

$$\begin{cases} a_n = a_n(f) = c_n + c_{-n} = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt, & n \geq 0 \\ \\ b_n = b_n(f) = j(c_n - c_{-n}) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt, & n \geq 1 \end{cases} \tag{4.2}$$

se numesc **coeficienţii Fourier sub formă "reală"** *ai semnalului f.*

Observaţie. Frecvent, în baza periodicităţii, integralele care definesc c_n, a_n şi b_n se consideră pe intervale simetrice faţă de origine (de lungime T); de exemplu, notând $T = 2l$, obţinem:

$$\begin{cases} c_n = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(t)\exp\left(-\frac{n\pi j}{l}t\right)dt, & n \in \mathbb{Z} \\ \\ a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt, & n \geq 0 \\ \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt, & n \geq 1. \end{cases} \tag{4.3}$$

Remarcăm că a_n, b_n, c_n din (4.1), (4.2), (4.3) sunt bine determinaţi şi pentru $f \in L^1_P(0,T)$.

2. Definiţie

Seriile de funcţii:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi j}{T}nt}, \quad t \in \mathbb{R}$$

şi

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nt}{T}+b_n\sin\frac{2\pi nt}{T}\right),\quad t\in\mathbb{R}$$

unde coeficienţii c_n, a_n, b_n sunt definiţi prin relaţiile (4.1) şi (4.2) se numesc **seria Fourier sub formă "complexă"** *respectiv* **seria Fourier sub formă "reală"** *asociate semnalului $f\in L_P^2(0,T)$ sau $f\in L_P^1(0,T)$.*

Observaţie. Semnalul $A_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$A_n(t)=a_n\cos\frac{2\pi nt}{T}+b_n\sin\frac{2\pi nt}{T},\quad t\in\mathbb{R},\ n\geq 1$$

se numeşte *armonica* (sau *componenta armonică*) *de ordin* n a lui f; $A_1(t)$ este *armonica fundamentală*, iar $A_2(t), A_3(t),\ldots$ se numesc *armonice superioare*; $A_0(t)=\dfrac{a_0}{2}$ este armonica de ordin zero (sau *componenta continuă*).

4.2. Teorema convergenţei locale (Fourier-Dirichlet)

Dacă t_0 este un punct fixat în intervalul $(0,T)$ şi f este un semnal din $L_P^1(0,T)$ cu proprietatea că există şi sunt finite atât limitele laterale $f(t_0+0)$, $f(t_0-0)$, cât şi derivatele laterale ale lui f în t_0, atunci seria Fourier a lui f în t_0 este convergentă şi are suma $\dfrac{1}{2}[f(t_0+0)+f(t_0-0)]$, adică are loc egalitatea

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne_n(t_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t_0)=\frac{1}{2}[f(t_0+0)+f(t_0-0)].$$

Observaţie. Convergenţa punctuală a seriei Fourier asociată unui semnal $f\in L_P^1(0,T)$ se realizează dacă f satisface aşa-numitele **condiţii ale lui Dirichlet**, relative la intervalul $[0,T)$ sau la intervalul $[-l,l)$, pentru $T=2l$:

(i) *f are un număr finit de discontinuităţi, toate de speţa întâi.*

(ii) *f are un număr finit de extreme (maxime sau minime), adică f este monotonă pe $(0,T)$ sau intervalul $(0,T)$ se descompune într-un număr finit de subintervale pe care f este monotonă.*

4.3. Definiţie

Fie $f\in L_P^1(0,T)$ un semnal dat. Determinarea coeficienţilor Fourier c_n (sau a_n, b_n) ai semnalului f din formulele (4.1), (4.2) sau (4.3) se numeşte

analiza semnalului *(sau analiza conţinutului său armonic), iar reconstrucţia (recuperarea) semnalului f din coeficienţii săi Fourier se numeşte* **sinteza semnalului** f.

Mulţimea $\left\{\left(\frac{n}{T}, c_n\right) : \ n \in \mathbb{Z}\right\}$ se numeşte **spectrul semnalului** f.

5 Formula integrală a lui Fourier (FIF)

5.1. Teoremă (Formula integrală Fourier)

Dacă funcţia-semnal $f : \mathbb{R} \to K$ îndeplineşte următoarele condiţii:

1° f este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, i.e. $f \in L^1(\mathbb{R})$

2° f are în fiecare punct $t \in \mathbb{R}$ limite laterale finite şi derivate laterale finite

3° f are în orice interval mărginit al axei reale un număr finit de puncte în care nu este continuă sau derivabilă,

atunci are loc egalitatea

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega(x-t)}dt, \ \forall \ x \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

O formă echivalentă a formulei (5.1) este

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt, \ \forall \ x \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

Menţionăm că integralele de mai sus în raport cu ω se iau în sensul valorii principale; astfel (5.2) înseamnă:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} e^{j\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt, \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Introducând frecvenţa ν în locul frecvenţei unghiulare ω, prin relaţia $\omega = 2\pi\nu$, obţinem:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi j\nu x} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi j\nu t}dt, \ \forall \ x \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Fiecare dintre egalităţile (5.1), (5.2) şi (5.3) constituie o variantă a **formulei integrale Fourier (pe scurt FIF)**.

Remarcăm faptul că dacă f este continuă în punctul fixat $x \in \mathbb{R}$, atunci membrul stâng din formulele (5.1), (5.2) şi (5.3) este egal cu $f(x)$.

Amintim, de asemenea, că uneori condiţiile 2° şi 3° din Teorema 5.1 se utilizează sub sintagma "*f este derivabilă pe porţiuni*".

5.2. Observaţie

FIF are loc şi în situaţia în care $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, iar funcţia $F : \mathbb{R} \to K$,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt, \ \forall \ \omega \in \mathbb{R}$$

este, de asemenea, de clasă $L^1(\mathbb{R})$.

5.3. Corolar

FIF poate fi pusă sub forma

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(x-t)dt, \ \forall \ x \in \mathbb{R} \tag{5.4}$$

sau

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = 2\int_0^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos 2\pi\nu(x-t)dt, \ \forall \ x \in \mathbb{R}. \tag{5.5}$$

5.4. Definiţie

Fiecare din egalităţile (5.1), (5.2) sau (5.3) constituie **forma complexă sau exponenţială** *a FIF, iar egalitatea (5.4) sau egalitatea (5.5) se numeşte* **forma reală sau trigonometrică** *a FIF.*

5.5. Corolar (FIF pentru funcţii-semnal pare)

Dacă f este o funcţie-semnal pară, atunci FIF are forma:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\omega x d\omega \int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t dt, \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

5.6. Corolar (FIF pentru funcţii-semnal impare)

Dacă f este o funcţie-semnal impară, atunci FIF are forma:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \sin\omega x d\omega \int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t dt, \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

6 Probleme

Enunţuri

Să se scrie formula integrală a lui Fourier pentru fiecare din semnalele de mai jos şi să se deducă relaţiile indicate:

1. *Poarta temporală simetrică de "înălţime" 1 şi "durată"* $2a$*, i.e.* $\Pi_a(t) = 1$*, dacă* $|t| \leq a$*;* $\Pi_a(t) = 0$*, dacă* $|t| > a$*.*

Relaţia: $\displaystyle\int_0^\infty sa(\omega)\cos\omega d\omega = \frac{\pi}{4}$.

2. *Semnalul triunghiular:* $Tr(a;t) = a - |t|$*, dacă* $|t| \leq |a|$*;* $Tr(a;t) = 0$*, dacă* $|t| > a$*;* $a > 0$*.*

Relaţia: $\displaystyle\int_0^\infty sa^2\left(\frac{\omega a}{2}\right)\cos\omega d\omega = \frac{\pi}{a^2}(a-1),\ \forall\ a \geq 1.$

3. *Semnalul* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*,* $f(t) = \dfrac{1}{t^2 - 2jt + 3}$.

Relaţiile: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{2t}+1}{e^{3t}}\cos ntdt = \frac{4(n^2+3)}{n^4+10n^2+9}$*;*
$\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{2t}-1}{e^{3t}}\sin ntdt = \frac{8n}{n^4+10n^2+9}$*;* $n \in \mathbb{N}$*.*

Soluţii. Indicaţii. Răspunsuri

1. $\widetilde{\Pi}_a(t) = \dfrac{2a}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty sa(a\omega)\cos\omega td\omega$, unde $\widetilde{\Pi}_a(t) = 1$, dacă $|t| < 1$; $\widetilde{\Pi}_a(\pm 1) = \dfrac{1}{2}$; $\widetilde{\Pi}_a(t) = 0$, dacă $|t| > 1$. Luând $t = a = 1$ rezultă relaţia propusă.

2. $Tr(a;t) = \dfrac{a^2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty sa^2\left(\frac{\omega a}{2}\right)\cos\omega td\omega$, $t \in \mathbb{R}$; luăm $t = 1$.

3. $\dfrac{1}{t^2-2jt+3} = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{2\omega}+1}{e^{3\omega}}\cos\omega td\omega + \frac{j}{4}\int_0^\infty \frac{e^{2\omega}-1}{e^{3\omega}}\sin\omega td\omega$, $t \in \mathbb{R}$. Luăm apoi $t = n$.

Capitolul 2

Transformarea Fourier integrală

Analiza Fourier a unui semnal periodic conduce, în definitiv, la o descompunere a semnalului ca suprapunere de "unde" (semnale) sinusoidale (armonice) de diferite frecvenţe. Dacă semnalul continual în timp $f(t)$ nu este periodic, o reprezentare similară nu mai este posibilă; totuşi, formula integrală a lui Fourier sugerează introducerea unui instrument matematic nou, anume "transformarea Fourier" sau "transfurierea", prin care semnalului f (din domeniul timp) i se asociază transformata Fourier (în domeniul frecvenţă) şi reciproc. Astfel, se realizează un transfer bilateral de informaţie timp-frecvenţă, cu aplicaţii inginereşti substanţiale.

1 Noţiuni şi definiţii fundamentale

Fie $f \in L^1(\mathbb{R})$ un semnal continual dat şi $\omega \in \mathbb{R}$. Deoarece semnalul continual pur de frecvenţă ω, dat de egalitatea $e_\omega(t) = e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$ are proprietatea $|e_\omega(t)| = 1$, deducem că $|f(t)e^{-j\omega t}| = |f(t)|$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, aşadar integrala $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ este absolut convergentă.

1.1. Definiţia transformatei Fourier

Funcţia $F : \mathbb{R} \to K$, *asociată unui semnal continual dat* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *prin relaţia*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = (f, e_\omega),\ \forall\, \omega \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

se numeşte **transformata Fourier** *a semnalului (funcţiei)* $f(t)$.

Punând $\omega = 2\pi\nu$, obţinem o formă uşor modificată a transformatei Fourier a semnalului f, anume:

$$\widetilde{F}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi j\nu t}dt, \ \forall\ \nu \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

utilizată, de asemenea, în teoria semnalelor; este clar că

$$\widetilde{F}(\nu) = F(2\pi\nu) \text{ sau } F(\omega) = \widetilde{F}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right).$$

Reamintim că ω este frecvenţa unghiulară iar $\nu = \omega/2\pi$ este frecvenţa curentă, care se măsoară în Hz.

Frecvent, F (sau $\widetilde{F}$) se notează $\widehat{f}$ (respectiv $\widetilde{\widehat{f}}$). De asemenea, în teoria semnalelor se spune că funcţiile $f(t)$ şi $F(\omega)$ sau $f(t)$ şi $\widetilde{F}(\nu)$ formează o *pereche Fourier* şi se notează $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ sau $f(t) \leftrightarrow \widetilde{F}(\nu)$.

1.2. Spectru. Amplitudine. Fază

Funcţia $\omega \mapsto F(\omega)$ se numeşte *spectrul în frecvenţă* al semnalului continual $f(t)$. Funcţia $A : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $A(\omega) = |F(\omega)|$ se numeşte *amplitudinea în frecvenţă* a semnalului $f(t)$, iar mulţimea $\{(\omega, A(\omega)) : \ \omega \in \mathbb{R}\}$ este *spectrul în amplitudine* al lui f. De asemenea, funcţia $\phi : \mathbb{R}_0 \to [0, 2\pi)$, $\phi(\omega) = \arg F(\omega)$ se numeşte *faza în frecvenţă* a semnalului $f(t)$; aici $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}_0(f) = \mathbb{R} \setminus \{\omega \in \mathbb{R} : \ F(\omega) = 0\}$. Remarcăm egalitatea $F(\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$, $\forall\ \omega \in \mathbb{R}_0$.

1.3. Observaţii

(i) Unii autori definesc transformata Fourier a semnalului (funcţiei) $f(t)$ prin

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt, \ \forall\ \omega \in \mathbb{R};$$

proprietăţile sale sunt, în mod esenţial, aceleaşi cu proprietăţile transformatei Fourier din Definiţia 1.1.

(ii) O definiţie a transformatei Fourier extinsă la semnale-funcţie din afara clasei $L^1(\mathbb{R})$ este următoarea. Fie $f : \mathbb{R} \to K$ un semnal-funcţie dat şi $D(f)$ mulţimea valorilor $\omega \in \mathbb{R}$ pentru care integrala $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ este convergentă; funcţia $F : D(f) \to K$,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt, \ \omega \in D(f),$$

se numeşte *transformata Fourier* (restrânsă la $D(f)$) a semnalului $f(t)$. De exemplu, dacă $f(t) = \dfrac{P(t)}{Q(t)}$, unde P şi Q sunt polinoame astfel încât grad$Q =$ $1+$grad$P$, iar Q are rădăcini reale simple sau rădăcini complexe cu orice ordin de multiplicitate, atunci $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, iar integrala (luată în sensul valorii principale) se calculează cu teorema reziduurilor.

1.4. Operatorul de transformare Fourier

Transformata Fourier $\widehat{f}$ asociată unui semnal dat $f \in L^1(\mathbb{R})$ prin Definiţia 1.1 este o funcţie continuă şi mărginită pe $\mathbb{R}$: într-adevăr, continuitatea lui $\widehat{f}$ decurge din continuitatea integralei asociate (în raport cu parametrul ω), iar mărginirea rezultă din egalitatea $|e^{-j\omega t}f(t)| = |f(t)|$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, $\forall\ \omega \in \mathbb{R}$ şi din faptul că $f \in L^1(\mathbb{R})$, utilizând proprietăţi standard din teoria convergenţei integralelor improprii; astfel $F = \widehat{f} \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

1.4.1. Definiţia transformării Fourier

Operatorul $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$, *definit prin* $f \in L^1(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{F}f \in L^\infty(\mathbb{R})$, *unde*

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt,\ \forall\ \omega \in \mathbb{R}$$

se numeşte **operatorul de transformare Fourier** *asociat spaţiului* $L^1(\mathbb{R})$, *pe scurt* **operatorul lui Fourier**; *aşadar* $\mathcal{F}f = \widehat{f} = F$.

Procedeul prin care fiecărui semnal-funcţie $f \in L^1(\mathbb{R})$ i se asociază transformata sa Fourier $F = \mathcal{F}f = \widehat{f}$ (în esenţă operatorul $\mathcal{F}$) este cunoscut sub numele "**transformarea Fourier**" sau "**transfuriere**".

Notaţii. Vom utiliza scrierea $(\mathcal{F}f)(\omega) = \mathcal{F}(f;\omega)$ sau $(\mathcal{F}f)(\omega) = \mathcal{F}\{f(t);\omega\}$, de asemenea, amplitudinea $A(\omega)$ şi faza în frecvenţă $\phi(\omega)$ ale unui semnal $f(t)$ se notează frecvent, din motive de rigoare, $A(f;\omega)$, respectiv $\phi(f;\omega)$.

1.5. Exemplu

Transformata Fourier a semnalului dreptunghiular

Fie $\Pi_{a,b;h}(t) = \Pi(t) = \begin{cases} h, & a \le t \le b \\ 0, & t \in [a,b] \end{cases}$; $a, b, h \in \mathbb{R}$, $a < b$, $h > 0$. Obţinem succesiv:

$$\mathcal{F}(\Pi;\omega) = F(\omega) = h\int_a^b e^{-j\omega t}dt = \frac{-h}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_a^b$$

$$= \frac{h}{j\omega}(e^{-j\omega a} - e^{-j\omega b}) = \frac{2h}{\omega}\sin\frac{\omega(b-a)}{2}e^{-j\omega\frac{a+b}{2}}$$

$$= h(b-a)sa\frac{\omega(b-a)}{2}e^{-j\omega\frac{a+b}{2}},\ \text{dacă } \omega \neq 0;$$

$$\mathcal{F}(\Pi; 0) = F(0) = h\int_a^b dt = h(b-a).$$

În concluzie,

$$\mathcal{F}(\Pi;\omega) = h(b-a)sa\frac{\omega(b-a)}{2}e^{-j\omega\frac{a+b}{2}},\ \forall\ a \in \mathbb{R}.$$

Pentru "*poartă simetrică*"

$$\Pi_{a;h}(t) = \begin{cases} h, & |t| \leq a \\ 0, & |t| > a \end{cases};\quad a > 0,\ h > 0,$$

$$\mathcal{F}(\Pi_{a;h}, \omega) = 2ahsa(a\omega),\ \forall\ \omega \in \mathbb{R}.$$

În cazul general, amplitudinea în frecvenţă este:

$$A(\omega) = A(\Pi;\omega) = |F(\omega)| = h(b-a)\left|sa\frac{\omega(b-a)}{2}\right|$$

iar faza în frecvenţă este:

$$\phi(\omega) = \phi(\Pi;\omega) = \arg F(\omega)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{a+b}{2}\omega \pmod{2\pi}, & \text{dacă } sa\dfrac{\omega(b-a)}{2} > 0 \\[2ex] \pi - \dfrac{a+b}{2}\omega \pmod{2\pi}, & \text{dacă } sa\dfrac{\omega(b-a)}{2} < 0 \end{cases}$$

1.6. Transformata Fourier integrală prin sinus. Transformata Fourier integrală prin cosinus

1.6.1. Definiţie

Fie $f \in L^1(0,\infty)$ un semnal dat şi f_0, f_1 prelungirile prin paritate, respectiv imparitate, ale lui f la $\mathbb{R}$.

(i) *Funcţia $F_{\cos} : (0,\infty) \to K$; $F_{\cos}(\omega) = \displaystyle\int_0^\infty f(t)\cos\omega t dt$, $\forall\ \omega > 0$ se numeşte* **transformata Fourier integrală prin cosinus** *a semnalului f.*

(ii) *Funcţia* $F_{\sin} : (0, \infty) \to K$*;* $F_{\sin}(\omega) = \displaystyle\int_0^\infty f(t) \sin \omega t dt$*,* $\forall\ \omega > 0$*, se numeşte* **transformata Fourier integrală prin sinus** *a semnalului* f*.*

De obicei, $F_{\cos}$ şi $F_{\sin}$ se notează, mai scurt, F_c şi F_s; de asemenea, se utilizează notaţiile $\widehat{f_c}$, respectiv $\widehat{f_s}$.

Punând $\omega = 2\pi\nu$, obţinem transformatele

$$\widetilde{F_c}(\nu) = \int_0^\infty f(t) \cos 2\pi\nu t dt \text{ şi } \widetilde{F_s}(\nu) = \int_0^\infty f(t) \sin 2\pi\nu t dt,\ \forall\ \nu > 0.$$

Utilizând operatorul Fourier $\mathcal{F}$ şi notând $\mathcal{F}_c f = \dfrac{1}{2}\mathcal{F} f_0$, $\mathcal{F}_s f = \dfrac{j}{2}\mathcal{F} f_1$, putem scrie:

$$F_c(\omega) = \widehat{f_c}(\omega) = \mathcal{F}_c(f;\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2} f_0; \omega\right)$$

$$F_s(\omega) = \widehat{f_s}(\omega) = \mathcal{F}_s(f;\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{j}{2} f_1; \omega\right).$$

Aceste relaţii arată că proprietăţile transformatelor Fourier integrale prin sinus şi cosinus decurg din proprietăţile transformatei Fourier integrale (Definiţia 1.1).

2 Proprietăţi ale transformării Fourier integrale

Enumerăm, în cadrul acestui paragraf, 10 proprietăţi (sau seturi de proprietăţi) privind transformarea Fourier, însoţite de unele interpretări sau comentarii.

2.1. Liniaritate, mărginire, continuitate

(i) *Dacă* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ *şi* $\alpha, \beta \in K$*, atunci are loc egalitatea*

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot \mathcal{F} f + \beta \cdot \mathcal{F} g$$

(ii) *Transformata Fourier integrală* $\mathcal{F} f : \mathbb{R} \to K$ *este o funcţie continuă şi mărginită pe* $\mathbb{R}$*, i.e.* $\mathcal{F} f \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$*,* $\forall\ f \in L^1(\mathbb{R})$*.*

2.2. Teorema lui Riemann (comportarea la infinit a transformatei Fourier)

Dacă $f \in L^1(\mathbb{R})$*, atunci* $\displaystyle\lim_{|\omega| \to \infty} |(\mathcal{F} f)(\omega)| = 0$*.*

2.3. Proprietăţi de deplasare (întârziere sau modulaţie)

Fie $f \in L^1(\mathbb{R})$ *şi* $\tau \in \mathbb{R}$ *date.*

(i) *Semnalul* $T_\tau f \in L^1(\mathbb{R})$*, unde* $(T_\tau f)(t) = f(t-\tau)$*,* $\forall\ t \in \mathbb{R}$ *se numeşte* **întârziatul** *(sau translatatul) în timp al semnalului* f *cu "*τ*" (se mai notează* f_τ*), Similar* $T_\tau \widehat{f} = T_\tau(\mathcal{F}f)$ *este* **întârziatul** *(sau* **translatatul***) în frecvenţă al semnalului* f *cu "*τ*". Operatorul* $T_\tau : K^{\mathbb{R}} \to K^{\mathbb{R}}$*, unde* $(T_\tau g)(t) = g(t-\tau)$*,* $\forall\ g \in K^{\mathbb{R}}$*,* $\forall\ t \in \mathbb{R}$ *se numeşte* **operatorul de translaţie cu** τ*.*

(ii) *Produsul* fe_τ *dintre semnalul* f *şi "armonica"* $e_\tau(t) = e^{j\tau t}$*,* $t \in \mathbb{R}$*, i.e.* $t \mapsto f(t)e^{j\tau t}$*, se numeşte* **modulaţia în timp** *a semnalului* f*, iar produsul* $\mathcal{F}f \cdot e_{-\tau} = \widehat{f}e_{-\tau}$*, i.e.* $\omega \mapsto (\mathcal{F}f)(\omega)e^{-j\omega\tau}$*, se numeşte* **modulaţia în frecvenţă** *a semnalului* f*. Operatorul* $M_\tau : K^{\mathbb{R}} \to K^{\mathbb{R}}$*, unde*

$$(M_\tau g)(t) = e^{j\tau t} g(t),\ \forall\ g \in K^{\mathbb{R}},\ \forall\ t \in \mathbb{R}$$

se numeşte **operator de modulaţie***.*

2.3.1. Deplasarea în domeniul timp

Dacă $f \in L^1(\mathbb{R})$ *şi* $\tau \in \mathbb{R}$*, atunci are loc egalitatea*

$$\mathcal{F}\{f(t-\tau);\omega\} = e^{-j\tau\omega}\mathcal{F}\{f(t);\omega\},\ \forall\ \omega \in \mathbb{R}.$$

Aşadar,

$$\mathcal{F}(T_\tau f) = \mathcal{F}f \cdot e_{-\tau} = M_{-\tau}(\mathcal{F}f),$$

adică translaţia (întârzierea) în domeniul timp atrage prin transfuriere modulaţia în frecvenţă.

Observăm, de asemenea, că

$$A(T_\tau f;\omega) = A(f;\omega) \text{ şi } \phi(T_\tau f;\omega) = \phi(f;\omega) - \tau\omega \pmod{2\pi}.$$

2.3.2. Deplasarea în domeniul frecvenţă

Dacă $f \in L^1(\mathbb{R})$ *şi* $\tau \in \mathbb{R}$*, atunci are loc egalitatea*

$$\mathcal{F}\{f(t);\omega-\tau\} = \mathcal{F}\{e^{j\tau t}f(t);\omega\},\ \forall\ \omega \in \mathbb{R}.$$

Aşadar,

$$T_\tau(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(M_\tau f),$$

adică modulaţia în timp atrage prin transfuriere întârzierea (translaţia) în frecvenţă; altfel spus, multiplicarea semnalului cu $e^{j\tau t}$ *produce "deplasarea" spectrului său cu "*τ*".*

2.4. Proprietăţi de similitudine (dilatarea sau comprimarea în timp). Transferul de simetrie

2.4.1. *Dacă $f \in L^1(\mathbb{R})$ şi $a \in \mathbb{R}^*$, atunci are loc egalitatea*

$$\mathcal{F}\{f(at);\omega\} = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}\left\{f(t);\frac{\omega}{a}\right\} \;\Leftrightarrow\; \widehat{f(at)} = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right),\ \forall\ \omega \in \mathbb{R}.$$

Înlocuind a cu $\frac{1}{a}$ obţinem forma echivalentă

$$\mathcal{F}\left\{f\left(\frac{t}{a}\right);\omega\right\} = |a|\mathcal{F}\{f(t);a\omega\},\ \forall\ \omega \in \mathbb{R}.$$

Aşadar $f(t) \leftrightarrow F(\omega) \;\Rightarrow\; f\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow |a|F(a\omega)$.

Astfel, luând $a > 0$, dacă semnalul f se "dilată" de a ori (adică graficul său se "întinde" de a ori), atunci spectrul lui f se "dilată" (creşte) în amplitudine de a ori şi se "comprimă" de a ori în frecvenţă. În teoria semnalelor, se spune că un semnal cu variaţie mai lentă (mai rapidă) în timp are în spectru componente de frecvenţă mai mică (respectiv mai mare).

2.4.2. Transferul de simetrie

Fie $f \in L^1(\mathbb{R})$ şi $\mathcal{F}f = \widehat{f} = F$ transformata sa Fourier. Funcţia (semnalul) $f_s : \mathbb{R} \to K$, $f_s(t) = f(-t)$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$ se numeşte simetrizata funcţiei (semnalului) f. Are loc egalitatea:

$$\mathcal{F}\{f(-t);\omega\} = \mathcal{F}\{f(t);-\omega\} = F(-\omega),\ \forall\ \omega \in \mathbb{R}$$

i.e. $\mathcal{F}f_s = (\mathcal{F}f)_s \;\Leftrightarrow\; \widehat{f_s} = (\widehat{f})_s$.

Altfel scris,

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \;\Rightarrow\; f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$$

sau

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \;\Rightarrow\; f_s(t) \leftrightarrow F_s(\omega).$$

Aşadar, prin transfuriere, are loc un transfer de simetrie din domeniul timp în domeniul frecvenţă.
Observăm că această proprietate este cazul particular de similitudine $a = -1$.

2.5. Proprietatea de dualitate

Dacă $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ *şi* $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$, *atunci are loc egalitatea:*

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}f;\omega) = 2\pi f(-\omega),\ \forall\ \omega \in \mathbb{R} \text{ sau } \mathcal{F}\mathcal{F}f = 2\pi f_s$$

Aşadar,

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \ \Rightarrow\ F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

sau

$$f(t) \leftrightarrow \widetilde{F}(\nu) \ \Rightarrow\ \widetilde{F}(t) \leftrightarrow f(-\nu).$$

Uneori această proprietate este denumită "**teorema simetriei**". Ea ne arată că un semnal f de forma spectrului F va avea spectrul de forma simetrizatei semnalului f (multiplicată, eventual, cu 2π).

2.6. Proprietăţi de paritate

Fie $f \in L^1(\mathbb{R})$ *şi* $F = \mathcal{F}f$.

2.6.1. (i) *Dacă* f *este pară, atunci şi* F *este pară.*

(ii) *Dacă* f *este impară, atunci şi* F *este impară.*

2.6.2. *Să presupunem că* f *este un semnal real* ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

(i) *Dacă* f *este pară, atunci* F *are valori reale, i.e.* $F(\omega) \in \mathbb{R}$, $\forall\ \omega \in \mathbb{R}$.

(ii) *Dacă* f *este impară, atunci* F *este imaginară, i.e.* $jF(\omega) \in \mathbb{R}$, $\forall\ \omega \in \mathbb{R}$ *(sau* $\mathrm{Re}F(\omega) = 0$, $\forall\ \omega \in \mathbb{R}$*).*

2.7. Trecerea la conjugata complexă

Fie $f \in L^1(\mathbb{R})$ *şi* $F = \mathcal{F}f$. *Notăm cu* $\overline{f}$ *şi* $\overline{F}$ *conjugatele complexe ale funcţiilor semnal, respectiv spectru (adică* $\overline{f}(t) = \overline{f(t)}$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$ *şi* $\overline{F}(\omega) = \overline{F(\omega)}$, $\forall\ \omega \in \mathbb{R}$*). Definim* **transformata Fourier conjugată** $\overline{\mathcal{F}}f$ *a semnalului* f *prin egalitatea* $(\overline{\mathcal{F}}f)(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}dt$, $\forall\ \omega \in \mathbb{R}$. *Operatorul* $\overline{\mathcal{F}} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$, $f \mapsto \overline{\mathcal{F}}f$, *se numeşte* **operatorul Fourier conjugat**.

Au loc relaţiile:

2.7.1. $\overline{\mathcal{F}}f = \overline{\mathcal{F}(\overline{f})} \ \Leftrightarrow\ \overline{\mathcal{F}}\,\overline{f} = \overline{\mathcal{F}f} \ \Leftrightarrow\ \overline{\mathcal{F}}\,\overline{f} = \overline{F}$.

2.7.2. $\mathcal{F}\{\overline{f}(t);\omega\} = \overline{\mathcal{F}f}(-\omega)$, $\forall\ \omega \in \mathbb{R}$ *i.e.* $\mathcal{F}\overline{f} = \overline{F}_s$.

2.7.3. *Transformata Fourier conjugată* $\overline{\mathcal{F}}f : \mathbb{R} \to K$ *este o aplicaţie continuă,* $\forall\ f \in L^1(\mathbb{R})$.

2.7.4. *Dacă f este un semnal real, atunci $\overline{F}(\omega) = F(-\omega)$, $\forall\ \omega \in \mathbb{R}$.*

Aşadar, pentru a determina spectrul $F(\omega)$ al unui semnal real, este suficient să cunoaştem valorile sale pe frecvenţe pozitive (adică $F(\omega)$, cu $\omega \geq 0$).

2.8. Teorema derivării semnalului

Dacă numărul natural n şi semnalul $f \in C^n(\mathbb{R})$ cu proprietatea $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall\ k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ sunt date, atunci are loc egalitatea

$$\mathcal{F}(f^{(n)}; \omega) = (j\omega)^n \mathcal{F}(f; \omega),\ \ \forall\ \omega \in \mathbb{R}.$$

2.9. Teorema integrării semnalului

Dacă $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, atunci

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} f(x)dx\, ;\, \omega \right) = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}(f; \omega),\ \ \forall\ \omega \in \mathbb{R}^*.$$

2.10. Teorema derivării spectrului (transformatei)

Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $f : \mathbb{R} \to K$ date. Dacă funcţiile $t \mapsto t^k f(t)$ sunt de clasă $L^1(\mathbb{R})$, $\forall\ k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ (pe scurt: $t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$), atunci transformata Fourier $\mathcal{F}f$ este de clasă $C^n(\mathbb{R})$ şi are loc egalitatea

$$(\mathcal{F}f)^{(n)} = \mathcal{F}((-jt)^n f).$$

O formă echivalentă a acestei egalităţi este:

$$j^n (\mathcal{F}f)^{(n)} = \mathcal{F}(t^n f(t))$$

sau

$$j^n (\mathcal{F}(f; \omega))^{(n)} = \mathcal{F}\{t^n f(t); \omega\},\ \ \forall\ \omega \in \mathbb{R}.$$

Observaţie. Transformata Fourier $\mathcal{F}f$ este de clasă $C^\infty(\mathbb{R})$ în fiecare din următoarele situaţii:

(i) $f \in L^1(\mathbb{R})$ şi supp$f$ este mărginit.

(ii) $t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Mai departe, vom demonstra Proprietăţile 2.8, 2.9 şi 2.10, iar demonstraţiile Proprietăţilor 2.1-2.7 se constituie în exerciţii de seminar.

Demonstraţia Teoremei 2.8

Integrând prin părţi, obţinem pentru $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$:

$$\mathcal{F}\{f^{(k)}(t); \omega\} = \int_{-\infty}^{\infty} (f^{(k-1)}(t))' e^{-j\omega t} dt$$

$$= f^{(k-1)}(t) e^{j\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k-1)}(t) e^{-j\omega t} dt,$$

deci

$$\mathcal{F}(f^{(k)}; \omega) = f^{(k-1)}(t) e^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \mathcal{F}(f^{(k-1)}; \omega) \tag{2.8.1}$$

Demonstrăm că $\lim\limits_{|t|\to\infty} f^{(k-1)}(t) e^{-j\omega t} = 0$. Din egalitatea

$$\int_0^t f^{(k)}(x) dx = f^{(k-1)}(t) - f^{(k-1)}(0), \ t \in \mathbb{R}$$

şi din faptul că există

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t f^{(k)}(x) dx = \int_0^{\infty} f^{(k)}(x) dx$$

(deoarece $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$), deducem că există $\lim\limits_{t\to\infty} f^{(k-1)}(t)$; această ultimă limită este în mod necesar nulă, întrucât $f^{(k-1)} \in L^1(\mathbb{R})$; într-adevăr, dacă $\lim\limits_{t\to\infty} |f^{(k-1)}(t)| = a \neq 0$, atunci există $t_0 > 0$ astfel încât $|f^{(k-1)}(t)| \geq \dfrac{a}{2}$, $\forall\ t \geq t_0$, de unde rezultă relaţia

$$\int_0^{\infty} |f^{(k-1)}(t)| dt \geq \int_{t_0}^{\infty} |f^{(k-1)}(t)| dt \geq \frac{a}{2} \int_{t_0}^{\infty} dt = \infty,$$

care contrazice ipoteza $f^{(k-1)} \in L^1(\mathbb{R})$. Aşadar, $\lim\limits_{t\to\infty} f^{(k-1)}(t) = 0$; similar se arată că $\lim\limits_{t\to-\infty} f^{(k-1)}(t) = 0$. Astfel, $\lim\limits_{|t|\to\infty} f^{(k-1)}(t) = 0$ relaţie care împreună cu $|e^{-j\omega t}| = 1$ conduce la egalitatea $\lim\limits_{|t|\to\infty} f^{(k-1)}(t) e^{-j\omega t} = 0$; de aici şi din (2.8.1) obţinem

$$\mathcal{F}(f^{(k)}; \omega) = j\omega \mathcal{F}(f^{(k-1)}; \omega), \ 1 \leq k \leq n.$$

Scriind această egalitate pentru $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ şi înmulţind, membru cu membru, cele n egalităţi astfel obţinute, rezultă relaţia din enunţ.

Demonstraţia Teoremei 2.9

Funcţia $g : \mathbb{R} \to K$, $g(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$ este de clasă $C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$; în plus, $g'(t) = f(t)$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$. Din Teorema derivării semnalului 2.8, pentru $n = 1$, obţinem $\mathcal{F}(g'; \omega) = j\omega\mathcal{F}(g; \omega) \ \Leftrightarrow\ \mathcal{F}(g; \omega) = \dfrac{1}{j\omega}\mathcal{F}(f; \omega)$, $\forall\ \omega \neq 0$, adică egalitatea din enunţ.

Demonstraţia Teoremei 2.10

Pentru fiecare $t \in \mathbb{R}$ fixat, funcţia $g_t : \mathbb{R} \to K$, $g_t(\omega) = e^{-j\omega t} f(t)$ este indefinit derivabilă şi $g_t^{(k)}(\omega) = (-jt)^k g_t(\omega)$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$; astfel, $|g_t^{(k)}(\omega)| = |t^k g_t(\omega)| = |t^k e^{-j\omega t} f(t)| \leq t^k f(t)|$ şi cum funcţia $t \mapsto t^k f(t)$, $0 \leq k \leq n$, este (prin ipoteză) de clasă $L^1(\mathbb{R})$, urmează că $g_t^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$. Ţinând seama de proprietăţile integralelor improprii cu parametru, putem scrie:

$$\mathcal{F}(f; \omega))^{(n)} = \frac{d^n}{d\omega^n} \int_{-\infty}^{\infty} g_t(\omega)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^n}{d\omega^n} g_t(\omega) \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (-jt)^n e^{-j\omega t} f(t)dt = \mathcal{F}\{(-jt)^n f(t); \omega\}.$$

3 Transformarea Fourier integrală inversă

Transformarea Fourier asociază unui semnal $f \in L^1(\mathbb{R})$ o funcţie-spectru $F : \mathbb{R} \to K$, $F = \mathcal{F}f$, continuă şi mărginită, dar nu obligatoriu de clasă $L^1(\mathbb{R})$. Examinăm acum problema existenţei unei transformări similare, care să asocieze spectrului $F(\omega)$ semnalul originar $f(t)$. În acest scop reluăm Formula integrală a lui Fourier (FIF), în conformitate cu Teorema 5.1 şi Observaţia 5.2 din Capitolul 1; astfel, relaţia (5.2) din Cap.1 admite, cu limbajul transformatei Fourier următoarea reprezentare.

3.1. Teoremă

Pentru orice funcţie-semnal $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, *având proprietatea* $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$, *are loc egalitatea:*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \ \forall\ t \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Utilizând operatorul conjugat $\overline{\mathcal{F}}$ (definit la §2.7), relaţia (3.1) se scrie

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f;t),\ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

adică

$$f = \left(\frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\right)(f),\ \forall\, f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \text{ astfel încât } \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}). \tag{3.2}$$

Relaţia (3.2) ne sugerează introducerea următoarei noţiuni:

3.2. Definiţie

Fie $g \in L^1(\mathbb{R})$ o funcţie dată. Funcţia $G : \mathbb{R} \to K$, $G = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}g$, i.e.

$$G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{j\omega t}d\omega,\ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

se numeşte **transformata Fourier integrală inversă** *asociată funcţiei g. Notăm, simbolic, $G(t) = \mathcal{F}^{-1}(g;t) = \mathcal{F}^{-1}\{g(\omega);t\}$.*

Astfel, relaţia (3.1) devine:

$$f(t) = (\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f))(t) = (\mathcal{F}^{-1}F)(t),\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \text{ sau } f = (\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F})(f),$$

ceea ce sugerează schema $f \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \mathcal{F}f \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\mapsto} f$ şi justifică atât adjectivul "inversă" asociat noţiunii introduse în Definiţia 3.2, cât şi notaţia adoptată.

În realitate însă, simbolul $\mathcal{F}^{-1}$ nu semnifică inversa în sens clasic a operatorului $\mathcal{F}$: într-adevăr, operatorul $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ nu este injectiv, deci nu este nici inversabil. De aceea, ne interesează să determinăm anumite submulţimi (sau subspaţii) X ale spaţiului $L^1(\mathbb{R})$ astfel încât restricţia lui $\mathcal{F}$ la X să fie injectivă.

Se demonstrează ([1], [24], [44]) că aplicaţia $\mathcal{F} = \mathcal{F}|_X : X \to Y$, cu $Y = \mathcal{F}(X)$, este injectivă (deci inversabilă) dacă $X = L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ sau dacă X este mulţimea funcţiilor de clasă $L^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $\{f', f''\} \subseteq L^1(\mathbb{R})$; în ultima situaţie, se arată că $Y \subset L^1(\mathbb{R})$.

O rezolvare elegantă a inversabilităţii operatorului $\mathcal{F}$ are loc dacă $X = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sau $X = L^2(\mathbb{R})$, situaţie în care $Y = X$, [1], [24], [44].

3.3. Transformatele Fourier integrale inverse prin sin şi cos

Fie $f \in L^1(0,\infty)$ o funcţie-semnal dată şi $\mathcal{F}_s f$, $\mathcal{F}_c f$ transformatele sale Fourier prin sin, respectiv cos.

Formula integrală Fourier din Corolarele 5.5 şi 5.6, Capitolul 1, admite următoarele reprezentări:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}(\mathcal{F}_c f)(\omega)\cos\omega t d\omega,\ \forall\ t > 0, \tag{3.3}$$

respectiv

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}(\mathcal{F}_s f)(\omega)\sin\omega t d\omega,\ \forall\ t > 0. \tag{3.4}$$

3.3.1. Definiţie

Dacă funcţia $g \in L^1(0,\infty)$ *este dată, atunci funcţiile* $G_{\cos} : (0,\infty) \to K$ *şi* $G_{\sin} : (0,\infty) \to K$ *date de egalităţile*

$$G_{\cos}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} g(\omega)\cos\omega t d\omega,\ \forall\ t > 0$$

şi

$$G_{\sin}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} g(\omega)\sin\omega t d\omega,\ \forall\ t > 0$$

se numesc **transformatele Fourier integrale inverse prin** cos**, respectiv** sin **ale funcţiei** g *şi se notează* $\mathcal{F}_c^{-1}\{g(\omega);t\}$*, respectiv* $\mathcal{F}_s^{-1}\{g(\omega);t\}$*.*

Astfel, relaţiile (3.3) şi (3.4) devin:

$$f(t) = \mathcal{F}_c^{-1}\{\mathcal{F}_c(f;\omega);t\},\ \forall\ t > 0,$$

respectiv

$$f(t) = \mathcal{F}_s^{-1}\{\mathcal{F}_s(f;\omega);t\},\ \forall\ t > 0,$$

ceea ce justifică denumirea dată funcţiilor $G_{\cos}$ şi $G_{\sin}$.

3.4. Exemple. Aplicaţii

3.4.1. Exemplu

Să se determine spectrul, amplitudinea şi faza în frecvenţă pentru funcţia (semnalul-timp)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\quad f(t) = \frac{1}{t^2 + 4t + 8},\quad t \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\omega t}}{t^2 + 4t + 8} dt$$

(i) Dacă $\omega < 0$, atunci din (6.2) capitolul 5, partea întâi, cu $\lambda = -\omega$ primim:

$$F(\omega) = 2\pi j Rez \left(\frac{e^{-j\omega z}}{z^2 + 4z + 8}; -2 + 2j \right) = 2\pi j \frac{e^{-j\omega z}}{2z + 4} \Big|_{z=-2+2j}$$

$$= 2\pi j \frac{e^{-j\omega(-2+2j)}}{4j} = \frac{\pi}{2} e^{2\omega} e^{2j\omega} = \frac{\pi}{2} e^{2\omega} (\cos 2\omega + j \sin 2\omega).$$

(ii) Dacă $\omega > 0$, punând $t = -x$ în $F(\omega)$ rezultă:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega x}}{x^2 - 4x + 8} dx$$

şi din (6.2), capitolul 5, partea întâi, cu $\lambda = \omega$ obţinem:

$$F(\omega) = 2\pi j Rez \left(\frac{e^{j\omega t}}{z^2 - 4z + 8}; 2 + 2j \right) = 2\pi j \frac{e^{j\omega z}}{2z - 4} \Big|_{z=2+2j}$$

$$= 2\pi j \frac{e^{j\omega(2+2j)}}{4j} = \frac{\pi}{2} e^{-2\omega} e^{2j\omega} = \frac{\pi}{2} e^{-2\omega} (\cos 2\omega + j \sin 2\omega).$$

(iii) Dacă $\omega = 0$, utilizând (5.6), cap.5, partea întâi deducem:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 4t + 8} dt = 2\pi j Rez \left(\frac{1}{z^2 + 4z + 8}; -2 + 2j \right)$$

$$= 2\pi j \frac{1}{2z + 4} \Big|_{z=-2+2j} = 2\pi j \frac{1}{4j} = \frac{\pi}{2}.$$

Din (i), (ii) şi (iii) rezultă

$$F(\omega) = \frac{\pi}{2} e^{-2|\omega|} e^{2j\omega}, \ \forall \ \omega \in \mathbb{R}.$$

Mai departe,

$$A(\omega) = |F(\omega)| = \frac{\pi}{2} e^{-2|\omega|}, \ \forall \ \omega \in \mathbb{R}$$

şi

$$\phi(\omega) = \arg F(\omega) = 2\omega \quad (\text{mod } 2\pi).$$

3.4.2. Exemplu

Să se calculeze transformata Fourier prin sinus a semnalului

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{C},\quad f(t)=\frac{1}{t(t^4+4)},\quad t>0.$$

Rezolvare

$$F(\omega)=\int_0^\infty \frac{\sin\omega t}{t(t^4+4)}dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin\omega t}{t(t^4+4)}dt,\quad \omega>0,$$

utilizând paritatea integrandului (integrala se ia în valoare principală).

Mai departe, deoarece funcţia $t\mapsto\dfrac{\cos\omega t}{t(t^4+4)}$ este impară, primim via (6.2), cap.5, partea întâi:

$$F(\omega)=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{j\omega t}}{t(t^4+4)}dt=\frac{1}{2j}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{j\omega t}}{t(t^4+4)}dt$$

$$=\frac{1}{2j}\pi j[2Rez(f;-1+j)+2Rez(f;1+j)+Rez(f;0)],$$

unde $f(z)=\dfrac{e^{j\omega z}}{z(z^4+4)}$, $\omega>0$; într-adevăr ecuaţia $z^4+4=0 \ \Leftrightarrow\ (z^2+2)^2-(2z)^2=0 \ \Leftrightarrow\ (z^2-2z+2)(z^2+2z+2)=0$ are rădăcinile $1\pm j$ şi $-1\pm j$, deci f are polii simpli 0, $1\pm j$, $-1\pm j$. Întrucât

$$Rez(f;0)=\left.\frac{e^{j\omega z}}{z'(z^4+4)}\right|_{z=0}=\frac{1}{4}$$

iar pentru $z_1\in\{-1+j,1+j\}$ avem

$$Rez(f;z_1)=\left.\frac{e^{j\omega z}}{z(z^4+4)'}\right|_{z=z_1}=\frac{e^{j\omega z_1}}{4z_1^4}=\frac{e^{j\omega z_1}}{4(-4)}=-\frac{1}{16}e^{j\omega z_1},$$

obţinem:

$$F(\omega)=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{8}(e^{-j\omega-\omega}+e^{j\omega-\omega})+\frac{1}{4}\right]$$

$$=\frac{\pi}{8}\left(1-e^{-\omega}\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}\right)=\frac{\pi}{8}(1-e^{-\omega}\cos\omega),\quad \forall\ \omega>0.$$

3.4.3. *Să se determine semnalul $f \in L^1(\mathbb{R})$ care satisface egalitatea*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \omega^2 e^{-4\omega^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Observaţie. O egalitate de forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = g(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, unde $g \in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal dat, iar $f \in L^1(\mathbb{R})$ este semnalul-funcţie necunoscut se numeşte **ecuaţie integrală Fourier**. Pentru rezolvare observăm că egalitatea se scrie sub forma $\mathcal{F}(f;\omega) = g(\omega)$, deci $f(t) = \mathcal{F}^{-1}(g;t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Alte tipuri de *ecuaţii integrale Fourier* sunt

$$\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t dt = g(\omega),\ \omega > 0 \quad \text{şi} \quad \int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t dt = g(\omega),\ \omega > 0,$$

unde $f, g \in L^1(0,\infty)$. Soluţiile lor sunt

$$f(t) = \mathcal{F}_c^{-1}(g;t),\ t > 0 \quad \text{respectiv} \quad f(t) = \mathcal{F}_s^{-1}(g;t),\ t > 0.$$

Rezolvare. Avem $f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\omega^2 e^{-4\omega^2};t)$, deci:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 e^{-4\omega^2} e^{j\omega t}d\omega \overset{\omega=-x}{=\!=\!=}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-4x^2} e^{-jxt}dx = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(x^2 e^{-4x^2};t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}j^2(\mathcal{F}(e^{-4x^2};t))'' = -\frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}(e^{-4x^2};t))'',$$

în conformitate cu Teorema 2.10, unde $n = 2$, iar rolurile lui t şi ω sunt preluate, respectiv, de x şi t. Obţinem

$$\mathcal{F}(e^{-4x^2};t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2}e^{-jxt}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(2x+\frac{jt}{4}\right)^2 - \frac{t^2}{16}}dx$$

$$\overset{2x+\frac{jt}{4}=u}{=\!=\!=\!=} e^{-t^2/16}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-t^2/16},$$

deci

$$f(t) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4\pi}(e^{-t^2/16})'' = \frac{1}{256\sqrt{\pi}}(8-t^2)e^{-t^2/16}.$$

3.4.4. *Să se rezolve ecuaţia integrală Fourier*

$$\int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t dt = \frac{1}{\omega(\omega^2+a^2)^2}, \quad \omega > 0,\ a > 0 \textit{ dat.}$$

Rezolvare. Avem $f(t) = \mathcal{F}_s^{-1}\left(\dfrac{1}{\omega(\omega^2+a^2)^2}; t\right)$, deci:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega t}{\omega(\omega^2+a^2)^2}d\omega = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{j\omega t}}{\omega(\omega^2+a^2)^2}d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left[2\pi j\mathrm{Rez}\left(\frac{e^{j\omega t}}{\omega(\omega^2+a^2)^2}; aj\right) + \pi j\mathrm{rez}\left(\frac{e^{j\omega t}}{\omega(\omega^2+a^2)^2}; 0\right)\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[2\lim_{\omega\to aj}\left(\frac{e^{j\omega t}}{\omega(\omega+aj)^2}\right)' + \frac{e^{j\omega t}}{\omega'(\omega^2+a^2)^2}\Big|_{\omega=0}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[2\frac{e^{j\omega t}[jt\omega(\omega+aj)-(\omega+aj)-2\omega]}{\omega^2(\omega+aj)^3}\Big|_{\omega=aj} + \frac{1}{a^4}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left(2\frac{e^{-at}(-2a^2tj-4aj)}{a^2\cdot 8a^3j} + \frac{1}{a^4}\right) = \frac{1}{a^4}\left[1 - e^{-at}\left(1+\frac{a}{2}t\right)\right]$$

4 Transformata Fourier a produsului de convoluţie

Reamintim că produsul de convoluţie a două semnale $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ este semnalul $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, definit prin (vezi §1.4, Cap.1):

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^\infty f(x)g(t-x)dx,\ \forall\ t\in\mathbb{R}.$$

Notăm $F(\omega) = \mathcal{F}(f;\omega)$ şi $G(\omega) = \mathcal{F}(g;\omega)$.

4.1. Teorema produsului de convoluţie

Dacă $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, atunci $f*g \in L^1(\mathbb{R})$ şi are loc egalitatea

$$\mathcal{F}(f*g;\omega) = \mathcal{F}(f;\omega)\cdot\mathcal{F}(g;\omega),\ \forall\ \omega\in\mathbb{R},$$

adică $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}f\cdot\mathcal{F}g$.

Demonstraţie

Utilizând Teorema lui Fubini şi Proprietatea 2.3.1, obţinem:

$$\mathcal{F}(f*g;\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}dt\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(t-x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}g(t-x)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-j\omega x}(\mathcal{F}g)(\omega)dx$$

$$=(\mathcal{F}g)(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-j\omega x}dx=(\mathcal{F}g)(\omega)(\mathcal{F}f)(\omega)$$

$$=\mathcal{F}(f;\omega)\mathcal{F}(g;\omega),\ \forall\ \omega\in\mathbb{R}.$$

4.2. Teoremă

Dacă $f,g\in\mathcal{S}$, atunci $\mathcal{F}f*\mathcal{F}g=2\pi\mathcal{F}(fg)$.

Demonstraţie

$$(\mathcal{F}f*\mathcal{F}g)(\omega)=(F*G)(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)G(\omega-x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-j(\omega-x)t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-j\omega t}dt\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{jtx}dx$$

$$=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-j\omega t}\mathcal{F}^{-1}(F;t)dt=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f;t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}g(t)f(t)e^{-j\omega t}dt=2\pi\mathcal{F}(fg)(\omega),\ \forall\ \omega\in\mathbb{R},$$

deci $\mathcal{F}f*\mathcal{F}g=2\pi\mathcal{F}(fg)$.

4.3. Observaţii

(i) Egalitatea din Teorema 4.2 are loc, de asemenea, dacă $f,g\in L^1(\mathbb{R})$, iar $\mathcal{F}f$ şi $\mathcal{F}g$ sunt de clasă $L^1(\mathbb{R})\cap C(\mathbb{R})$.

(ii) Aplicând $\mathcal{F}^{-1}$ egalităţilor din Teoremele 4.1 şi 4.2 primim, $\forall\ f,g\in\mathcal{S}$:

$$(f*g)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)G(\omega)e^{j\omega t}d\omega,\ \forall\ t\in\mathbb{R}$$

şi

$$f(t)g(t) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}^{-1}(F * G; t) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}(F * G)(\omega)e^{j\omega t}d\omega, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Prima egalitate are loc în condiţiile mai generale $f \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$.

4.4. Teorema lui Parseval

Dacă $f \in L^2(\mathbb{R})$, atunci are loc egalitatea

$$2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}(f,\omega)|^2d\omega$$

sau

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{\mathcal{F}}(f;\nu)|^2d\nu.$$

Demonstraţie

În prima egalitate din Observaţia 4.3.(ii) luăm $t = 0$ şi obţinem

$$2\pi\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)G(\omega)d\omega. \tag{4.1}$$

Fie acum $g(t) = \overline{f}(-t)$; rezultă

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{\overline{f}(-t);\omega\} = \mathcal{F}\{\overline{f}(t);-\omega\} = (\overline{\mathcal{F}f})(\omega) = \overline{F}(\omega),$$

în conformitate cu Proprietăţile 2.4.2 (aplicate funcţiei $\overline{f}$) şi 2.7.2 (unde $\omega := -\omega$). Astfel (4.1) devine:

$$2\pi\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{f}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\overline{F}(\omega)d\omega,$$

adică egalitatea din enunţ (întrucât $|z|^2 = z\cdot\overline{z}, \ \forall\, z \in \mathbb{C}$).

4.5. Interpretarea energetică a Teoremei lui Parseval

Energia unui semnal $f \in L^2(\mathbb{R})$ este (vezi §2.3, Cap.1)

$$E(f) = \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt.$$

Pe de altă parte, "mărimea" $\frac{1}{2\pi}|\mathcal{F}f(\omega)|^2 d\omega$ reprezintă energia degajată de armonicele lui $f(t)$ situate într-o bandă de frecvenţă de lăţime $d\omega$ şi conţinând frecvenţa ω. Funcţia $S(\omega) = |(\mathcal{F}f)(\omega)|^2$ se numeşte *densitatea spectrală a energiei* sau *caracteristica spectrală energetică*, iar

$$E(\mathcal{F}f) = E(F) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{F}(\nu)|^2 d\nu$$

este *energia spectrală*.

Astfel, *formula lui Parseval* (Teorema 4.4) *se scrie sub forma*

$$E(f) = E(\mathcal{F}f) \;\Leftrightarrow\; E(f) = E(F)$$

şi exprimă o lege de conservare a energiei prin transfuriere.

5 Teorema eşantionării

5.1. Introducere

Fiind dat un semnal periodic de energie finită, i.e. $f \in L^2_P(0,T)$, s-a demonstrat (Secţiunea 4.1, Cap.1) că, notând

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp\left(-\frac{2\pi j}{T}nt\right)dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

are loc egalitatea

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi j}{T}nt\right).$$

Astfel, semnalul periodic f este bine determinat prin cunoaşterea spectrului său, deci printr-o *informaţie spectrală discretă* (Secţiunea 4.3, Cap.1).

Se pune problema unui rezultat similar pentru semnale-funcţie continuale f care nu sunt periodice. Menţionăm că pentru prelucrarea numerică a semnalelor continuale, se efectuează o eşantionare în domeniul timp. Fie $x_n = f(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$; la fiecare T secunde semnalul este transformat într-un şir de impulsuri (echidistante), de pas T. În timp real, între fiecare pereche de eşantioane consecutive $(nT, (n+1)T)$, $n \in \mathbb{Z}$, calculatorul prelucrează informaţia obţinută anterior. Întrebarea este dacă (şi în ce condiţii) prin eşantionare nu se pierde informaţie, adică în ce condiţii semnalul-funcţie f poate fi reconstruit din eşantioanele sale.

Teorema care urmează reprezintă un rezultat fundamental din teoria semnalelor afirmând, în esenţă, că *pentru o clasă largă de semnale prin eşantionare nu se pierde informaţie.* Teorema eşantionării a fost obţinută, în forma sa matematică, de către matematicianul englez Whittacker (1915) şi a fost regăsită de către inginerul rus Kotelnikov (1933); ea a fost aplicată în tehnologia comunicaţiilor de către inginerul american Shannon, începând cu mijlocul secolului al XX-lea.

Înainte de a formula teorema eşantionării numită, după autorii săi, Teorema WKS, introducem următoarea noţiune:

5.2. Definiţie

Fie semnalul $f \in L^2(\mathbb{R})$ *şi numărul* $b > 0$ *date. Spunem că semnalul (de energie finită)* f *este cu* **bandă mărginită de frecvenţă de lăţime** $2b$ *sau că* f **este limitat în bandă de lăţime** $2b$ *dacă* $(\mathcal{F}f)(\omega) = 0$, $\forall\ \omega \in \mathbb{R}$ *cu* $|\omega| \geq b$ *(altfel spus,* $\mathrm{supp}\mathcal{F}f \subseteq [-b, b]$*).*

Similar, pentru $a > 0$ dat, un semnal $f : \mathbb{R} \to K$, cu $\mathrm{supp}f \subseteq [-a, a]$ se numeşte *semnal de durată finită*, concentrat în intervalul $[-a, a]$.

5.3. Teorema eşantionării (Teorema WKS)

Fie $b > 0$ *un număr real dat şi* $T = \dfrac{\pi}{b}$ *(numit "pas de eşantionare"). Dacă* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *este un semnal (de energie finită) cu bandă mărginită de frecvenţă de lăţime* $2b$*, atunci are loc egalitatea:*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) sa[b(t - nT)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) sa(bt - n\pi), \tag{5.1}$$

cu convergenţă în $L^2(\mathbb{R})$*.*

Dacă, în plus, f *este o funcţie continuă, atunci egalitatea (5.1) are loc punctual, pentru orice* $t \in \mathbb{R}$*.*

5.4. Corolar

În ipotezele Teoremei WKS are loc **formula de interpolare a lui Cartright***:*

$$f(t) = \frac{\sin bt}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{(-1)^n}{t - nT}.$$

Demonstraţie

Avem

$$sa[b(t-nT)] = \frac{\sin(bt-n\pi)}{bt-n\pi} = \frac{(-1)^n \sin bt}{b(t-nT)} = \frac{\sin bt}{b}\frac{(-1)^n}{t-nT},$$

ceea ce încheie demonstraţia.

5.5. Observaţie

Deoarece seria care exprimă $f(t)$ în Teorema WKS (formula (5.1)) are o infinitate de termeni, în practică se utilizează o aproximare a sa, anume:

$$f(t) \approx \sum_{n=-N}^{N} f(nT) sa(bt-n\pi),$$

cu $N > 1$ potrivit ales.

Exemplu. Fie $f(t) = e^{-2|t|}$, $t \in \mathbb{R}$. Se obţine $F(\omega) = \dfrac{4}{\omega^2+4}$. Luăm $b = 1500Hz = \dfrac{3}{2}(ms)^{-1}$, deci $T = \dfrac{\pi}{b} = \dfrac{2\pi}{3}ms$. Putem admite, de asemenea, că f este "concentrat" în intervalul $I = [-20, 20]$, deoarece $f(t) \approx 0$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$ cu $|t| > 20$. Alegem momentele de eşantionare astfel încât $-20 \leq nT \leq 20 \Leftrightarrow |n| \leq \dfrac{20}{T} = \dfrac{30}{\pi} \approx 9,5$. În concluzie, semnalul $f(t)$ este bine determinat prin cele 19 eşantioane $f\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right) = \exp\left(-\dfrac{4\pi}{3}|n|\right)$, $|n| \leq 9$:

$$f(t) \approx \sum_{n=-9}^{9} f\left(\frac{2n\pi}{3}\right) sa\left(\frac{3}{2}t - n\pi\right).$$

5.6. O reformulare a Teoremei WKS

Fie $\nu_{\max} = \dfrac{\omega_{\max}}{2\pi} = \dfrac{b}{2\pi}$. Frecvenţa $\nu_{\max}$ se numeşte **frecvenţa lui Nyquist**, iar $\nu_s = 2\nu_{\max}$ se numeşte **frecvenţa lui Shannon**. Teorema WKS poate fi enunţată astfel:

Orice semnal continuu $f(t)$, limitat în bandă, având frecvenţa maximă $\nu_{\max} = \dfrac{b}{2\pi}$ poate fi reconstituit din eşantioanele sale cu condiţia ca pasul (rata) de eşantionare să fie egal cu $\dfrac{1}{\nu_s}$.

6 Complemente privind transformata Fourier

6.1. Localizare în timp şi frecvenţă. Principiul indeterminismului

Fie $f \in L^2(\mathbb{R})$ un semnal dat, $E(f) = \|f\|_2^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ energia sa şi $F(\omega) = (\mathcal{F}f)(\omega) = \widehat{f}(\omega)$ spectrul său Fourier. Presupunem că funcţiile $tf(t)$ şi $\omega F(\omega)$ sunt de clasă $L^2(\mathbb{R})$. Definim următoarele noţiuni relativ la semnalul f:

(i) Centrul temporal: $t^* = \dfrac{1}{E(f)} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t|f(t)|^2 dt$

(ii) Raza temporală: $\Delta t > 0$, unde

$$(\Delta t)^2 = \frac{1}{E^2(f)} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*)^2 |f(t)|^2 dt.$$

(iii) Durata utilă: intervalul de timp $[t^* - \Delta t, t^* + \Delta t]$.

Similar se definesc noţiunile de **centru frecvenţial** ω^* (sau ν^*), **rază frecvenţială** $\Delta\omega$ (sau $\Delta\nu$) şi **bandă de frecvenţă utilă** $[\omega^* - \Delta\omega, \omega^* + \Delta\omega]$ (sau $[\nu^* - \Delta\nu, \nu^* + \Delta\nu]$), prin înlocuirea în integralele de la (i) şi (ii), a lui t cu ω (sau $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$) şi a lui $f(t)$ cu $F(\omega)$ (sau $\widetilde{F}(\nu) = F(2\pi\nu)$, vezi secţiunea 1.1).

Următorul rezultat arată că semnalele nenule nu pot fi localizate exact atât în timp, cât şi în frecvenţă (de altfel, supp$f$ şi supp$(\mathcal{F}f)$ nu pot fi simultan mărginite, dacă $f \neq 0$).

6.1.1. Teoremă (Principiul indeterminismului sau Principiul incertitudinii)

Dacă $f : \mathbb{R} \to K$ este un semnal nenul astfel încât

$$\{f, f', f(t), \omega(\mathcal{F}f)(\omega)\} \subseteq L^2(\mathbb{R}),$$

atunci are loc inegalitatea

$$(\Delta t)(\Delta\nu) \geq \frac{1}{4\pi}.$$

O formă echivalentă a inegalităţii de mai sus este $(\Delta t)(\Delta\omega) \geq \dfrac{1}{2}$.

Interpretare fizică: dacă $\Delta\nu$ este "mic" (adică banda de frecvenţă este restrânsă (concentrată)), atunci Δt (adică banda utilă a semnalului în timp) trebuie să fie "mare". Reciproc, pentru a concentra studiul în timp al unui semnal, trebuie să mărim gama de frecvenţe.

6.2. Corelaţie. Spectru încrucişat

Dacă $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, sunt semnale date, definim **funcţia** lor **de corelaţie** (numită şi **funcţie de intercorelaţie**) prin

$$C(f,g;t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)\overline{g}(\tau)d\tau, \ \forall\ t \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Funcţia $t \mapsto A(f;t) = C(f,f;t)$, $t \in \mathbb{R}$, se numeşte **funcţia de autocorelaţie**.

Observăm că $C(f,g;t) = C(g,f;-t)$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$.

Funcţia de corelaţie evaluează din punct de vedere energetic relaţia dintre semnalele f şi g.

Aplicând transformata Fourier egalităţii (9.1) şi notând

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f;\omega), \quad G(\omega) = \mathcal{F}(g;\omega) \quad \text{şi} \quad S(f,g;\omega) = \mathcal{F}(C;\omega),$$

obţinem:

$$S(f,g;\omega) = F(\omega)\overline{G}(\omega), \ \forall\ \omega \in \mathbb{R}. \tag{6.2}$$

Funcţia $S(f,g;\cdot)$ dată prin relaţia (6.2) se numeşte **spectrul încrucişat (cross-spectrum)** al semnalelor f şi g şi se utilizează în studiul semnalului vocal. **Autospectrul** semnalului f este

$$AS(f;\omega) = S(f,f;\omega) = F(\omega)\overline{F}(\omega) = |F(\omega)|^2, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

adică pătratul amplitudinii lui f (Secţiunea 1.2).

7 Transformata Fourier multidimensională

Fiind dat numărul real $p > 0$, notăm cu $L^p(\mathbb{R}^n)$ mulţimea semnalelor n-dimensionale $f : \mathbb{R}^n \to K$, cu proprietatea că funcţia f^p este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}^n$, adică integrala

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^p dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |f(t_1, t_2, \ldots, t_n)|^p dt_1 dt_2 \ldots dt_n$$

există şi este finită.

Notăm $(\omega, t) = \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \cdots + \omega_n t_n$, unde $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$.

7.1. Definiţie

Fiind dat semnalul $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, funcţia* $F_n : \mathbb{R}^n \to K$,

$$F_n(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-j(\omega,t)} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}^n, \tag{7.1}$$

se numeşte **transformata Fourier integrală** n**-dimensională** *(TFI-n) a semnalului* f.

Notaţie. $F_n(\omega) = \widehat{f}_n(\omega) = (\mathcal{F}_n f)(\omega) = \mathcal{F}_n(f;\omega)$.

7.2. Proprietăţi ale TFI-n

(i) *Liniaritatea*

$$\mathcal{F}_n(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}_n(f) + \beta \mathcal{F}_n(g), \ \forall\ f, g \in L^1(\mathbb{R}^n), \ \forall\ \alpha, \beta \in K$$

(ii) *Pentru orice* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, funcţia* $\mathcal{F}_n f = F_n$*, definită prin (7.1), este continuă, mărginită şi tinde la zero spre infinit.*

(iii) *Dacă* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$*, atunci are loc formula de inversare (reconstrucţie)*

$$f(t) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F} f)(\omega) e^{j(\omega,t)} d\omega.$$

7.3. Transformata Fourier bidimensională

Notând $(x, y) = (t_1, t_2)$ şi $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, primim $\forall\ f \in L^1(\mathbb{R}^2)$:

$$\mathcal{F}_2\{f(x,y);\omega\} = (\mathcal{F}_2 f)(\omega_1, \omega_2) = F_2(\omega_1, \omega_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j(x\omega_1 + y\omega_2)} dxdy, \ \forall\ \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Dacă $T \in \mathcal{S}_2'$ este o distribuţie bidimensională, definim transformata Fourier bidimensională a distribuţiei T prin:

$$\langle \mathcal{F}_2 T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}_2 \varphi \rangle, \ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}_2.$$

7.3.1. Proprietăţi ale transformatei Fourier bidimensionale

(i) Liniaritatea, vezi 7.2.(i)
(ii) Separabilitatea $\mathcal{F}_2\{f(x)g(y);\omega_1,\omega_2\} = \mathcal{F}(f;\omega_1)\mathcal{F}(g;\omega_2)$

(iii) Scalarea $\mathcal{F}_2\{f(ax,by);\omega_1,\omega_2\} = \dfrac{1}{|a||b|}\mathcal{F}_2\left\{f(x,y);\dfrac{\omega_1}{a},\dfrac{\omega_2}{b}\right\}$, $\forall\ a,b \in \mathbb{R}^*$

(iv) Translaţia $\mathcal{F}_2\{f(x-a,y-b);\omega\} = e^{-j(a\omega_1+b\omega_2)}\mathcal{F}_2\{f(x,y);\omega\}$, $\forall\ a,b \in \mathbb{R}$

(v) Modularea $\mathcal{F}_2\{f(x,y)e^{j(ax+by)};\omega\} = \mathcal{F}_2\{f(x,y);\omega_1-a,\omega_2-b\}$, $\forall\ a,b \in \mathbb{R}$

(vi) Convoluţia $\mathcal{F}_2\{f(x,y)*g(x,y);\omega\} = \mathcal{F}_2(f;\omega)\mathcal{F}_2(g;\omega)$
(vii) Înmulţirea $\mathcal{F}_2\{f(x,y)g(x,y);\omega\} = \mathcal{F}_2(f;\omega)*\mathcal{F}_2(g;\omega)$

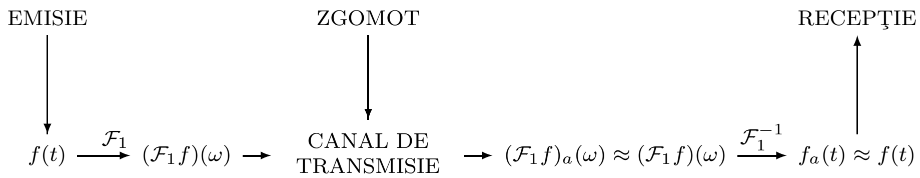
În cazul $n=2$, $f(x,y)*g(x,y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha,y-\beta)g(\alpha,\beta)d\alpha d\beta$, $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(viii) Conjugarea $\mathcal{F}_2\{\overline{f}(x,y);\omega\} = \overline{\mathcal{F}}_2\{f(x,y);-\omega\}$, unde $-\omega = (-\omega_1,-\omega_2)$

7.4. Aplicaţii ale transformării Fourier în prelucrarea imaginilor

7.4.1. Transmisia Radio

Utilizează transformarea Fourier unidimensională $\mathcal{F}_1$ (notată cu $\mathcal{F}$ în primele nouă paragrafe ale acestui capitol). Transmisia Radio se realizează, în mod esenţial, după următoarea schemă (vezi [44]):



unde f_a şi $(\mathcal{F}_1 f)_a$ reprezintă semnalul f respectiv spectrul său $\mathcal{F}_1 f$, "alterate" în urma "zgomotului" (factorilor perturbatori) care afectează transmisia.

7.4.2. Transmisia imaginilor

Unei imagini 2-dimensionale alb-negru, identificată cu o submulţime $D \subseteq \mathbb{R}^2$, i se ataşează *funcţia de strălucire* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ având supp$f \subseteq D$, funcţie care asociază fiecărui punct (x, y) *nivelul de gri* $f(x, y)$ în acel punct. Practic, se alege o reţea discretă 2-dimensională şi se ”măsoară” f doar în nodurile reţelei, numite *pixeli*; astfel, în televiziune se consideră reţele de 512×512 pixeli.

Schema de transmisie a imaginilor este similară celei descrise la transmisiile radio:

$$\begin{tikzcd}
\text{EMISIE} \arrow[d] & & \text{ZGOMOT} \arrow[d] & & \text{RECEPŢIE} \\
f(x,y) \arrow[r, "\mathcal{F}_2"] & (\mathcal{F}_2 f)(\omega_1,\omega_2) \arrow[r] & \text{CANAL DE TRANSMISIE} \arrow[r] & (\mathcal{F}_2 f)_a(\omega_1,\omega_2) \approx (\mathcal{F}_2 f)(\omega_1,\omega_2) \arrow[r, "\mathcal{F}_2^{-1}"] & f_a(x,y) \approx f(x,y) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

unde f_a şi $(\mathcal{F}_2 f)_a$ reprezintă semnalul ”alterat”, respectiv ”spectrul alterat” de ”zgomot” (factori perturbatori).

8 Probleme

Enunţuri

1. *Să se calculeze spectrul Fourier, amplitudinea şi faza în frecvenţă pentru fiecare din următoarele semnale* $f : \mathbb{R} \to K$.

(i) $f(t) = \dfrac{at + b}{t^2 + 2mt + m^2 + n^2}, \ m \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{R}_+^*, \ a \in \mathbb{C}, \ b \in \mathbb{C}$

(ii) $f(t) = \dfrac{1}{t^2 - 2mt + m^2 + 4}, \ m \in \mathbb{R}$

(iii) $f(t) = \dfrac{2j}{t^2 - 10t + 29}$

(iv) $f(t) = \dfrac{3t - 2}{t^2 - 2t + 10}$

(v) *”Fereastra triunghiulară”* $f(t) = \begin{cases} a - |t|, & |t| \le a \\ 0, & |t| > a \end{cases} \ ; \ a > 0$

(vi) $f(t) = t^n e^{-t} u(t), \ n \in \mathbb{N}$

(vii) *”Fereastra gaussiană”* $f(t) = e^{-at^2}, \ a > 0$ *şi* $f_n(t) = f^{(n)}(t)$

(viii) *Funcţia lui Haar* $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1/2 \\ -1, & 1/2 < t < 1 \\ 0, & \text{\textit{în rest}} \end{cases}$

(ix) *"Pălăria mexicană"* $f(t) = (1-t^2)\exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)$

(x) $f(t) = t^2 e^{-jt^2/4}$

(xi) $f(t) = \dfrac{2t-j}{t^2+2jt+3}$

(xii) $f(t) = \dfrac{3jt+2}{jt^2+(3j-2)t+j-3}$.

2. *Să se calculeze transformatele Fourier prin cosinus pentru fiecare din următoarele semnale* $f:\mathbb{R}_+ \to K$.

(i) $f(t) = \dfrac{t^2}{t^6+1}$

(ii) $f(t) = \dfrac{t^2+1}{(t^2+4)(t^2+a^2)}$, $a>0$

(iii) $f(t) = \dfrac{t^2}{t^4-6t^2+25}$

(iv) $f(t) = \dfrac{1}{(t^2+4)^2(t^2+a^2)}$, $a>0$

3. *Să se calculeze* $F_s(\omega) = \mathcal{F}_s\{f(t);\omega\}$ *pentru fiecare semnal* $f:(0,\infty)\to K$.

(i) $f(t) = \dfrac{1}{t(t^4+4a^4)}$, $a>0$

(ii) $f(t) = \dfrac{1}{t(t^8+1)}$, $a>0$

(iii) $f(t) = \dfrac{t}{t^6+1}$

(iv) $f(t) = \dfrac{1}{t(t^2+4)^2}$

4. *Fie* $F_c(\omega) = \mathcal{F}_c(f;\omega)$; $G_c(\omega) = \mathcal{F}_c(g;\omega)$; $F_s(\omega) = \mathcal{F}_s(f;\omega)$ *şi* $G_s(\omega) = \mathcal{F}_s(g;\omega)$. *Să se demonstreze egalităţile:*

(i) $\displaystyle\int_0^\infty F_c(\omega)G_s(\omega)\sin\omega x d\omega = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty g(t)[f(|x-t|)-f(x+t)]dt,\ x\in\mathbb{R}_+$

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty F_c(\omega)G_c(\omega)\cos\omega x d\omega = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty g(t)[f(|x-t|)+f(x+t)]dt,$ $x\in\mathbb{R}_+$

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty F_c(\omega)G_c(\omega)d\omega = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty f(t)g(t)dt$

(iv) $\displaystyle\int_0^\infty F_s(\omega)G_s(\omega)d\omega = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty f(t)g(t)dt$

5. *Să se rezolve ecuaţiile integrale:*

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \begin{cases} \dfrac{A}{a}(a-|\omega|), & |\omega| \le a \\ 0, & |\omega| > a \end{cases}\ ;\ A > 0,\ a > 0$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \begin{cases} 0, & |\omega| \ge 1 \\ 1, & -1 < \omega < 0 \end{cases}$

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \begin{cases} 0, & \omega \le 0 \\ 1/\sqrt{\omega}, & \omega > 0 \end{cases}\ ;\ f(t) = 0,\ \forall\ t < 0$

(iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} = \omega^n e^{-\omega}u(\omega),\ \omega \in \mathbb{R}$

(vi) $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\cos\omega t dt = \frac{\omega^2}{(\omega^2+1)^3},\ \omega > 0$

(vii) $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\cos\omega t dt = \frac{\omega^2}{\omega^4+64},\ \omega > 0$

(viii) $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\cos\omega t dt = \frac{1}{\sqrt{\omega}},\ \omega > 0$

(ix) $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\sin\omega t dt = e^{-2\omega},\ \omega > 0$

6. **(i)** *Se consideră semnalul* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}),\ f(t) = \dfrac{1}{(2-jt)^2}$.

Să se determine energia semnalului f, centrul temporal şi centrul frecvenţial, raza temporală şi raza frecvenţială, durata utilă şi banda de frecvenţă utilă şi să se verifice principiul indeterminismului (principiul incertitudinii).

(ii) *Să se determine centrul temporal, raza temporală şi durata utilă pentru semnalul complex* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f(t) = (t^2 - 2jt - 2)^{-1}$.

(iii) *Să se determine spectrul încrucişat (cross-spectrum) pentru perechea de semnale* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) = 2[u(t+1) - u(t-1)]$ *şi* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) = (t^2 + 2t + 5)^{-1}$.

7. *Să se calculeze transformatele Fourier 2D pentru următoarele semnale* $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$*:*

(i) $f(x,y) = \exp(-ax^2 - by^2),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a > 0,\ b > 0$

(ii) $f(x,y) = (x^2+y^3)e^{-2x-3y}u(x,y);\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$;
$u(x,y) = \begin{cases} 1, & x\geq 0,\ y\geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

8. (i) *Să se calculeze* $\mathcal{F}\left\{\dfrac{t^s}{(a+jt)^{n+1}};\omega\right\}$, *pentru* $s=0$ *şi* $s=n$, *unde* $a\in K$, $\operatorname{Re} a>0$, $n\in\mathbb{N}$ *şi să se deducă de aici* $\mathcal{F}\{t^{10}e^{2t}u(-t);\omega\}$.

(ii) *Să se calculeze* $\mathcal{F}_c^{-1}\left\{\dfrac{\omega^2}{\omega^8+1};t\right\}$, $\omega>0$.

(iii) *Să se calculeze* $\mathcal{F}\{t^ne^{-2t}\cos 3t\cdot u(t);\omega\}$; $n\in\mathbb{N}$.

(iv) *Să se rezolve ecuaţia integrală* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = g(\omega)$ *unde* $g(\omega) = \left(\operatorname{sh}\dfrac{\omega}{2}\right)^{-1}$, *dacă* $\omega\in\mathbb{R}^*$ *şi* $g(0)=0$.

(v) *Să se calculeze* $\mathcal{F}\{(\operatorname{ch} at)^{-1};\omega\}$; $a>0$.

(vi) *Să se rezolve ecuaţia integrală* $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t dt = \omega^{-\alpha}$, $\omega>0$, *unde* $\alpha\in(0,1)$.

Soluţii. Indicaţii. Răspunsuri

1. (i) Luăm pentru început $a,b\in\mathbb{R}$ şi fie $F(\omega;a,b) = \mathcal{F}(f;\omega)$.
• Dacă $\omega<0$, atunci

$$F(\omega;a,b) = 2\pi j Rez[f(z)e^{-j\omega z};-m+nj]$$

$$= 2\pi j\frac{az+b}{2z+2m}e^{-j\omega t}\Big|_{z=-m+nj} = \frac{\pi}{n}e^{\omega n}(-am+b+anj)e^{j\omega m}.$$

• Dacă $\omega>0$, atunci

$$F(\omega;a,b) = 2\pi j Rez[f(-z)e^{j\omega z};m+nj]$$

$$= \frac{\pi}{n}e^{-n\omega}(-am+b-anj)e^{j\omega m}.$$

Aşadar, dacă $a,b\in\mathbb{R}$,

$$F(\omega;a,b) = \frac{\pi}{n}e^{-n|\omega|}(b-am-jan\,sgn\omega)e^{j\omega m},\quad \omega\in\mathbb{R}^*;$$

$$A(\omega) = |F(\omega;a,b)| = \frac{\pi}{n}e^{-n|\omega|}\sqrt{(am-b)^2+a^2n^2};$$

$$\phi(\omega) = m\omega + \arg(b-am-jan\,sgn\omega)\pmod{2\pi}.$$

Dacă $a, b \in \mathbb{C}$, atunci

$$F(\omega; a, b) = F(\omega; \operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b) + jF(\omega; \operatorname{Im} a, \operatorname{Im} b).$$

(ii) $F(\omega) = \dfrac{\pi}{2} e^{-2|\omega|} e^{-j\omega m}$; $\omega \in \mathbb{R}$;

$$A(\omega) = \frac{\pi}{2} e^{-2|\omega|}; \quad \phi(\omega) = -m\omega \pmod{2\pi}.$$

(iii) $F(\omega) = \pi j e^{-2|\omega|} e^{5j\omega}$, $\omega \in \mathbb{R}$,

$$A(\omega) = \pi e^{-2|\omega|}; \quad \phi(\omega) = \frac{\pi}{2} + 5\omega \pmod{2\pi}.$$

(iv) $F(\omega) = \dfrac{\pi}{3} e^{-3|\omega|}(1 - 9j\, sgn\omega) e^{-j\omega}$, $\omega \in \mathbb{R}^*$

$$A(\omega) = \frac{\pi}{3} e^{-3|\omega|} \sqrt{82}, \quad \phi(\omega) = -\omega - (sgn\omega) \operatorname{arctg} 9 \pmod{2\pi}.$$

(v) $F(\omega) = a^2 sa^2 \dfrac{\omega}{2}$; $A(\omega) = F(\omega)$, $\phi(\omega) = 0$

(vi) $F(\omega) = \dfrac{n!}{(1 + j\omega)^{n+1}}$; $A(\omega) = \dfrac{n!}{\sqrt{(1 + \omega^2)^{n+1}}}$;

$$\phi(\omega) = -(n + 1) \operatorname{arctg} \omega \pmod{2\pi}$$

(vii) $F(\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}} \exp\left(-\dfrac{\omega^2}{4a}\right)$; $\quad F_n(\omega) = (j\omega)^n F(\omega)$

(viii) $F(\omega) = j\omega \cdot \exp(-j\omega/2) \cdot sa^2 \left(\dfrac{\omega}{2}\right)$; $A(\omega) = |\omega| sa^2 \dfrac{\omega}{2}$

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2}(\mathrm{sgn}\omega) - \omega/2 \pmod{2\pi}$$

(ix) $F(\omega) = \sqrt{2\pi}\omega^2 \exp(-\omega^2/2)$

(x) $F(\omega) = \mathcal{F}\{t^2 \exp(-jt^2/4); \omega\} = j^2(\mathcal{F}\{\exp(-jt^2/4); \omega\})'' \overset{(vii)}{=\!=}$

$$= -\sqrt{2\pi}(1 - j)(\exp(j\omega^2))'' = 2\sqrt{2\pi}(1 - j)(2\omega^2 - j) \exp(j\omega^2)$$

(xi) $F(\omega) = -\dfrac{7}{2}\pi j \exp(-3\omega)$, dacă $\omega > 0$; $F(\omega) = \dfrac{\pi j}{2} \exp(\omega)$, dacă $\omega < 0$.

(xii) $F(\omega) = 0$, dacă $\omega < 0$; $F(\omega) = 2\pi e^{-\omega} e^{j\omega}[(5 - 6j)e^{j\omega} + 3j - 5]$, $\omega > 0$.

2. **(i)** $\dfrac{\pi}{6}\exp(-\omega/2)\left[2\cos\dfrac{\omega\sqrt{3}}{2}-\exp(-\omega/2)\right]$

(ii) $F_c(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2a(a^2-4)}[2(a^2-1)e^{-a\omega}-3ae^{-2\omega}], & a\neq 2\\[2ex] \dfrac{\pi}{16}e^{-2\omega}(5-6\omega), & a=2\end{cases}$

(iii) $F_c(\omega)=\dfrac{\pi}{8}e^{-\omega}(2\cos 2\omega-\sin 2\omega)$

(iv) $F_c(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{32}\dfrac{ae^{-2\omega}(2\omega+1)(a^2-4)-8ae^{-2\omega}+16e^{-a\omega}}{(a^2-4)^2}, & a\neq 2\\[2ex] \dfrac{\pi}{512}e^{-2\omega}(4\omega^2+6\omega+3), & a=2\end{cases}$

3. **(i)** $F_s(\omega)=\dfrac{\pi}{8a^4}(1-e^{-a\omega}\cos a\omega)$

(ii) $F_s(\omega)=\dfrac{\pi}{4}\left[2-e^{-\omega\sin\pi/8}\cos\left(\omega\cos\dfrac{\pi}{8}\right)-e^{-\omega\sin 3\pi/8}\cos\left(\omega\cos\dfrac{3\pi}{8}\right)\right]$

(iii) $F_s(\omega)=\dfrac{\pi}{3}\left[e^{-\omega}-e^{-\omega/2}\left(\cos\dfrac{\omega\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\sin\dfrac{\omega\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

(iv) $F_s(\omega)=\dfrac{\pi}{16}[1-(\omega+1)e^{-2\omega}]$

4. Să demonstrăm (ii). Avem:

$$\int_0^\infty F_c(\omega)G_c(\omega)\cos\omega x d\omega=\int_0^\infty F_c(\omega)\cos\omega x\int_0^\infty g(t)\cos\omega t dt$$

$$=\int_0^\infty g(t)dt\int_0^\infty F_c(\omega)\cos\omega x\cos\omega t d\omega$$

$$=\frac{1}{2}g(t)dt\int_0^\infty F_c(\omega)[\cos\omega|x-t|+\cos\omega(x+t)]d\omega$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^\infty g(t)[\mathcal{F}_c^{-1}(F_c(\omega);|x-t|)+\mathcal{F}_c^{-1}(F_c(\omega);x+t)]dt$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^\infty g(t)[f(|x-t|)+f(x+t)]dt.$$

5. **(i)** $f(t)=\dfrac{Aa}{2\pi}sa^2\left(\dfrac{at}{2}\right)$

(ii) $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi t^2}(1 - e^{-jt} - jt^{-jt}), & t \neq 0 \\ \\ \dfrac{3}{4\pi}, & t = 0 \end{cases}$

(iii) $f(t) = \dfrac{1+j}{4}\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}},\ t > 0$ **(iv)** $f(t) = \dfrac{n!}{2\pi(1 - jt)^{n+1}}$

(v) $f(t) = 1 - \dfrac{t+4}{8}e^{-t/2}$ **(vi)** $f(t) = \dfrac{1}{8}e^{-t}(t^2 - t - 1)$

(vii) $f(t) = \dfrac{1}{16}e^{2t}(\cos 2t - \sin 2t)$

(viii) $f(t) = \sqrt{2/(\pi t)}$ **(ix)** $f(t) = \dfrac{2t}{\pi(t^2 + 4)}$

6. (i) $E(f) = \dfrac{\pi}{16}$; $\Delta t = \dfrac{8}{\sqrt{\pi}}$; $\Delta\omega = 2\sqrt{6(3\pi^2 - 3\pi + 1)}$; $t^* = 0$; $\omega^* = \dfrac{3}{2}\pi$; $\left[-\dfrac{8}{\sqrt{\pi}}, \dfrac{8}{\sqrt{\pi}}\right]$; $\left[\dfrac{3\pi}{2} - \Delta\omega, \dfrac{3\pi}{2} + \Delta\omega\right]$.

(ii) $E(f) = \dfrac{\pi}{4}$; $t^* = 0$; $\Delta t = 2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$; $\left[-2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}, 2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\right]$.

(iii) $F(\omega) = 4sa(\omega)$; $G(\omega) = \pi \exp(-|\omega|)\exp(j\omega)$;

$$S(f, g, \omega) = F(\omega)\overline{G(\omega)} = 4\pi \exp(-|\omega|)sa(\omega)\exp(-j\omega).$$

7. (i) $F(\omega_1, \omega_2) = \dfrac{\pi}{\sqrt{ab}} \exp\left(-\dfrac{\omega_1^2}{4a} - \dfrac{\omega_2^2}{4b}\right)$

(ii) $F(\omega_1, \omega_2) = 2\dfrac{(2 + j\omega_1)^2 + (3 + j\omega_2)^3}{(2 + j\omega_1)^3(3 + j\omega_2)^4}$.

8. (i) $\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{(a + jt)^{n+1}}; \omega\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{-j\omega t}}{(a + jt)^{n+1}}dt = F_n(\omega)$

Integrandul are polul $t_k = ja$, multiplu de ordin $(n + 1)$, cu $\operatorname{Im} t_k > 0$. Dacă $\omega < 0$, atunci

$$F(\omega) = \frac{2\pi j}{n!} \lim_{t \to aj} \left[(t - aj)^{n+1} \frac{e^{-j\omega t}}{(a + tj)^{n+1}}\right]^{(n)}$$

$$= \frac{2\pi j}{n!} j^{-(n+1)}(-j\omega)^n e^{a\omega} = \frac{2\pi}{n!}(-1)^n \omega^n e^{a\omega}.$$

Dacă $\omega > 0$, atunci

$$F_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega x}}{(a - jx)^{n+1}} dx = 0,$$

deoarece integrandul are polul $x_k = -aj$ având $\mathrm{Im}\,(x_k) = -\mathrm{Re}\, a < 0$. Astfel,

$$F_n(\pi) = \frac{2\pi}{n!}(-1)^n \omega^n e^{a\omega} u(-\omega),$$

unde $\omega \neq 0$ dacă $n = 0$.

În conformitate cu Teorema 2.10, obţinem:

$$\mathcal{F}\{t^n(a + jt)^{-n-1}; \omega\} = j^n F^{(n)}(\omega) = 2\pi(-j)^n e^{a\omega} u(-\omega) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} C_n^k (a\omega)^k,$$

unde $\omega \in \mathbb{R}^*$.

Mai departe din Teorema simetriei (Proprietatea de dualitate 2.5), pentru $a = 2$, $n = 10$ şi $f(t) = (2 + jt)^{-11}$, deducem:

$$\mathcal{F}\{F_{10}(t); \omega\} = 2\pi f(-\omega),$$

adică

$$\mathcal{F}\{t^{10} e^{2t} u(-t); \omega\} = \frac{10!}{(2 - j\omega)^{11}}.$$

(ii) $\mathcal{F}_c^{-1}\left(\dfrac{\omega^2}{\omega^8 + 1}; t\right) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{\omega^2}{\omega^8 + 1} \cos \omega t d\omega = F_c(t)$.

Mai departe deducem:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega^8 + 1} d\omega = \frac{1}{2} \left[\exp\left(-t \sin \frac{\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{\pi}{8} + t \cos \frac{\pi}{8}\right)\right.$$

$$\left. + \exp\left(-t \sin \frac{3\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{8} + t \cos \frac{3\pi}{8}\right)\right]$$

Derivând această egalitate de două ori, obţinem $F_c(t)$.

(iii) $F(\omega) = \mathcal{F}\{e^{-2t} \cos 3t \cdot u(t); \omega\}$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\exp t(-2 + 3j - \omega) + \exp t(-2 - 3j - \omega)] dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{j\omega + 2 - 3j} + \frac{1}{j\omega + 2 + 3j}\right).$$

Derivând de n ori obţinem:

$$\frac{1}{2}n!\left[\frac{1}{(j\omega+2-3j)^{n+1}}+\frac{1}{(j\omega+2+3j)^{n+1}}\right],\quad \omega\in\mathbb{R}.$$

(iv) $f(t)=j\mathrm{sgn}(-t)\mathrm{th}(\pi t)$.
(v) $\dfrac{2\pi}{a}\left(\exp\dfrac{\pi\omega}{2a}\right)\left[1+\exp\left(\dfrac{\pi\omega}{a}\right)\right]^{-1}$.
(vi) $f(t)=t^{\alpha-1}\left[\Gamma(\alpha)\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\right]^{-1}$.

Capitolul 3

Transformarea Fourier discretă

1 Preliminarii

Fie $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$, $\omega \in \mathbb{R}$, spectrul Fourier al unui semnal $f(t)$ de clasă $L^1(\mathbb{R})$. Există mai multe dificultăţi privind utilizarea practică a acestei formule integrale. În primul rând, calculul integralei însăşi este deseori extrem de dificil; în plus, chiar dacă spectrul $F(\omega)$ se poate determina prin metode directe, expresia sa este, în multe situaţii, complicată. De asemenea, atât semnalul originar $f(t)$ cât şi spectrul său în frecvenţă $F(\omega)$ sunt semnale continuale; în practică, însă, ne interesează valoarea spectrului pe anumite puncte date. Toate aceste considerente conduc la ideea unei discretizări atât pe axa timpului, cât şi pe axa frecvenţelor. Notând cu Δt, respectiv $\Delta\omega$, paşii de eşantionare, punem în evidenţă eşantioanele $t_n = n\Delta t$, $t \in \mathbb{Z}$ pe axa timpului, respectiv $\omega_m = m\Delta\omega$, $m \in \mathbb{Z}$, pe axa frecvenţelor. Spectrul eşantionat este:

$$F(m\Delta\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(t)e^{-jm(\Delta\omega)t}dt, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Utilizând formula aproximativă de calcul integral

$$\int_a^b g(t)dt \approx (b-a)g(a),$$

obţinem:

$$F(m\Delta\omega) \approx \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t) e^{-jmn(\Delta t)(\Delta\omega)}.$$

Dificultatea acestei formule constă în faptul că seria care aproximează spectrul are o infinitate de termeni; de aceea, suntem obligaţi să limităm transformata la un interval de timp finit, luând în considerare o ”fereastră” a semnalului pe un interval de timp ”semnificativ”. Pentru a fixa ideile, să considerăm intervalul de timp $[0, N\Delta t]$, unde numărul $N \in \mathbb{N}^*$ este dat şi fie $T = N \cdot \Delta t$ lungimea sa. În ceea ce priveşte ”lungimea” intervalului corespunzător din domeniul frecvenţă, se urmăreşte ca paşii de eşantionare Δt şu $\Delta\nu$ (unde $\omega = 2\omega\nu$) să verifice relaţia $N \cdot \Delta t \cdot \Delta\nu = 1 \;\Leftrightarrow\; N \cdot \Delta t \cdot \Delta\omega = 2\pi$. Astfel, formula de aproximare a spectrului $F(\omega)$ devine:

$$F(m\Delta\omega) \approx \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(n\frac{T}{N}\right) e^{-2\pi jmn/N}, \quad 0 \le m \le N-1.$$

În acest mod, se realizează o asociere între ”semnalele finite de lungime N”, $(x_n)_{0\le n\le N-1}$, unde $x_n = f\left(n\frac{T}{N}\right) = f(t_n)$ şi $(y_m)_{0\le m\le N-1}$, cu $y_m = \frac{T}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-2\pi jmn/N)$. Din motive practice, semnalele de lungime N, (x_n) şi (y_m) se extind prin periodicitate la $\mathbb{Z}$.
Notăm cu K^N mulţimea semnalelor finite $x\colon \mathbb{Z} \to K$ de lungime (perioadă) N.

2 Definiţia transformatei Fourier discrete

2.1. Definiţie

Fie N un număr natural nenul, $w = w_N = \exp\left(\frac{2\pi j}{N}\right)$ şi $x : \mathbb{Z} \to K$ o funcţie periodică având perioada N (numită **semnal finit cu N eşantioane** *sau* **semnal finit de lungime N***). Se numeşte* **transformata Fourier discretă** *(pe scurt TFD) a semnalului $x(n)$ funcţia $X : \mathbb{Z} \to K$, unde*

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w^{-mn}, \; \forall\, m \in \mathbb{Z}.$$

Numărul $X(m)$ se numeşte **eşantionul spectrului semnalului x pe frecvenţa** *m.*

Notaţie. Se scrie $X = \mathcal{F}_d x$ sau $X = TFDx$, aşa încât $X(m) = (\mathcal{F}_d x)(m) = \mathcal{F}_d\{x(n); m\}$ sau $X(m) = (TFDx)(m) = TFD\{x(n); m\}$, uneori $X_m = TFDx_n$; în anumite situaţii, pentru a pune în evidenţă numărul N se scrie $\mathcal{F}_d^{(N)}$ în loc de $\mathcal{F}_d$.

Observaţie. Deoarece $w^{kN} = 1$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$, este clar că $X(m + kN) = X(m)$, $\forall\ m \in \mathbb{Z}$, deci X este o funcţie periodică de perioadă N; de aceea, în Definiţia 2.1 este suficient să scriem $0 \le m \le N - 1$ în loc de $m \in \mathbb{Z}$. Sunt utile, de asemenea, relaţiile $w^N = 1$, $w^{N/4} = j$, $w^{N/2} = -1$, $w^{3N/4} = -j$, $w^{kN+r} = w^r$, $\forall\ k, r \in \mathbb{Z}$.

2.2. Definiţie

Operatorul $\mathcal{F}_d = \mathcal{F}_d^{(N)} : K^N \to K^N$, $x \in K^N \mapsto X = \mathcal{F}_d x = \mathcal{F}_d(x, \cdot) \in K^N$ *se numeşte* **operator de transformare Fourier discretă**.

Procedeul prin care fiecărui semnal $x \in K^N$ i se asociază transformata sa Fourier discretă $X = \mathcal{F}_d x$ se numeşte **transformare Fourier discretă**.

2.3. Teoremă (Formula discretă a lui Fourier)

Dacă $x : \mathbb{Z} \to K$ *este un semnal finit de lungime (perioadă)* $N \in \mathbb{N}^*$ *şi* $w = \exp\left(\dfrac{2\pi j}{N}\right)$, *atunci are loc egalitatea*

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} w^{mn} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) w^{-mk}, \quad 0 \le n \le N-1,$$

numită **formula discretă a lui Fourier**.

Demonstraţie

Să prelucrăm membrul al doilea al formulei, schimbând ordinea de sumare:

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} w^{mn} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) w^{-mk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k) \sum_{m=0}^{N-1} (w^{n-k})^m \tag{2.1}$$

Deoarece

$$\sum_{m=0}^{N-1} (w^{n-k})^m = \begin{cases} \dfrac{1-(w^{n-k})^N}{1-w^{n-k}}, & \text{dacă} \quad w^{n-k} \neq 1 \\ N, & \text{dacă} \quad w^{n-k} = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad k \neq n \\ N, & \text{dacă} \quad k = n \end{cases} = N\delta_k(n), \quad 0 \le k \le N-1, \ 0 \le n \le N-1,$$

din relaţia (2.1) primim:

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} w^{mn} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)w^{-mk} = \frac{1}{N} \cdot N \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\delta_k(n) = x(n),$$

ceea ce încheie demonstraţia.

2.4. Observaţie

Ţinând seama de Definiţia 2.1, Formula discretă a lui Fourier se poate scrie:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(m)w^{mn}, \quad 0 \le n \le N-1.$$

Punând $(\mathcal{G}_d X)(n) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{m=0}^{N-1} X(m)w^{mn}$, rezultă $x(n) = (\mathcal{G}_d(\mathcal{F}_d x))(n)$, $0 \le n \le N-1$, deci $x = (\mathcal{G}_d\mathcal{F}_d)(x)$, $\forall\ x \in K^N$; analog se demonstrează egalitatea $x = (\mathcal{F}_d\mathcal{G}_d)(x)$, $\forall\ x \in K^N$. Ultimele două egalităţi arată că operatorul de transformare Fourier discretă $\mathcal{F}_d : K^N \to K^N$ (Definiţia 2.2) este inversabil şi $\mathcal{F}_d^{-1} = \mathcal{G}_d$; astfel este naturală introducerea următoarei noţiuni.

2.5. Definiţia transformatei Fourier discrete inverse

Fie $y : \mathbb{Z} \to K$ un semnal discret dat, de clasă K^N. Funcţia $Y : \mathbb{Z} \to K$, unde $Y(n) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{m=0}^{N-1} y(m)w^{mn}$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, se numeşte **transformata Fourier discretă inversă** *(TFDI) a semnalului $y(m)$.*

Notaţie. Scriem $Y = \mathcal{F}_d^{-1}y$ say $Y = TFDI(y)$, deci

$$Y(n) = (\mathcal{F}_d^{-1}y)(n) = \mathcal{F}_d^{-1}\{y(m); n\}.$$

Are loc egalitatea

$$x(n) = (\mathcal{F}_d^{-1}(\mathcal{F}_d x))(n) = \mathcal{F}_d^{-1}\{\mathcal{F}_d\{x(n); m\}; n\}, \quad 0 \le n \le N-1.$$

3 Forma matriceală a TFD

Fie $x \in K^N$,

$$X(m) = (\mathcal{F}_d x)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w^{-mn}, \quad 0 \le m \le N-1 \tag{3.1}$$

şi

$$x(n) = (\mathcal{F}_d^{-1})(m) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) w^{mn}, \quad 0 \le n \le N-1. \tag{3.2}$$

Notând $W = W_N = (w^{-(i-1)(l-1)})_{1 \le i,l \le N}$, adică

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^{-1} & w^{-2} & \dots & w^{-(N-1)} \\ 1 & w^{-2} & w^{-4} & \dots & w^{-2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & w^{-k} & w^{-2k} & \dots & w^{-k(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & w^{-(N-1)} & w^{-2(N-1)} & \dots & w^{-(N-1)^2} \end{pmatrix},$$

$$x = (x(0), x(1), x(2), \dots, x(N-1))^T,$$
$$X = (X(0), X(1), X(2), \dots, X(N-1))^T,$$

sistemul de N egalităţi (3.1) care descrie $TFD(x)$, i.e.

$$\begin{cases} X(0) = x(0) + x(1) + x(2) + \dots + x(N-1) \\ X(1) = x(0) + x(1)w^{-1} + x(2)w^{-2} + \dots + x(N-1)w^{-(N-1)} \\ X(2) = x(0) + x(1)w^{-2} + x(2)w^{-4} + \dots + x(N-1)w^{-2(N-1)} \\ \dots \\ X(N-1) = x(0) + x(1)w^{-(N-1)} + x(2)w^{-2(N-1)} + \dots \\ \qquad\qquad +x(N-1)w^{-(N-1)^2} \end{cases}$$

devine

$$X = Wx, \tag{3.3}$$

iar cele N egalităţi (3.2) care descriu $TFDI(X)$ se scriu sub forma

$$x = \frac{1}{N} \overline{W} X, \tag{3.4}$$

unde $\overline{W}$ este matricea conjugată a matricei W:

$$\overline{W} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & w^k & w^{2k} & \dots & w^{k(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & w^{(N-1)} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix} = (w^{(i-1)(l-1)})_{1\le i,l\le N}$$

Într-adevăr, deoarece $|w^{-s}| = |w|^{-s} = 1$ rezultă $w^{-s} \cdot \overline{w^{-s}} = 1$, deci $\overline{w^{-s}} = w^s$, $0 \le s \le (N-1)^2$.

Din (3.3) şi (3.4) deducem $x = \dfrac{1}{N}(\overline{W}W)x$ şi $X = \dfrac{1}{N}(W\overline{W})X$, ceea ce reprezintă, de fapt, formula Fourier discretă (Teorema 2.3) şi arată că $W\overline{W} = \overline{W}W = NI_N$ (unde I_N este matricea unitate de ordin N), adică $W^{-1} = \dfrac{1}{N}\overline{W}$ (egalitate care se poate verifica şi direct).

3.1. Definiţie

Egalităţile (3.3) şi (3.4) reprezintă **forma matriceală a TFD**.

3.2. Exemple

Să scriem efectiv W_2, W_3, W_4.

(i) Pentru $n = 2$, avem $w_2 = e^{\pi j} = -1$, deci

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \overline{W}_2,$$

deci

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X(0) = x(0) + x(1) \\ X(1) = x(0) - x(1) \end{cases}$$

şi

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x(0) = \dfrac{1}{2}[X(0) + X(1)] \\ x(1) = \dfrac{1}{2}[X(0) - X(1)] \end{cases}$$

(ii) Pentru $n = 3$, avem $w = w_3 = \exp\left(\frac{2\pi j}{3}\right) = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$, deci (cu $w^{-1} = \overline{w} = w^2$ şi $w^{-2} = w$, deoarece $w^3 = 1$):

$$W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^{-1} & w^{-2} \\ 1 & w^{-2} & w^{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \overline{w} & w \\ 1 & w & \overline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^2 & w \\ 1 & w & w^2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{W}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & \overline{w} \\ 1 & \overline{w} & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} X(0) = x(0) + x(1) + x(2) \\ X(1) = x(0) + w^2 x(1) + w x(2) \\ X(2) = x(0) + w x(1) + w^2 x(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = \dfrac{1}{3}[X(0) + X(1) + X(2)] \\ \\ x(1) = \dfrac{1}{3}[X(0) + wX(1) + w^2 X(2)] \\ \\ x(2) = \dfrac{1}{3}[X(0) + w^2 X(1) + wX(2)] \end{cases}$$

(iii) Pentru $n = 4$, avem $w = w_4 = e^{\pi j/2} = j$, deci $w^{-1} = -j$ şi

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix}, \quad \overline{W}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} X(0) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) \\ X(1) = x(0) - jx(1) - x(2) + jx(3) \\ X(2) = x(0) - x(1) + x(2) - x(3) \\ X(3) = x(0) + jx(1) - x(2) - jx(3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = \dfrac{1}{4}[X(0) + X(1) + X(2) + X(3)] \\ \\ x(1) = \dfrac{1}{4}[X(0) + jX(1) - X(2) - jX(3)] \\ \\ x(2) = \dfrac{1}{4}[X(0) - X(1) + X(2) - X(3)] \\ \\ x(3) = \dfrac{1}{4}[X(0) - jX(1) - X(2) + jX(3)] \end{cases}$$

4 Proprietăţi ale transformării Fourier discrete

4.1. Liniaritatea

$$\mathcal{F}_d(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{F}_d x + \beta \mathcal{F}_d y,\ \forall\ x, y \in K^N,\ \forall\ \alpha, \beta \in K$$

4.2. Periodicitatea

Pentru orice $x \in K^N$, funcţia $X = \mathcal{F}_d$ este periodică, de perioadă N (deci $X = \mathcal{F}_d x \in K^N$):

$$X(m + kN) = X(m),\ \forall\ m \in \mathbb{Z},\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

4.3. Deplasări ciclice (în timp şi frecvenţă)

4.3.1. $\mathcal{F}_d\{x(n-k); m\} = w^{-km}\mathcal{F}_d\{x(n); m\},\ \forall\ x \in K^N,\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$

Aşadar, o deplasare în timp cu k unităţi a semnalului originar induce o deplasare adiţională a fazei spectrului cu $\dfrac{2\pi}{N}k$, lăsând nemodificat modulul spectrului.

4.3.2. $\mathcal{F}_d^{-1}\{X(m-k); n\} = w^{kn}\mathcal{F}_d^{-1}\{X(m); n\},\ \forall\ X \in K^N,\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$.

4.4. Inversiunea în timp (sau transferul de simetrie)

4.4.1. $\mathcal{F}_d\{x(-n); m\} = \mathcal{F}_d\{x(n); -m\},\ \forall\ x \in K^N$ sau

$$\mathcal{F}_d\{x(N-n); m\} = \mathcal{F}_d\{x(n); N-m\},\ \forall\ x \in K^N$$

Introducând simetrizata semnalului $y \in K^N$, *anume* $y_s(n) = y(-n) = y(N-n)$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, *primim:*

$$\mathcal{F}_d x_s = (\mathcal{F}_d x)_s.$$

4.4.2. $\mathcal{F}_d^{-1}\{X(-m); n\} = \mathcal{F}_d^{-1}\{X(m); -n\}$ sau $\mathcal{F}_d^{-1} X_s = (\mathcal{F}_d^{-1} X)_s$.

4.5. TFD pentru secvenţa complex conjugată

4.5.1. $\mathcal{F}_d\{\overline{x}(n); m\} = \overline{\mathcal{F}}_d\{x(n); -m\}$, *unde* $\overline{\mathcal{F}}_d : K^N \to K^N$, $\overline{\mathcal{F}}_d x = \overline{\mathcal{F}_d x}$, $\forall\ x \in K^N$*; pe scurt,* $TFD(\overline{x}_n) = \overline{X}_{-m}$.

Altfel scris, $\mathcal{F}_d \overline{x} = (\overline{\mathcal{F}}_d x)_s$, $\forall\ x \in K^N$.

4.5.2. $\mathcal{F}_d\{\overline{x}(-n); m\} = \overline{\mathcal{F}}_d\{x(n); m\}$, $\forall\ x \in K^N$ *sau* $TFD(\overline{x}_{-n}) = \overline{X}_m$, $\mathcal{F}_d \overline{x}_s = \overline{\mathcal{F}_d} x$.

4.6. Proprietăţi de paritate

4.6.1. *Dacă* $x \in K^N$ *este un semnal par (i.e.* $x(-n) = x(n)$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ *sau* $x(n) = x(N-n)$, $0 \le n \le N-1$*), atunci* $X = \mathcal{F}_d x$ *este, de asemenea, un semnal par.*

4.6.2. *Dacă* $x \in K^N$ *este un semnal impar (i.e.* $x(n) = -x(N-n)$ *sau* $x(-n) = -x(n)$*), atunci* $X = \mathcal{F}_d x$ *este un semnal impar.*

4.7. TFD pentru semnale reale

Fie $x \in \mathbb{R}^N$ *(adică* x *este un semnal real, finit de lungime* N*). Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

4.7.1. $(\mathcal{F}_d x)(-m) = (\overline{\mathcal{F}}_d x)(m)$ *sau* $X(-m) = \overline{X}(m)$, $\forall\ m \in \mathbb{Z}$.

4.7.2. *Dacă* x *este par, atunci* $X = \mathcal{F}_d x$ *este real (i.e.* $\mathcal{F}_d x \in \mathbb{R}^N$ *sau* $\operatorname{Im} X = 0$ *sau* $\overline{X} = X$*) şi par.*

4.7.3. *Dacă* x *este impar, atunci* $X = \mathcal{F}_d x$ *este un semnal imaginar (i.e.* $\operatorname{Re} \mathcal{F}_d x = 0$ *sau* $\overline{X} = -X$*) şi impar.*

Demonstraţiile acestor proprietăţi reprezintă simple exerciţii. Să demonstrăm, de exemplu, proprietăţile 4.3.1 şi 4.7.2.

4.3.1. $\mathcal{F}_d\{x(n-k);m\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n-k)w^{-mn} \overset{n-k=i}{=\!=\!=} \sum_{i=-k}^{N-k-1} x(i)w^{-m(k+i)}$

$$= w^{-mk} \sum_{i=-k}^{N-k-1} x(i)w^{-mi} = w^{-mk} \sum_{i=0}^{N-1} x(i)w^{-mi} = w^{-mk}\mathcal{F}_d\{x(n);m\}.$$

Am utilizat următoarea proprietate a funcţiilor periodice discrete:

(4.1) *Dacă* $y \in K^N$, *atunci* $\sum_{n=0}^{N-1} y(n) = \sum_{n=p}^{N+p-1} y(n)$, $\forall\ p \in \mathbb{Z}$, *adică suma a* N *eşantioane consecutive (termeni consecutivi) ale (ai) şirului* y_n *este aceeaşi.*

În cazul nostru, $y(n) = x(n)w^{-mn}$, $p = -k$.

4.7.2. $\overline{X}(m) = \overline{\sum_{n=0}^{N-1} x(n)w^{-mn}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w^{mn} \overset{n=-k}{=\!=\!=} \sum_{k=1-N}^{0} x(-k)w^{-km}$

$$= \sum_{k=1-N}^{0} x(k)w^{-km} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)w^{-km} = X(m), \text{ via (4.1).}$$

5 Transformata Fourier discretă a produsului de convoluţie

5.1. Definiţie

Fie x, y *semnale finite de lungime* N, *date (i.e.* $x, y \in K^N$*). Semnalul* $x * y : \mathbb{Z} \to K$,

$$(x * y)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(n-k),\ \ \forall\ n \in \mathbb{Z}$$

se numeşte **produsul de convoluţie** *(sau* **convoluţia circulară***) a semnalelor* x *şi* y.

Observaţie. Se constată imediat că $(x*y)(n+N) = (x*y)(n)$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$, deci $x * y \in K^N$; de asemenea, $x * y = y * x$.

5.2. Teoremă

Dacă $x, y \in K^N$ *atunci au loc egalităţile*

5.2.1. $\mathcal{F}_d(x * y) = \mathcal{F}_d x \cdot \mathcal{F}_d y$ *sau* $TFD(x * y) = TFDx \cdot TFDy$.

5.2.2. $N \cdot \mathcal{F}_d(x \cdot y) = (\mathcal{F}_d x) * (\mathcal{F}_d y)$ *sau* $N \cdot TFD(xy) = (TFDx) * (TFDy)$.

5.2.3. $\sum_{m=0}^{N-1} |(\mathcal{F}_d x)(m)|^2 = N \sum_{m=0}^{N-1} |x(n)|^2$, *numită* **formula discretă a lui Parseval**.

Demonstraţie

Notăm $X = \mathcal{F}_d x$ şi $Y = \mathcal{F}_d y$.

5.2.1. $\mathcal{F}_d(x * y; m) = \sum_{n=0}^{N-1} (x * y)(n) w^{-mn}$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k) y(n-k) \right) w^{-mn} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \sum_{n=0}^{N-1} y(n-k) w^{-mn} \overset{n-k=i}{=\!=\!=}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \sum_{i=-k}^{N-k-1} y(i) w^{-m(k+i)} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) y^{-mk} \sum_{i=-k}^{N-k-1} y(i) w^{-mi}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) y^{-mk} \sum_{i=0}^{N-1} y(i) w^{-mi} = \mathcal{F}_d(x; m) \mathcal{F}_d(y; m) = X(m) Y(m),$$

utilizând pe parcurs (4.1).

5.2.2. $\mathcal{F}_d^{-1}(X * Y; n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (X * Y)(m) w^{mn}$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N=1} w^{mn} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y(m-k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{m=0}^{N-1} Y(m-k) w^{mn}$$

$$\overset{m-k=i}{=\!=\!=} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{i=-k}^{N-k-1} Y(i) w^{n(k+i)}$$

$$= N \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) w^{nk} \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(i) w^{ni} \right)$$

$$= N(\mathcal{F}_d^{-1}X)(n)(\mathcal{F}_d^{-1}Y)(n) = N \cdot x(n) \cdot y(n),\ \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

Aşadar,

$$\mathcal{F}_d^{-1}(X * Y) = N \cdot x \cdot y \ \Leftrightarrow\ N\mathcal{F}_d(xy) = X * Y = (\mathcal{F}_d x) * (\mathcal{F}_d y).$$

5.2.3. Din 5.2.1, scris sub forma $\mathcal{F}_d(x * y; m) = X(m)Y(m)$ rezultă

$$(x * y)(n) = \mathcal{F}_d^{-1}(XY; n) \ \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(n-k) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(m)Y(m)w^{mn},\ \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

Punând $n = 0$ în ultima egalitate obţinem:

$$\sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(-k) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(m)Y(m). \tag{5.1}$$

Luăm $y(k) = \overline{x}(-k)$ şi în conformitate cu Proprietatea 4.5.2, primim:

$$Y(m) = \mathcal{F}_d\{\overline{x}(-k); m\} = \overline{\mathcal{F}}_d\{x(k); m\} = \overline{X}(m),$$

iar relaţia (5.1) devine:

$$\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\overline{x}(k) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(m)\overline{X}(m) \ \Leftrightarrow\ \sum_{m=0}^{N-1} |X(m)|^2 = N\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2.$$

5.3. Corelaţia circulară

Dacă $x, y \in K^N$, atunci semnalul $x \circ y \in K^N$, unde

$$(x \circ y)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k+n)\overline{y}(k),\ \forall\ n \in \mathbb{Z},$$

se numeşte **corelaţia circulară** a semnalelor x şi y. Observăm că, în general, $x \circ y \neq y \circ x$. Pe de altă parte, are loc egalitatea

$$\mathcal{F}_d(x \circ y) = \mathcal{F}_d x \cdot \overline{\mathcal{F}}_d y = X \cdot \overline{Y}.$$

Într-adevăr, observăm că notând $z(n) = \overline{y}(-n)$ putem scrie $x \circ y = x * z$, deci

$$\mathcal{F}_d(x \circ y) = \mathcal{F}_d(x * z) = X \cdot Z = X\overline{Y},$$

deoarece

$$Z(m) = (\mathcal{F}_d z)(m) = \mathcal{F}_d(\overline{y}(-n); m) = \overline{\mathcal{F}}_d\{\{y(n); m\} = \overline{Y}(m),$$

în conformitate cu Proprietatea 4.5.2.

6 Transformata Fourier rapidă (Fast Fourier Transform)

6.1. Motivaţie

Să reluăm formula de calcul pentru un semnal finit de lungime N:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w^{-mn}, \quad 0 \leq m \leq N-1.$$

Calculul direct al eşantionului spectral $X(m)$ pe frecvenţa m necesită N înmulţiri (multiplicări) complexe şi $N-1$ adunări complexe (includem la "înmulţiri" şi produsele cu w^0, $w^{-N/2}$ pentru N par ş.a.m.d.). În total avem de efectuat N^2 înmulţiri (produse) complexe şi $N(N-1)$ adunări complexe (presupunem că valorile w^{-mn}, $0 \leq m,n \leq N-1$, sunt stocate). Deoarece o înmulţire complexă revine la patru înmulţiri reale, iar o adunare reală înseamnă două adunări complexe şi ţinând seama că la fiecare produs complex $(a+bj)(c+dj) = ac - bd + j(ad+bc)$ avem şi două sumări reale, rezultă că numărul total de înmulţiri reale este $4N^2$, iar numărul total de sumări reale este $4N^2 - 2N$; în final, avem $8N^2 - 2N$ operaţii reale.

De exemplu, pentru $N = 2^{10} = 1024$ ar fi necesare 4.194.304 multiplicări reale şi 8.386.560 operaţii reale (adunări şi înmulţiri).

Aşadar, calculul direct al TFD prin intermediul computerului ridică serioase probleme legate de timpul de execuţie şi de memoria computerului. Astfel, practica a impus în mod evident elaborarea unor algoritmi performanţi de calcul al TFD; primul algoritm de acest tip, numit "*Fast Fourier Transform*" (FFT), a apărut în anul 1965, aparţine cercetătorilor americani *J. W. Cooley şi J. W. Tuckey* şi se bazează în esenţă pe structura specială a matriciei W, mai precis pe facilităţile de calcul oferite de grupul multiplicativ $U_N = \{1, w_N, w_N^2, \ldots, w_N^{N-1}\}$ şi pe o reorganizare abilă a calculelor din expresia lui $X(m)$. În ultimele decenii, s-au obţinut algoritmi de tip FFT mai performanţi, pentru N convenabil ales, utilizând rezultate rafinate din teoria numerelor.

Prezentăm în continuare doi algoritmi de tip FFT.

6.2. Algoritmul diviziunii în timp (DIT-FFT)

Să presupunem că $N = 2^s$, $s \in \mathbb{N}^*$; dacă $x \in K^{N/2^k}$, notăm $TFDx$ cu $\mathcal{F}_d^{(N/2^k)}(x)$, $0 \leq k \leq s$.

6.2.1. Etapa 1

Divizăm suma care exprimă

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w^{-mn} = \mathcal{F}_d^{(N)}(x;m)$$

în părţile corespunzătoare "timpilor" pari şi impari:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)w_N^{-2mn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)w_N^{-(2n+1)m},\ w_N = \exp\frac{2\pi j}{N}.$$

Notăm $x_1(n) = x(2n)$ şi $x_2(n) = x(2n+1)$, $0 \le n \le N/2-1$ şi utilizăm relaţiile

$$w_N^{2k} = \exp\left(\frac{2\pi j}{N}2k\right) = \exp\left(\frac{2\pi jk}{N/2}\right) = w_{N/2}^k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

şi

$$w_N^{-(2n+1)m} = w_N^{-m} w_{N/2}^{-mn}.$$

Obţinem

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n)w_{N/2}^{-mn} + w_N^{-m}\sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n)w_{N/2}^{-mn} \tag{6.1}$$

Notăm

$$X_1(m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n)w_{N/2}^{-mn} \tag{6.2}$$

şi

$$X_2(m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n)w_{N/2}^{-mn},\ 0 \le m \le N-1.$$

Observăm că

$$X_i\left(m + \frac{N}{2}\right) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_i(n)w_{N/2}^{-mn}w_{N/2}^{-n\cdot N/2} \tag{6.3}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_i(n)w_{N/2}^{-mn},\ 0 \le m \le \frac{N}{2}-1,\ i \in \{1,2\}$$

şi

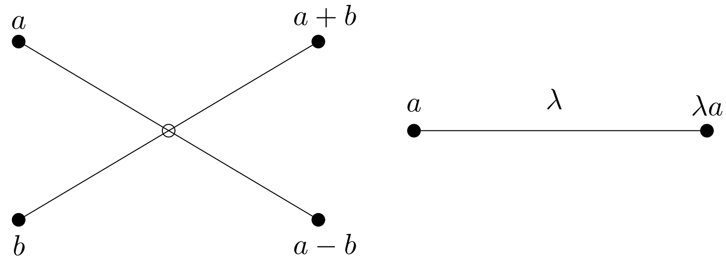
$$w_N^{-(m+N/2)} = w_N^{-m} w_N^{-N/2} = -w_N^{-m},\ 0 \le m \le \frac{N}{2} - 1. \tag{6.4}$$

Din (6.1), (6.2) şi (6.3) deducem

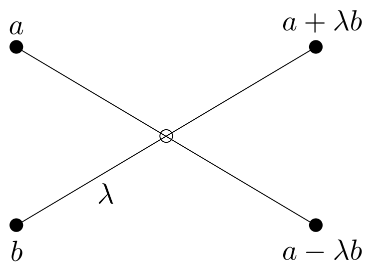
$$\begin{cases} X(m) = X_1(m) + w_N^{-m} X_2(m),\ 0 \le m \le \dfrac{N}{2} - 1 \\ X\left(m + \dfrac{N}{2}\right) = X_1(m) - w_N^{-m} X_2(m),\ 0 \le m \le \dfrac{N}{2} - 1, \\ \text{unde } X_i = \mathcal{F}_d^{(N/2)}(x_i),\ x_i \in K^{N/2},\ i \in \{1, 2\}. \end{cases} \tag{6.5}$$

În concluzie, calculul eşantioanelor spectrale $X(m)$, $0 \le m \le N - 1$, ale semnalului finit x de lungime N revine la calculul transformărilor Fourier discrete ale semnalelor finite x_1 şi x_2 de lungime $N/2$; se mai spune că o secvenţă (semnal) de lungime N (sau un N-punct) se divide în două secvenţe de lungime $N/2$ (sau în două $N/2$-puncte). Presupunând că $X_1(m)$ şi $X_2(m)$ sunt cunoscute, numărul multiplicărilor complexe ale etapei I este $\frac{N}{2}$, deoarece termenul $w_N^{-m} X_2(m)$ poate fi determinat o singură dată pentru fiecare m şi folosit în ambele egalităţi (6.5); numărul adunărilor (sumărilor) complexe este $\frac{N}{2} + \frac{N}{2} = N$.

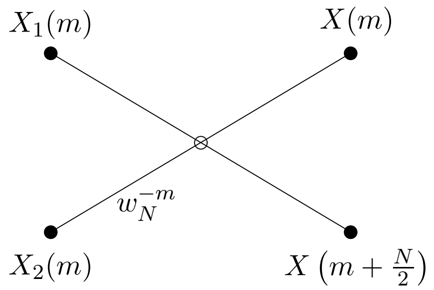
Reprezentăm relaţiile (6.5) sub forma unui graf-fluture, definit de următoarea schemă, care ataşează numerelor date a, b, λ suma $a + b$ şi diferenţa $a - b$, respectiv produsul λa:



De aici rezultă schema:

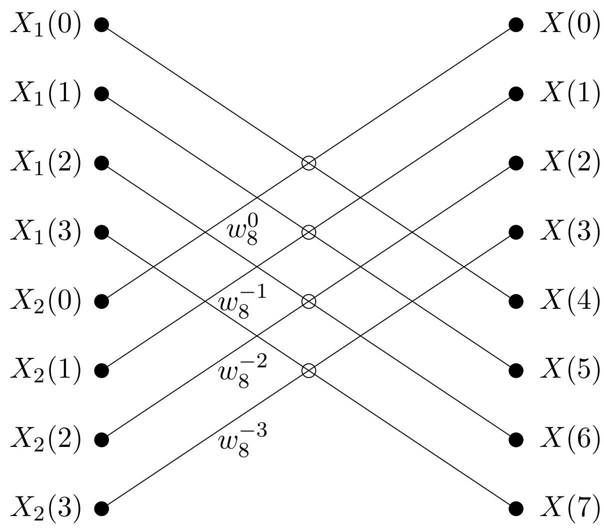


Astfel, relaţiile (6.5) se exprimă sub forma următorului "graf (schemă)-fluture":



$0 \leq m \leq \dfrac{N}{2} - 1.$

Să exemplificăm cu cazul $N = 8$.



6.2.2. Etapa 2

Realizăm diviziunea în timp a spectrelor $X_1(m)$ şi $X_2(m)$ de lungime $\frac{N}{2}$, similar cu Etapa 1:

$$\begin{cases} X_1(m) = X_{11}(m) + w_{N/2}^{-m} X_{12}(m) \\ X_1\left(m + \frac{N}{4}\right) = X_{11}(m) - w_{N/2}^{-m} X_{12}(m) \end{cases} \quad 0 \le m \le \frac{N}{4} - 1$$

$$\begin{cases} X_2(m) = X_{21}(m) + w_{N/2}^{-m} X_{22}(m) \\ X_2\left(m + \frac{N}{4}\right) = X_{21}(m) - w_{N/2}^{-m} X_{22}(m) \end{cases} \quad 0 \le m \le \frac{N}{4} - 1$$

unde

$$X_{ik}(m) = \sum_{n=0}^{N/4-1} x_{ik}(n) w_{N/4}^{-mn} = (\mathcal{F}_d^{(N/4)} x_{ik})(m),\ x_{ik} \in K^{N/4},\ 1 \le i,k \le 2$$

şi $x_{i1}(n) = x_i(2n)$, $x_{i2}(n) = x_i(2n+1)$, $0 \le n \le N/4 - 1$, deci

$$x_{11}(n) = x_1(2n) = x(4n), \quad x_{12}(n) = x_1(2n+1) = x(4n+2),$$

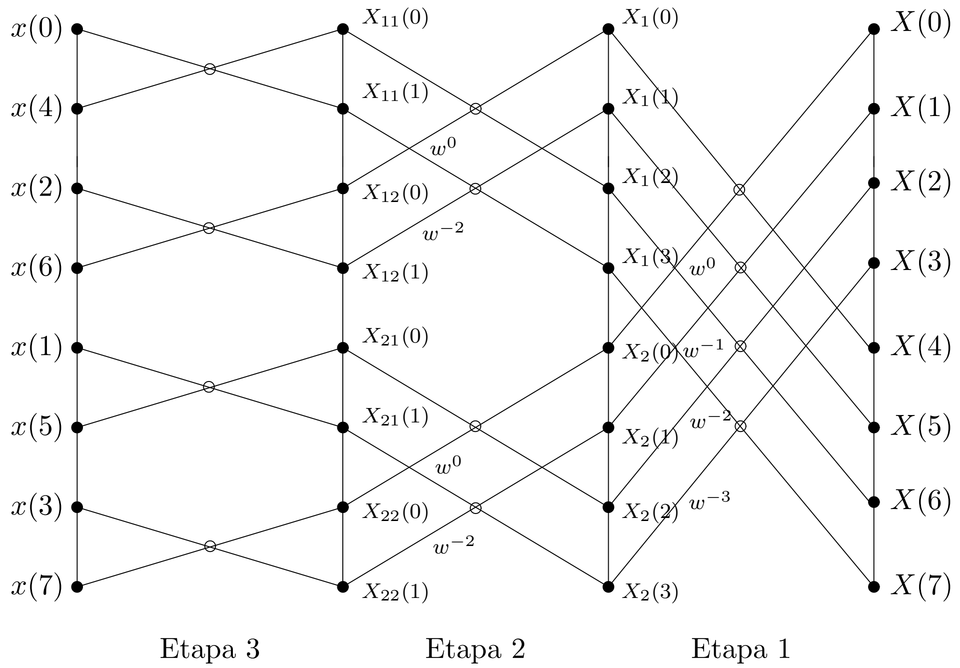
$$x_{21}(x) = x_2(2n) = x(4n+1), \quad x_{22}(n) = x_2(2n+1) = x(4n+3).$$

Se constată că numărul produselor complexe este $\frac{N}{2}$, deoarece considerând $X_{ik}(m)$ cunoscute, atât $X_1(m)$ cât şi $X_2(m)$ necesită $\frac{N}{4}$ produse complexe. Numărul sumărilor complexe este N.

Mai departe, se continuă similar cu etapele $3, 4, \ldots, s = \log_2 N$.

6.2.3. Graful FFT în 8 puncte, cu diviziune în timp $N = 2^3 = 8$

Prezentăm graful fluture al algorimului DITFFT, pentru $N = 8$.



6.2.4. Procedeul de inversare a biţilor

Graful fluture de mai sus arată că pentru ca secvenţa de ieşire $X(m)$ să apară în ordine naturală (crescătoare), de la $X(0)$ la $X(7)$, trebuie ca ordinea de introducere a semnalului de intrare $x(n)$ să fie $x(0)$, $x(4)$, $x(2)$, $x(6)$, $x(1)$, $x(5)$, $x(3)$, $x(7)$. Această ordine se obţine prin aşa-numitul procedeu de ”*inversare a biţilor*” valabil pentru orice $N = 2^s$, dar pe care îl exemplificăm în cazul $N = 2^3 = 8$.

n	Reprezentarea binară a lui n	Reprezentarea lui n cu ”biţii inversaţi”	n după ”inversarea biţilor”
0	0 0 0	0 0 0	0
1	0 0 1	1 0 0	4
2	0 1 0	0 1 0	2
3	0 1 1	1 1 0	6
4	1 0 0	0 0 1	1
5	1 0 1	1 0 1	5
6	1 1 0	0 1 1	3
7	1 1 1	1 1 1	7

6.2.5. Numărul operaţiilor în algoritmul DITFFT

La fiecare etapă, numărul înmulţirilor complexe (incluzând aici şi înmulţirile cu $w_N^0 = 1$, $w_N^{-N/2} = -1$, $W_N^{-N/4} = j$ ş.a.m.d.) este $\frac{N}{2}$, iar numărul sumărilor (adunări, scăderi) complexe este N. Dacă $N = 2^s$, avem $s = \log_2 N$ etape.

Aşadar, numărul înmulţirilor (multiplicărilor) complexe cu algoritmul DITFFT este $\frac{N}{2}\log_2 N$, iar numărul sumărilor complexe este $N \log_2 N$; întrucât o înmulţire complexă reprezintă 4 produse reale, iar o sumare complexă necesită 2 sumări reale, rezultă $4\frac{N}{2}\log_2 N + 2N\log_2 N = 4N\log_2 N$ operaţii reale, număr semnificativ mai mic decât $8N^2 - 2N$ operaţii reale asociate calculului direct: într-adevăr

$$\frac{8N^2 - 2N}{4N\log_2 N} = \frac{2N}{\log_2 N} - \frac{1}{2\log_2 N} \approx \frac{2N}{\log_2 N}.$$

De exemplu, dacă $N = 2^{10}$, primim

$$\frac{8N^2 - 2N}{4N\log_2 N} = \frac{2 \cdot 2^{10}}{10} - \frac{1}{20} \approx \frac{2048}{10} \approx 200,$$

aşadar numărul operaţiilor scade de aproximativ 200 de ori utilizând algoritmul DITFFT (numărul exact al operaţiilor reale este 8.386.560, respectiv 40.960).

Preluăm, după [2], următorul tabel comparativ privind timpii de execuţie (calcul) pentru TFD, prin aplicarea directă a formulelor de calcul, respectiv prin aplicarea formulelor de calcul rapid:

N	Direct	FFT (TFR)
2^{12}	$8'$	$30''$
2^{16}	30 h	$1'$
2^{18}	20 săptămâni	$5'$
2^{20}	1 an	$20'$

6.3. Algoritmul diviziunii în frecvenţă (DIFFFT)

Luăm $N = 2^s$ şi scriem $X(m) = (\mathcal{F}_d^{(N)}x)(m)$ sub forma:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)w_N^{-mn} + \sum_{m=N/2}^{N-1} x(n)w_N^{-mn}, \quad 0 \le m \le N-1. \tag{6.6}$$

Etapa 1

Efectuăm schimbarea de indice $k = n - \dfrac{N}{2}$ în suma a doua din (6.6) şi ţinem seama că $w_N^{-m(k+N/2)} = w_N^{-mk}(w_N^{N/2})^{-m} = (-1)^m w_N^{-mk}$. Din (6.6) primim:

$$(6.7) \qquad X(m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + (-1)^m x\left(n + \frac{N}{2}\right)\right] w_N^{-mn}, 0 \leq m \leq N-1.$$

$$0 \leq m \leq N-1.$$

Scriem acum $X(m)$ pe eşantioanele corespunzătoare frecvenţelor pare şi impare, utilizând relaţia $w_N^{-n(2m+1)} = w_N^{-n} w_{N/2}^{-mn}$. Din (6.7) rezultă:

$$(6.8) \qquad \begin{cases} X(2m) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right)\right] w_{N/2}^{-mn}, \\ \qquad 0 \leq m \leq \dfrac{N}{2} - 1 \\ X(2m+1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right)\right] w_N^{-n} w_{N/2}^{-mn}, \\ \qquad 0 \leq m \leq \dfrac{N}{2} - 1 \end{cases}$$

Punând

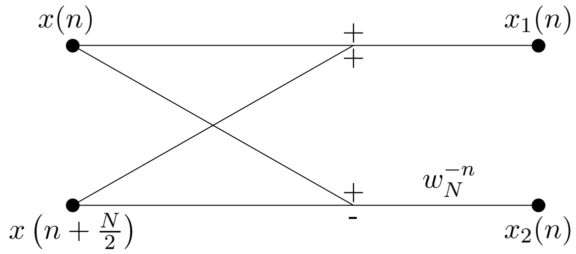
$$(6.9) \qquad \begin{cases} x_1(n) = x(n) + x\left(n + \dfrac{N}{2}\right) \\ x_2(n) = \left[x(n) - x\left(n + \dfrac{N}{2}\right)\right] w_N^{-n}, \ 0 \leq n \leq \dfrac{N}{2} - 1, \end{cases}$$

şi ţinând seama că $x_1 \in K^{N/2}$, $x_2 \in K^{n/2}$ şi $X = \mathcal{F}_d^{(N)} x$, relaţiile (6.8) se scriu:

$$(6.10) \qquad \begin{cases} (\mathcal{F}_d^{(N)} x)(2m) = (\mathcal{F}_d^{(N/2)} x_1)(m) \text{ şi} \\ (\mathcal{F}_d^{(N)} x)(2m+1) = (\mathcal{F}_d^{(N/2)} x_2)(m), \ 0 \leq m \leq \dfrac{N}{2} - 1 \end{cases}$$

Astfel, calculul spectrului discret $\mathcal{F}_d^{(N)} x$ revine la calculul spectrelor discrete $\mathcal{F}_d^{(N/2)} x_1$ şi $\mathcal{F}_d^{(N/2)} x_2$. Remarcăm că pentru calculul valorilor semnalelor

$x_1(n)$ şi $x_2(n)$ din (6.9) sunt necesare $0 + \frac{N}{2} = \frac{N}{2}$ multiplicări complexe şi $\frac{N}{2} + \frac{N}{2} = N$ sumări complexe; acest calcul se realizează după următorul graf-fluture:

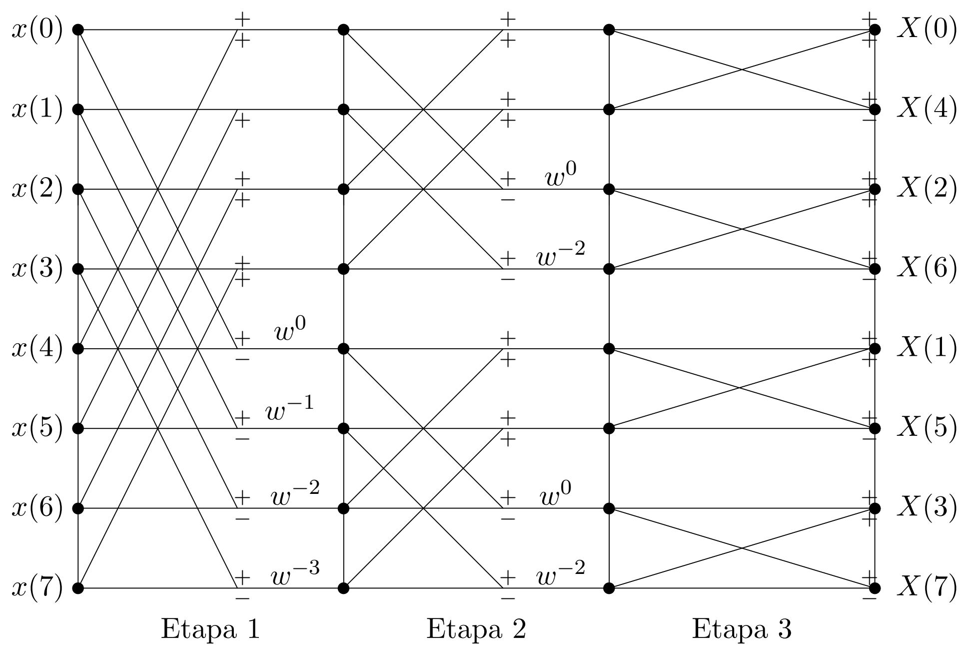


Mai departe, se continuă similar cu etapele $2, 3, \ldots, s = \log_2 N$.

Numărul operaţiilor în algoritmul DIFFFT

Însumând numerele de operaţii de la etapele descrise, rezultă $\frac{N}{2} \log_2 N$ înmulţiri complexe, $N \log_2 N$ sumări complexe, deci $4N \log_2 N$ operaţii reale, acelaşi număr ca şi în cazul algoritmului DITFFT (secţiunea 6.2.5).

Redăm alăturat **graful-fluture complet al algoritmului DIFFFT** în situaţia $N = 2^3 = 8$ ($w = w_8$).



Pentru a obţine valorile $X(m)$ în ordine naturală (adică $X(0)$, $X(1)$, $X(2), \ldots,$ $X(7)$), se introduc valorile $x(n)$ în ordinea dată de procedeul de inversare a biţilor şi se reorganizează corespunzător graful-fluture de mai sus.

6.4. Transformata Fourier rapidă a inversei TFD utilizând algoritmi de calcul rapid pentru TFD

În această secţiune, descriem modul de calcul rapid al TFDI, utilizând algoritmi FFT pentru TFD, *fără nici o modificare* în algoritmul FFT originar. Fie

$$x(n) = TFDI\{X(m)\} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(m)w^{mn}. \tag{6.11}$$

Trecând la conjugata complexă în (6.11) primim:

$$N\overline{x}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \overline{X}(m)w^{-mn}. \tag{6.12}$$

Membrul drept al egalităţii (6.12) reprezintă TFD pentru semnalul finit (de lungime N) $\overline{X}(m)$ şi poate fi calculat utilizând un algoritm FFT (de exemplu DITFFT sau DIFFFT). Aplicând acum conjugata complexă egalităţii (6.12) obţinem semnalul originar:

$$x(n) = \frac{1}{N}\overline{\sum_{m=0}^{N-1} \overline{X}(m)w^{-mn}}.$$

Astfel, un singur algoritm FFT determină atât TFD cât şi TFDI.

7 Transformata Fourier discretă bidimensională (TFD2D)

Fie M, N numere naturale nenule date,

$$w_M = \exp\left(\frac{2\pi j}{M}\right) \quad \text{şi} \quad w_N = \exp\left(\frac{2\pi j}{N}\right).$$

7.1. Definiţie

Fiind dat semnalul finit 2D $x : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to K$ *de lungime* MN *(i.e.* $x(m + k_1 M, n + k_2 N) = x(m,n)$, $\forall\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $\forall\ (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*), funcţia (semnalul finit de lungime* MN*)*

$$X : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to K \quad X(k,l) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(m,n) w_n^{-km} w_N^{-ln},$$

se numeşte **transformata Fourier discretă bidimensională (TFD2D)** *a semnalului* x.

Notaţie. $X(k,l) = \mathcal{F}_{2d}\{x(m,n); (k,l)\} = (\mathcal{F}_{2d}x)(k,l)$ sau $x(m,n) \leftrightarrow X(k,l)$.

7.2. Definiţie

Transformata Fourier discretă inversă 2D (TFDI2D) *a unui semnal finit* $y : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to K$ *de lungime* MN *este funcţia (semnalul finit de lungime* MN*)*

$$Y : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to K, \quad Y(m,n) = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} y(k,l) w_M^{km} w_N^{ln}.$$

7.3. Observaţie

Dacă $y(k,l) = X(k,l) = \mathcal{F}_{2d}\{x(m,n); (k,l)\} = (\mathcal{F}_{2d}x)(k,l)$, unde $x : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to K$, atunci $Y(m,n) = x(m,n)$, adică:

$$x(m,n) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} (\mathcal{F}_{2d}x)(m,n) w_M^{km} w_N^{ln}, \ \forall\ (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

7.4. Notaţie

Scriem $Y(m,n) = \mathcal{F}_{2d}^{-1}\{y(k,l); (m,n)\} = (\mathcal{F}_{2d}^{-1}y)(m,n)$.

Astfel, au loc relaţiile:

7.4.1. $X(k,l) = \mathcal{F}_{2d}\{x(m,n); (k,l)\} \ \Leftrightarrow$

$$x(m,n) = \mathcal{F}_{2d}^{-1}\{X(k,l); (m,n)\}.$$

7.4.2. $x(m,n) = \mathcal{F}_{2d}^{-1}\{(\mathcal{F}_{2d}x)(k,l); (m,n)\}$.

7.5. Definiţie

În cazul $M = N$, se definesc **TFD2D unitară** *şi* **TFDI2D unitară** *prin relaţiile:*

$$X(k,l) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} x(m,n)w^{-(km+ln)}, \quad 0 \le k,l \le N-1$$

$$x(m,n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} X(k,l)w^{mk+nl}, \quad 0 \le m,n \le N-1,$$

unde $w = w_N = \exp(2\pi j/N)$.

Notăm

$$X(k,l) = \widetilde{\mathcal{F}}_{2d}\{x(m,n);(k,l)\}$$
$$x(m,n) = \widetilde{\mathcal{F}}_{2d}^{-1}\{X(k,l);(m,n)\}.$$

7.6. Transformata Fourier rapidă 2D

Deoarece transformarea TFD2D (unitară) este separabilă, relaţiile din Definiţia 7.5 sunt echivalente cu 2N transformări DFT unidimensionale. Aplicând algoritmul FFT (§6), fiecare din cele 2N transformări necesită $4N\log_2 N$ operaţii reale; în final rezultă $8N^2\log_2 N$ operaţii reale.

7.7. Transformata Cosinus Discretă (DCT)

Fie $\alpha(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{N}}, & \text{dacă} \quad n = 0 \\ \sqrt{\dfrac{2}{N}}, & \text{dacă} \quad 1 \le n \le N-1 \end{cases}$; $N \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$.

7.7.1. În cazul 1D, DCT a unui semnal $x \in K^N$ se defineşte prin

$$C(m) = \alpha(m)\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\frac{(2n+1)m}{2N}\pi; \quad 0 \le m \le N-1,$$

iar inversa ei este

$$x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha(m)C(m)\cos\frac{(2n+1)m}{2N}\pi; \quad 0 \le n \le N-1.$$

7.7.2. În cazul 2D, DCT a unui semnal finit $x(m,n)$ de lungime N^2, este:

$$C(k,l) = \alpha(k)\alpha(l) \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(m,n) \cos \frac{(2m+1)k\pi}{2N} \cos \frac{(2n+1)l\pi}{2N},$$

pentru $0 \leq k,l \leq N-1$, iar inversa ei este

$$x(m,n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \alpha(k)\alpha(l)C(k,l) \cos \frac{(2m+1)k\pi}{2N} \cos \frac{(2n+1)l\pi}{N},$$

pentru $0 \leq k,l \leq N-1$.

7.8. Transformata Sinus Discretă (DST)

7.8.1. În cazul 1D, DST a unui semnal $x \in K^N$ este:

$$S(m) = \frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin \frac{\pi(m+1)(n+1)}{N+1}, \quad 0 \leq m \leq N-1,$$

iar inversa ei este

$$x(n) = \frac{2}{N+1} \sum_{m=0}^{N-1} S(m) \sin \frac{\pi(n+1)(m+1)}{N+1}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

7.8.2. În cazul 2D, DST a unui semnal $x(m,n)$, finit de lungime N^2, este

$$S(k,l) = \frac{2}{N+1} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(m,n) \sin \frac{\pi(m+1)(k+1)}{N+1} \sin \frac{\pi(n+1)(l+1)}{N+1},$$

pentru $0 \leq k,l \leq N-1$, iar inversa ei este

$$x(m,n) = \frac{2}{N+1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} S(k,l) \sin \frac{\pi(k+1)(m+1)}{N+1} \sin \frac{\pi(l+1)(n+1)}{N+1},$$

pentru $0 \leq m,n \leq N-1$.

8 Probleme

Enunţuri

1. *Să se demonstreze egalitatea*

$$\mathcal{F}_d(a^n;m) = \begin{cases} N, & \text{dacă} \quad w^m = a \\ \dfrac{1-a^N}{1-aw^{-m}}, & \text{dacă} \quad w^m \neq a \end{cases}; \quad a \in K,$$

unde $x \in K^N$, $x(n) = a^n$, N *dat.*

2. *Să se calculeze* $\mathcal{F}_d(x;m)$ *pentru următoarele semnale finite:*

(i) $x(n) = 1,\ x \in K^{100}$

(ii) $x(n) = (-1)^n,\ x \in K^{1000}$

(iii) $x(n) = (-1)^n,\ x \in K^{1001}$

(iv) $x(n) = \left(\dfrac{j-1}{\sqrt{2}}\right)^n,\ x \in K^{50}$

(v) $x(n) = \left(\dfrac{\sqrt{3}-j}{2}\right)^n,\ x \in K^{180}$

(vi) $x(n) = j^n,\ x \in K^{56}$

(vii) $x(n) = (-j)^n,\ x \in K^{38}$

(viii) $x(n) = \left(\dfrac{-1-j}{\sqrt{2}}\right)^n,\ x \in K^{800}.$

3. *Se consideră semnalul* $x \in K^N$, $x \in K^N$;

$$x(n) = \begin{cases} 1; & 0 \leq n \leq s \text{ şi } N-s \leq n \leq N-1 \\ 0; & s+1 \leq n \leq N-s-1 \end{cases},$$

unde $s \in \mathbb{N}^*$ *este dat,* $1 \leq s < N/2$.

(i) *Să se calculeze* $\mathcal{F}_d(x;m)$.

(ii) *Să se stabilească egalitatea*

$$\sum_{m=1}^{N-1} \frac{1-\cos(2\pi m(2s+1)/N)}{1-\cos(2\pi m/N)} = (2s+1)(N-2s-1).$$

4. *Să se calculeze* $\mathcal{F}_d(x;n)$ *şi să se stabilească egalitatea dată, în următoarele situaţii:*

(i) $x \in K^8$; $x(n) = \begin{cases} 1, & n \in \{0,1,2,6,7\} \\ 0, & n \in \{3,4,5\} \end{cases}$

$$\sum_{m=1}^{7} \frac{1-\cos(5m\pi/4)}{1-\cos(m\pi/4)} = 15$$

(ii) $x \in K^{12}$; $x(n) = \begin{cases} 1; & n \in \{0,1,2,3,4,5,10,11\} \\ 0; & n \in \{6,7,8,9\} \end{cases}$

$$\sum_{m=1}^{11} \frac{1-\cos(4m\pi/3)}{1-\cos(m\pi/6)} = 32.$$

(iii) $x(n) = \begin{cases} 1; & 0 \le n \le 4 \text{ sau } 12 \le n \le 15 \\ -1; & 5 \le n \le 11 \end{cases}$; $\quad x \in K^{16}$

$$\sum_{m=0}^{7} \operatorname{ctg}^2 \frac{(2m+1)\pi}{16} = 56.$$

5. *Să se stabilească egalităţile:*

(i) *(i)* $\mathcal{F}_d(n+s;m) = \begin{cases} N\dfrac{w^m}{1-w^m}, & 1 \le m \le N-1 \\ \\ Ns + \dfrac{N(N-1)}{2}, & m = 0 \end{cases}$

unde $s \in \mathbb{N}$ *este dat, iar* $x(n) = n+s$ *este un semnal finit de lungime* $N \in \mathbb{N}^*$.

(ii) $\mathcal{F}_d(n^2;m) = \begin{cases} \dfrac{20w^m(4-5w^m)}{(1-w^m)^2}, & 1 \le m \le 9 \\ 285, & m = 10, \end{cases}$

unde $x(n) = n^2 \in K^{10}$.

(iii) $\mathcal{F}_d(8n+7;m) = \begin{cases} \dfrac{800}{w^{-m}-1}, & 1 \le m \le 99 \\ 40300, & m = 0 \end{cases}$

unde $x(n) = 8n+7 \in K^{100}$.

6. *Utilizând forma matriceală a TFD să se calculeze* $X(m)$ *pentru fiecare semnal* $x \in K^4$ *şi să se verifice identitatea lui Parseval.*

(i) $x = (j-2, 0, 1, 2j)^T$
(ii) $x = (1+5j, 3-4j, 0, -1+2j)^T$
(iii) $x = (3+5j, 1, 2-j, 0)^T$
(iv) $x = (3, j, 1+3j, -j)^T$.

7. *Utilizând forma matriceală a TFD să se determine* $x \in K^4$ *pentru fiecare* $X \in K^4$ *dat.*

(i) $X = (3+j, 2+2j, -1-j, -2j)^5$
(ii) $X = (3, 1+2j, -1, 1-2j)^T$
(iii) $X = (6, -2j, 2j, 2+4j)^T$.

Indicaţii. Soluţii. Răspunsuri

1. $\mathcal{F}_d(a^n;m) = \sum_{n=0}^{N-1}(aw^{-m})^n$; am obţinut o progresie geometrică de raţie $q = aw^{-m}$, cu N termeni; utilizăm $w^{kN} = 1$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$.

2. (i) $\mathcal{F}_d(1;m) = 0$, dacă $1 \le m \le 99$; $\mathcal{F}_d(1;0) = 100$

(ii) $\mathcal{F}_d((-1)^n;m) = 0$, dacă $0 \le m \le 999$, $m \ne 500$; $\mathcal{F}_d((-1)^n;500) = 1000$

(iii) $\mathcal{F}_d((-1)^n;m) = 2(1+w^{-m})^{-1},\ 0 \le m \le 1000$

(iv) $X(m) = (1+j)/\left[1-\exp(75-4m)\dfrac{\pi j}{100}\right],\ 0 \le m \le 99$

(v) $X(m) = 0,\ 0 \le m \le 179,\ m \ne 165;\ X(165) = 180$

(vi) $X(m) = 56\delta_{14}(m),\ 0 \le m \le 55$

(vii) $X(m) = 2/\left[1+j\exp\left(-\dfrac{\pi m}{19}j\right)\right],\ 0 \le m \le 37$

(viii) $X(m) = 800\delta_{500}(m) = 800\delta(m-500),\ 0 \le m \le 799$

3. $X(m) = \displaystyle\sum_{n=-s}^{s} w^{-mn} = \begin{cases} w^{ms}\dfrac{1-w^{-m(2s+1)}}{1-w^{-m}}, & m \ne 0 \\ 2s+1, & m = 0 \end{cases}$

Utilizându-se egalitatea $1-w^k = -2j\sin\dfrac{k\pi}{N}\exp\left(\dfrac{k\pi}{N}j\right)$, rezultă

$$X(m) = \sin\frac{m(2s+1)}{n}\pi/\sin\frac{m\pi}{N}, \quad 1 \le m \le N-1.$$

În final, se aplică formula lui Parseval.

4. (i) $X(m) = \displaystyle\sum_{n=0}^{7} x(n)w^{-mn} = \sum_{n=-2}^{5} x(n)w^{-mn} = \sum_{n=-2}^{2}(w^{-m})^n.$

În final $X(m) = \begin{cases} 5, & m = 0 \\ \dfrac{\sin(5m\pi/8)}{\sin(m\pi/8)}, & 0 < m \le 7, \end{cases}$; adică $X(0) = 5$; $X(1) = X(7) = \sqrt{2}+1$; $X(2) = X(6) = -1$; $X(3) = X(5) = 1-\sqrt{2}$; $X(4) = 1$.

(ii) $X(m) = \displaystyle\sum_{n=-2}^{5} w^{-mn} = \begin{cases} e^{-\pi mj/4}\sin\dfrac{2\pi m}{3}\left(\sin\dfrac{m\pi}{12}\right)^{-1}, & m \ne 0 \\ 8, & m = 0 \end{cases}$

Se aplică formula lui Parseval.

(iii) $\mathcal{F}_d(x;m) = \begin{cases} 2\cdot(-1)^{m/2}; & m \text{ par} \\ 2\cdot(-1)^{(m-1)/2}\operatorname{ctg}\dfrac{m\pi}{16}; & m \text{ impar} \end{cases}; 0 \le m \le 15$

6. **(i)** $X = (3j-1; j-5; -1-j; j-1)^T$

$$\sum_{m=0}^{3} |X(m)|^2 = 10+26+2+2 = 40; \quad 4\sum_{m=0}^{3} |x(n)|^2 = 4(5+0+1+4) = 40$$

(ii) $X = (3+3j; j-5; 7j-1; 7+9j)^T$;
(iii) $X = (6+4j; 1+5j; 4+4j; 1+7j)^T$
(iv) $X = (4+3j; 4-3j; 4+3j; -3j)^T$
7. $x = \frac{1}{4}\overline{W}X$;
(i) $x = (1, j, 0, 2)^T$;
(ii) $x = (1, 0, 0, 2)^T$;
(iii) $x = (2+j; 3-j; 1; 0)^T$.

Capitolul 4

Transformarea Laplace

1 Preliminarii

Transformata Fourier integrală, introdusă în Capitolul 2 se aplică semnalelor-funcţie din $L^1(\mathbb{R})$, spaţiu din care nu fac parte clase importante de funcţii precum polinoamele, funcţiile trigonometrice de tip sin, cos ş.a. Dificultăţile legate de neapartenenţa semnalului-timp la clasa $L^1(\mathbb{R})$ se pot evita considerând, de exemplu, funcţii de forma $f_\alpha(t) = f(t)e^{-\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $f \notin L^1(\mathbb{R})$ şi $f_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$; asemenea situaţii sunt posibile, de exemplu $f(t) = u(t)$ şi $\alpha > 0$. Obţinem:

$$(\mathcal{F}f_\alpha)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\alpha+j\omega)t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

unde $s = \alpha + j\omega \in \mathbb{C}$.

În ipoteza convergenţei integralei $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$, am obţinut o transformată nouă a funcţiei $f(t)$ care se numeşte **transformata Laplace bilaterală** a lui $f(t)$:

$$F_B(s) = \mathcal{L}_B\{f(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt. \tag{1.1}$$

Numărul $s = \alpha + j\omega$, a cărui parte imaginară este $\operatorname{Im} s = \omega$, se numeşte *frecvenţă complexă*.

Pe de altă parte, majoritatea semnalelor care intervin în practica inginerească devin "semnificative" de la un timp t_0, care poate fi luat $t_0 = 0$; admitem aşadar că $f(t) = 0$, $\forall\ t < 0$ şi introducem **transformata Laplace**

unilaterală asociată semnalului $f(t)$ drept funcţia $F : D \to K$,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad s \in D, \tag{1.2}$$

unde $D = D(f)$ este mulţimea de convergenţă a integralei din (1.2).

În paragraful următor, descriem o clasă de funcţii-semnal $f(t)$ reprezentativă pentru transformata Laplace.

2 Clasa funcţiilor "original"

2.1. Definiţie

O funcţie $f : \mathbb{R} \to K$ se numeşte **funcţie-original** *sau* **original Laplace** *(pe scurt:* **original***) dacă îndeplineşte următoarele condiţii:*

(i) $f(t) = 0$, $\forall\ t < 0$

(ii) f este **segmentar continuă***, adică are în orice interval mărginit din $\mathbb{R}$ un număr finit de puncte de discontinuitate, toate de speţa întâi*

(iii) f este de **ordin exponenţial***, adică există $M \geq 0$ şi există $a = a(f) \geq 0$ astfel încât $|f(t)| \leq Me^{at}$, $\forall\ t \geq 0$.*

Notaţie. Mulţimea funcţiilor original se notează cu $\mathcal{O}$.

2.2. Definiţie

(i) Numărul $a = a(f)$ din condiţia (iii) a Definiţiei 2.1 se numeşte **indice de creştere** *al originalului f. Notăm cu $M(f)$ mulţimea indicilor de creştere ai originalului f.*

(ii) Numărul $\sigma_0 = \sigma_0(f) = \inf\{a :\ a \in M(f)\}$, i.e. "cel mai mic" indice de creştere al originalului f, se numeşte **abscisa de convergenţă** *a originalului f.*

Observaţie. Dacă f este mărginită, atunci $\sigma_0(f) = 0$.

2.3. Convenţie

Fie $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ funcţia treaptă-unitate a lui Heaviside; remarcăm că $\sigma_0(u) = 0$ şi $u \in \mathcal{O}$. Dacă $\varphi : \mathbb{R} \to K$ este o funcţie care îndeplineşte condiţiile (ii) şi (iii) din Definiţia 2.1, atunci funcţia $f = \varphi \cdot u$ devine o funcţie-original şi $f(t) = \varphi(t)$, $\forall\ t \geq 0$. Pe parcursul acestui capitol, cu sau fără menţionare explicită, *prin $f(t)$ se înţelege funcţia $u(t)f(t)$*. De exemplu, prin $f(t) = e^{at}$ înţelegem

$$f(t) = e^{at}u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{at}, & t \geq 0. \end{cases}$$

2.4. Structura algebrică a mulţimii $\mathcal{O}$

2.4.1. Dacă $f, g \in \mathcal{O}$, atunci $\alpha f + \beta g \in \mathcal{O}$ şi $fg \in \mathcal{O}$, $\forall\ \alpha, \beta \in K$.

2.4.2. Dacă $f_k \in \mathcal{O}$ şi $\lambda_k \in K$, $1 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k \in \mathcal{O}$ şi $\prod\limits_{k=1}^{n} f_k \in \mathcal{O}$; în particular $f^n \in \mathcal{O}$, $\forall\ f \in \mathcal{O}$.

Demonstraţiile acestor proprietăţi sunt imediate. Astfel, structura algebrică $(\mathcal{O}, +, \cdot, K)$ este un spaţiu vectorial (liniar).

2.5. Exemple

2.5.1. $f(t) = e^{at} \in \mathcal{O}$, $\forall\ a \in K$ şi $\sigma_0(f) = \begin{cases} \operatorname{Re} a, & \operatorname{Re} a \geq 0 \\ 0, & \operatorname{Re} a < 0 \end{cases}$

2.5.2. $\sin \omega t = \dfrac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \in \mathcal{O}$; analog $\cos \omega t \in \mathcal{O}$, $\operatorname{sh} \omega t \in \mathcal{O}$, $\operatorname{ch} \omega t \in \mathcal{O}$, $\forall\ \omega \in \mathbb{R}$.

2.5.3. $f(t) = t^n \in \mathcal{O}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

2.5.4. $t^n e^{at}$, $t^n \sin \omega t$, $e^{at} \cos \omega t$ sunt funcţii original, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $a \in K$, $\omega \in \mathbb{R}$.

2.5.5. $e^{t^2} \notin \mathcal{O}$ deoarece **nu** este de ordin exponenţial; de asemenea $\dfrac{1}{\sqrt{t}} = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1/\sqrt{t}, & t > 0 \end{cases}$ **nu** este o funcţie original, deoarece are în $t = 0$ o discontinuitate de speţa a doua.

2.5.6. Fie $n \in \mathbb{N}$, $f_k \in \mathcal{O}$, $0 \leq k \leq n+1$ şi numerele reale t_k, $0 \leq k \leq n+1$, cu $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1}$ date. Definim $f : \mathbb{R} \to K$ prin $f(t) = f_k(t)$, dacă $t_k \leq t < t_{k+1}$, $0 \leq k \leq n$, $t_0 = 0$ şi $f(t) = f_{n+1}(t)$, $t \geq t_{n+1}$. Are loc egalitatea

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} [u(t - t_k) - u(t - t_{k+1})] f_k(t) + u(t - t_{n+1}) f_{n+1}(t).$$

3 Definiţia transformatei Laplace şi proprietăţile standard ale transformării Laplace

3.1. Definiţie

Fiind dat un original $f \in \mathcal{O}$, definim semiplanul

$$\Delta_0 = \Delta_0(f) = \{s \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} s > \sigma_0 = \sigma_0(f)\}.$$

Funcţia $F : \Delta_0(f) \to K$, $F(s) = \displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$, $\forall\ s \in \Delta_0$ *se numeşte* **transformata Laplace** *a originalului* f.

Notaţie. Scriem $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$, $s \in \Delta_0$; din motive de simplificare a notaţiei, se scrie uneori $\mathcal{L}\{f(t)\}$ în loc de $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

Observaţie. Se arată [11], [24] că integrala care defineşte $F(s)$ este absolut convergentă pe Δ_0, iar transformata Laplace $F = \mathcal{L}f$ este o funcţie olomorfă pe mulţimea Δ_0; de asemenea $F(s) \to 0$, dacă $\operatorname{Re} s \to \infty$. În plus, derivatele funcţiei complexe F se calculează urmând, formal, regula de derivare a unei integrale cu parametru (Teorema 3.10). Astfel, polii (punctele singulare) ale transformatei Laplace $\mathcal{F}$ (mai precis ale extinderii sale $\widetilde{F}$ la "domeniul maxim" de definiţie pentru $F(s)$) sunt situaţi în afara semiplanului $\Delta_0(f)$; aşadar dacă $s = a$ este un punct singular (de obicei pol) al funcţiei $\widetilde{F}(s)$, atunci $\sigma_0(f) \geq \operatorname{Re} a$.

Introducem acum noţiunea de **operator de transformare Laplace**. Pentru fiecare $a \in \mathbb{R}$, punem $\Delta(a) = \{s \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} s \geq a\}$ şi observăm că dacă $a \geq 0$ şi $f \in \mathcal{O}$ cu $\sigma_0(f) = a$, atunci $\Delta(a) = \Delta_0(f)$.

3.2. Definiţie

Operatorul $\mathcal{L} : \mathcal{O} \to \displaystyle\bigcup_{a \geq 0} K^{\Delta(a)}$, $f \mapsto \mathcal{L}f$, *unde*

$$(\mathcal{L}f)(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \ \forall\ s \in \Delta_0(f),$$

se numeşte **operator de transformare Laplace**.

Aşadar, operatorul de transformare Laplace asociază fiecărei funcţii original f transformata sa Laplace $F = \mathcal{L}f$; acest procedeu (operatorul $\mathcal{L}$) este cunoscut sub sintagma "**transformarea Laplace**".

3.3. Exemple

3.3.1. $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$, $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$, $a \in K$

Într-adevăr,

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{t(a-s)} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{a-s} e^{t(a_1-s_1)} e^{jt(a_2-s_2)} \Big|_0^{\infty},$$

unde $a = a_1 + ja_2$ şi $s = s_1 + js_2$.

Dacă $s_1 > a_1$ rezultă că $\lim\limits_{t\to\infty} e^{t(a_1-s_1)} = 0$; ţinând seama că $|e^{jt(a_2-s_2)}| = 1$, obţinem

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{a-s}(0-1) = \frac{1}{s-a}, \ \forall\, s \in \mathbb{C}$$

cu $s_1 > a_1 \ \Leftrightarrow \ \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$.

3.3.2. $\mathcal{L}\{t^{\alpha}\} = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, $\forall\, \alpha > -1$, $\operatorname{Re} s > 0$ *(deşi $t^{\alpha} \notin \mathcal{O}$, pentru $-1 \le \alpha < 0$); în particular* $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, *dacă* $\operatorname{Re} > 0$; $\mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$; $\mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$, $\operatorname{Re} s > 0$.

Într-adevăr, dacă $s \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha}\} = \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-st} dt \overset{st=\alpha}{=} \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{s^{\alpha}} e^{-x} \frac{dx}{s}$$

$$= \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

Pentru $s \in \mathbb{C}$, cu $\operatorname{Re} s > 0$, se utilizează principiul identităţii funcţiilor olomorfe.

Mai departe, listăm principalele proprietăţi ale transformării Laplace. În lipsa altor precizări, presupunem că $f \in \mathcal{O}$ şi notăm $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$, $s \in \Delta_0(f)$. Primul grup de proprietăţi creează facilităţi în determinarea efectivă a transformatei Laplace pentru funcţii uzuale, de aceea ele se numesc *proprietăţi de calcul* ale transformării Laplace.

3.4. Liniaritatea transformării Laplace

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\},\ \forall\ \alpha, \beta \in K,\ \forall\ f, g \in \mathcal{O}$$

3.5. Teorema asemănării (teorema comprimării timpului sau teorema schimbării de scală)

Dacă $a > 0$, *atunci* $\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$.

3.6. Teorema întârzierii originalului

Dacă $a > 0$, *atunci* $\mathcal{L}\{f(t-a)\}u(t-a) = e^{-as}F(s)$;
e^{-as} *se numeşte* **factor de întârziere**.

3.7. Teorema accelerării (sau teorema translaţiei la dreapta)

Dacă $a > 0$, *atunci* $\mathcal{L}\{f(t+a)\}(s) = e^{-as}F(s) - e^{-as}\displaystyle\int_0^a f(t)e^{-st}dt.$

3.8. Teorema deplasării imaginii

Dacă $a \in K$, *atunci* $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a)$ *unde* $\operatorname{Re} s > \sigma_0(f) + \operatorname{Re} a$.

3.9. Teorema derivării originalului

3.9.1. *Dacă* $f \in \mathcal{O}$ *şi* $f' \in \mathcal{O}$, *atunci*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0+0).$$

3.9.2. *Dacă* $f^{(k)} \in \mathcal{O}$, $0 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}^*$, *atunci*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0+0).$$

3.10. Teorema derivării imaginii

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, *atunci*

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

sau

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s),$$

unde $\operatorname{Re} s > \sigma_0(f)$.

3.11. Teorema integrării originalului

Fie $g : \mathbb{R} \to K$, $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)dx$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. *Atunci* $g \in \mathcal{O}$ *şi*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)dx\right\} = \frac{1}{s}F(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s),$$

unde $\operatorname{Re} s > \sigma_0(f)$.

3.12. Teorema integrării imaginii

Dacă $f \in \mathcal{O}$ *şi* $\dfrac{f(t)}{t} \in \mathcal{O}$, *atunci*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(y)dy = \int_s^\infty \mathcal{L}\{f(t)\}(y)dy,$$

unde $\operatorname{Re} s > \sigma_0\left(\dfrac{f(t)}{t}\right)$.

3.13. Corolar

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(s)ds.$$

3.14. Transformata Laplace a funcţiilor periodice

Dacă $f \in \mathcal{O}$, *iar restricţia lui* f *la intervalul* $[0, \infty)$ *este o funcţie periodică, adică există* $T > 0$ *astfel încât* $f(t + T) = f(t)$, $\forall\, t \geq 0$, *atunci are loc egalitatea:*

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st}dt.$$

3.15. Dezvoltarea în serie a originalului

Dacă $f \in \mathcal{O}$ *se poate dezvolta în serie Mc-Laurin* $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n t^n$, $\forall\, t \geq 0$, *atunci*

$$F(s) = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Mai general, dacă $f(t) = t^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $\alpha > -1$, $t \in \mathbb{R}_+$, *atunci*

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{s^{n+\alpha+1}}.$$

Demonstrăm mai departe Teoremele 3.9, 3.12, 3.13 şi 3.14, celelalte proprietăţi rezultând prin calcul standard.

Demonstraţia Teoremei 3.9

3.9.1. Integrând prin părţi, obţinem

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$= sF(s) - f(0+0),$$

deoarece $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)e^{-st} = f(0+0)$ şi $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0$; într-adevăr

$$|f(t)e^{-st}| \le Me^{\sigma_0 t}e^{-t\operatorname{Re} s} = Me^{t(\sigma_0 - \operatorname{Re} s)}$$

şi cum $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ rezultă $\lim\limits_{t\to\infty} e^{t(\sigma_0-\operatorname{Re} s)} = e^{-\infty} = 0$, deci $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0$.

3.9.2. Punând $f^{(k)}$ în loc de f, $0 \le k \le n-1$, primim:

$$\mathcal{L}\{f^{(k+1)}(t)\} = s\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\} - f^{(k)}(0+0).$$

Scriind această egalitate pentru $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ şi înmulţind membru cu membru cele n egalităţi astfel obţinute, după simplificări standard rezultă relaţia din enunţ.

Demonstraţia Teoremei 3.12

Fie $G(s) = \displaystyle\int_s^{\infty} F(y)dy$, ceea ce implică

$$G'(s) = -F(s). \tag{3.1}$$

Notăm $h(t) = \dfrac{f(t)}{t}$; utilizând Teorema 3.10 primim:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{th(t)\} = -(\mathcal{L}\{h(t)\})'. \tag{3.2}$$

Din (3.1) şi (3.2) obţinem $G'(s) = (\mathcal{L}\{h(t)\})'$, deci

$$\mathcal{L}\{h(t)\}(s) = G(s) + C. \tag{3.3}$$

Trecând la limită pentru $s \to \infty$ ($s \in \mathbb{R}$) rezultă

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{h(t)\}(s) = \lim_{s\to\infty} G(s) + C;$$

deoarece $\lim\limits_{s\to\infty} G(s) = 0$ (conform definiţiei lui G) şi $\lim\limits_{s\to\infty} \mathcal{L}\{h(t)\}(s) = 0$, obţinem $C = 0$, de unde deducem via (3.3):

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = G(s) = \int_s^\infty F(y)dy.$$

Corolarul 3.13 rezultă luând $s = 0$ în egalitatea din enunţul teoremei, scrisă sub forma

$$\int_s^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = \int_s^\infty F(y)dy.$$

Demonstraţia Teoremei 3.14

Utilizând egalitatea $f(x + kT) = f(x),\ \forall\ k \in \mathbb{N}$, obţinem:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{(n+1)T} e^{-st} f(t)dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st}dt \overset{t-kT=x}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^T f(x+kT)e^{-sx}e^{-skT}dx$$

$$= \left(\int_0^T f(x)e^{-sx}dx\right) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-skT} = \left(\int_0^T f(t)e^{-st}dt\right) \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-sT})^n$$

$$= \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st}dt,$$

deoarece $|e^{-sT}| = e^{-T\operatorname{Re} s} < 1,\ \forall\ s \in \Delta_0$ ($\operatorname{Re} s > \sigma_0 \geq 0$).

3.16. Exemple (Dicţionar de transformate Laplace fundamentale)

Prezentăm o listă de transformate Laplace fundamentale (elementare), al căror calcul utilizează proprietăţile (teoremele) demonstrate anterior.

3.16.1. $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a},\ \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a,\ a \in K$

3.16.2. $\mathcal{L}\{t^{\alpha}\} = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},\ \alpha > -1;\ \operatorname{Re} s > 0$

3.16.3. $\mathcal{L}\{t^{n}\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}},\ n \in \mathbb{N},\ \operatorname{Re} s > 0$

3.16.4. $\mathcal{L}\{1\} = \mathcal{L}\{u(t)\} = \dfrac{1}{s},\ \operatorname{Re} s > 0$

3.16.5. $\mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}},\ \operatorname{Re} s > 0$

3.16.6. $\mathcal{L}\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2},\ a \in \mathbb{R},\ \operatorname{Re} s > 0$

3.16.7. $\mathcal{L}\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2},\ a \in \mathbb{R},\ \operatorname{Re} s > 0$

3.16.8. $\mathcal{L}\{\operatorname{ch} at\} = \dfrac{s}{s^2-a^2},\ a \in \mathbb{R},\ \operatorname{Re} s > |a|$

3.16.9. $\mathcal{L}\{\operatorname{sh} at\} = \dfrac{a}{s^2-a^2},\ a \in \mathbb{R},\ \operatorname{Re} s > |a|$

3.16.10. $\mathcal{L}\{t^{\alpha}e^{at}\} = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(s-a)^{\alpha+1}},\ \alpha > -1,\ a \in K,\ \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$

3.16.11. $\mathcal{L}\{t^{n}e^{at}\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ n \in \mathbb{N},\ a \in K,\ \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$

3.16.12. $\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\cos at\} = \dfrac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+a^2},\ \operatorname{Re} s > \operatorname{Re}\lambda,\ a \in \mathbb{R},\ \lambda \in K$

3.16.13. $\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\sin at\} = \dfrac{a}{(s-\lambda)^2+a^2},\ \operatorname{Re} s > \operatorname{Re}\lambda,\ a \in \mathbb{R},\ \lambda \in K$

3.16.14. $\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\operatorname{ch} at\} = \dfrac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2-a^2},\ \operatorname{Re} s > \operatorname{Re}\lambda + |a|,\ a \in \mathbb{R},\ \lambda \in K$

3.16.15. $\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\operatorname{sh} at\} = \dfrac{a}{(s-\lambda)^2-a^2},\ \operatorname{Re} s > \operatorname{Re}\lambda + |a|,\ a \in \mathbb{R},\ \lambda \in K$

3.16.16. $\mathcal{L}\{t\cos at\} = \dfrac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$, $\operatorname{Re} s > 0$, $a \in \mathbb{R}$

3.16.17. $\mathcal{L}\{t\sin at\} = \dfrac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$, $\operatorname{Re} s > 0$, $a \in \mathbb{R}$

3.16.18. $\mathcal{L}\{\mathrm{Si}(t)\} = \dfrac{1}{s}\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s\right) = \dfrac{1}{s}\operatorname{arcctg} s = \dfrac{1}{s}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{s}$,
$\operatorname{Re} s > 0$, unde "Si" este funcţia "sinus-integral", $\mathrm{Si}(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\sin x}{x}dx$, $\forall\ t > 0$.

Menţionăm că prin "arctg" se înţelege ramura olomorfă a funcţiei multiforme "arctg" care pentru $s \in \mathbb{R}$ şi $s > 0$ ia valori în intervalul $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

3.16.19. (i) $\mathcal{L}\{\mathcal{J}_0(t)\} = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$

(ii) $\mathcal{L}\{\mathcal{J}_n(t)\} = \dfrac{(\sqrt{s^2+1} - s)^n}{\sqrt{s^2+1}}$, $n \in \mathbb{N}$

3.16.20. $\mathcal{L}\{\mathcal{J}_\nu(t)\} = \dfrac{(\sqrt{s^2+1} - s)^\nu}{\sqrt{s^2+1}}$, $\nu > -1$.

Reamintim că $\mathcal{J}_\nu(t) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+\nu}$
sunt funcţiile lui Bessel de ordin ν.

Rezolvare.

Exemplele 3.16.1-3.16.5. Provin din Exemplele 3.3.1 şi 3.3.2.

Transformatele 3.16.6-3.16.9 utilizează definiţia complexă a semnalelor aferente, liniaritatea transformării Fourier (Proprietatea 3.4) şi Exemplul 3.16.1. De exemplu:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin at\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2j}(e^{jat} - e^{-jat})\right\} = \frac{1}{2j}(\mathcal{L}\{e^{jat}\} - \mathcal{L}\{e^{-jat}\}) \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-aj} - \frac{1}{s+aj}\right) = \frac{a}{s^2+a^2},\end{aligned}$$

unde $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re}(\pm aj) = 0$.

Transformatele 3.16.10-3.16.15 se bazează pe Teorema 3.8 a deplasării imaginii şi pe Exemplele 3.16.1-3.16.3, 3.16.6, 3.16.7. De exemplu:

$$\mathcal{L}\{t^\alpha e^{at}\}(s) = \mathcal{L}\{t^\alpha\}(s-a) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\bigg|_{s=s-a} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(s-a)^{\alpha+1}}.$$

Exemplele 3.16.16-3.16.17 folosesc Teorema derivării imaginii 3.10; astfel,

$$\mathcal{L}\{t\cos at\} = (-1)^1(\mathcal{L}\{\cos at\})' = -\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)' = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

Exemplul 3.16.18 utilizează Teoremele 3.11 şi 3.12:

$$\mathcal{L}\{\mathrm{Si}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin x}{x}dx\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \frac{1}{s}\int_s^\infty \mathcal{L}\{\sin t\}(y)dy$$

$$= \frac{1}{s}\int_s^\infty \frac{1}{y^2+1}dy = \frac{1}{s}\operatorname{arctg} y\Big|_s^\infty = \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s\right)$$

3.16.19. Transformata Laplace a funcţiilor lui Bessel $\mathcal{J}_n(t)$, $n \geq 0$

(i) Utilizând Teorema 3.15 şi Exemplul 3.16.3 obţinem

$$\mathcal{L}\{\mathcal{J}_0(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n}\right\} = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{1}{s^{2n}}. \tag{3.4}$$

Să considerăm seria binomială

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}z^n,\ \ \alpha\in\mathbb{C},\ \ |z|<1;$$

pentru $z = s^{-2}$ şi $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, primim

$$(1+s^{-2})^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}\cdot\frac{1}{s^{2n}} \tag{3.5}$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}\cdot\frac{1}{s^{2n}}.$$

Din (3.4) şi (3.5) deducem:

$$\mathcal{L}\{\mathcal{J}_0(t)\} = \frac{1}{s}(1+s^{-2})^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}.$$

(ii) Utilizăm metoda inducţiei matematice. Deoarece $\mathcal{J}_1(t) = -\mathcal{J}_0'(t)$, din Teorema 3.9.1 rezultă

$$\mathcal{L}\{\mathcal{J}_1(t)\} = -\mathcal{L}\{\mathcal{J}_0'(t)\} = -s\mathcal{L}\{\mathcal{J}_0(t)\} + \mathcal{J}_0(0)$$

$$= -s\frac{1}{\sqrt{s^2+1}} + 1 = \frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}}.$$

Presupunem egalitatea $\mathcal{L}\{\mathcal{J}_k(t)\} = \dfrac{(\sqrt{s^2+1}-s)^k}{\sqrt{s^2+1}}$ adevărată pentru $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ şi o demonstrăm pentru $k = n \geq 2$. Din relaţiile de recurenţă pentru funcţiile lui Bessel $\mathcal{J}_n(t) = \mathcal{J}_{n-2}(t) - 2\mathcal{J}'_{n-1}(t)$, $n \geq 2$, din Teorema 3.9.1 şi din egalitatea $\mathcal{J}_{n-1}(0) = 0$, $\forall\ n \geq 2$, primim succesiv:

$$\mathcal{L}\{\mathcal{J}_n(t)\} = \mathcal{L}\{\mathcal{J}_{n-2}(t)\} - 2\mathcal{L}\{\mathcal{J}'_{n-1}(t)\} = \mathcal{L}\{\mathcal{J}_{n-2}(t)\} + 2s\mathcal{L}\{J_{n-1}(t)\}$$

$$= \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^{n-2}}{\sqrt{s^2+1}} - 2s\frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^{n-1}}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$= \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^{n-2}}{\sqrt{s^2+1}}(1 - 2s\sqrt{s^2+1} + 2s^2)$$

$$= \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^{n-2}}{\sqrt{s^2+1}}(\sqrt{s^2+1}-s)^2 = \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^{n}}{\sqrt{s^2+1}}.$$

În continuare, vom enumera o serie de **proprietăţi care descriu comportarea asimptotică a originalului şi transformatei Laplace**.

3.17. Comportarea la infinit a transformatei

Dacă $f \in \mathcal{O}$ *şi* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, *atunci* $\lim\limits_{\operatorname{Re} s\to\infty} F(s) = 0$.

Observaţii. (i) Relaţia $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$ este, de asemenea, adevărată dacă $\arg s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(ii) Din Teorema 3.17 rezultă că nu orice funcţie complexă (chiar olomorfă) este imaginea Laplace a unei funcţii original; de exemplu, nu există $f \in \mathcal{O}$ astfel încât $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = 1$ sau $\mathcal{L}\{f(t)\} = P(s)$, unde P este un polinom nenul. Acest "defect" se va remedia în cadru distribuţional (capitolul 6).

3.18. Teorema valorii iniţiale

Dacă $f \in \mathcal{O}$ *şi* $f' \in \mathcal{O}$, *atunci* $\lim\limits_{\operatorname{Re} s\to\infty} sF(s) = f(0+0)$.

Observaţie. Relaţia $\lim\limits_{s\to\infty} sF(s) = f(0+0)$ are loc dacă $\arg s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

3.19. Teorema valorii finale

Dacă $f \in \mathcal{O}$ *şi* $f' \in \mathcal{O}$, f' *este mărginită şi există* $f(\infty) \stackrel{def}{=\!=} \lim_{t\to\infty} f(t)$, *atunci* $\lim_{s\to 0} sF(s) = f(\infty)$.

Un rezultat important din teoria transformatei Laplace descrie **acţiunea transformatei Laplace asupra produsului de convoluţie** a două originale Laplace şi stabileşte, ca o consecinţă, formula lui Duhamel, aplicată frecvent în electrotehnică.

În primul rând, să observăm că produsul de convoluţie a două originale Laplace f şi g există şi se poate descrie prin oricare din următoarele egalităţi (§1.4, Cap.1):

$$(f * g)(t) = \int_0^\infty f(x)g(t-x)dx = \int_0^t f(x)g(t-x)dx, \quad t \geq 0.$$

3.20. Teorema produsului de convoluţie

Dacă $f, g \in \mathcal{O}$, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ *şi* $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$, *atunci:*
(i) $f * g \in \mathcal{O}$
(ii) *Are loc egalitatea* $\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s)G(s)$.

Demonstraţie

(i) Este clar că $f * g$ îndeplineşte primele două condiţii ale unui original Laplace (Definiţia 2.1). Să arătăm că f este de ordin exponenţial. Din ipoteză rezultă că $\exists\ M_1, M_2 \geq 0$ şi $\exists\ s_1, s_2 \geq 0$ astfel încât $|f(t)| \leq M_1 e^{s_1 t}$ şi $|g(t)| \leq M_2 e^{s_2 t}$, $\forall\ t \geq 0$. Atunci

$$|(f * g)(t)| \leq M \int_0^t e^{s_1 x} e^{s_2(t-x)} dx = M e^{s_2 t} \int_0^t e^{(s_1 - s_2)x} dx,$$

unde $M = M_1 M_2$. Dacă $s_1 = s_2$, utilizând inegalitatea $t < e^t$, $\forall\ t \geq 0$, rezultă

$$|(f * g)(t)| \leq M t e^{s_2 t} \leq M e^{(s_2+1)t}.$$

Dacă $s_1 > s_2$, deducem

$$|(f * g)(t)| \leq \frac{M}{s_1 - s_2} e^{s_2 t} e^{(s_1 - s_2)x}\Big|_0^t = \frac{M}{s_1 - s_2}(e^{s_1 t} - 1) \leq \frac{M}{s_1 - s_2} e^{s_1 t}.$$

Dacă $s_1 < s_2$, similar, obţinem

$$|(f * g)(t)| \leq \frac{M}{s_2 - s_1} e^{s_2 t}.$$

Astfel, $f*g$ îndeplineşte şi condiţia de creştere exponenţială a unui original Laplace, deci $f*g \in \mathcal{O}$.

(ii) Utilizând Teorema 3.6 şi Teorema lui Fubini (de schimbare a ordinii de integrare), obţinem:

$$F(s)G(s) = G(s)\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx = \int_0^\infty f(x)G(s)e^{-sx}dx$$

$$= \int_0^\infty f(x)\mathcal{L}\{g(t-x)\}(s)ds = \int_0^\infty f(x)dx\int_0^\infty g(t-x)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^\infty f(x)g(t-x)dx$$

$$= \int_0^\infty (f*g)(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(s),$$

ceea ce încheie demonstraţia teoremei.

3.21. Formula lui Duhamel

Dacă $f \in \mathcal{O}$, $g \in \mathcal{O}$ şi g este o funcţie derivabilă atunci, cu notaţia

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s),\ G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s),$$

are loc egalitatea

$$sF(s)G(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)g(0) + \int_0^t f(x)g'(t-x)dx\right\}(s),$$

numită formula lui Duhamel.

Demonstraţie

Derivând egalitatea

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx,$$

obţinem

$$(f*g)'(t) = f(t)g(0) + \int_0^t f(x)g'(t-x)dx;$$

aplicând operatorul de transformare Laplace acestei egalităţi de funcţii original, rezultă:

$$\mathcal{L}\{(f*g)'(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)g(0) + \int_0^t f(x)g'(t-x)dx\right\}. \tag{3.6}$$

Pe de altă parte, din Teorema 3.9.1 şi din Teorema 3.20, observând că $(f*g)(0) = 0$, primim:

$$\mathcal{L}\{(f*g)'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} - (f*g)(0+0) = sF(s)G(s). \tag{3.7}$$

Relaţiile (3.6) şi (3.7) demonstrează Formula lui Duhamel.

În finalul acestui paragraf, descriem **comportarea transformării Laplace la derivarea sau integrarea în raport cu un parametru**

3.22. Definiţie

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nevid şi $f : \mathbb{R} \times I \to K$, $(t,u) \mapsto f(t,u)$, o funcţie dată. Pentru fiecare $u \in I$ fixat definim funcţia $g_u : \mathbb{R} \to K$, $g_u(t) = f(t,u)$. Funcţia f se numeşte **original Laplace în raport cu** t *dacă $g_u \in \mathcal{O}$, $\forall\ u \in I$; utilizăm notaţia $f(t,u) \in \mathcal{O}(t)$.*

Fie $F(s,u) = \mathcal{L}\{f(t,u)\}(s,u) = \displaystyle\int_0^\infty f(t,u)e^{-st}dt.$

3.23. Teoremă

Fie $f(t,u) \in \mathcal{O}(t)$.

3.23.1. *Dacă există derivata parţială $\dfrac{\partial f}{\partial u}(t,u)$, $\forall\ (t,u) \in \mathbb{R} \times I$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial u} \in \mathcal{O}(t)$, atunci*

$$\frac{\partial F}{\partial u}(s,u) = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial f}{\partial u}(t,u)\right\}(s,u),$$

adică

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathcal{L}\{f(t,u)\}(s,u) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial u}(t,u)e^{-st}dt.$$

3.23.2. *Are loc egalitatea*

$$\mathcal{L}\left\{\int_a^b f(t,u)du\right\}(s) = \int_a^b F(s,u)du,\ \forall\ a,b \in I.$$

4 Inversarea transformării Laplace

4.1. Formula lui Mellin-Fourier de inversare a transformării Laplace

Dacă $f \in \mathcal{O}$ este o funcţie continuă, $\sigma_0 = \sigma_0(f)$ este abscisa de convergenţă a originalului f şi $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, atunci pentru orice $\sigma \in \mathbb{R}$ cu $\sigma > \sigma_0$ fixat şi pentru orice $t \geq 0$ are loc egalitatea

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds,$$

numită **formula Mellin-Fourier** *asociată funcţiei $f \in \mathcal{O} \cap C(\mathbb{R})$.*

4.2. Observaţie

Utilizând Teorema reziduurilor şi presupunând că singularităţile funcţiei complexe $s \mapsto F(s)e^{st}$, adică singularităţile lui $s \mapsto F(s)$, situate în semiplanul $\operatorname{Re} s < \sigma_0$ sunt în număr finit, primim:

$$f(t) = \sum_{\operatorname{Re} s_k < \sigma_0} \operatorname{Rez}[F(s)e^{st}; s_k].$$

4.3. Corolar

Restricţia operatorului $\mathcal{L}$ din Definiţia 3.2 la $\mathcal{O} \cap C(\mathbb{R})$ este injectivă, adică $\forall\ f, g \in \mathcal{O} \cap C(\mathbb{R})$ astfel încât $\mathcal{L}f = \mathcal{L}g$ rezultă $f = g$.

Demonstraţie

Este o consecinţă directă a Teoremei 4.1.

4.4. Observaţie

Dacă în Teorema 4.1 renunţăm la condiţia de continuitate pe $\mathbb{R}$ a originalului f, atunci membrul stâng $f(t)$ al Formulei Mellin-Fourier se înlocuieşte cu $\dfrac{f(t-0) + f(t+0)}{2}$, $\forall\ t \geq 0$; similar pentru Observaţia 4.2 şi Corolarul 4.3.

Formula lui Mellin-Fourier (Teorema 4.1) indică un mod de calcul al originalului $f(t)$ dacă se cunoaşte imaginea sa Laplace $F(s)$. Teorema următoare (pe care o enunţăm fără demonstraţie) formulează condiţii suficiente ca o funcţie complexă $F(s)$ să fie imaginea unui original $f(t)$ şi reprezintă, alături de Formula Mellin-Fourier, baza definirii transformării Laplace inverse.

4.5. Teoremă

Fie $F(s)$ o funcţie complexă, cu următoarele proprietăţi:

(i) $\exists\ \sigma_0 \geq 0$ *astfel încât F este olomorfă pe semiplanul* $\Delta_0 = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \geq \sigma_0\}$.

(ii) $\lim\limits_{|s|\to\infty} F(s) = 0$, *uniform în raport cu* $\arg s$ *pe orice semiplan* $\Delta_0(\sigma) = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \sigma\}$, *unde $\sigma > \sigma_0$ este un număr real dat.*

(iii) *Integrala* $\displaystyle\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)ds$ *este absolut convergentă, pentru orice $\sigma > \sigma_0$ fixat.*

În aceste condiţii, funcţia $f : \mathbb{R} \to K$,

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds, & t \geq 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

are următoarele proprietăţi:

1° $f \in \mathcal{O}$

2° $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s),\ \forall\ s \in \Delta_0.$

4.6. Definiţie

Fie $F(s)$ o funcţie complexă cu proprietăţile (i), (ii) şi (iii) din Teorema 4.5. Funcţia original $f : \mathbb{R} \to K$ dată de relaţia (4.1) se numeşte **transformata Laplace inversă** *a funcţiei $F(s)$.*

Ţinând seama de Corolarul 4.3 şi de Observaţia 4.4, deducem că operatorul de transformare Laplace $\mathcal{L}$ din Definiţia 3.2 (mai exact o restricţie a sa notată identic) este inversabil, de aceea originalul $f(t)$ din Definiţia 4.6 se notează $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$, uneori $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. Operatorul $\mathcal{L}^{-1}$ se numeşte *operator de transformare Laplace inversă.* Din Teorema 4.5.(2°) obţinem relaţiile:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s) \ \Leftrightarrow\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t),\ \text{adică} \\ \\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\}(t),\ t \geq 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

5 Proprietăţi ale transformării Laplace inversă

Proprietăţile transformării Laplace din paragraful 3 admit, în baza Definiţiei 4.6 şi a relaţiilor (4.2), o exprimare în termenii transformării Laplace inverse. Listăm cele mai importante proprietăţi ale operatorului $\mathcal{L}^{-1}$, utilizând notaţiile $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$, $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$, cu $f, g \in \mathcal{O}$.

5.1. Liniaritatea

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\},\ \forall\ \alpha, \beta \in K$$

5.2. $\mathcal{L}^{-1}\{F(as)\}(t) = \dfrac{1}{a} f\left(\dfrac{t}{a}\right) u(t) = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\left(\dfrac{t}{a}\right) u(t),\ \forall\ a > 0$

5.3. $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}(t) = f(t-a)u(t-a)$

$$= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t-a)u(t-a),\ \forall\ a \geq 0$$

5.4. $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}(t) = e^{at}f(t)u(t) = e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t),\ \forall\ a \in K$

5.5.1. $\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = f'(t)u(t)$, dacă $f' \in \mathcal{O}$ şi $f(0+0) = 0$

5.5.2. $\mathcal{L}^{-1}\{s^n F(s)\} = f^{(n)}(t)u(t)$, dacă $f^{(k)} \in \mathcal{O}$, $0 \leq k \leq n$ şi $f^{(k)}(0+0) = 0$, $0 \leq k \leq n-1$

5.6.1. $\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -tf(t)u(t)$

5.6.2. $\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t)u(t)$

5.7. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{F(s)}{s}\right\} = u(t)\displaystyle\int_0^t f(x)dx$

5.8. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\displaystyle\int_s^\infty F(y)dy\right\} = \dfrac{f(t)}{t}u(t)$, dacă $\dfrac{f(t)}{t} \in \mathcal{O}$

5.9. $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t)u(t)$

$$= (\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) * \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t))u(t).$$

5.10. $\mathcal{L}\{f(t)g(t)\}(s) = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(y)G(s-y)dy$, unde $\sigma > \sigma_0(f)$ este fixat.

6 Calculul transformatei Laplace inverse

Din Teorema 4.1 şi Observaţia 4.2 rezultă următoarea formulă de calcul privind transformarea Laplace inversă:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \sum_{\operatorname{Re} s_k < \sigma_0} \operatorname{Rez}(F(s)e^{st}; s_k).$$

În practică, se utilizează dicţionarul (tabelul) de transformate directe Laplace (secţiunea 3.16) şi proprietăţile transformării Laplace, care conduc la calcule mai rapide. Iată câteva exemple:

6.1. $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at}u(t)$

6.2. $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^n}\right\} = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$

6.3. $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-a)^n}\right\} = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(t)$

6.4. $\mathcal{L}\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\} = u(t)\cos at$

6.5. $\mathcal{L}\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+a^2}\right\} = \dfrac{1}{a}u(t)\sin at$

6.6. $\mathcal{L}\{\operatorname{ch} at\} = \dfrac{s}{s^2-a^2} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-a^2}\right\} = u(t)\operatorname{ch} at$

6.7. $\mathcal{L}\{\operatorname{sh} at\} = \dfrac{a}{s^2-a^2} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-a^2}\right\} = \dfrac{1}{a}u(t)\operatorname{sh} at$

6.8. $\mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s}}\right\} = \dfrac{u(t)}{\sqrt{\pi t}}$

Sunt utile, de asemenea, următoarele două rezultate, cunoscute sub numele de Teoremele lui Heaviside.

6.9. Prima teoremă a lui Heaviside

Dacă funcţia $F(s)$ se poate dezvolta în serie Laurent de forma

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+1}},$$

seria fiind convergentă pentru $|s| > R$, *cu* $R > 0$ *fixat, atunci originalul* $f(t)$ *este dat de egalitatea*

$$f(t) = u(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

6.10. A doua teoremă a lui Heaviside (Calculul transformatei Laplace inverse a unei funcţii raţionale)

Dacă $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ *este o funcţie raţională, cu* $\mathrm{grad}P < \mathrm{grad}Q$ *şi* $(P, Q) = 1$, *atunci* $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ *este suma originalelor corespunzătoare fracţiilor simple în care se descompune* $F(s)$.

6.11. Transformata Laplace inversă a fracţiilor simple

6.11.1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at}u(t)$, $a \in K$

6.11.2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-a)^n}\right\} = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(t)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in K$

6.11.3. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\} = u(t)\cos at$, $a \in \mathbb{R}$

6.11.4. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+a^2}\right\} = \dfrac{1}{a}u(t)\sin at$, $a \in \mathbb{R}$

6.11.5. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \dfrac{1}{2a}tu(t)\sin at$, $a > 0$.

Într-adevăr,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right)'\right\} \overset{5.6.2}{\underset{n=1}{=\!=}}$$

$$= -\frac{1}{2}(-1)^1 tu(t)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{1}{2a}tu(t)\sin at$$

6.11.6. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \dfrac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)u(t)$

Într-adevăr,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\cdot\frac{1}{s^2+a^2}\right\} \overset{5.9}{=}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\}(t) * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\}(t) = \frac{1}{a^2}(\sin at) * (\sin at)$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_0^t \sin ax \sin a(t-x)dx = \frac{1}{2a^2}\int_0^t [\cos(2ax-at) - \cos at]dt$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left[\frac{1}{2a}\sin(2ax-at)\Big|_0^t - (\cos at)x\Big|_0^t\right]$$

$$= \frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)u(t)$$

6.11.7. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{As+B}{(s^2+a^2)^n}\right\}$, $n \geq 3$; se stabilesc formule de recurenţă.

6.12. Exemple

6.12.1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+2}{4s^2+4s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+2}{(2s+1)^2+4}\right\}$

$$= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1}\right\} = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3\left(s+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1}\right\} \overset{5.4}{=}$$

$$= \frac{1}{4}e^{-t/2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+\frac{1}{2}}{s^2+1}\right\} = \frac{1}{4}e^{-t/2}\left[3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{8}e^{-t/2}(6\cos t + \sin t)u(t)$$

6.12.2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-5}{(s^2-10s+34)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2(s-5)+5}{[(s-5)^2+9]^2}\right\} \overset{5.4}{=}$

$$= e^{5t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s^2+9)^2}\right\} = e^{5t}\left[2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+9)^2}\right\} + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+9)^2}\right\}\right]$$

$$= e^{5t}\left[\frac{1}{3}t\sin 3t + 5\frac{1}{54}(\sin 3t - 3t\cos 3t)\right]u(t)$$
$$= \frac{1}{54}e^{5t}(18t\sin 3t + 5\sin 3t - 15\cos 3t)u(t)$$

6.12.3. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}e^{-1/s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{1}{s}\right)^m\right\}$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\cdot\frac{1}{s^{m+n+1}}\right\} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\cdot\frac{t^{m+n}}{(m+n)!}$$
$$= t^{n/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+n)!}\left(\frac{2\sqrt{t}}{2}\right)^{2m+n} = t^{n/2}\mathcal{J}_n(2\sqrt{t}),$$

unde $\mathcal{J}_n$ este funcţia lui Bessel de speţa întâi şi de ordin n, vezi 3.6.19.

6.12.4. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^4+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+2)^2-4s^2}\right\}$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}\right\}$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4}\cdot\frac{(s^2+2s+2)-(s^2-2s+2)}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+2} - \frac{1}{s^2+2s+2}\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+1}\right\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}$$
$$= \left(\frac{1}{4}e^t\sin t - \frac{1}{4}e^{-t}\sin t\right)u(t) = \frac{1}{2}\sin t\cdot sht\cdot u(t).$$

7 Aplicaţii ale transformării Laplace

7.1. Ecuaţii diferenţiale liniare (E.d.l.)

7.1.1. E.d.l. cu coeficienţi constanţi

Să considerăm ecuaţia diferenţială

$$(7.1) \quad a_0x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + a_2x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_nx(t) = f(t),\ a_0 \neq 0,$$

unde $f \in \mathcal{O}$ este dată, iar $x \in \mathcal{O}$ este semnalul (funcţia) necunoscută, de clasă $C^n(I)$.

Ataşăm e.d.l. (7.1) condiţiile iniţiale (Cauchy)

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1,\ x''(0) = x_2, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}, \tag{7.2}$$

unde $x_k \in \mathbb{R}$, $0 \le k \le n-1$, sunt date.

Aplicăm e.d.l. (7.1) transformarea Laplace şi folosim Teorema derivării originalului (Teorema 3.9); notând $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ şi $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, obţinem:

$$a_0 \left[s^n X(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} x_k \right] + a_1 \left[s^{n-1} X(s) - \sum_{k=0}^{n-2} s^{n-2-k} x_k \right] + \cdots +$$

$$+ a_n X(s) = F(s),$$

de unde primim:

$$P(s)X(s) = F(s) + G(s), \tag{7.3}$$

unde $P(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n$ şi

$$G(s) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \sum_{k=0}^{n-1-i} s^{n-k-i-1} x_k.$$

Egalitatea (7.3) se numeşte *ecuaţia operaţională* asociată e.d.l. (7.1). Din (7.3) rezultă $X(s) = \dfrac{F(s)+G(s)}{P(s)}$, de unde $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t)$.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia diferenţială $x'' + 4x = e^{-t}$, cu condiţiile iniţiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Rezolvare. Notând $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$, obţinem

$$s^2 X(s) - s \cdot 0 - 1 + 4X(s) = \frac{1}{s+1} \ \Leftrightarrow\ X(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s^2+4)} \ \Leftrightarrow$$

$$X(s) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{5} \cdot \frac{s}{s^2+4} + \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{s^2+4},$$

deci

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{5} e^{-t} - \frac{1}{5} \cos 2t + \frac{3}{5} \sin 2t, \quad t \ge 0.$$

7.1.2. E.d.l. cu coeficienţi variabili

În această situaţie, în ecuaţia (7.1) a_k devin funcţii de variabila t.

Ecuaţia operatorială corespunzătoare ecuaţiei (7.3) este o ecuaţie diferenţială.

Exemplu. $tx'' + x' + 4tx = 0$; $x(0) = 3$, $x'(0) = 0$.

Rezolvare. Fie $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. Obţinem:

$$\mathcal{L}\{x''(t)\} + \mathcal{L}\{x'(t)\} + 4\mathcal{L}\{tx(t)\} = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$(-1)(s^2X(s) - 3s)' + sX(s) - 3 + 4(-1)X'(s) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$(s^2+4)X'(s) = -sX(s) \ \Leftrightarrow \ \frac{dX}{X} = -\frac{s}{s^2+4}ds \ \Leftrightarrow \ X(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2+4}}.$$

Din Teorema valorii iniţiale (Teorema 3.18) $\lim\limits_{s\to\infty} sX(s) = x(0)$ rezultă $C = 3$. Deci

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{\sqrt{s^2+4}}\right\} = J_0(2t).$$

7.2. Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare

Se procedează similar cu Secţiunea 7.1, notând $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ şi utilizând proprietăţile transformării Laplace.

Exemplu.

$$\begin{cases} x' - x + 2y = 0 \\ x'' + 2y' = 2t - \cos t \end{cases}; \quad x(0) = 0; \ x'(0) = -1; \ y(0) = \frac{1}{2}$$

Rezolvare. Fie $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ şi $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Sistemul operatorial devine:

$$\begin{cases} (s-1)X(s) + 2Y(s) = 0 \quad | \cdot (-s) \\ s^2X(s) + 2sY(s) = \dfrac{2}{s^2} - \dfrac{s}{s^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (s-1)X(s) + 2Y(s) = 0 \\ sX(s) = \dfrac{2}{s^2} - \dfrac{s}{s^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(s) = \dfrac{2}{s^3} - \dfrac{1}{s^2+1} \\ Y(s) = -\dfrac{s-1}{2}X(s) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{2}{s^3} - \dfrac{1}{s^2+1} \\ Y(s) = -\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s^3} + \dfrac{s}{2(s^2+1)} - \dfrac{1}{2(s^2+1)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = t^2 - \sin t \\ y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \dfrac{t^2}{2} - t + \dfrac{1}{2}(\cos t - \sin t) \end{cases}$$

7.3. Ecuaţii integrale sau integro-diferenţiale de tip convolutiv

Să considerăm o ecuaţie integrală de tip Volterra:

$$ax(t) + b\int_0^t k(t-\tau)x(\tau)d\tau = cf(t), \tag{7.4}$$

în care funcţiile $k(t)$ şi $f(t)$ sunt originale date.

Punem (7.4) sub forma $ax(t) + bk(t) * x(t) = cf(t)$.

Utilizând transformarea Laplace, primim:

$$aX(s) + bK(s)X(s) = cF(s) \;\Leftrightarrow\; X(s) = \frac{cF(s)}{a + bK(s)},$$

deci $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t)$.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia integro-diferenţială

$$x'(t) - x(t) + \int_0^t (t-\tau)x'(\tau)d\tau - \int_0^t x(\tau)d\tau = t, \quad x(0) = 1.$$

Rezolvare. Scriem ecuaţia sub forma:

$$x'(t) - x(t) + t * x'(t) - 1 * x(t) = t$$

şi aplicăm operatorul de transformare Laplace. Obţinem:

$$sX(s) - 1 - X(s) + \frac{1}{s^2}[sX(s) - 1] - \frac{1}{s}X(s) = \frac{1}{s^2} \;\Leftrightarrow$$

$$X(s) = \frac{s^2 + 2}{s^2(s-1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-1}.$$

Rezultă $A = -2$, $B = -2$, $C = 3$.

Astfel, $X(s) = \dfrac{3}{s-1} - \dfrac{2}{s^2} - \dfrac{2}{s}$, deci $x(t) = 3e^t - 2t - 2$.

7.4. Ecuaţii cu argument modificat

Sunt ecuaţii de forma $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x(t-k) = f(t)$ sau

$$\sum_{k=0}^{n}[a_k x'(t-k) + b_k x(t-k)] = f(t); \quad x(0) = x_0,$$

unde $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $0 \leq k \leq n$ (desigur, pot să apară x'', x''' ş.a.m.d.).

Pentru rezolvare, se aplică operatorul de transformare Laplace şi se utilizează Teorema întârzierii originalului (Teorema 3.6) şi Teorema derivării originalului (Teorema 3.9).

Exemplu. $x''(t) + 2x'(t-1) = t;\ x(0) = x'(0) = 0.$

Rezolvare. Fie $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. Deoarece

$$\mathcal{L}\{x(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{x(t)\},$$

obţinem

$$s^2X(s) + 2e^{-s}sX(s) = \frac{1}{s^2},$$

deci

$$X(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 2se^{-s})} = \frac{1}{s^4} \cdot \frac{1}{1 + 2\dfrac{e^{-s}}{s}}.$$

Utilizând seria geometrică: $\dfrac{1}{1+q} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^n$, $|q| < 1$, primim

$$X(s) = \frac{1}{s^4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n e^{-ns}}{s^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n \frac{e^{-ns}}{s^{n+4}}.$$

De aici

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-ns}}{s^{n+4}}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+4}}\right\}(t-n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n \frac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!}u(t-n) = \sum_{n=0}^{[t]}(-1)^n 2^n \frac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!}$$

7.5. Ecuaţii cu derivate parţiale

Se rezolvă similar cu ecuaţiile diferenţiale, aplicând Teorema 3.23 privind comportarea transformării Laplace la derivarea în raport cu un parametru.

7.6. Calculul unor integrale improprii

Se utilizează Teorema 3.23 sau Corolarul 3.13.

7.6.1. Să calculăm, de exemplu, integrala $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}dx.$

Fie $I(t) = \int_0^\infty \frac{\sin^3 tx}{x^2}dx;\ t \geq 0$. Aplicând transformarea Laplace, obţinem:

$$\mathcal{L}\{I(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^\infty \frac{\sin^3 tx}{x^2}dx\right\} = \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\mathcal{L}\{\sin^3 tx\}dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\mathcal{L}\left\{\frac{3}{4}\sin tx - \frac{1}{4}\sin 3tx\right\}dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{x}{x^2+s^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{3x}{s^2+9x^2}\right)dx$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{1}{x(x^2+s^2)}ds - \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{1}{x(9x^2+s^2)}dx$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+s^2}\right)dx$$

$$-\frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{x} - \frac{9x}{9x^2+s^2}\right) = \frac{3}{8s^2}\ln\frac{9x^2+s^2}{x^2+s^2}\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{3\ln 3}{4s^2};$$

astfel

$$I(t) = \frac{3\ln 3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{3\ln 3}{4}t,$$

deci $I = I(1) = \dfrac{3\ln 3}{4}$.

7.6.2. Să se calculeze integrala $I = \int_0^\infty \frac{\cos^2 t - \cos^2 2t}{t}dt$.

Utilizând egalitatea din Corolarul 3.13

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty \mathcal{L}\{f(t)\}(s)ds,$$

obţinem

$$I = \int_0^\infty \mathcal{L}\{\cos^2 t - \cos^2 2t\}(s)ds = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathcal{L}\{\cos 2t - \cos 4t\}(s)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+16}\right)ds = -\frac{1}{4}\ln\frac{s^2+16}{s^2+4}\Big|_0^\infty = \frac{1}{4}\ln 4 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

8 Probleme

Enunţuri

1. *Să se calculeze transformata Laplace pentru fiecare din originalele (funcţiile) de mai jos.*

(i) $f(t) = e^{-5t}\cos^2 3t$ **(ii)** $f(t) = (3e^{2t} - 5te^{-10t})/\sqrt{t}$

(iii) $f(t) = \dfrac{\sin at + \cos 2bt - 1}{t}$; $a, b \neq 0$ **(iv)** $f(t) = \dfrac{t^2 \mathrm{sh}\, 2t + 2\sin^2 3t}{t}$

(v) *Polinoamele Laguerre* $L_n(t) = (n!)^{-1}e^t(t^n e^{-t})^{(n)},\ n \geq 0$

(vi) *Cosinus integral* $\mathrm{Ci}(t) = \displaystyle\int_t^\infty \frac{\cos x}{x}dx,\ t > 0$

(vii) *Exponenţial integral* $\mathrm{Ei}(t) = \displaystyle\int_t^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx,\ t > 0$

(viii) $f(t) = \sin\sqrt{t}$ **(ix)** $f(t) = \sqrt{t}\cos\sqrt{t}$

(x) $f(t) = n + 1 - t,\ n \leq t < n + 1,\ n \in \mathbb{N}$ **(xi)** $f(t) = \mathrm{Erf}(\sqrt{t})$

(xii) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos 2t, & \dfrac{\pi}{2} \leq t < \pi \\ sin3t, & t \geq \pi \end{cases}$

(xiii) $f(t) = \begin{cases} e^{2-t}, & 0 \leq t < 3 \\ 0, & 3 \leq t < 5 \\ f(t-5), & t \geq 5 \end{cases}$

(xiv) $f(t) = \begin{cases} e^t, & 0 \leq t < 1 \\ \cos t, & 1 \leq t < 2 \\ t, & t \geq 2 \end{cases}$

2. *Utilizând definiţia şi proprietăţile de calcul ale transformatei Laplace, să se calculeze integralele improprii:*

(i) $\displaystyle\int_0^\infty te^{-2t}\cos^2 3t dt$ **(ii)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin^3 2t}{t}dt$

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty (t^3 + 5\cos^2 3t)e^{-4t}dt$ **(iv)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 2t}{t}e^{-5t}dt$

3. *Utilizând metoda transformării Laplace, să se rezolve ecuaţiile diferenţiale de mai jos, cu condiţii iniţiale date.*

(i) $x''' - 6x'' + 16x' - 16x = e^{-t},\ x(0) = x'(0) = 0,\ x''(0) = 2$

(ii) $x'' + 9x = t,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 1$

(iii) $x^{iv} - x'' = \sin t,\ x(0) = x'(0) = 0,\ x''(0) = 1,\ x'''(0) = 2$

(iv) $x''' - 5x'' + 9x' - 5x = e^{-t},\ x(0) = x'(0) = 0,\ x''(0) = 0$

(v) $x''' + 4x' = t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 2$

(vi) $x'' + x = \dfrac{1}{\cos t},\ x(0) = 1,\ x'(0) = 2$

(vii) $x'' + 4x = \dfrac{1}{4 + \cos 2t},\ x(0) = 1,\ x'(0) = 2$

(viii) $tx'' + (1 - 2t)x' - 2x = 0,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 2$

(ix) $tx'' + (2t - 1)x' + (t - 1)x = 0,\ x(0) = 1,\ x'(0) = a,\ a \in \mathbb{R}$

(x) $x''(t) + 2x'(t - 2) + x(t - 4) = t,\ x(0) = x'(0) = 0$

4. *Utilizând metoda transformării Laplace, să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii diferenţiale cu condiţii iniţiale date:*

(i) $x' - y' + 2y = 2x - \sin t,\ 2x' + y'' + y = 0,\ x(0) = y(0) = y'(0) = 0$

(ii) $x' + 2y = x,\ x'' + \cos t = 2(t - y'),\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1,$
$y(0) = 1/2$

(iii) $x'' + y + z + 1 = 0,\ x + y'' = z,\ x' + y' = z'',\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1,$
$y(0) = y'(0) = 0,\ z(0) = -1,\ z'(0) = 1$

5. *Să se rezolve următoarele ecuaţii integrale şi integro-diferenţiale de tip convolutiv:*

(i) $6x(t) = 6\cos t + \displaystyle\int_0^t (t - \tau)^3 x(\tau)d\tau$

(ii) $x(t) = \cos t + \displaystyle\int_0^t (\tau - t)\cos(\tau - t)x(\tau)d\tau$

(iii) $x''(t) + x(t) + \operatorname{sh} t = \displaystyle\int_0^t \operatorname{sh}(t - \tau)x(\tau)d\tau - \int_0^t \operatorname{ch}(t - \tau)x'(\tau)d\tau,\ x(0) = 1,$
$x'(0) = -1$

(iv) $x''(t) + 2x'(t) = 2\displaystyle\int_0^t \sin(t - \tau)x'(\tau)d\tau + \cos t,\ x(0) = x'(0) = 0$

(v) $x'(t) + \displaystyle\int_0^t (t - \tau)x'(\tau)d\tau = t + x(t) + \int_0^t x(\tau)d\tau,\ x(0) = 1$

6. *Să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii integrale:*

(i) $$\begin{cases} x(t) + \displaystyle\int_0^t e^{2(t-\tau)} y(\tau) d\tau = 1 \\ \displaystyle\int_0^t x(\tau) d\tau = y(t) - e^{2t} \end{cases}$$

(ii) $$\begin{cases} x(t) = \cos t + \displaystyle\int_0^t y(\tau) d\tau \\ y(t) + \displaystyle\int_0^t z(\tau) d\tau = 1 \\ z(t) - \cos t = \displaystyle\int_0^t x(\tau) d\tau - 1 \end{cases}$$

(iii) $$\begin{cases} x(t) + 2\displaystyle\int_0^t e^{2(t-\tau)} x(\tau) d\tau = u(t) + \displaystyle\int_0^t y(\tau) d\tau \\ y(t) + \displaystyle\int_0^t x(\tau) d\tau = 4\left[t + \displaystyle\int_0^t (t-\tau) y(\tau) d\tau\right] \end{cases}$$

7. *Să se rezolve, utilizând metoda transformării Laplace, ecuaţia cu derivate parţiale:*

$u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + 8e^t \cos x,\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2},\ t \ge 0,\ u(x,0) = \cos x,$ $u_t(x,0) = 2x,\ u_x(0,t) = 2t,\ u\left(\dfrac{\pi}{2}, t\right) = \pi t$

8. *Să se demonstreze egalităţile*

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \cos(tx^2) dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\pi}{t}},\ t > 0$

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e^2}$

(iv) $\displaystyle\int_0^\infty t e^{-t} \mathrm{Ei}(t) dt = \ln \frac{2}{\sqrt{e}}$

9. *Fie $f, g \in \mathcal{O}$ şi $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$.*

(i) *Să se demonstreze egalitatea*

$$\int_0^\infty f(x)dx \int_0^\infty \frac{g(y)}{x+y}dy = \int_0^\infty F(s)G(s)ds.$$

(ii) *Să se calculeze integrala dublă* $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin x \sin y}{x+y}dxdy.$

10. *Tratamentul termochimic de nitrurare este guvernat de legea a doua a lui Fick* $\dfrac{\partial c}{\partial \tau} = D\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}$, *unde* $c(x,\tau)$ *este concentraţia piesei supuse nitrurării la adâncimea* $x \geq 0$ *şi la timpul* $\tau \geq 0$, *iar* D *este coeficientul de difuzie (dat). Să se determine* $c(x,\tau)$ *ştiind că la momentul* $\tau = 0$ *concentraţia este nulă, iar "cantitatea de substanţă" care difuzează este aceeaşi în fiecare moment* $\tau > 0$, *adică are loc egalitatea*

$$\int_0^\infty c(x,\tau)dx = q = constant, \ \forall\ \tau > 0.$$

Indicaţii. Soluţii. Răspunsuri

1. (i) $\mathcal{L}\{e^{-5t}\cos^2 3t\}(s) = \mathcal{L}\{\cos^2 3t\}(s+5) = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}\{1+\cos 6t\}(s+5)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+36}\right)\Big|_{s=s+5} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+5} + \frac{s+5}{s^2+10s+61}\right)$$

(ii) $3\mathcal{L}\{1/\sqrt{t}\}(s-2) - 5\mathcal{L}\{\sqrt{t}\}(s+10) = \sqrt{\pi}\left[\dfrac{3}{\sqrt{s-2}} - \dfrac{15}{2(s-2)\sqrt{s-2}}\right]$

(iii) $\displaystyle\int_s^\infty \mathcal{L}\{\sin at + \cos 2bt - 1\}(y)dy = \int_s^\infty \left(\frac{a}{y^2+a^2} + \frac{y}{y^2+4b^2} - \frac{1}{y}\right)dy$

$$= a\cdot\frac{1}{|a|}\operatorname{arctg}\frac{y}{|a|}\Big|_s^\infty + \frac{1}{2}\ln\frac{y^2+b^2}{y^2}\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2}sgna + \ln\frac{s}{\sqrt{s^2+b^2}}$$

(iv) $\displaystyle\mathcal{L}\{t\operatorname{sh} 2t\}(s) + \int_s^\infty \mathcal{L}\{1-\cos 6t\}(y)dy = -(\mathcal{L}\{\operatorname{sh} 2t\}(s))'$

$$+\int_s^\infty \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2+36}\right)dy = \frac{-4s}{(s^2-4)^2} + \ln\frac{\sqrt{s^2+36}}{s}$$

(v) $(s-1)^n s^{-n-1}$ **(vi)** $\dfrac{\ln(s^2+1)}{2s}$ **(vii)** $\dfrac{\ln(1+s)}{s}$

(viii) $\mathcal{L}\{\sin\sqrt{t}\}(s) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\mathcal{L}\{t^{n+\frac{1}{2}}\}(s) = \frac{1}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}\exp\left(-\frac{1}{4s}\right)$

(ix) $\sqrt{\dfrac{\pi}{s}} \cdot \dfrac{1}{2s}\left(1-\dfrac{1}{2s}\right)\exp\left(-\dfrac{1}{4s}\right)$

(x) $\dfrac{1}{s^2(1-e^{-s})}(s+e^{-s}-1)$ **(xi)** $\dfrac{1}{s\sqrt{s+1}}$

(xii) $f(t) = (\sin t)\left[u(t) - u\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

$$+(\cos 2t)\left[u\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - u(t-\pi)\right] + (\sin 3t)u(t-\pi)$$

(xiii) f este periodică; $T = 5$

(xiv) Pentru $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1,2\}$ avem (vezi 2.5.6):

$$f(t) = e^t[u(t) - u(t-1)] + (\cos t)[u(t-1) - u(t-2)] + tu(t-2)$$

$$= e^t u(t) - e\cdot e^{t-1}u(t-1) + \cos 1\cos(t-1)u(t-1) - \sin 1\sin(t-1)u(t-1)$$

$$-\cos 2\cos(t-2)u(t-2) + \sin 2\sin(t-2)u(t-2) + (t-2)u(t-2) + 2u(t-2),$$

deoarece

$$\cos t = \cos(t-n+n) = \cos(t-n)\cos n - \sin(t-n)\sin n, \quad n \in \{1,2\}.$$

Utilizând Teorema 3.6, obţinem

$$F(s) = \frac{1-e^{1-s}}{s-1} + \frac{e^{-s}(s\cos 1 - \sin 1)}{s^2+1} + \frac{e^{-2s}(\sin 2 - s\cos 2)}{s^2+1} + \frac{e^{-2s}(1+2s)}{s^2}.$$

2. (i) $\mathcal{L}\{t\cos^2 3t\}(2) = \dfrac{23}{200}$

(ii) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin^3 2t}{t}\right\}(1) = \displaystyle\int_1^{\infty} \mathcal{L}\{\sin^3 2t\}(s)ds = \frac{1}{4}\left(\pi - 3\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{6}\right)$

(iii) $\dfrac{1399}{1664}$ **(iv)** $\dfrac{1}{4}\ln 41 - \dfrac{1}{2}\ln 5$

3. (i) $x(t) = -\dfrac{1}{39}e^{-t} + \dfrac{7}{12}e^{2t} - \dfrac{e^{2t}}{52}(29\cos 2t + 2\sin 2t)$

(ii) $x(t)=\dfrac{1}{9}t+\cos 3t+\dfrac{8}{27}\sin 3t$

(iii) $x(t)=-\dfrac{3}{4}t-\dfrac{1}{4}+\dfrac{21}{80}e^{2t}-\dfrac{1}{80}e^{-2t}+\dfrac{1}{5}\sin t$

(iv) $x(t)=-\dfrac{1}{20}e^{-t}+\dfrac{1}{4}e^{t}-\dfrac{1}{5}e^{2t}\cos t+\dfrac{1}{10}e^{2t}\sin t$

(v) $x(t)=\dfrac{1}{8}(t^2+7\sin^2 t)+\dfrac{1}{2}\sin 2t$

(vi) $x(t)=t\sin t+\cos t\ln|\cos t|+\cos t+2\sin t$

(vii) $x(t)=\left(1+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{4+\cos 2t}{5}\right)\cos 2t+$

$$+\left(1+\frac{t}{2}-\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} t}{\sqrt{5}}\right)\sin 2t$$

(viii) $x(t)=e^{2t}$ **(ix)** $x(t)=(ct^2+1)e^{-t},\ x\in\mathbb{R}$; pentru $a=-1$

(x) $x(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{[t/2]}(-1)^n(n+1)(t-2n)^{n+3}/(n+3)!$

4. (i) $x=\dfrac{1}{9}(1+3t)e^{-t}+\dfrac{1}{9}e^{2t}$

$$y=\frac{1}{9}(1+3t)e^{-t}+\frac{4}{45}e^{2t}-\frac{1}{5}(\cos t+2\sin t)$$

(ii) $x=t^2-\sin t$; $y=\dfrac{t^2}{2}-t+\dfrac{1}{2}(\cos t-\sin t)$

(iii) $x=\sin t$; $y=\cos t-1$; $z=\sin t-\cos t$

5. (i) $x(t)=\dfrac{1}{4}(\operatorname{ch} t+3\cos t-t\sin t)$

(ii) $x(t)=\dfrac{1}{3}(1+2\cos t\sqrt{3})$

(iii) $x(t)=\dfrac{1}{3}(e^{-t}+2\cos t\sqrt{2}-\sqrt{2}\sin t\sqrt{2})$

(iv) $x(t)=1-e^{-t}-te^{-t}$

(v) $x(t)=3e^{t}-2(t+1)$

6. (i) $x(t)=e^{t}(3-2e^{t})$; $y(t)=3e^{t}-2$

(ii) $x = \sin t + \cos t$; $y = \cos t$; $z = \sin t$

(iii) $x = (1-t)e^{-t}$; $y = \dfrac{8}{9}(e^{2t} - e^{-t}) + \dfrac{1}{3}te^{-t}$

7. Punând $U(x,s) = \mathcal{L}\{u(x,t)\}(x,s)$, obţinem ecuaţia operatorială

$$U_{xx} - (s^2+2x)U = -2x\left(1+\frac{2}{s}\right) - (\cos x)\left(s-2-\frac{8}{s-1}\right),$$

a cărei soluţie generală este

$$U(x,s) = C_1(s)\exp(x\sqrt{s^2+2s}) + C_2(s)\exp(-x\sqrt{s^2+2s}) + \frac{2x}{s^2} + \frac{(s^2+s+6)\cos x}{(s+1)^2(s-1)}.$$

Utilizând condiţiile la limită rezultă $C_1(s) = C_2(s) = 0$; soluţia este

$$u(x,t) = 2xt + [2e^t - (3t+1)e^{-t}]\cos x.$$

8. **(i)** Se calculează $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 tx}{x^2}\right\}dx$

(iv) $\mathcal{L}\{t\mathrm{Ei}(t)\}(s) = -(\mathcal{L}\{\mathrm{Ei}(t)\}(s))' = \dfrac{\ln(s+1)}{s^2} - \dfrac{1}{s(s+1)}$,
vezi Problema **1(vii)**; astfel integrala dată este $\mathcal{L}\{t\mathrm{Ei}(t)\}(1)$.

9. **(i)** Se efectuează substituţia $x + y = t$ şi se obţine
$\displaystyle\int_0^\infty \frac{(f*g)(t)}{t}dt$, după care se utilizează Corolarul 4.3 şi Teorema 3.20.

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(s^2+1)^2}ds = \frac{\pi}{4}$

10. Notăm $C(x,s) = \mathcal{L}\{c(x,\tau)\}(x,s)$; rezultă ecuaţia diferenţială
$\dfrac{d^2C}{dx^2} - \dfrac{s}{D}C = 0$, cu soluţia generală

$$C(x,s) = A(s)\exp(-s\sqrt{s/D}) + B(s)\exp(s\sqrt{s/D}).$$

Deoarece $C(x,s)$ este mărginită pentru $x \to \infty$, deducem $B(s) = 0$, iar din egalitatea $\displaystyle\int_0^\infty c(x,\tau)dx = q$ primim $\displaystyle\int_0^\infty C(x,s)dx = \frac{q}{s}$, de unde $A(s) = q/\sqrt{Ds}$. Astfel, $C(x,s) = \dfrac{q}{\sqrt{Ds}}\exp\left(-x\sqrt{\dfrac{s}{D}}\right)$; în final

$$c(x,\tau) = \frac{q}{\sqrt{D\pi\tau}}\exp\left(-\frac{x^2}{4D\tau}\right).$$

Capitolul 5

Transformarea z

1 Definiţia transformatei z

1.1. Preliminarii

Fie $f : \mathbb{R} \to K$ o funcţie-semnal căreia i se poate asocia transformata Laplace bilaterală

$$F_B(s) = \mathcal{L}_B\{f(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad s \in D(f) \subseteq \mathbb{C}.$$

Să considerăm o discretizare a axei reale, prin eşantioanele echidistante $t_n = n\Delta T$, $n \in \mathbb{Z}$. Utilizând formula aproximativă de calcul integral

$$\int_a^b g(t)dt \approx (b-a)g(a),$$

primim:

$$\mathcal{L}_B\{f(t)\}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta T}^{(n+1)\Delta T} f(t)e^{-st}dt \approx \Delta T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T)e^{-sn\Delta T}.$$

Notând $z = e^{s\Delta T}$, obţinem următoarea formulă de aproximare a transformatei Laplace bilaterale printr-o serie Laurent centrată în origine:

$$\mathcal{L}_B\{f(t)\}(s) \approx F_B(z) = \Delta T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T)z^{-n}.$$

Dacă $f \in \mathcal{O}$, atunci transformata Laplace unilaterală se aproximează printr-o serie Laurent în jurul originii, a cărei parte analitică (tayloriană) conţine un singur termen:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \approx F(z) = \Delta T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n\Delta T)}{z^n}.$$

Reamintim că, în conformitate cu notaţiile introduse în Cap.1, S_d reprezintă mulţimea semnalelor discrete $x : \mathbb{Z} \to K$, iar $S_d^+ = \{x \in S_d : \ x(n) = 0, \ \forall\ n < 0\}$ reprezintă mulţimea semnalelor discrete cu suport pozitiv.

1.2. Definiţia transformatei z bilaterale

Fiind dat un semnal discret x ($x \in S_d$), notăm cu $U = U(x)$ coroana circulară de convergenţă a seriei Laurent $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$. Funcţia $X_B : U \to \mathbb{C}$, $X_B(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$, $z \in U$, se numeşte **transformata** *z (uneori* **transformata în** *z)* **bilaterală** *sau* **transformata Laplace discretă bilaterală** *asociată semnalului x.*

Notaţie. Scriem $\mathcal{Z}_B\{x(n)\}(z) = X_B(z)$, $z \in U$ sau $X_B = \mathcal{Z}_B(x)$.

1.3. Definiţia transformatei (z) (unilaterală sau standard)

Fiind dat un semnal $x \in S_d^+$, notăm $U = U(x)$ mulţimea (domeniul) de convergenţă a seriei Laurent $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x(n)}{z^n}$. Funcţia $X : U \to \mathbb{C}$, $X(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x(n)}{z^n}$, $z \in U$, se numeşte **transformata** *z (uneori* **transformata în** *z)* **unilaterală sau standard** *asociată semnalului $x \in S_d^+$.*

1.3.1. Observaţie

În acest caz, $U(x)$ este (sau conţine) exteriorul unui disc cu centrul în origine (coroană circulară de rază "mare" infinită), adică există $R(x) > 0$ astfel încât $U(x) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > R(x)\}$.

1.3.2. Notaţie

Scriem $\mathcal{Z}\{x(n)\}(z) = X(z)$, $z \in U$ sau $X = \mathcal{Z}(x)$; uneori, pentru simplitate, se scrie $\mathcal{Z}\{x(n)\}$ în loc de $\mathcal{Z}\{x(n)\}(z)$. În teoria semnalelor se utilizează notaţia $x(n) \leftrightarrow X(z)$.

1.3.3. Observaţie

Dacă $x \in S_d^+$ este mărginit, atunci $U(x)$ conţine exteriorul discului unitate, i.e. $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| > 1\} \subseteq U(x)$.

Într-adevăr, există $M > 0$ astfel încât $|x(n)| \leq M, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, deci

$$|\mathcal{Z}\{x(n)\}(z)| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|z|}\right)^n,$$

iar această serie este convergentă $\forall \ z \in \mathbb{C}$ cu $|z| > 1$.

În cele ce urmează, ne vom referi cu precădere la transformata în z unilaterală şi vom adopta notaţia $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}(z)$, atât pentru transformata z unilaterală, cât şi pentru transformata z bilaterală, tipul transformatei z utilizate rezultând din context (după apartenenţa semnalului x la S_d sau la S_d^+).

1.4. Definiţia transformării (operatorului de transformare) z

Operatorul $\mathcal{Z}$ care asociază fiecărui semnal discret $x \in S_d$ (sau $x \in S_d^+$) transformata sa z, adică $x \overset{\mathcal{Z}}{\mapsto} X = \mathcal{Z}(x)$ se numeşte **operator de transformare** *z; ca procedeu de asociere între x şi $X = \mathcal{Z}(x)$, operatorul defineşte noţiunea de "***transformare** *z".*

1.5. Exemple

1.5.1. $\mathcal{Z}\{\delta_k(n)\}(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_k(n)}{z^n} = z^{-k}, \ z \in \mathbb{C}^*, \ \forall \ k \in \mathbb{Z}$ fixat.

Reamintim că impulsul discret al lui Dirac $\delta_k \in S$ se defineşte prin $\delta_k(n) = 1$, dacă $n = k$; $\delta_k(n) = 0$, dacă $n \neq k$ (Cap.1, §2.4.3). În particular, pentru $\delta = \delta_0 \in S_d^+$, avem $\mathcal{Z}\{\delta(n)\}(z) = 1$, $z \in \mathbb{C}$.

1.5.2. Pentru $a \neq 0$, avem

$$\mathcal{Z}\{u(n)a^n\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \dfrac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}, \text{ dacă } |z| > |a|.$$

În particular, $\mathcal{Z}\{u(n)\} = \dfrac{z}{z-1}$, $|z| > 1$; deseori se scrie

$$\mathcal{Z}\{1\} = \frac{z}{z-1}, \ |z| > 1.$$

2 Proprietăţi ale transformării z

Enumerăm cele mai importante proprietăţi ale transformării z. Notăm $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}(z)$, $Y(z) = \mathcal{Z}\{y(n)\}(z)$ sau $X = \mathcal{Z}(x)$, $Y = \mathcal{Z}(y)$, pentru $x, y \in S_d$ (sau S_d^+).

2.1. Liniaritatea

$\mathcal{Z}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathcal{Z}(z) + \beta\mathcal{Z}(y)$, $\forall\ x, y \in S_d$, $\forall\ \alpha, \beta \in K$, egalitatea fiind valabilă pe $U(x) \cap U(y)$.

2.2. Injectivitatea

Dacă $\mathcal{Z}(x) = \mathcal{Z}(y)$, atunci $x = y$, $\forall\ x, y \in S_d^+$.

2.3. Olomorfia

Dacă $x \in S_d$, atunci funcţia $X = \mathcal{Z}(x) : U(x) \to \mathbb{C}$ este olomorfă pe coroana $U(x)$.

Observaţie. În general, $U(x)$ nu coincide cu mulţimea de definiţie a funcţiei complexe $X(z)$. Astfel, conform Exemplului 1.5.2, $X(z) = \mathcal{Z}\{u(n)\}(z) = \dfrac{z}{z-1}$ are drept "coroană" de convergenţă exteriorul discului unitate, anume $U(x) = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| > 1\}$, dar mulţimea (domeniul) de definiţie a funcţiei $X(z) = \dfrac{z}{z-1}$ este $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

2.4. Teorema asemănării (Teorema schimbării de scală)

Dacă $x \in S_d$ şi $a \in K^*$, atunci

$$\mathcal{Z}\{a^n x(n)\}(z) = X\left(\frac{z}{a}\right) = \mathcal{Z}\{x(n)\}\left(\frac{z}{a}\right).$$

2.5. Teorema translaţiei la stânga (Teorema întârzierii)

2.5.1. *Dacă $x \in S_d$ şi $m \in \mathbb{Z}$, atunci $\mathcal{Z}\{x(n+m)\}(z) = z^m X(z)$.*

2.5.2. *Dacă $x \in S_d^+$ şi $p \in \mathbb{N}^*$, atunci are loc egalitatea*

$$\mathcal{Z}\{x(n+p)\} = z^p X(z) - \sum_{k=0}^{p-1} x(k) z^{p-k}.$$

2.6. Teorema translaţiei la dreapta

Dacă $x \in S_d^+$ *şi* $p \in \mathbb{N}^*$, *atunci* $\mathcal{Z}\{x(n-p)\}(z) = z^{-p}X(z)$.

2.7. Teorema derivării (teorema înmulţirii cu n)

Dacă $x \in S_d$, *atunci* $\mathcal{Z}\{nx(n)\}(z) = -z(\mathcal{Z}\{x(n)\})'(z) = -zX'(z)$.

2.8. Transformata în z a funcţiilor periodice

Dacă $x \in S_d^+$ *este periodică (adică există* $N \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $x(n+N) = x(n)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$*), atunci*

$$X(z) = \frac{z^N}{z^N - 1} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x(n)}{z^n}, \quad |z| > 1.$$

2.9. Teorema convoluţiei

2.9.1. Definiţie

Fiind date semnalele $x, y \in S_d$, *definim* **produsul de convoluţie** $x * y \in S_d$ *prin*

$$(x * y)(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k),\ \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

Dacă $x, y \in S_d^+$, *atunci* $(x*y)(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x(k)y(n-k)$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ *şi* $x*y \in S_d^+$.

2.9.2. Teoremă

Dacă $x, y \in S_d$ *(în particular* $x, y \in S_d^+$*), atunci* $\mathcal{Z}\{(x * y)(n)\}(z) = X(z)Y(z)$, $z \in U(x) \cap U(y)$, *i.e.* $\mathcal{Z}(x * y) = \mathcal{Z}(x)Z(y)$ *pe* $U(x) \cap U(y)$.

2.10. Teorema sumării

Fiind dat semnalul $x \in S_d^+$, *definim semnalul* $s(x;\cdot) \in S_d^+$ *prin* $s(x;n) = u(n)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x(k)$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$. *Are loc egalitatea*

$$\mathcal{Z}\{s(x,n)\}(z) = \frac{z}{z-1}X(z) \ \Leftrightarrow\ \mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{n} x(k)\right\}(z) = \frac{z}{z-1}Z\{x(n)\}(z).$$

2.11. Teorema privind produsul semnalelor (Teorema convoluţiei complexe)

Fie $x, y \in S_d^+$, $z \in U(xy)$, $r > 0$ *un număr real cu proprietatea* $R(x) < r < \dfrac{|z|}{R(y)}$ *şi* (γ) *cercul de ecuaţie* $|\tau| = r$. *Are loc egalitatea*

$$\mathcal{Z}\{x(n)y(n)\}(z) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} \frac{X(\tau)}{\tau} Y\left(\frac{z}{\tau}\right) d\tau.$$

Observaţie. Dacă funcţia $\tau \mapsto \dfrac{X(\tau)}{\tau} Y\left(\dfrac{z}{\tau}\right)$ are punctele singulare $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, atunci, aplicând teorema reziduurilor, obţinem

$$Z\{x(n)y(n)\}(z) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Rez}\left[\frac{X(\tau)}{\tau} Y\left(\frac{z}{\tau}\right); \tau_k\right].$$

2.12. Teorema valorii iniţiale

Dacă $x \in S_d^+$, *atunci* $\lim\limits_{z\to\infty} X(z) = x(0)$.

Observaţie. $x(1) = \lim\limits_{z\to\infty} z[X(z) - x(0)]$;

$$x(2) = \lim_{z\to\infty} z^2 \left[X(z) - x(0) - \frac{x(1)}{z}\right].$$

2.13. Teorema valorii finale

Dacă $x \in S_d^+$ *şi există (în* $\mathbb{C}$*)* $x(\infty) := \lim\limits_{n\to\infty} x(n)$, *atunci*

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|>1}} \frac{z-1}{z} X(z) = x(\infty).$$

2.14. Derivarea în raport cu un parametru

Dacă semnalul $x = x(n;\tau) \in S_d$ depinde de parametrul $\tau \in I \subseteq \mathbb{R}$ şi $X(z;\tau) = \mathcal{Z}\{x(n;\tau)\}(z;\tau)$, iar funcţia $f : I \to K$, $f(\tau) = x(n;\tau)$ este derivabilă pentru fiecare $n \in \mathbb{Z}$ fixat, atunci are loc egalitatea

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{\partial x}{\partial \tau}(n;\tau)\right\}(z;\tau) = \frac{\partial X}{\partial \tau}(z;\tau).$$

Mai departe, **demonstrăm Teoremele 2.5.2, 2.7, 2.9 şi 2.10.**

Teorema 2.5.2. $\mathcal{Z}\{x(n+p)\} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x(n+p)}{x^n} \overset{n+p=k}{=\!=\!=}$

$$= \sum_{k=p}^{\infty} \frac{x(k)}{z^{k-p}} = z^p \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(k)}{z^k} - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x(k)}{z^k} \right) = z^p X(z) - \sum_{k=0}^{p-1} x(k) z^{p-k}$$

Teorema 2.7. $\mathcal{Z}\{nx(n)\}(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n}$

$$= -z \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^{-n})' = -z \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \right)' = -z \cdot X'(z).$$

Teorema 2.9. Fie $x, y \in S_d$. Obţinem, cu regula produsului a două serii convergente:

$$X(z)Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x(n)}{z^n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{y(m)}{z^m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

unde $a_n = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) = (x*y)(n)$; aşadar:

$$X(z)Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(x*y)(n)}{z^n} = \mathcal{Z}\{(x*y)(n)\}(z).$$

Teorema 2.10. Observăm că $s(x;n) = u(n) * x(n)$. În conformitate cu Teorema 2.9 primim

$$\mathcal{Z}\{s(x;n)\}(z) = \mathcal{Z}\{u(n)\} Z\{x(n)\} = \frac{z}{z-1} X(z).$$

3 Transformata z inversă

3.1. Preliminarii

Fie $X(z)$ o funcţie complexă, olomorfă în domeniul $\{z \in \mathbb{C} : \ r < |z| < R\}$, cu r, R date, $0 < r < R$. Ne propunem să determinăm un semnal $x \in S_d$ astfel încât $\mathcal{Z}(x) = X$. Pornim de la egalitatea

$$z^{n-1} X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^{n-k-1}, \ n \in \mathbb{N},$$

pe care o integrăm pe un cerc $(\gamma): \ |z| = \rho$, $\rho \in (r, R)$ fixat.

Deoarece $\int\limits_{\gamma} z^m dz = \begin{cases} 2\pi j, & m = -1 \\ 0, & m \neq -1 \end{cases} = 2\pi j \delta_{-1}(m)$, obţinem:

$$\int\limits_{\gamma} z^{n-1} X(z) dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int\limits_{\gamma} z^{n-k-1} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot 2\pi j \delta_k(n) = 2\pi j a_n,$$

egalitate care sugerează definiţia transformatei z inverse, luând $x(n) = a_n$.

3.2. Definiţia transformatei z inverse

Dacă $X(z)$ este o funcţie complexă, olomorfă pe domeniul $\{z \in \mathbb{C} : \ r < |z| < R\}$, unde $0 < r < R$ (cu r, R date) şi γ este un cerc cu centrul în origine de rază $\rho \in (r, R)$, atunci semnalul discret $x \in S_d$, unde

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} z^{n-1} X(z) dz, \ n \in \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

se numeşte **transformata z inversă** *a funcţiei complexe $X(z)$.*

Notaţie. $x(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}(n)$, $n \in \mathbb{N}$ sau $x = \mathcal{Z}^{-1}(X)$. Putem scrie, formal:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}(z) \ \Leftrightarrow \ x(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}(n)$$

şi

$$\mathcal{Z}^{-1}\{\mathcal{Z}\{x(n); z\}; n\} = x(n).$$

Exemple. (i) $\mathcal{Z}\{a^n u(n)\}(z) = \dfrac{z}{z-a} \ \Leftrightarrow \ \mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{z-a}\right\}(n) = a^n u(n)$.

(ii) $\mathcal{Z}\{\delta_k(n)\}(z) = z^{-k} \ \Leftrightarrow \ \mathcal{Z}^{-1}\{z^{-k}\}(n) = \delta_k(n)$.

3.3. Metode pentru determinarea transformatei z inverse

3.3.1. Metoda reziduurilor

Aplicând teorema reziduurilor integralei din membrul drept al relaţiei (3.1) şi observând că interiorul cercului γ conţine toate singularităţile din $\mathbb{C}$ ale funcţiei $z \mapsto z^{n-1} X(z)$, $n \in \mathbb{Z}$, obţinem:

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}(n) = \sum_{k=1}^{m} \text{Rez}[z^{n-1} X(z); z_k], \ n \in \mathbb{Z},$$

unde $z_1, z_2, \ldots, z_m$ sunt singularităţile (din $\mathbb{C}$) ale funcţiei $g_n(z) = z^{n-1}X(z)$.

Observaţie. Numărul $x(0)$ se poate calcula şi cu teorema valorii iniţiale (Teorema 2.12): $x(0) = \lim\limits_{z\to\infty} X(z)$.

3.3.2. Metoda dezvoltării în serie

Dacă $X(z)$ se poate dezvolta într-o serie de forma

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}, \ |z| > R, \tag{3.2}$$

atunci $x(n) = a_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplu. Fie $a \in K^*$ şi $|z| > |a|$; avem

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{a}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{z^n},$$

deci

$$x(n) = Z^{-1}\left\{\frac{1}{z-a}\right\}(n) = a^{n-1}u(n-1), \ n \in \mathbb{Z}.$$

Observaţie. Dacă $x \in S_d^+$ se poate utiliza formula:

$$x(n) = u(n)\frac{1}{n!}\left(X\left(\frac{1}{z}\right)\right)^{(n)}\Big|_{z=0}.$$

3.3.3. Transformata z inversă a funcţiilor raţionale

Să presupunem că $X(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, unde P şi Q sunt polinoame.

1° grad$P <$ grad$Q$. În acest caz, funcţia raţională $X(z)$ se descompune în fracţii simple, care se dezvoltă în serie Laurent, utilizând serii de puteri standard (geometrică, exponenţială, binomială ş.a.).

Exemplu. $X(z) = \dfrac{1}{z(z+2j)} = \dfrac{1}{2j}\left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z+2j}\right)$.

Dacă $|z| > 2$, atunci

$$\frac{1}{z+2j} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{2j}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n j^n}{z^{n+1}},$$

deci

$$X(z) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1} j^{n-1}}{z^n}\right);$$

astfel $x(n) = (-2j)^{n-2}u(n-2),\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

2° $X(z) = z\dfrac{P(z)}{Q(z)}$; grad$P <$ grad$Q$. Este o situaţie frecventă, întrucât transformatele z ale funcţiilor elementare sunt de această formă. Se descompune $\dfrac{X(z)}{z}$ în fracţii simple şi se utilizează dicţionarul de transformate z.

Exemplu. $X(z) = \dfrac{z}{z^2 - (2+j)z + 2j}$, $|z| > 2$. Avem

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{2-j}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-j}\right),$$

deci

$$X(z) = \frac{1}{2-j}\left(\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-j}\right).$$

Utilizând relaţia $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{z-a}\right\}(n) = a^n \cdot u(n)$, primim

$$x(n) = \frac{2^n - j^n}{2-j} \cdot u(n) = \frac{1}{5}(2+j)(2^n - j^n)u(n).$$

Observaţie. Această metodă se poate aplica şi la **1°**, scriind $X(z) = z\dfrac{P(z)}{zQ(z)}$. Astfel, exemplul de la **1°** se scrie

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z^2(z+2j)} = -\frac{j}{2}\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4z} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+2j},$$

deci

$$X(z) = -\frac{j}{2}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z+2j};$$

astfel (vezi Secţiunea 3.2),

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}(n) = -\frac{j}{2}\delta_1(n) + \frac{1}{4}\delta_0(n) - \frac{1}{4}(-2j)^n u(n),$$

vezi secţiunea 3.2; în final $x(n) = (-2j)^{n-2}u(n-2)$.

3° grad$P \geq$ grad$Q$. Utilizând teorema împărţirii cu rest, scriem $P = Q \cdot C + R$, grad$R <$ grad$Q$, deci

$$X(z) = C(z) + \frac{R(z)}{Q(z)};$$

se poate scrie, de asemenea

$$\frac{X(z)}{z} = C_1(z) + \frac{R_1(z)}{Q(z)}.$$

Se revine astfel la **1°** (sau **2°**), iar pentru polinomul $C(z)$ sau $C_1(z)$ se utilizează relaţia $\mathcal{Z}^{-1}\{z^k\}(n) = \delta_{-k}(n)$ şi liniaritatea transformării inverse.

Exemplu. $X(z) = \dfrac{z^3}{z+3}$, $|z| > 3$. Avem

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{z+3} = z - 3 + \frac{9}{z+3},$$

deci

$$X(z) = z^2 - 3z + 9\frac{z}{z+3};$$

astfel $x(n) = \delta_{-2}(n) - 3\delta_{-1}(n) + 9(-3)^n u(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Observaţie. Dacă $X(z) = \dfrac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_{N-1} z}{z^N - 1}$, $|z| > 1$ şi $N \in \mathbb{N}^*$ dat, atunci în conformitate cu Teorema 2.8, rezultă $x(n) = a_n$, $0 \leq n \leq N-1$, $x(n) = x(n+N)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ şi $x(n) = 0$, $\forall\ n < 0$.

4° Utilizarea algoritmului de împărţire a polinoamelor

Dacă descompunerea în fracţii simple este dificilă (de exemplu, rădăcinile polinomului Q nu se pot găsi rapid), pentru a determina un număr convenabil de valori ale semnalului $x \in S_d$ se poate utiliza algoritmul împărţirii polinoamelor.

Exemplu. $X(z) = \dfrac{z^3 + 2z^2 - 1,5z + 0,5}{z^2 - 2,5z + 3}$

Efectuând împărţirea obţinem

$$X(z) = z + 4,5 + \frac{6,75}{z} + \frac{3,875}{z^2} + \ldots$$

Astfel $x(n) = 0$, $\forall\ n \leq -2$, $x(-1) = 1$, $x(0) = 4,5$, $x(1) = 6,75$, $x(2) = 3,875, \ldots$

4 Dicţionar de transformate z

În acest paragraf, listăm transformatele z (directe şi inverse) pentru semnale standard, des utilizate în aplicaţii.

4.1. $\mathcal{Z}\{\delta_k(n)\} = z^{-k} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{Z}^{-1}\{z^k\} = \delta_{-k}(n)$
Aici $z \in \mathbb{C}^*$ dacă $k > 0$ şi $z \in \mathbb{C}$ dacă $k \leq 0$.
În particular $\mathcal{Z}\{\delta(n)\} = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathcal{Z}^{-1}\{1\} = \delta(n)$, $z \in \mathbb{C}$.

4.2. $\mathcal{Z}\{u(n)\} = \dfrac{z}{z-1} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{z-1}\right\} = u(n)$, $|z| > 1$

4.3. $\mathcal{Z}\{nu(n)\} = \dfrac{z}{(z-1)^2} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{(z-1)^2}\right\} = nu(n)$, $|z| > 1$

4.4. $\mathcal{Z}\{n^2u(n)\} = \dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}\right\} = n^2u(n)$, $|z| > 1$

4.5. $\mathcal{Z}\{a^nu(n)\} = \dfrac{z}{z-a} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{z-a}\right\} = a^nu(n)$, $a \in K^*$, $|z| > 1$

4.6. $\mathcal{Z}\{na^nu(n)\} = \dfrac{az}{(z-a)^2} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{(z-a)^2}\right\} = na^{n-1}u(n)$, $a \in K^*$, $|z| > 1$

4.7. $\mathcal{Z}\{e^{an}u(n)\} = \dfrac{z}{z-e^a} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{z-e^a}\right\} = e^{an}u(n)$, $a \in K$, $|z| > e^{\operatorname{Re} a}$

4.8. $\mathcal{Z}\{u(n)\sin an\} = \dfrac{z\sin a}{z^2 - 2z\cos a + 1} \;\Leftrightarrow$
$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z\sin a}{z^2 - 2z\cos a + 1}\right\} = u(n)\sin an$, $a \in \mathbb{R}$, $|z| > 1$

4.9. $\mathcal{Z}\{u(n)\cos an\} = \dfrac{z(z-\cos a)}{z^2 + 2z\cos a + 1} \;\Leftrightarrow$
$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z(z-\cos a)}{z^2 - 2z\cos a + 1}\right\} = u(n)\cos an$, $a \in \mathbb{R}$, $|z| > 1$

4.10. $\mathcal{Z}\{u(n)\operatorname{sh} an\} = \dfrac{z\operatorname{sh} a}{z^2 - 2z\operatorname{ch} a + 1} \;\Leftrightarrow$
$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z\operatorname{sh} a}{z^2 - 2z\operatorname{ch} a + 1}\right\} = u(n)\operatorname{sh} an$, $a \in \mathbb{R}$, $|z| > e^{|a|}$

4.11. $\mathcal{Z}\{u(n)\operatorname{ch} an\} = \dfrac{z(z-\operatorname{ch} a)}{z^2 - 2z\operatorname{ch} a + 1} \;\Leftrightarrow$
$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z(z-\operatorname{ch} a)}{z_2^2 + \operatorname{ch} az + 1}\right\} = u(n)\operatorname{ch} an$, $a \in \mathbb{R}$, $|z| > e^{|a|}$

4.12. $\mathcal{Z}\left\{\dfrac{u(n)}{n+1}\right\} = z\ln\dfrac{z}{z-1} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{Z}^{-1}\left\{z\ln\dfrac{z}{z-1}\right\} = \dfrac{u(n)}{n+1}$, $|z|>1$; pentru ln se alege determinarea principală.

În ceea ce priveşte demonstraţiile relaţiilor 4.1-4.12, menţionăm că 4.1, 4.2, 4.5 şi 4.7 apar în Exemplul 1.5. Relaţiile 4.3, 4.4 şi 4.6 utilizează Teorema 2.7; de exemplu

$$\mathcal{Z}\{na^n u(n)\} = -z(\mathcal{Z}\{a^n u(n)\})' \overset{4.5}{=} -z\left(\frac{z}{z-a}\right)' = \frac{az}{(z-a)^2}.$$

Relaţiile 4.8-4.11 utilizează definiţia în complex a semnalelor discrete aferente şi liniaritatea operatorului $\mathcal{Z}$; de exemplu

$$\mathcal{Z}\{u(n)\sin an\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2j}u(n)(e^{jan}-e^{-jan})\right\}$$

$$= \frac{1}{2j}\mathcal{Z}\{u(n)(e^{ja})^n\} - \frac{1}{2j}\mathcal{Z}\{u(n)(e^{-ja})^n\} \overset{4.7}{=} \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{jan}} - \frac{z}{z-e^{-jan}}\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\cdot\frac{z(e^{jan}-e^{-jan})}{z^2-(e^{jan}+e^{-jan})+1} = \frac{z\sin a}{z^2-2z\cos a+1}$$

Relaţia 4.12 se demonstrează direct:

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{u(n)}{n+1}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)z^n} \xlongequal{1/z=t} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n+1}$$

$$\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t \tau^n d\tau = \frac{1}{t}\int_0^t\left(\sum_{n=0}^{\infty}\tau^n\right)d\tau = \frac{1}{t}\int_0^t\frac{1}{1-\tau}d\tau$$

$$= -\frac{1}{t}\ln(1-\tau)\Big|_0^t = -\frac{1}{t}\ln(1-t) \xlongequal{t=1/z} z\ln\frac{z}{z-1},$$

unde $|t| = \dfrac{1}{|z|} < 1$, deci $|z|>1$.

5 Aplicaţii ale transformării z

5.1. Rezolvarea ecuaţiilor cu diferenţe

5.1.1. Definiţie

Prin **ecuaţie cu diferenţe (finite)**, cu coeficienţi constanţi, se înţelege o egalitate de forma

$$(5.1)\qquad a_m x(n+m) + a_{m-1}x(n+m-1) + \cdots + a_0 x(n) = y(n),\ n\in\mathbb{N},$$

unde $m \in \mathbb{N}^*$, $a_k \in K$, $0 \leq k \leq m$ şi $y \in S_d^+$ sunt date, iar $x \in S_d^+$ este funcţia-semnal necunoscută. Ecuaţiei (5.1) i se ataşează condiţiile iniţiale $x(k) = x_k$, $0 \leq k \leq m-1$, unde numerele $x_k \in K$, $0 \leq k \leq m-1$ sunt date.

Notând $x(n) = x_n$ şi $y(n) = y_n$, observăm că, de fapt, ecuaţia (5.1) reprezintă o relaţie de recurenţă relativ la şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$a_m x_{n+m} + a_{m-1} x_{n+m-1} + \cdots + a_0 x_n = y_n,$$

cu eşantioanele (termenii) $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ date.

Pentru a rezolva ecuaţia cu diferenţe (5.1), care reprezintă un analog discret al unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordin m cu coeficienţi constanţi, utilizăm transformarea z. Aplicând operatorul $\mathcal{Z}$ ambilor membri ai ecuaţiei (5.1), notând $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$, $Y(z) = \mathcal{Z}\{y(n)\}$ şi aplicând Teorema 2.5.2, obţinem:

$$a_m[z^m X(z) - (z^m x_0 + z^{m-1} x + \cdots + z x_{m-1})] +$$

$$+ a_{m-1}[z^{m-1} X(z) - (z^{m-1} x_0 + \cdots + z x_{m-2})] + \cdots + a_0 X(z) = Y(z),$$

i.e.

$$X(z) = \frac{Y(z) + Q(z)}{P(z)},$$

unde $P(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ este *polinomul caracteristic* al ecuaţiei (5.1), iar polinomul $Q(z) = a_m x_0 z^m + (a_{m-1} x_1 + x_0 a_m) z^{m-1} + \cdots + x_0 a_1 z$ reprezintă "efectul" condiţiilor iniţiale. De aici rezultă $x(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}(n)$, calculul transformatei z inverse utilizând una din metodele de la secţiunea 3.3.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia cu diferenţe

$$x^2(n+2) = 8x(n)x(n+1), \ n \geq 0,$$

unde $x \in S_d^+$, $x(n) > 0, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ şi $x(0) = 2$, $x(1) = 2$.

Rezolvare. Logaritmând ecuaţia dată în baza 2, primim:

$$2 \log_2 x(n+2) = 3 + \log_2 x(n+1) + \log_2 x(n).$$

Punem $y(n) = \log_2 x(n)$, obţinem

$$2y(n+2) = 3 + y(n+1) + y(n)$$

şi notăm $Y(z) = \mathcal{Z}\{y(n)\}$. Aplicând transformata în z şi ţinând seama că $y(0) = 1$, $y(1) = 1$, primim:

$$2[z^2 Y(z) - z^2 y(0) - z y(1)] = 3\mathcal{Z}\{u(n)\} + zY(z) - zx(0) + Y(z) \ \Leftrightarrow$$

$$Y(z) = \frac{z(2z^2 - z + 2)}{(z-1)^2(2z+1)}.$$

Determinăm $y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ prin două metode.

Metoda 1 (Metoda reziduurilor)

În conformitate cu §3.3.1, avem

$$y(n) = \text{Rez}(Y_n(z); 1) + \text{Rez}\left(Y_n(z); -\frac{1}{2}\right),$$

unde $Y_n(z) = z^{n-1}Y(z) = \dfrac{z^n(2z^2 - z + 2)}{(z-1)^2(2z+1)}$. Avem:

$$\text{Rez}(Y_n(z); 1) = \lim_{z\to 1}((z-1)^2 Y_n(z))'$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{[nz^{n-1}(2z^2-1) + z^n(4z-1)](2z+1) - 2z^n(2z^2-z+2)}{(2z+1)^2} = n + \frac{1}{3}$$

$$\text{Rez}\left(Y_n(z); -\frac{1}{2}\right) = \frac{z^n(2z^2-z+2)}{(z-1)^2(2z-1)'}\Big|_{z=-1/2} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Astfel, $y(n) = n + \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Metoda 2 (Descompunerea în fracţii simple pentru $Y(z)/z$)

În conformitate cu 3.3.3.(2°), avem

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2z^2 - z + 2}{(z-1)^2(2z+1)} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{2z+1},$$

unde $A = 1$, $B = \dfrac{1}{3}$, $C = \dfrac{4}{3}$, deci

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-1} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2z+1};$$

astfel

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-1)^2}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{z-1}\right\}$$

$$+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{z+1/2}\right\} = n + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

În final, $x(n) = 2^{y(n)}$.

5.2. Studiul sistemelor liniare discrete invariante în timp

Să considerăm un *sistem liniar discret* (S_d, S_d, L) *invariant în timp*, adică $\forall\ x \in S_d$ are loc relaţia $L(x) * \delta_k = L(x * \delta_k)$, $\forall\ k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ \forall\ x, y \in S_d$, cu $y(n) = L(x(n))$ rezultă $y(n+k) = L(x(n+k))$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$.

Notăm cu $h = L(\delta)$ *răspunsul impuls* al sistemului.

5.2.1. Teoremă

Are loc egalitatea $L(x) = h * x$, $\forall\ x \in S_d$.

Demonstraţie

Întrucât $L(\delta_k) = L(\delta * \delta_k)$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$ şi $x = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta_k$, $\forall\ x \in S_d$, obţinem succesiv:

$$L(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)L(\delta_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)L(\delta * \delta_k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)(L(\delta) * \delta_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)(h * \delta_k) = h * \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta_k = h * x,$$

ceea ce încheie demonstraţia.

Astfel, *sistemele liniare discrete invariante în timp* (*SLDIT*) *sunt de tip convoluţie* (la fel şi pentru SLAIT).

5.2.2. Exemplu

Se consideră sistemul liniar invariant în timp (S_d^+, S_d, L) având răspunsul impuls $h = L(\delta) = \delta_{-1} + 2\delta - 3\delta_1$. Să se determine intrarea $x \in S_d^+$ ştiind că ieşirea este $y(n) = (-3)^n u(n)$, unde $y = L(x)$.

Rezolvare. Din $L(x) = y$ rezultă $h * x = y$. Aplicând transformarea z, obţinem $H(z)X(z) = Y(z)$, adică

$$X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{z^2}{(z+3)^2(z-1)}.$$

De aici,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z+3)^2(z-1)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(z+3)^2} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{z+3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{z-1},$$

de unde

$$\begin{aligned} x(n) &= \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \\ &= \frac{3}{4}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z+3)^2}\right\} - \frac{1}{16}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z+3}\right\} + \frac{1}{16}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z-1}\right\} \\ &= \left[\frac{3}{4}n(-3)^{n-1} - \frac{1}{16}(-3)^n + \frac{1}{16}\right]u(n) = \frac{1}{16}[1-(4n+1)(-3)^n]u(n). \end{aligned}$$

5.3. Studiul filtrelor digitale

Să considerăm un filtru digital (numeric) de tip (S_d, S_d, L), cu proprietatea că pentru orice $x \in S_d$ eşantioanele $y(n)$ ale semnalului de ieşire $y = L(x)$ verifică o relaţie de forma

$$\sum_{k=0}^{s} a_k y(n-k) = \sum_{i=0}^{p} b_i x(n-i), \ \forall\ n \in \mathbb{Z}, \tag{5.3}$$

unde $s \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, iar a_k $(0 \le k \le s)$ şi b_i $(0 \le i \le p)$ sunt numere din K, cu $a_0 \neq 0$. Observăm că (5.3) reprezintă o ecuaţie cu diferenţe (finite) de tip (5.2).

Exemplu. Se consideră un filtru digital care verifică relaţia

$$6y(n-2) - y(n-1) - y(n) = x(n) + 3x(n-1), \ \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

Să se determine ieşirea y dacă sistemul este în repaus până la momentul $n = 0$ (adică $y \in S_d^+$), iar semnalul de intrare este $x(n) = u(n)$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$.

Rezolvare. Aplicăm transformarea z; punând $X = \mathcal{Z}(x)$ şi $Y = \mathcal{Z}(y)$, primim

$$\left(\frac{6}{z^2} - \frac{1}{z} - 1\right)Y(z) = \left(1 + \frac{3}{z}\right)X(z) \ \Leftrightarrow\ Y(z) = \frac{-z^2}{(z-1)(z-2)}.$$

Astfel,

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{z-2},$$

aşadar

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\} - 2\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\} = (1 - 2^{n+1})u(n).$$

5.4. Discretizarea unor ecuaţii diferenţiale

O ecuaţie diferenţială se discretizează considerând, de exemplu, o diviziune $(t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n)$ echidistantă de pas h (deci $t_n = t_0 + nh$, $n \geq 1$) şi aproximând derivatele funcţiei necunoscute $x(t)$ pe nodurile t_n, $n \geq 0$, în diverse moduri (cel mai direct se ia $x'(t) \approx \dfrac{x(t+h) - x(t)}{h}$). Rezultă o ecuaţie cu diferenţe finite, care se rezolvă aplicând tehnica transformării z.

6 Probleme

Enunţuri

1. *Să se determine transformatele z pentru următoarele semnale discrete:*

(i) $x(n) = 5n \cdot 2^{n+1} + 6\sin^2 \dfrac{n\pi}{4},\ x \in S_d^+$

(ii) $x(n) = 3n^2\delta_{-4}(n) - 5\delta_2(n+10) + 2\text{ch}\left(\dfrac{n}{2}\right)u(n),\ x \in S_d$

(iii) $x(n) = \dfrac{n^2}{n^2+5n+4} \cdot (-1)^n,\ x \in S_d^+$

(iv) $x(n) = \dfrac{(-1)^n}{2n+1},\ x \in S_d^+$

(v) $x(n) = \dfrac{n^2+1}{2^n n!},\ x \in S_d^+$

2. *Utilizând transformarea z, să se calculeze suma pentru fiecare din următoarele serii numerice:*

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+5}{3^n}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n^2+7)}{3^n}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 + \cos\frac{n\pi}{3}}{2^n}$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin\frac{n\pi}{6}}{3^n}$

(v) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n \sin\dfrac{n\pi}{2}}{3^n}$

(vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos\dfrac{2n\pi}{3}+(-1)^n}{2^n}$

(vii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{2^n(n+1)}$

(viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+2)2^{n+1}}{3^n(n^2+4n+3)}$

3. *Să se calculeze:*

(i) $\mathcal{Z}\{x(n)\}$, *unde* $x(n)=0,\ \forall\ n\le 0,\ x(1)=1,\ x(2)=2,\ x(3)=3$ *şi* $x(n+4)=x(n),\ \forall\ n\in\mathbb{N}$.

(ii) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z^2+2z-6}{z-2}\right\}$

(iii) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z^3+3z+7}{z^2-z+1}\right\}$

(iv) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{\cos(\pi/z)}{z-1}\right\}$

(v) $\mathcal{Z}\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+2)\right\}$

4. *Utilizând metoda transformării z, să se rezolve următoarele ecuaţii sau sisteme de ecuaţii cu diferenţe (finite), unde* $x\in S_d^+$*:*

(i) $x(n+2)+3x(n+1)+2x(n)=(-5)^n,\ n\ge 0,\ x(0)=2,\ x(1)=-1$

(ii) $x(n+2)-x(n+1)+j(x(n)-x(n+1))=j^n,\ n\ge 0,\ x(0)=x(1)=0$

(iii) $x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n=3^n,\ n\ge 0,\ x_0=0,\ x_1=2$

(iv) $2x(n+1)+x(n-1)=3x(n)+2,\ x(0)=1,\ x(1)=2.$

(v) $x(n+2)x^2(n+1)=ex^3(n)$, $n\ge 0$, $x(0)=x(1)=1$

(vi) $x(n+1)x^2(n-1)=2x^2(n)x(n-2),\ n\ge 2,$
$x(0)=x(1)=8,\ x(2)=4$

(vii) $9(n+2)(n+3)x(n)+(n+1)(n+2)x(n+2)+$

$$+6(n+1)(n+3)x(n+1)=(-2)^n(n+1)(n+2)(n+3),$$

$n \geq 0,\ x(0)=3,\ x(1)=6$

(viii) $16(n+1)(n+2)x(n+2)+8(n+1)(n+3)x(n+1)$

$$+(n+2)(n+3)x(n)=(-1)^n(n+1)(n+2)(n+3),$$

$n \geq 0,\ x(0)=1,\ x(1)=4$

(ix) $(n+2)x(n+2)+(n+1)x(n+1)+x(n)=0,\ n \geq 0,\ x(0)=1,\ x(1)=0$

(x) $\begin{cases} 2x(n-1)=3x(n)-y(n-1) \\ x(n-1)+y(n-1)=2y(n) \end{cases}$; $n \geq 1,\ x(0)=0,\ y(0)=1$

5. *Se consideră SLDIT (S_d, S_d, L), $L(x)=h*x$. Să se determine intrarea $x \in S_d$ în fiecare din situaţiile de mai jos, ştiind că ieşirea $y=L(x) \in S_d$ şi răspunsul-impuls $h=L(\delta)$ sunt date.*

(i) $h=\delta_{-2}+2\delta_{-1}-3\delta,\ \ y(n)=(-1)^n 3^n u(n)$

(ii) $h=\delta_{-1}+3\delta-4\delta_1,\ y(n)=2^n u(n)$

(iii) $h=\delta_{-1}-2\delta_0-3\delta_1,\ \ y(n)=\delta_2(n)$

(iv) $h=\delta_{-2}-j\delta_{-1},\ \ y(n)=(-1)^n u(n)$

(v) $h=\delta_{-2}+\delta_{-1}+\delta,\ y(n)=2^n u(n)$

(vi) $h=\delta_{-2}+2\delta_{-1}+4\delta,\ y(n)=(-1)^n u(n)$

(vii) $h=\delta_2+\delta_0,\ \ y=\delta_{-3}+\delta_{-2}.$

6. *Se consideră un filtru digital care verifică o relaţie dată. Să se determine în fiecare situaţie ieşirea y dacă sistemul este în repaus până la momentul $n=0$ (i.e. $y \in S_d^+$), iar semnalul de intrare $x(n)$ este dat:*

(i) $(j+1)y(n-2)-y(n-1)+y(n)=x(n-2)+jx(n),\ \ x(n)=j^n u(n)$

(ii) $y(n-2)+y(n)=x(n)+2x(n-1),\ x(n)=2^n u(n)$

(iii) $y(n-3)-y(n-2)-y(n-1)+y(n)=x(n-2)+2x(n-1)+x(n),$ $x(n)=(-1)^n u(n).$

Indicaţii. Soluţii. Răspunsuri

1. (i) $\mathcal{Z}\{x(n)\}(z) = 10\mathcal{Z}\{n \cdot 2^n\}(z) + 3\mathcal{Z}\left\{1 - \cos\dfrac{n\pi}{2}\right\}(z)$

$$= 10\mathcal{Z}\{n\}\left(\frac{z}{2}\right) + 3\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z^2}{z^2+1}\right) = \frac{20z}{(z-2)^2} + \frac{3z}{z-1} - \frac{3z^2}{z^2+1},\ |z| > 2$$

(ii) $48z^4 - 5z^8 + 2\left(z^2 - z\mathrm{ch}\,\dfrac{1}{2}\right)\left(z^2 - 2z\mathrm{ch}\,\dfrac{1}{2} + 1\right)^{-1}$

(iii) $\mathcal{Z}\{x(n)\}(z) = \mathcal{Z}\left\{\dfrac{n^2}{n^2+5n+4}\right\}(-z);$

$$\frac{n^2}{n^2+5n+4} = 1 - \frac{5n+4}{(n+1)(n+4)} = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n+1} - \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{n+4}.$$

Notând $y(n) = \dfrac{1}{n+1}$, avem

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{n+1}\right\} = z\ln\frac{z}{z-1} \quad \text{şi} \quad \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{n+4}\right\} = \mathcal{Z}\{y(n+3)\}$$

(iv) $\sqrt{z}\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{\sqrt{z}},\ |z| > 1$ **(v)** $\left(1 + \dfrac{1}{2z} + \dfrac{1}{4z^2}\right)\exp\left(\dfrac{1}{2z}\right)$

2. (i) $s = \mathcal{Z}\{n^2 + 2n + 5\}(3) - x(0) = \dfrac{11}{2}$

(ii) $\mathcal{Z}\{2n^2 + 7\}(-3) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4$

(iii) $\mathcal{Z}\{n^2\}(-2) + \mathcal{Z}\left\{\cos\dfrac{n\pi}{3}\right)(2) - x(0) - x(1) = \dfrac{19}{108}$

(iv) $\dfrac{12(127 + 60\sqrt{3})}{5329}$

(v) $\dfrac{6}{5}$ **(vi)** $-\dfrac{58}{147}$

(vii) $\mathcal{Z}\left\{\dfrac{n^2}{n+1}\right\}(2) - \dfrac{1}{4} = 2\ln 2 - \dfrac{1}{4}$

(viii) $\dfrac{39}{8}\ln\dfrac{5}{3} - \dfrac{17}{6}$

3. (i) După Teorema 2.8, cu $N = 4$,

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = \frac{z^4}{z^4-1}\left(\frac{0}{1}+\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{3}{z^3}\right) = \frac{z(z^2+2z+3)}{z^4-1}, \quad |z|>1$$

(ii) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{z+3+\dfrac{z}{z-2}\right\} = \delta_{-1}(n)+3\delta(n)+2^n u(n)$

(iii) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{z+1+3\dfrac{z+2}{z^2-z+1}\right\}$

$$= \delta_{-1}(n)+\delta(n)+3\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z+2}{z^2-z+1}\right\};$$

$$\frac{z+2}{z^2-z+1} = z\frac{z+2}{z(z^2-z+1)} = z\left(\frac{A}{z}+\frac{Bz+C}{z^2-z+1}\right)$$

$$= z\left(\frac{2}{z}-\frac{2z-3}{z^2-z+1}\right) = 2-\frac{2z^2-3z}{z^2-2z\cos\frac{\pi}{3}+1}$$

$$= 2-\frac{2z\left(z-\cos\frac{\pi}{3}\right)-2z}{z^2-2z\cos\frac{\pi}{3}+1}$$

$$= 2-2\frac{z\left(z-\cos\frac{\pi}{3}\right)}{z^2-2z\cos\frac{\pi}{3}+1}+2\frac{z\sin\frac{\pi}{3}}{z^2-2z\cos\frac{\pi}{3}+1}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}};$$

în final obţinem:

$$\delta_{-1}(n)+7\delta(n)-6u(n)\cos\frac{n\pi}{3}+\frac{4}{\sqrt{3}}u(n)\sin\frac{n\pi}{3}$$

(iv) Metoda reziduurilor:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \begin{cases} 0, & n\le 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{(-\pi^2)^k}{(2k)!}, & n\ge 1,\ m=\left[\dfrac{n-1}{2}\right] \end{cases}$$

(v) $\dfrac{z}{z-1}[\mathcal{Z}\{n^2\}+2\mathcal{Z}\{n\}] = \dfrac{z^2(3z-1)}{(z-1)^4},\ |z|>1$

4. (i) $x(n) = (-1)^n(39 - 2^{n+4} + 5^n)u(n)/12$

(ii) $x(n) = j[1 - j^n + nj^n(1 + j)]/2$

(iii) $x(n) = 3^n - 2^n + n \cdot 2^{n-1}$

(iv) $x(n) = 2n - 1 + 2^{1-n}$

(v) $x(n) = \exp(y(n))$, $y(n) = -\dfrac{1}{16} + \dfrac{n}{4} + \dfrac{1}{16}(-3)^n$

(vi) $x(n) = 2^{y(n)}$; $y(n) = n + 1 + 2\cos\dfrac{n\pi}{3}$

(vii) $x(n) = (n + 1)[(-2)^n + 11n(-3)^{n-1} + 2(-3)^n]$

(viii) $x(n) = \dfrac{n+1}{9}\left[(-1)^n + 4(2 - 21n)\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n\right]$

(ix) Fie $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$; atunci

$$\mathcal{Z}\{(n + 1)x(n + 1)\} = z\mathcal{Z}\{nx(n)\} - z \cdot 0 \cdot x(0),$$

$$\mathcal{Z}\{(n + 2)x(n + 2)\} = z^2\mathcal{Z}\{nx(n)\} - z^2 \cdot 0 \cdot x(0) - z \cdot 1 \cdot x(1),$$

iar $\mathcal{Z}\{nx(n)\} = -zX'(z)$. Ecuaţia operatorială este

$$z^2(z + 1)X'(z) + X(z) = 0,$$

i.e. o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile. Obţinem

$$X(z) = C\frac{z+1}{z}e^{-1/z};$$

din Teorema valorii iniţiale (Teorema 2.12) avem $\lim\limits_{z\to\infty} X(z) = x(0)$, deci $C = 1$. Astfel,

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z+1}{z}e^{-1/z}\right\} = \text{Rez}\{(z^{n-2} + z^{n-1})e^{-1/z}; 0\};$$

deoarece $z = 0$ este punct singular esenţial pentru funcţia $z \mapsto (z^{n-2} + z^{n-1})e^{-1/z}$, utilizăm dezvoltarea în serie a lui $e^{-1/z}$ şi identificăm coeficientul lui $z^{-1} = 1/z$, anume

$$x(n) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}, \quad n \geq 0.$$

(x) Punem $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$, $Y(z) = \mathcal{Z}\{y(n)\}$; soluţia este

$$x(n) = \frac{2}{5}\left[1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right]; \quad y(n) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

5. **(i)** $x(n) = \left[\frac{1}{16} - \frac{n}{4}(-3)^{n-1} - \frac{1}{16}(-3)^n\right] u(n)$

(ii) $x(n) = \frac{u(n)}{30}[10 \cdot 2^n - 6 + (-1)^{n+1}2^{2n+2}]$

(iii) $x(n) = -\frac{1}{3}\delta_1(n) + \frac{2}{9}\delta_0(n) + \frac{1}{36}3^n u(n) + \frac{1}{4}(-1)^{n+1}u(n)$

(iv) $x(n) = j\delta_0(n) - \frac{1+j}{2}j^n u(n) + \frac{1-j}{2}(-1)^n u(n)$

(v) $x(n) = \frac{1}{7}\left(2^n - \cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{5}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n\pi}{3}\right) u(n)$

(vi) $x(n) = \frac{1}{3}\left[(-1)^n - 2^n \cos\frac{2n\pi}{3}\right] u(n)$

(vii) $x(n) = \delta_{-3}(n) + \delta_{-2}(n) - \delta_{-1}(n) + u(n)\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \cos\frac{n\pi}{2}\right)$

6. **(i)** $x(n) = \frac{13j+9}{25}j^n - \frac{3+j}{5}nj^{n-1} + \frac{12j-9}{25}(1-j)^n$

(ii) $Y(z) = \frac{z^2(z+2)}{(z-2)(z^2+1)}$,

$$y(n) = \left(\frac{8}{5} \cdot 2^n - \frac{3}{5}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{5}\sin\frac{n\pi}{2}\right) u(n)$$

(iii) $\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1\right) Y(z) = \left(\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + 1\right)\frac{z}{z+1}$;

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z-1)^2}.$$

În final, $y(n) = (n+1)u(n)$.

Capitolul 6

Noţiuni de teoria distribuţiilor. Transformatele Fourier şi Laplace ale distribuţiilor

1 Introducere

O serie de probleme de fizică matematică, teoria circuitelor electrice, mecanică cuantică, electromagnetism au condus la studiul aşa-numitelor "funcţii impulsive" sau "funcţii cu creştere explozivă", adică a unor tensiuni electrice, forţe mecanice, densităţi care au valori foarte mari şi acţionează în timp foarte scurt, iar integrala lor în raport cu timpul este finită.

Un exemplu de acest tip provine din fizică şi se referă la *densitatea unei sarcini punctiforme (punct material) de masă* m, plasată în originea axei reale. Pentru a defini această noţiune, se consideră o "împrăştiere uniformă" a acestei mase într-un interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$, cu $\varepsilon > 0$ dat şi se defineşte densitatea medie (liniară) drept funcţia reală δ_ε, cu

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{m}{2\varepsilon}, & \text{dacă} \quad |x| < \varepsilon \\ 0, & \text{dacă} \quad |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

având proprietatea $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)dx = m, \forall\, \varepsilon > 0$. Trecând la limită pentru $\varepsilon \to 0$

se obţine o "funcţie" δ, cu

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă} \quad x = 0 \\ 0, & \text{dacă} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

care satisface egalitatea $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = m$, ceea ce arată că definirea noţiunii de densitate liniară a "masei" punctiforme m plasată în origine excede cadrul analizei matematice standard.

Manipularea "empirică" a "funcţiei" δ (introdusă de P.A.M. Dirac în anul 1926) şi a altor "funcţii" analoage s-a dovedit comodă şi a generat o serie de rezultate validate de practică. Înglobarea acestor tehnici empirice într-o teorie matematică riguroasă şi eficientă devenise însă necesară. Acest "salt calitativ" s-a produs la mijlocul secolului al XX-lea prin introducerea noţiunii de distribuţie (funcţie generalizată) şi s-a datorat matematicianului francez L. Schwartz (care în anii 1950-1951 a scris primul tratat de teoria distribuţiilor, în două volume) şi matematicienilor ruşi S.L. Sobolev, I.M. Ghelfand şi G.E. Şilov. Cadrul natural de expunere şi dezvoltare a teoriei distribuţiilor îl constituie analiza funcţională, noţiunea de distribuţie însăşi fiind concepută ca o funcţională liniară şi continuă; astfel, corespondentul riguros matematic al noţiunii de "funcţie impulsivă" sau "funcţie cu creştere explozivă" este distribuţia lui Dirac sau impulsul unitar aplicat la momentul $t = a$.

Semnalăm, de asemenea, că în cadrul teoriei distribuţiilor s-au descoperit interpretări şi rezolvări riguroase pentru noţiuni şi probleme care nu se pot aborda în cadrul analizei matematice standard sau al teoriei clasice a ecuaţiilor diferenţiale: integrale cu singularităţi, derivatele unor funcţii discontinue, soluţii generalizate ale unor ecuaţii cu derivate parţiale.

2 Spaţii de funcţii test (spaţii fundamentale)

Funcţiile-test sunt, în general, funcţii cu un anumit grad de regularitate (sau funcţii cu "comportare bună"). Spaţiile de funcţii-test (numite şi spaţii fundamentale) constituie mulţimile pe care se definesc funcţionalele care reprezintă distribuţiile.

Prezentăm două asemenea spaţii, introduse în Capitolul 1.

2.1. Spaţiul standard al funcţiilor test

Este spaţiul $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R})$ al funcţiilor $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ care au suport compact (secţiunea 1.3, Capitolul 1).

Mai general, se consideră spaţiul $\mathcal{D}_n = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ al funcţiilor $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ indefinit derivabile şi cu suport compact.

2.2. Spaţiul funcţiilor rapid descrescătoare

Este spaţiul $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ descris în secţiunea 1.7, Capitolul 1.

Mai general, se consideră spaţiul $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ al funcţiilor indefinit derivabile $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, cu proprietatea că φ şi derivatele sale de orice ordin descresc spre zero, pentru $|x| \to \infty$, mai "repede" decât orice putere naturală a lui $\dfrac{1}{|x|}$, unde $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, cu $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Pentru detalii privind spaţiile de funcţii test, se pot consulta [2], [19], [24].

3 Definiţia noţiunii de distribuţie

Să notăm cu $\mathcal{F}$ unul din spaţiile fundamentale (spaţii de funcţii-test) $\mathcal{D}$ sau $\mathcal{S}$.

3.1. Definiţie

Se numeşte **distribuţie** *asociată spaţiului $\mathcal{F}$ orice funcţională liniară şi continuă definită pe $\mathcal{F}$.*

Aşadar, o distribuţie este o funcţională $T : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$) care asociază fiecărei funcţii-test $\varphi \in \mathcal{F}$ un număr real (sau complex) $T\varphi$, notat de obicei cu $\langle T, \varphi \rangle$, şi care îndeplineşte următoarele condiţii:

(i) *Liniaritatea*: $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall\ \varphi, \psi \in \mathcal{F}$ are loc egalitatea

$$\langle T, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = \lambda\langle T, \varphi \rangle + \mu\langle T, \psi \rangle$$

(ii) *Continuitatea*: Pentru orice şir de funcţii-test $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ din $\mathcal{F}$ cu proprietatea $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{F}} 0$, pentru $k \to \infty$, rezultă $\lim\limits_{k\to\infty} \langle T, \varphi_k \rangle = 0$ (în $\mathbb{R}$).

Notaţie. Mulţimea distribuţiilor se notează cu $\mathcal{F}'$ (sau $\mathcal{F}^*$). În anumite situaţii, o distribuţie $T \in \mathcal{F}'$ se notează $T(t)$ sau $T(x)$, punând astfel în evidenţă variabila funcţiei-test φ: $\varphi(t)$ sau $\varphi(x)$.

3.2. Egalitatea distribuţiilor

Distribuţiile $T \in \mathcal{F}'$ şi $S \in \mathcal{F}'$ sunt egale, notaţie $T = S$, dacă $\langle T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{F}$.

3.3. Tipuri de distribuţii

• Dacă $\mathcal{F} = \mathcal{D}$, atunci distribuţiile $T \in \mathcal{D}'$ se numesc *distribuţii standard* (sau *funcţii generalizate*).

• Dacă $\mathcal{F} = \mathcal{S}$, atunci distribuţiile $T \in \mathcal{S}'$ se numesc *distribuţii temperate.*

4 Exemple reprezentative de distribuţii

În acest paragraf, ne referim la distribuţiile standard 1-dimensionale ($\mathcal{D}'$).

4.1. Distribuţii regulate sau distribuţii de tip funcţie

Fie $f : \mathbb{R} \to K$ o funcţie local integrabilă, i.e. $f \in L^1_{loc}$ (vezi Cap.1, §1.4). Asociem funcţiei f funcţionala notată T_f sau $\underline{f}$, definită prin

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \langle \underline{f}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}. \tag{4.1}$$

Să remarcăm că integrala care defineşte funcţionala $\underline{f}$ se calculează de fapt pe un interval compact $[a(\varphi), b(\varphi)]$, deoarece φ este nulă în afara suportului său compact.

4.1.1. Definiţie

Distribuţia T_f (sau $\underline{f}$) din $\mathcal{D}'$, dată prin relaţia (4.1) se numeşte **distribuţie regulată** *sau* **distribuţie de tip funcţie** *asociată funcţiei $f \in L^1_{loc}$.*

4.1.2. Exemple

Distribuţia sinus (ataşată funcţiei local integrabile sin) este

$$\underline{\sin} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \quad \langle \underline{\sin}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\sin t dt,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Distribuţia exponenţială este

$$\underline{\exp} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \quad \langle \underline{\exp}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^t dt,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Distribuţia constantă este

$$\underline{a} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \quad \langle \underline{a}, \varphi\rangle = a\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D},$$

unde $a \in \mathbb{R}$ este o constantă dată (care generează funcţia local integrabilă $x \mapsto a$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$); pentru $a = 0$, obţinem distribuţia nulă $\underline{0}$.

Se poate spune că definirea distribuţiilor de tip funcţie reprezintă un procedeu de "fabricare" de distribuţii.

4.1.3. Observaţie

Există un izomorfism liniar de la L^1_{loc} la mulţimea distribuţiilor de tip funcţie, prin care fiecărei funcţii $f \in L^1_{loc}$ i se asociază distribuţia $\underline{f}$; astfel, funcţiile local integrabile pot fi identificate cu distribuţiile regulate asociate. De aceea, funcţiile local integrabile (practic, toate funcţiile reale uzuale) se pot considera cazuri particulare de distribuţii; de multe ori, prin abuz de notaţie, distribuţia $\underline{f}$ se notează f (identic cu funcţia local-integrabilă originară), distincţia dintre funcţie şi distribuţie rezultând din contextul expunerii.

4.1.4. Generalizare

Dacă $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o funcţie local-integrabilă pe $\mathbb{R}^n$ (adică integrabilă pe orice compact din $\mathbb{R}^n$), se poate defini *distribuţia regulată n-dimensională* (*de tip funcţie*) asociată lui f, $T_f : \mathcal{D}_n \to \mathbb{R}$,

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \langle \underline{f}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n,$$

$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}_n$. De exemplu, în cazul 2-dimensional,

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \langle \underline{f}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\varphi(x, y)dxdy,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}_2.$$

4.2. Distribuţia lui Heaviside

Este distribuţia regulată (de tip funcţie) asociată funcţiei treaptă-unitate u a lui Heaviside (§2.4.2, cap.1). Se notează $H = T_u = \underline{u}$; aşadar

$$H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \quad \langle H, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\varphi(t)dt = \int_0^{\infty} \varphi(t)dt,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}.$$

În cazul n-dimensional, distribuţia lui Heaviside se defineşte similar; de exemplu, în cazul 2-dimensional, funcţia treaptă unitate este

$$u(x, y) = \begin{cases} 1, & x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

deci

$$\langle H, \varphi \rangle = \langle \underline{u}, \varphi \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x, y) dx dy, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}_2.$$

4.3. Distribuţia lui Dirac

Să considerăm funcţia impuls de durată $\frac{1}{n}$, $n \geq 1$, aplicată în punctul $t = a$

$$\delta_{a,n}(t) = \begin{cases} n, & a \leq t \leq a + \frac{1}{n} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Definim distribuţia regulată (de tip funcţie) $\underline{\delta_{a,n}}$ asociată:

$$\langle \underline{\delta_{a,n}}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^\infty \delta_{a,n}(t) \varphi(t) dt = n \int_a^{a+1/n} \varphi(t) dt, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Aplicând teorema de medie integralei de mai sus, rezultă existenţa unui punct $t_n \in \left[a, a + \frac{1}{n}\right]$ cu proprietatea

$$\langle \underline{\delta_{a,n}}, \varphi \rangle = n \left(a + \frac{1}{n} - a \right) \varphi(t_n) = \varphi(t_n).$$

Trecând la limită pentru $n \to \infty$, utilizând continuitatea lui φ şi faptul că $t_n \to a$ (dacă $n \to \infty$) rezultă:

$$\lim_{n \to \infty} \langle \underline{\delta_{a,n}}, \varphi \rangle = \lim_{n \to \infty} \varphi(t_n) = \varphi(a), \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Introducem funcţionala $\delta_a : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$,

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) = \lim_{n \to \infty} \langle \underline{\delta_{a,n}}, \varphi \rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Se arată că δ_a este o distribuţie.

4.3.1. Definiţie

Fie $a \in \mathbb{R}$ un număr dat. Distribuţia $\delta_a : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, unde $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$, $\forall \ \varphi \in \mathcal{D}$, se numeşte **distribuţia lui Dirac** *sau* **impulsul unitar pur aplicat la momentul** *$t = a$.*

Dacă $a = 0$, distribuţia δ_0 se notează δ; aşadar

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

4.3.2. Observaţie

Se spune că distribuţia δ_a extrage valoarea funcţiei-test din momentul "apariţiei impulsului". În teoria semnalelor, această proprietate se numeşte *sondare* (sau *filtrare temporală*), dacă se referă la domeniul timp, respectiv *filtrare*, dacă se referă la domeniul frecvenţă.

4.3.3. Generalizare

Dacă $a \in \mathbb{R}^n$, distribuţia n-dimensională $\delta_a : \mathcal{D}_n \to \mathbb{R}$ se defineşte similar cu cazul unidimensional,

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}_n.$$

4.4. Distribuţii singulare

O distribuţie $T \in \mathcal{D}'$ se numeşte **distribuţie singulară** *dacă T nu este distribuţie de tip funcţie (distribuţie regulată).*

Exemplul clasic de distribuţie singulară îl constituie distribuţia lui Dirac.

5 Operaţii cu distribuţii

5.1. Transformări liniare de distribuţii

5.1.1. Definiţie

Dacă $T = T(t) \in \mathcal{D}'$ este o distribuţie dată, iar $a \neq 0$ şi b sunt numere reale date, distribuţia $T(at+b) \in \mathcal{D}'$ se defineşte prin egalitatea

$$\langle T(at+b), \varphi(t) \rangle = \left\langle \frac{1}{|a|} T(t), \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\rangle, \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

5.1.2. Distribuţia $\delta(at+b)$

Are loc egalitatea

$$\delta(at+b) = \frac{1}{|a|}\delta\left(t + \frac{b}{a}\right).$$

Într-adevăr,

$$\langle \delta(at+b), \varphi(t) \rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle \delta(t), \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)\Big|_{t=0} = \frac{1}{|a|}\varphi\left(-\frac{b}{a}\right).$$

Pe de altă parte,

$$\frac{1}{|a|}\left\langle \delta\left(t+\frac{b}{a}\right), \varphi(t)\right\rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle \delta(t), \varphi\left(t-\frac{b}{a}\right)\right\rangle$$

$$= \frac{1}{|a|}\varphi\left(t-\frac{b}{a}\right)\Big|_{t=0} = \frac{1}{|a|}\varphi\left(-\frac{b}{a}\right).$$

5.2. Translaţia distribuţiilor

5.2.1. Definiţie

Fie $T = T(t) \in \mathcal{D}$ şi $a \in \mathbb{R}$ date. **Translaţia cu** *"a" a distribuţiei T este transformarea liniară $T(t-a)$, i.e.:*

$$\langle T(t-a), \varphi(t)\rangle = \langle T(t), \varphi(t+a)\rangle, \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Distribuţia $\tau_a T \in \mathcal{D}'$, unde $(\tau_a T)(t) = T(t-a)$ se numeşte **translaţie cu** $\boldsymbol{a}$ *a distribuţiei T.*

Observăm că $\tau_a \underline{f} = \underline{\tau_a f}, \ \forall\ f \in L^1_{loc}$.

5.2.2. Distribuţia $\delta(t-a)$

În cazul particular al distribuţiei δ, obţinem:

$$\langle \delta(t-a), \varphi(t)\rangle = \langle \delta(t), \varphi(t+a)\rangle = \varphi(t+a)\Big|_{t=a}$$

$$= \varphi(a) = \langle \delta_a(t), \varphi(t)\rangle, \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

De aici rezultă egalitatea frecvent utilizată:

$$\delta_a(t) = \delta(t-a), \ \forall\ a \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ \tau_a\delta = \delta_a, \ \forall\ a \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

O interpretare a egalităţii $\langle \delta(t-a), \varphi(t)\rangle = \varphi(a)$ este următoarea: dacă $T \in \mathcal{D}'$ şi $\varphi \in \mathcal{D}$, în loc de $\langle T, \varphi\rangle$ se utilizează uneori notaţia (specifică distribuţiilor regulate) $\int_{-\infty}^{\infty} T(t)\varphi(t)dt$; astfel egalitatea de mai sus devine:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\varphi(t)dt = \varphi(a),$$

numită *formula de filtrare* (vezi şi Observaţia 4.3.2).

5.3. Omotetia (dilatarea sau contracţia) distribuţiilor

5.3.1. Definiţie.

Fie $T = T(t) \in \mathcal{D}$ şi $a \in \mathbb{R}^*$ date. Omotetia (de parametru sau raport a) a distribuţiei T este transformarea liniară $T(at)$, i.e.:

$$\langle T(at), \varphi(t) \rangle = \left\langle \frac{1}{|a|} T(t), \varphi\left(\frac{t}{a}\right) \right\rangle, \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

De obicei, se spune că omotetia este o "dilatare" dacă $a > 1$, respectiv o contracţie dacă $a \in (0, 1)$.

5.3.2. Simetria distribuţiilor

Este omotetia de raport (parametru) $a = -1$, i.e. $T(-t)$:

$$\langle T(-t), \varphi(t) \rangle = \langle T(t), \varphi(-t) \rangle, \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Distribuţia $T_s \in \mathcal{D}'$ definită prin $T_s(t) = T(-t)$ i.e.

$$\langle T_s(t), \varphi(t) \rangle = \langle T(t), \varphi(-t) \rangle, \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}$$

se numeşte *simetrica* distribuţiei T.

O distribuţie T se numeşte *pară* dacă $T_s = T$, respectiv *impară* dacă $T_s = -T$.

5.3.3. Distribuţia $\delta(at)$

În cazul particular al distribuţiei δ, obţinem:

(i) *Omotetia*:

$$\langle \delta(at), \varphi(t) \rangle = \left\langle \frac{1}{|a|} \delta(t), \varphi\left(\frac{t}{a}\right) \right\rangle = \frac{\varphi(0)}{|a|} = \left\langle \frac{1}{|a|} \delta(t), \varphi(t) \right\rangle, \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D},$$

deci

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) = \frac{1}{|a|} \delta.$$

(ii) *Simetria*

$$\delta(-t) = \delta(t) \ \Leftrightarrow\ \delta_s = \delta,$$

deci δ *este o distribuţie pară.*

În general: $(\delta_a)_s = \delta_{-a}$.

5.4. Înmulţirea unei distribuţii cu o funcţie

5.4.1. Definiţie

Fie $T \in \mathcal{D}'$, $n \geq 1$, o distribuţie dată şi $\alpha \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ o funcţie reală dată. Distribuţia $\alpha T \in \mathcal{D}'$ se defineşte prin egalitatea

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

5.4.2. Proprietatea filtrantă a distribuţiei lui Dirac ($n = 1$)

Are loc egalitatea:

$$\alpha(t)\delta(t-a) = \alpha(a)\delta(t-a).$$

Într-adevăr,

$$\langle \alpha(t)\delta(t-a), \varphi(t) \rangle = \langle \delta(t-a), \alpha(t)\varphi(t) \rangle$$
$$= \langle \delta(t), \alpha(t+a)\varphi(t+a) \rangle = \alpha(a)\varphi(a) = \alpha(a)\langle \delta_a(t), \varphi(t) \rangle$$
$$= \langle \alpha(a)\delta(t-a), \varphi(t) \rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

În particular, pentru $a = 0$, primim:

$$\alpha\delta = \alpha(0)\delta, \ \forall \ \alpha \in C^{\infty}(\mathbb{R}).$$

5.4.3. Exemple

(i) $t^n\delta = 0$, $(\exp t^n)\delta = \delta$, $\forall \ n \geq 1$
(ii) $(\cos t)\delta = \delta$,

$$(\sin t)\,\delta\left(t - \frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & k \ \text{par} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}}\delta\left(t - \frac{k\pi}{2}\right), & k \ \text{impar} \end{cases}$$

Rezolvare. **(i)** Din 5.4.2 rezultă $(\exp t^n)\delta = \exp(t^n)\Big|_{t=0}\delta = \delta$;

$$t^n\delta = t^n\Big|_{t=0}\delta = 0.$$

(ii) Din 5.4.2 primim:

$$(\cos t)\,\delta = (\cos t)\Big|_{t=0}\delta = \delta.$$

Mai departe,

$$(\sin t)\,\delta\left(t-\frac{k\pi}{2}\right)=\sin t\Big|_{t=\frac{k\pi}{2}}\delta\left(t-\frac{k\pi}{2}\right)=\sin\frac{k\pi}{2}\delta\left(t-\frac{k\pi}{2}\right);$$

pentru k par, avem $\sin\dfrac{k\pi}{2}=0$, iar pentru k impar rezultă $\sin\dfrac{k\pi}{2}=(-1)^{\frac{k-1}{2}}$.

5.5. Derivarea distribuţiilor

5.5.1. Definiţie

Fie $T\in\mathcal{D}'$ şi $n\in\mathbb{N}^*$ date. Se numeşte **derivata de ordin** n **a distribuţiei** T *distribuţia $T^{(n)}\in\mathcal{D}'$ definită prin egalitatea*

$$\langle T^{(n)},\varphi\rangle=(-1)^n\langle T,\varphi^{(n)}\rangle,\ \forall\ \varphi\in\mathcal{D}.$$

5.5.2. Observaţii

(i) Definiţia este corectă, deoarece se poate arăta pe cale standard că funcţionala $T^{(n)}$ definită prin 5.5.1 este o distribuţie.

(ii) Orice distribuţie $T\in\mathcal{D}'$ este indefinit derivabilă.

5.5.3. Exemple

(i) *Derivata distribuţiei lui Heaviside este distribuţia lui Dirac*: $H'=\delta$.

Într-adevăr, $\forall\ \varphi\in\mathcal{D}$ avem:

$$\langle H',\varphi\rangle=-\langle H,\varphi'\rangle=-\int_0^\infty\varphi'(t)dt=\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{0}=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle,$$

deoarece $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$; aşadar $H'=\delta$.

Mai general, are loc relaţia

$$(H(at+b))'=(\mathrm{sgn}a)\delta\left(t+\frac{b}{a}\right).$$

(ii) *Derivatele distribuţiei lui Dirac*

Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ primim:

$$\langle\delta^{(n)},\varphi\rangle=(-1)^n\langle\delta,\varphi^{(n)}\rangle=(-1)^n\varphi^{(n)}(0).$$

Derivatele $\delta^{(n)}$, $n\geq 1$, se numesc *impulsuri unitare de ordin superior.*

(iii) *Derivata distribuţiei asociate funcţiei caracteristice a unui interval*

Fie $\chi = \chi_{[-a,a]}$ funcţia caracteristică a intervalului $[-a, a]$, $a > 0$, i.e.:

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad t \in [-a, a] \\ 0, & \text{dacă} \quad t \notin [-a, a] \end{cases}$$

Deoarece $\chi(t) = u(t + a) - u(t - a)$, $\forall\ t \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, obţinem egalitatea distribuţională

$$\underline{\chi}'(t) = (H(t + a))' - (H(t - a))' = \delta(t + a) - \delta(t - a),$$

în conformitate cu **(i)**.

(iv) *Derivata de ordinul n a produsului αT*

Dacă $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$, $T \in \mathcal{D}'$ şi $n \in \mathbb{N}$, atunci are loc egalitatea

$$(\alpha T)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \alpha^{(n-k)} T^{(k)},$$

unde $\alpha^{(0)} = \alpha$ şi $T^{(0)} = T$.

Demonstraţia utilizează metoda inducţiei matematice.

5.5.4. Derivata în sens distribuţional a unei funcţii de clasă C^1 sau C^1 pe porţiuni

(i) Să presupunem pentru început că *funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este de clasă* $C^1(\mathbb{R})$. În acest caz are loc egalitatea

$$\underline{f'} = (\underline{f})' \text{ sau } T_{f'} = T_f'.$$

Într-adevăr, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$, integrând prin părţi, obţinem:

$$\langle T_{f'}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)dt = f(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)dt = -\langle T_f, \varphi'\rangle = \langle T_f', \varphi\rangle,$$

ceea ce demonstrează egalitatea propusă.

(ii) Mai departe, fie $a \in \mathbb{R}$ fixat şi fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 pe intervalele $(-\infty, a)$ şi (a, ∞), iar în punctul a are un salt

$$s(a) = f(a + 0) - f(a - 0).$$

Pentru fiecare $\varphi \in \mathcal{D}$, integrând prin părţi şi ţinând seama că suppφ este o mulţime compactă, primim:

$$\langle T_f', \varphi' \rangle = -\langle T_f, \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{a} f(t)\varphi'(t)dt - \int_{a}^{\infty} f(t)\varphi'(t)dt$$

$$= -f(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{a} + \int_{-\infty}^{a} f'(t)\varphi(t)dt - f(t)\varphi(t)\Big|_{a}^{\infty} + \int_{a}^{\infty} f'(t)\varphi(t)dt$$

$$= \varphi(a)[f(a+0) - f(a-0)] + \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)dt$$

$$= \varphi(a)s(a) + \langle T_{f'}, \varphi \rangle = \langle s(a)\delta_s + T_{f'}, \varphi \rangle.$$

Am stabilit astfel egalitatea

$$T_f' = s(a)\delta_a + T_{f'} \text{ sau } (\underline{f})' = s(a)\delta_a + \underline{f'} \tag{5.2}$$

Identificând, prin abuz de notaţie, o funcţie $f \in L^1_{loc}$ cu distribuţia de tip funcţie asociată $\underline{f}$ relaţia (5.2) devine:

$$f'(t) = s(a)\delta(t-a) + \widetilde{f}'(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

unde semnul "$\sim$" arată că derivata se ia în sens uzual.

De exemplu, pentru funcţia treaptă unitate a lui Heaviside, relaţia (5.2) devine:

$$(\underline{u})' = s(0)\delta + \underline{u'}, \text{ adică } H' = \delta,$$

deoarece $s(0) = 1$ şi $\langle \underline{u'}, \varphi \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u'(t)\varphi(t)dt = 0 = \langle 0, \varphi \rangle$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$, deci $\underline{u'} = 0$.

(iii) În sfârşit dacă $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ sunt numere reale fixate iar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1 pe intervalele $(-\infty, a_1)$, $(a_1, a_2), \ldots,$ (a_{p-1}, a_p) şi (a_p, ∞), având salturile $s(a_k) = f(a_k+0) - f(a_k-0)$ în punctele a_k, $1 \le k \le p$, atunci se demonstrează, similar cu (ii), egalitatea:

$$T_f' = \sum_{k=1}^{p} s(a_k)\delta_{a_k} + T_{f'} \;\Leftrightarrow\; (\underline{f})' = \sum_{k=1}^{p} s(a_k)\delta_{a_k} + \underline{f'} \tag{5.3}$$

sau, prin abuz de notaţie,

$$f'(t) = \widetilde{f}'(t) + \sum_{k=1}^{p} s(a_k)\delta(t - a_k). \tag{5.4}$$

Reluând exemplul funcţiei caracteristice (5.5.3,(iii)), din (5.4) primim:

$$\chi'(t) = \widetilde{\chi}'(t) + s(-a)\delta(t + a) + s(a)\delta(t - a) = \delta(t + a) - \delta(t - a),$$

deoarece $s(-a) = 1$, $s(a) = -1$ şi

$$\langle \widetilde{\chi}'(t), \varphi(t)\rangle = \langle \underline{\chi'}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \chi'(t)\varphi(t)dt = 0,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

5.5.5. Derivata unei distribuţii n-dimensionale

Fie $T \in \mathcal{D}'_n$ o distribuţie n-dimensională, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice şi $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$ operatorul de derivare parţială asociat lui α (vezi §2).

Derivata D^α *a distribuţiei* T este, prin definiţie, distribuţia $D^\alpha T \in \mathcal{D}'_n$, dată de egalitatea:

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}_n.$$

Are loc incluziunea $\mathrm{supp} D^\alpha T \subseteq \mathrm{supp} T$.

De asemenea, remarcăm că derivata unei distribuţii n-dimensionale ($n \geq 2$) nu depinde de ordinea de derivare.

Exemple.

(i) Dacă $n = 2$ şi $\alpha = (1, 1)$, atunci derivata mixtă $D^{(1,1)}T$ se defineşte prin:

$$\langle D^{(1,1)}T, \varphi\rangle = (-1)^2\langle T, D^{(1,1)}\varphi\rangle,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}_2$$

sau

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y}T(x, y), \varphi(x, y)\right\rangle = \left\langle T(x, y), \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x, y)\right\rangle.$$

Se observă că $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial y\partial x}$.

(ii) Dacă $n = 3$ şi $\alpha = (3, 1, 1)$, atunci

$$\langle D^{(3,1,1)}T, \varphi\rangle = (-1)^5\langle T, D^{(3,1,1)}\varphi\rangle$$

sau

$$\left\langle \frac{\partial^5 T}{\partial x^3 \partial y \partial z}(x,y,z), \varphi(x,y,z) \right\rangle = -\left\langle T(x,y,z), \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x^3 \partial y \partial z}(x,y,z) \right\rangle,$$

$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}_3$.

Este clar că, de exemplu, $\dfrac{\partial^5 T}{\partial x^3 \partial y \partial z} = \dfrac{\partial^5 T}{\partial y \partial x^3 \partial z}$.

6 Produsul de convoluţie a două distribuţii

6.1. Definiţie

Fie $T, S \in \mathcal{D}'$, $T = T(x)$, $S = S(y)$ distribuţii date. Dacă funcţionala $T * S : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, dată prin

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T(x), \langle S(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}$$

există şi reprezintă o distribuţie, atunci $T * S$ se numeşte **produsul de convoluţie** *al distribuţiilor T şi S.*

6.2. Proprietăţi ale produsului de convoluţie

(i) Comutativitatea. Dacă $S, T \in \mathcal{D}'$ şi $T * S$ există, atunci există $S * T$ şi $T * S = S * T$.

(ii) Element neutru. Distribuţia δ este element neutru pentru convoluţia distribuţiilor, i.e.: $T * \delta = \delta * T = T$, $\forall\ T \in \mathcal{D}'$.

Generalizare. $T * \delta_a = T(t-a) = \tau_a T$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$.

(iii) Derivarea. Dacă $T, S \in \mathcal{D}'$ şi există $T * S$, atunci

$$T^{(m)} * S = T * S^{(m)} = (T * S)^{(m)},\ \forall\ m \in \mathbb{N}.$$

(iv) $T * \delta^{(m)} = T^{(m)}$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$, $\forall\ T \in \mathcal{D}'$

În particular, $T * \delta' = \delta' * T = T'$, $\forall\ T \in \mathcal{D}'$.

(v) *În general, produsul de convoluţie nu este asociativ.*

Într-adevăr, luând $T = \underline{1}$, $S = \delta'$, $R = H = \underline{u}$, obţinem:

$$(T * S) * R = (\underline{1} * \delta') * H \overset{(iv)}{=\!=} \underline{1}' * H = \underline{0} * H = \underline{0}$$

$$T * (S * R) = T * (\delta' * H) \overset{(iv)}{=\!=} \underline{1} * H' = \underline{1} * \delta \overset{(ii)}{=\!=} \underline{1}.$$

Pentru demonstraţii şi alte proprietăţi ale produsului de convoluţie, se pot consulta [2], [19], [24], [44].

7 Transformarea Fourier a distribuţiilor

Pentru a defini transformata Fourier a distribuţiei T, să considerăm cazul particular al distribuţiei de tip funcţie $\underline{f}$, unde $f \in L^1(\mathbb{R})$. După un calcul formal, obţinem:

$$\langle \underline{\mathcal{F}f}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\omega)\varphi(\omega)d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\mathcal{F}\varphi)(t)dt = \langle \underline{f}, \mathcal{F}\varphi \rangle,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}.$$

Mai departe, fie T o distribuţie temperată ($T \in \mathcal{S}'$) şi $\mathcal{F}T : \mathcal{S} \to K$ funcţionala definită prin $(\mathcal{F}T)(\varphi) = T(\mathcal{F}\varphi)$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{S}$, unde $\mathcal{F}\varphi$ este transformata Fourier a semnalului φ. Este clar că $\mathcal{F}T$ este liniară (deoarece $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ este liniară); pe de altă parte, dacă $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, rezultă $\mathcal{F}\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ (deoarece $\mathcal{F}$ este un operator continuu), deci $T(\mathcal{F}\varphi_n) \to 0$ (întrucât T este o funcţională continuă). Astfel, funcţionala $\mathcal{F}T$ este o distribuţie ($\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'$).

7.1. Definiţie

Fie T o distribuţie temperată ($T \in \mathcal{S}'$) şi $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ operatorul de transformare Fourier ($\varphi \in \mathcal{S} \mapsto \mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}$). Distribuţia temperată $\mathcal{F}T : \mathcal{S} \to K$, unde

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S} \tag{7.1}$$

se numeşte **transformata Fourier a distribuţiei** T*.*

Se mai utilizează notaţia $\widehat{T}$ sau $\mathcal{F}(T)$ pentru $\mathcal{F}T$; astfel (7.1) se poate scrie:

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}.$$

Observaţie. Relaţia (7.1) se mai poate scrie (cu convenţia stabilită pentru distribuţii la §3):

$$\langle (\mathcal{F}T)(x), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), (\mathcal{F}\varphi)(x) \rangle,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S} \tag{7.2}$$

sau

$$\langle (\mathcal{F}T)(t), \varphi(t) \rangle = \langle T(\omega), (\mathcal{F}\varphi)(\omega) \rangle,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}.$$

O generalizare a relaţiei (7.2) este următoarea:

$$\left\langle (\mathcal{F}T)\left(\frac{x}{a}\right), \varphi(x) \right\rangle = \left\langle T(x), (\mathcal{F}\varphi)\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle,\ \forall\ a \in \mathbb{R}^*. \tag{7.3}$$

7.2. Proprietăţi ale transformării Fourier a distribuţiilor

În general, aceste proprietăţi extind proprietăţile transformării Fourier a funcţiilor uzuale (standard). Demonstraţiile acestor proprietăţi se pot găsi în [19], [24], [44].

7.2.1. Liniaritate, continuitate, inversabilitate

Operatorul de transformare Fourier a distribuţiilor $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, $T \mapsto \mathcal{F}T$, *este o aplicaţie liniară, bijectivă şi continuă, având inversa* $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ *(definită prin* $T \mapsto \mathcal{F}^{-1}T$, *unde* $\langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi \rangle = \dfrac{1}{2\pi}\langle T, \mathcal{F}\varphi_s \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle$*) de asemenea continuă.*

Observaţie. Similar cu cazul transformării Fourier a funcţiilor, ne vom referi la procedeul de asociere $T \mapsto \mathcal{F}T$ prin sintagma "*transformarea Fourier a distribuţiilor*".

7.2.2. Transformata Fourier a distribuţiilor de tip funcţie (regulate)

Fie $f \in L^1(\mathbb{R})$ *sau* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *şi* $T_f = \underline{f}$ *distribuţia regulată asociată. Are loc egalitatea* $\mathcal{F}\underline{f} = \underline{\mathcal{F}f}$ *sau* $\mathcal{F}\underline{f} = \underline{\widehat{f}}$.

Observaţie. Egalitatea de mai sus arată că definiţia dată transformatei Fourier a distribuţiilor este naturală, deoarece această definiţie extinde definiţia transformatei Fourier a funcţiilor.

7.2.3. Transformata Fourier a derivatei de ordin n

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ *şi* $T \in \mathcal{S}'$ *are loc egalitatea*

$$\mathcal{F}(T^{(n)}) = (j\omega)^n \mathcal{F}(T) \text{ sau } \widehat{T^{(n)}} = (j\omega)^n \widehat{T}.$$

Observaţie. Semnificaţia acestei egalităţi (similar şi pentru următoarele proprietăţi) este următoarea: dacă $\alpha : \mathbb{R} \to K$ este funcţia de clasă $C^\infty(\mathbb{R})$ dată de $\alpha(\omega) = (j\omega)^n$, $\forall\ \omega \in \mathbb{R}$, atunci $\mathcal{F}(T^{(n)}) = \alpha \cdot \mathcal{F}(T)$.

7.2.4. Derivata de ordin n a transformatei Fourier

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ *şi* $T \in \mathcal{S}'$ *are loc egalitatea*

$$(\mathcal{F}T)^{(n)} = \mathcal{F}((-jt)^n T).$$

7.2.5. Transformata Fourier a distribuţiei $T(at+b)$

Dacă $T \in \mathcal{S}'$ şi $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, atunci are loc egalitatea:

$$\mathcal{F}(T(at+b)) = \frac{1}{|a|} \exp\left(j\frac{b\omega}{a}\right) (\mathcal{F}T) \left(\frac{\omega}{a}\right).$$

7.2.6. Proprietăţi de similitudine (deplasare, întârziere)

Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ şi $T \in \mathcal{S}'$ au loc egalităţile:
(i) $\tau_a(\mathcal{F}T) = \mathcal{F}(e^{jat}T) \;\Leftrightarrow\; (\mathcal{F}T)(\omega - a) = \mathcal{F}(e^{ajt}T)$
(ii) $\mathcal{F}(\tau_a T) = e^{-ja\omega}\mathcal{F}(T) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{F}(T(t-a)) = e^{-ja\omega}\mathcal{F}(T)$.

7.2.7. Transferul de simetrie

(i) $\forall\, T \in \mathcal{S}'$ *are loc egalitatea*

$$\mathcal{F}(T_s) = (\mathcal{F}T)_s = 2\pi\mathcal{F}^{-1}(T) \;\Leftrightarrow$$

$$\mathcal{F}(T(-t)) = (\mathcal{F}T)(-\omega) = 2\pi(\mathcal{F}^{-1}T)(\omega).$$

(ii) $\forall\, T \in \mathcal{S}'$ *are loc egalitatea* $\mathcal{F}(\mathcal{F}T) = 2\pi T_s$, *unde* T_s *este "simetrica" distribuţiei* T *(§5.3.2).*

7.2.8. Transformata Fourier a produsului de convoluţie

(i) *Dacă* $S \in \mathcal{S}'$ *şi* $T \in \mathcal{S}'$, *atunci* $S * T \in \mathcal{S}'$ *şi*

$$\mathcal{F}(S * T) = \mathcal{F}(S)\mathcal{F}(T).$$

(ii) *Dacă* $T \in \mathcal{S}'$ *şi* $f \in \mathcal{S}$, *atunci*

$$\mathcal{F}(T * \underline{f}) = \mathcal{F}(T) \cdot \mathcal{F}(\underline{f}) \text{ şi } \mathcal{F}(fT) = \mathcal{F}(\underline{f}) * \mathcal{F}(T).$$

7.3. Transformata Fourier pentru distribuţii remarcabile

7.3.1. $\mathcal{F}\delta = \underline{1}$.

7.3.2. $\mathcal{F}(\underline{1}) = 2\pi\delta$.

7.3.3. $\mathcal{F}(\underline{e^{jat}}) = 2\pi\delta_a = 2\pi\delta(\omega - a),\ \forall\, a \in \mathbb{R}$.

7.3.4. $\mathcal{F}(\delta_a) = \underline{e^{-jat}} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{F}(\delta(\omega - a)) = \underline{e^{-jat}},\ \forall\, a \in \mathbb{R}$.

7.3.5. $\mathcal{F}(\delta^{(n)}) = \underline{(j\omega)^n} = T_{(j\omega)^n},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

7.3.6. $\mathcal{F}(\underline{\cos at}) = \pi[\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)]$.

7.3.7. $\mathcal{F}(\underline{\sin at}) = \pi j[\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)]$.

7.3.8. $\mathcal{F}(\underline{t^n}) = 2\pi j^n \delta^{(n)}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

7.3.9. $\mathcal{F}(\underline{e^{-a^2t^2}}) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{a}\underline{\exp\left(-\dfrac{\omega^2}{4a^2}\right)}$, $\forall\ a > 0$.

7.3.10. $\mathcal{F}(T \cos at) = \pi[(\mathcal{F}T)(\omega + a) + (\mathcal{F}T)(\omega - a)]$, $\forall\ T \in \mathcal{E}'$.
Demonstraţiile acestor proprietăţi se pot găsi în [19], [24], [44].

7.4. Noţiunea generală de semnal deterministic

Definim acum noţiunea cea mai generală de semnal, care cuprinde toate cazurile particulare semnificative.

Definiţie. *Se numeşte* **semnal deterministic** *orice distribuţie temperată (deci orice element din* $\mathcal{S}'$*).*

Remarcăm că spaţiul $\mathcal{S}'$ cuprinde funcţiile din $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{D}$, polinoamele de orice grad, funcţiile continue "temperate", ca şi distribuţiile δ şi $\delta^{(n)}$, $n \geq 1$.

8 Transformata Laplace a distribuţiilor

Fie $\mathcal{D}'_+ = \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ mulţimea distribuţiilor $T \in \mathcal{D}'$ cu supp$T \subseteq [0, \infty)$, adică $\langle T, \varphi\rangle = 0$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$ cu supp$\varphi \subseteq (-\infty, 0)$; altfel spus, putem lua $T : \mathcal{D}_+ \to K$, unde $\mathcal{D}_+ = \{\varphi \in \mathcal{D} : \ \text{supp}\varphi \subseteq [0, \infty)\}$.

8.1. Definiţie

Fie $T \in \mathcal{D}'_+$ *o distribuţie dată, cu proprietatea că există* $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ *astfel încât pentru orice* $s \in \mathbb{C}$ *cu* $\operatorname{Re} s > \sigma_0$*, distribuţia* $e^{-st}T$ *este temperată (adică* $e^{-st}T \in \mathcal{S}'$*).* **Transformata Laplace a distribuţiei** T *este definită prin*

$$\mathcal{L}\{T(t)\}(s) = \langle T(t), e^{-st}\rangle, \quad \operatorname{Re} s > \sigma_0.$$

8.2. Exemple

8.2.1. $\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) = 1$

8.2.2. $\mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t)\}(s) = s^n$.

8.2.3. Dacă $f \in \mathcal{O}$, atunci

$$\mathcal{L}\{\underline{f}(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{L}\{T_f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s);$$

aşadar transformata Laplace a distribuţiei regulate (de tip funcţie) asociate originalului f coincide cu transformata Laplace a lui f, ceea ce demonstrează că definiţia transformatei Laplace a distribuţiilor este naturală.

Rezolvare

8.2.1. $\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) = \langle \delta(t), e^{-st}\rangle = e^{-st}\Big|_{t=0} = 1.$

8.2.2. $\mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t)\}(s) = \langle \delta^{(n)}(t), e^{-st}\rangle = (-1)^n \langle \delta(t), (e^{-st})^{(n)}\rangle$

$$= (-1)^n(-s)^n e^{-st}\Big|_{t=0} = s^n$$

8.2.3. $\mathcal{L}\{\underline{f}(t)\}(s) = \langle \underline{f}(t), e^{-st}\rangle$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

8.3. Observaţie

Introducând, formal, transformata inversă $\mathcal{L}^{-1}$, relaţiile 8.2.1 şi 8.2.2 se scriu

$$\mathcal{L}^{-1}\{1\}(t) = \delta(t), \quad \mathcal{L}^{-1}\{s^n\}(t) = \delta^{(n)}(t).$$

8.4. Proprietăţi ale transformatei Laplace a distribuţiilor

8.4.1. Teorema asemănării. $\mathcal{L}\{T(at)\}(s) = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}\{T(t)\}\left(\dfrac{s}{a}\right)$, $a > 0$

8.4.2. Teorema întârzierii. $\mathcal{L}\{T(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{T(t)\}(s)$, $a > 0$

8.4.3. Teorema derivării. $\mathcal{L}\{T^{(n)}(t)\}(s) = s^n\mathcal{L}\{T(t)\}(s)$, $n \in \mathbb{N}$

8.4.4. Teorema translaţiei $\mathcal{L}\{e^{at}T(t)\}(s) = \mathcal{L}\{T(t)\}(s-a)$, $a \in K$

8.4.5. Teorema produsului de convoluţie.

$$\mathcal{L}\{(T * S)(t)\}(s) = \mathcal{L}\{T(t)\}(s)\mathcal{L}\{S(t)\}(s).$$

Demonstraţie

8.4.1. $\mathcal{L}\{T(at)\}(s) = \langle T(at), e^{-st}\rangle = \dfrac{1}{a}\langle T(t), e^{-\frac{s}{a}t}\rangle = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}\{T(t)\}\left(\dfrac{s}{a}\right)$

8.4.2. $\mathcal{L}\{T(t-a)\}(s) = \langle T(t-a), e^{-st}\rangle = \langle T(t), e^{-s(t+a)}\rangle$

$$= \langle T(t), e^{-sa}e^{-st}\rangle = e^{-as}\langle T(t), e^{-st}\rangle = e^{-as}\mathcal{L}\{T(t)\}(s)$$

8.4.3. $\mathcal{L}\{T^{(n)}(t)\}(s) = \langle T^{(n)}(t), e^{-st}\rangle = (-1)^n\langle T(t), (e^{-st})^{(n)}\rangle$

$$= (-1)^n\langle T(t), (-1)^n s^n e^{-st}\rangle = s^n\langle T(t), e^{-st}\rangle = s^n\mathcal{L}\{T(t)\}(s)$$

8.4.4. $\mathcal{L}\{e^{at}T(t)\}(s) = \langle e^{at}T(t), e^{-st}\rangle = \langle T(t), e^{-(s-a)t}\rangle = \mathcal{L}\{T(t)\}(s-a)$

8.4.5. $\mathcal{L}\{(T*S)(t)\}(s) = \langle (T*S)(t), e^{-st}\rangle = \langle T(t), \langle S(x), e^{-s(t+x)}\rangle\rangle$

$$= \langle T(t), \langle S(x), e^{-sx}e^{-st}\rangle\rangle = \langle T(t), e^{-st}\langle S(x), e^{-sx}\rangle\rangle$$

$$= \langle S(x), e^{-sx}\rangle \cdot \langle T(t), e^{-st}\rangle = \mathcal{L}\{S(t)\}(s) \cdot \mathcal{L}\{T(t)\}(s)$$

8.5. Exemple

8.5.1. $\mathcal{L}\{\delta(at)\}(s) = \dfrac{1}{a}$ sau

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a}\right\}(t) = \delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t),\ a > 0$$

8.5.2. $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}(s) = e^{-as}$ sau

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}\}(t) = \delta(t-a) = \delta_a(t),\ a > 0$$

8.5.3. $\mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t-a)\}(s) = e^{-as}s^n$ sau

$$\mathcal{L}^{-1}\{s^n e^{-as}\}(t) = \delta^{(n)}(t-a) = \delta_a^{(n)}(t),\ a > 0,\ n \in \mathbb{N}$$

8.5.4. Să se calculeze $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}(1+3s^4e^{-s})}{s^2+4}\right\}(t)$.

Rezolvare

8.5.1. $\mathcal{L}\{\delta(at)\{(s) \overset{7.4.1}{=\!=} \frac{1}{a}\mathcal{L}\{\delta(t)\}\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a}\cdot 1 = \frac{1}{a}$

8.5.2. $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}(s) \overset{7.4.2}{=\!=} e^{-as}\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) = e^{-as}\cdot 1 = e^{-as}$

8.5.3. $\mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t-a)\}(s) \overset{7.4.3}{=\!=} s^n\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}(s) = s^n e^{-as}$

8.5.4. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}(1+3s^4e^{-s})}{s^2+4}\right\}(t)$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2+4}\right\}(t) + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^4}{s^2+2}e^{-2s}\right\}(t)$$

$$\overset{7.4.4}{=\!=} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}(t-1) + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^4}{s^2+4}\right\}(t-2)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2(t-1) + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{s^2-4+\frac{16}{s^2+4}\right\}(t-2)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2(t-1) + 3\delta''(t-2) - 12\delta(t+2) + 24\sin 2(t-2).$$

9 Probleme

Enunţuri

1. *Să se demonstreze formulele:*
(i) $\alpha\delta' = \alpha(0)\delta' - \alpha'(0)\delta,\ \forall\ \alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$
(ii) $t\delta^{(m)} = -m\delta^{(m-1)};\quad m \geq 1$
(iii) $\alpha\delta'' = \alpha''(0)\delta - 2\alpha'(0)\delta' + \alpha(0)\delta''$
(iv) $t^k\delta^{(m)} = 0;\quad 0 \leq m \leq k-1,\ k \geq 1$
(v) $t^m\delta^{(m)} = (-1)^m m!\delta;\quad m \geq 0$
(vi) $t^m\delta^{(m+k)} = (-1)^m A^m_{m+k}\delta^{(k)};\quad m, k \in \mathbb{N}^*$
(vii) $\alpha\delta^{(m)} = (-1)^m \sum_{i=0}^{m}(-1)^i C^i_m \alpha^{(m-i)}(0)\delta^{(i)};\quad \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}),\ m \in \mathbb{N}.$

2. *Să se determine $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ astfel încât*

$$(t^4+t^3+t^2+t+1)\delta''' = a\delta''' + b\delta'' + c\delta' + d\delta.$$

3. *Să se stabilească următoarele formule:*
(i) $(\alpha H)' = \alpha(0)\delta + \alpha' H;\quad \alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$

(ii) $(\alpha H)'' = \alpha'' H + \alpha'(0)\delta + \alpha(0)\delta'; \quad \alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$

(iii) $(\alpha H)^{(n)} = \alpha^{(n)} H + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha^{(n-k)}(0)\delta^{(k-1)}; \quad \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}),\ n \in \mathbb{N}$

(iv) $(e^{at}H)^{(n)} = a^n e^{at} H + \sum\limits_{k=1}^{n} a^{n-k}\delta^{(k-1)}; \quad a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$

(v) $(t^m H)^{(n)} = \begin{cases} m!\delta^{(n-m-1)}, & m < n \\ A_m^n t^{m-n} H, & m \geq n \end{cases}$ *; $m, n \in \mathbb{N}$*

(vi) $H'(-t) = \delta(t)$

(vii) $T^{(3)}$, *unde* $T = (t^3 + 2t^2 + 1)H$

4. *Să se calculeze:*

(i) $(H(t)\sin t)'$ **(ii)** $T'_{t\mathrm{sgn}t}$

(iii) $T'_{t^m \mathrm{sgn}t}$ **(iv)** $(H(t)\mathrm{ch}\, t)'$

(v) T'_f, *unde* $f(t) = e^t u(t)$

(vi) T'_f, *unde* $f(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0 \\ t+2, & 0 < t \leq 1 \\ t^2+1, & t > 1 \end{cases}$

5. *Să se rezolve în cadru distribuţional ecuaţiile diferenţiale:*

(i) $x'(t) - 2tx(t) = \delta''(t)$

(ii) $x'(t) - x(t)\cos t = \delta'(t)$

(iii) $x^{iv}(t) + 2x''(t) + 9x(t) = \delta''(t),\ x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$

6. *Să se demonstreze egalitatea* $\underline{f * g} = \underline{f} * \underline{g},\ \forall\ f, g \in L^1_{loc}$.

7. *Să se calculeze în* $\mathcal{D}'$*:*

(i) $t^m H(t) * t^n H(t),\ m, n \in \mathbb{N}$

(ii) $\underline{e^{-t^2}} * \underline{e^{-3t^2}}$

(iii) $\underline{te^{-t^2}} * \underline{e^{-3t^2}}$

(iv) $\underline{e^{-|t|}} * \underline{e^{-|t|}}$

(v) $\underline{te^{-at^2}} * \underline{e^{-at^2}}$

(vi) $H(a - |t|) * H(a - |t|)$

(vii) $\underline{e^{-|t|}} * H(t)\sin t$.

8. *Să se demonstreze următoarele egalităţi*:

(i) $\mathcal{F}\delta = 1$

(ii) $\mathcal{F}(\delta^{(n)}) = (\underline{(j\omega)^n}) = T_{(j\omega)^n},\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

(iii) $\mathcal{F}(\underline{t}^n) = 2\pi j^n \delta^{(n)},\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

(iv) $\mathcal{F}(\underline{\exp(-a^2t^2)}) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left(-\dfrac{\omega^2}{4a^2}\right),\ a > 0.$

Soluţii. Indicaţii. Răspunsuri

1. (i) $\langle \alpha\delta', \varphi\rangle = \langle \delta', \alpha\varphi\rangle = -\langle \delta, (\alpha\varphi)'\rangle$

$$= -(\alpha\varphi)'(0) = -\alpha(0)\varphi'(0) - \alpha'(0)\varphi(0) = -\alpha(0)\langle\delta, \varphi'\rangle - \alpha'(0)\langle\delta,\varphi\rangle$$

$$= \alpha(0)\langle\delta', \varphi\rangle - \alpha'(0)\langle\delta,\varphi\rangle = \langle \alpha(0)\delta' - \alpha'(0)\delta, \varphi\rangle,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}$$

(iv) $\langle t^k\delta^{(m)}, \varphi\rangle = \langle \delta^{(m)}, t^k\varphi\rangle = (-1)^m\langle\delta, (t^k\varphi)^{(m)}\rangle$

$$= (-1)^m(t^k\varphi)^{(m)}(0) = (-1)^m\sum_{i=0}^{m} C_m^i A_k^{m-i} t^{k-m+i}\varphi^{(i)}(t)\Big|_{t=0} = 0,$$

deoarece $k - m + i \geq 1,\ \forall\ i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$

(v) $\langle t^m\delta^{(m)}, \varphi\rangle = (-1)^m(t^m\varphi)^{(m)}(0) = (-1)^m\sum\limits_{i=0}^{m} C_m^o A_m^{m-i} t^i\varphi^{(i)}(t)\Big|_{t=0}$

$$= (-1)^m\left[C_m^0 A_m^m\varphi(0) + \sum_{i=1}^{m} C_m^i A_m^{m-i} t^i\varphi^i(t)\Big|_{t=0}\right]$$

$$= (-1)^m m!\varphi(0) = \langle(-1)^m m!\delta, \varphi\rangle,\ \forall\ \varphi\in\mathcal{D}$$

(vi) $\langle t^m\delta^{(m+k)}, \varphi\rangle = (-1)^{m+k}(t^m\varphi)^{(m+k)}(0)$

$$= (-1)^{m+k}\sum_{i=0}^{m+k} C_{m+k}^i (t^m)^{(m+k-i)}\varphi^{(i)}(t)\Big|_{t=0}$$

$$= (-1)^{m+k}\left(\sum_{i=0}^{k-1} C_{m+k}^i (t^m)^{(m+k-i)}\varphi^{(i)}(t) + C_{m+k}^k (t^m)^{(m)}\varphi^{(k)}(t)\right.$$

$$\left.+\sum_{i=k+1}^{k+m} C_{m+k}^i (t^m)^{(m+k-i)}\varphi^{(i)}(t)\right)\Big|_{t=0} = (-1)^{m+k} C_{m+k}^k m!\varphi^{(k)}(0)$$

$$= (-1)^{m+k}\langle A_{m+k}^m\delta, \varphi^{(k)}\rangle = (-1)^m\langle A_{m+k}^m\delta^{(k)}, \varphi\rangle,\ \forall\ \varphi\in\mathcal{D}.$$

(vii) $\langle \alpha\delta^{(m)}, \varphi\rangle = (-1)^m(\alpha(t)\varphi(t))^{(m)}\Big|_{t=0}$

$$= (-1)^m\sum_{i=0}^{m} C_m^i\alpha^{(m-i)}(0)\varphi^{(i)}(0) = (-1)^m\sum_{i=0}^{m} C_m^i\alpha^{(m-i)}(0)\langle\delta, \varphi^{(i)}\rangle$$

$$= (-1)^m \left\langle \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i \alpha^{(m-i)}(0)\delta^{(i)}, \varphi \right\rangle, \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}$$

2. $a = 1,\ b = 3,\ c = -6,\ d = 6.$

3. (iii) Metoda inducţiei matematice; vezi [24].

(vi) $\langle H'(-t), \varphi(t)\rangle = \langle H'(t), \varphi(-t)\rangle = \langle \delta(t), \varphi(-t)\rangle$

$$= \varphi(-t)\Big|_{t=0} = \varphi(0) = \langle \delta(t), \varphi(t)\rangle,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}$$

(vii) $\delta'' + 4\delta + 6H$

4. (vi) Metoda 1. Utilizăm (5.3), cu $s(0) = 1$, $s(1) = -1$;

$$T_f' = \delta - \delta_1 + T_{f'},$$

unde $f' = u(t) - u(t-1) + 2tu(t-1)$; astfel,

$$T_f' = \delta(t) - \delta(t-1) + H(t) + (2t-1)H(t-1).$$

Metoda 2. $f(t) = 1 - u(t) + (t+2)[u(t) - u(t-1)] + (t^2+1)u(t-1)$ sau

$$f(t) = 1 + (t+1)u(t) + (t^2 - t - 1)u(t-1),$$

deci

$$T_f' = \underline{u}(t) + (t+1)\underline{u'}(t) + (2t-1)\underline{u}(t-1) + (t^2 - t - 1)\underline{u'}(t-1)\cdot 1$$

$$= H(t) + (t+1)\delta(t) + (2t-1)H(t-1) + (t^2 - t - 1)\delta(t-1)$$
$$= \delta(t) - \delta(t-1) + H(t) + (2t-1)H(t-1),$$

deoarece $H' = \underline{u'} = \delta$ şi $\alpha(t)\delta(t-a) = \alpha(a)\delta(t-a)$.

5. (i) $x(t) = (c + \delta' - 2H)\exp(x^2),\ c \in \mathbb{R}$

(ii) $x(t) = (c + \delta - H)\exp(\sin x)$

(iii) $x(t) = \dfrac{1}{2}\mathrm{sh}\, t \mathrm{ch}\,(t\sqrt{2}) + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{ch}\, t \sin(t\sqrt{2})$

6. $\langle \underline{f} * \underline{g}, \varphi\rangle = \langle f(t), \langle g(u), \varphi(t+u)\rangle\rangle$

$$= \left\langle \underline{f}(t), \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\varphi(t+u)du \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\varphi(t+u)du \overset{t+u=x}{=\!=\!=}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)(f*g)(x)dx$$
$$= \langle \underline{f*g}, \varphi\rangle,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}$$

7. **(i)** $\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}t^{m+n+1}H(t)$

(ii) $\underline{e^{-t^2}} * \underline{e^{-3t^2}} = \underline{e^{-3t^2}} * \underline{e^{-t^2}} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2}e^{-(t-x)^2}dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(2x-\frac{t}{2}\right)^2-\frac{3}{4}t^2}dx = \exp\left(-\frac{3t^2}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-3t^2/4},$$

deci $\underline{e^{-t^2}} * \underline{e^{-3t^2}} = \underline{e^{-3t^2/4}}$.

(iii) $\underline{te^{-t^2}} * \underline{e^{-3t^2}} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}e^{-3(t-x)^2}dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\left(2x-\frac{3}{2}t\right)^2-\frac{3}{4}t^2}dx \overset{2x-\frac{3}{2}t=u}{=\!=\!=} \exp\left(-\frac{3t^2}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left(u+\frac{3}{2}t\right)e^{-u^2}du$$

$$= \frac{3\sqrt{\pi}}{8}t\exp\left(-\frac{3t^2}{4}\right) = f(t),$$

deci rezultatul este $\underline{f}$.

(iv) T_f; $f(t) = (1+|t|)e^{-|t|}$

(v) T_f; $f = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2a}}t\exp\left(-\dfrac{at^2}{2}\right)$

(vi) $(2a-|t|)H(2a-|t|)$

(vii) $\dfrac{1}{2}\underline{e^t} + (\sin t - \operatorname{sh} t)H(t)$.

8. **(i)** $\langle \mathcal{F}\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, \mathcal{F}\varphi\rangle = (\mathcal{F}\varphi)(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-j\omega t}dt\Big|_{\omega=0}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt = \langle \underline{1}, \varphi\rangle,\ \forall\ \varphi\in\mathcal{S}.$$

(ii) $\mathcal{F}(\delta^{(n)}) = (j\omega)^n\mathcal{F}(\delta) = (j\omega)^n\underline{1} = \underline{(j\omega)^n}$

(iii) Din Proprietatea 7.2.4 şi din 7.3.2 cu $T = \underline{1}$, primim:

$$(\mathcal{F}\underline{1})^{(n)} = \mathcal{F}\{(-jt)^n\underline{1}\} \ \Leftrightarrow\ 2\pi\delta^{(n)} = \mathcal{F}(\underline{(-jt)^n}).$$

Capitolul 7

Complemente privind transformările integrale şi discrete. Analiza wavelet

1 Transformata Fourier a unui semnal discret

1.1. Preliminarii

Fie $f \in L^1(\mathbb{R})$ un semnal dat şi $F(\omega) = \mathcal{F}(f;\omega)$ spectrul său Fourier. Avem:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n}^{n+1} f(t)e^{-j\omega t}dt,$$

de unde, utilizând formula de aproximare din Cap.3, §1, obţinem:

$$F(\omega) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j\omega n}.$$

Limitând semnalul f la o "fereastră" de timp $[0, N]$, am definit în Capitolul 3, transformata Fourier discretă; această limitare se poate realiza, de exemplu, dacă semnalul f este periodic. În cele ce urmează vom considera seria aproximantă a spectrului pe toată "plaja" valorilor întregi ale lui n.

1.2. Definiţie

Fie $x \in S_d$ un semnal discret de clasă l^1 (Cap.1, secţiunea $1.6, 3°$).

Funcţia $F_\infty : \mathbb{R} \to K$, $F_\infty(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$, *se numeşte* **transformata Fourier a semnalului discret** $x \in S_d$ *(pe scurt TFSD).*

• **Observaţie.** TFSD $F_\infty(\omega)$ este un *semnal continual complex*, de variabilă reală (frecvenţa ω), asociat *semnalului discret* $x \in S_d$, spre deosebire de transformata Fourier discretă (TFD, capitolul 3), care este un *semnal discret complex* de variabilă reală (frecvenţa m), asociat unui *semnal discret periodic* $x \in K^N$.

• **Notaţie.** Scriem $F_\infty(\omega) = (\mathcal{F}_\infty x)(\omega) = \mathcal{F}_\infty\{x(n);\omega\}$.

• **Periodicitate.** Observăm că $F_\infty(\omega + 2k\pi) = F_\infty(\omega)$, $\forall\ \omega \in \mathbb{R}$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$, aşadar $F_\infty = \mathcal{F}_\infty x$ este o funcţie periodică de perioadă (principală) 2π.

• **Legătura cu transformata** z**.** $(\mathcal{F}_\infty x)(\omega) = (Zx)(e^{j\omega})$, $\forall\ \omega \in \mathbb{R}$.

1.3. Problema inversă determinării TFSD

• Prin calcul direct, obţinem:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_\infty(\omega)e^{j\omega m}d\omega = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi x(n)\delta_m(n) = x(m).$$

• **Definiţie.** *Fie* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *o funcţie continuă şi periodică, de perioadă* 2π*.*

Semnalul $x \in S_d$, $x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)e^{j\omega n}d\omega$, *se numeşte* **transformata Fourier de tip semnal discret inversă** *asociată funcţiei* $F(\omega)$*.*

• **Notaţie.** $x(n) = (\mathcal{F}_\infty^{-1}X)(n) = \mathcal{F}_\infty^{-1}\{X(\omega);n\}$.

• **Observaţie.** Are loc egalitatea:

$$x(n) = \mathcal{F}_\infty^{-1}\{(\mathcal{F}_\infty x)(\omega);n\}.$$

1.4. Exemplu. Semnalul dreptunghiular discret

Fie $m \in \mathbb{N}^*$ un număr dat şi $x \in S_d$,

$$\Pi(n) = \begin{cases} 1; & |n| \le m \\ 0; & |n| > m. \end{cases}$$

Avem:

$$F_\infty(\omega) = (\mathcal{F}_d\Pi)(m) = \sum_{n=-m}^{m} \exp(-j\omega n).$$

Dacă $\omega \in 2\pi\mathbb{Z}$, obţinem $F_\infty(0) = 2m+1$.
Dacă $\omega \neq 2\pi\mathbb{Z}$, atunci

$$F_\infty(m) = e^{j\omega m}\frac{1-(e^{j\omega})^{2m+1}}{1-e^{j\omega}},$$

de unde utilizând formula $1 - e^{j\omega} = -2j\sin\dfrac{\omega}{2}e^{j\omega/2}$, deducem

$$F_\infty(m) = \sin\frac{\omega(2m+1)}{2} / \sin\frac{\omega}{2}.$$

Aşadar,

$$F_\infty(m) = \begin{cases} \dfrac{\sin\dfrac{\omega(2m+1)}{2}}{\sin\dfrac{\omega}{2}}, & \omega \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 2m+1, & \omega \in 2\pi\mathbb{Z}, \end{cases}$$

adică $F_\infty(m)$ reprezintă ”nucleul Dirichlet”.

2 Aplicaţii ale transformărilor integrale şi discrete în teoria probabilităţilor

2.1. Noţiuni generale din teoria variabilelor aleatoare

Fie (E, K, P) un câmp de probabilitate dat.

• Se numeşte *variabilă aleatoare unidimensională* (pe scurt: *v.a. 1D*) asociată câmpului (E, K, P) o funcţie $X : E \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ mulţimea $\{\omega \in E :\ X(\omega) < x\}$, notată pe scurt $\{X < x\}$, este un eveniment, i.e. $\{X < x\} \in K$.

• Unei v.a. 1D X i se asociază *funcţia de repartiţie*

$$F = F_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad F(x) = P(X < x),\ \forall\, x \in X.$$

Se ştie că F este o funcţie monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$, F este continuă la stânga în fiecare punct $x \in \mathbb{R}$, $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$ şi $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$, $\forall\, a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$.

2.1.1. Variabile aleatoare 1D discrete

• O v.a. 1D X se numeşte *v.a. discretă* dacă mulţimea $X(E)$ este discretă (adică finită sau numărabilă).

• Notând $X(E) = \{x_i : \ i \in I\}$ şi $p_i = P(X = x_i)$, definim *tabloul de distribuţie (repartiţie) al v.a. X*: $\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$, cu $\sum_{i \in I} p_i = 1$.

Dacă mulţimea discretă de indici I este finită, atunci v.a. X se numeşte *v.a. simplă*, iar tabloul său de distribuţie este $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix}$, unde $I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Dacă $I = \mathbb{N}^*$, atunci $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$; $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$.

• Introducem semnalul discret $x \in S_d$, astfel: $x(n) = x_n$ dacă $n \in I$; $x(n) = 0$, dacă $n \in \mathbb{Z} \setminus I$ şi punem $p_n = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{Z} \setminus I$.

În aceste condiţii putem scrie $X : \begin{pmatrix} x(n) \\ p_n \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Numim $x \in S_d$ *semnalul discret* asociat v.a. discrete X, *extins* la $\mathbb{Z}$, pe scurt s.d.e. asociat v.a. 1D X.

• Funcţia discretă $f = f_X : X(E) \to [0, 1]$, $f(x_i) = p_i$, $i \in I$, se numeşte *funcţia "masă de probabilitate"* (*pmf*) sau *funcţia de frecvenţă* asociată v.a. discrete X. Utilizând s.d.e. $x \in S_d$ asociat v.a. X, putem scrie $f(x_n) = (f \circ x)(n) = p_n$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$. Are loc egalitatea

$$\sum_{i \in I} f(x_i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f \circ x)(n) = 1.$$

2.1.2. Variabile aleatoare 1D continue

• O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte *densitate de probabilitate* (pe scurt *pdf*) dacă f este integrabilă (pe $\mathbb{R}$), pozitivă (pe $\mathbb{R}$) şi satisface egalitatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

• O v.a. 1D X având funcţia de repartiţie F se numeşte *variabilă aleatoare continuă* dacă există o pdf f astfel încât

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Se demonstrează că $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)dx$, $\forall\ a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ şi $P(X = a) = 0$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$ (de altfel, unii autori definesc noţiunea de v.a. continuă tocmai prin această ultimă relaţie).

2.2. Caracteristici numerice (statistice) ale v.a. 1D

Fie X o v.a. 1D şi $r \in \mathbb{N}$ date.

2.2.1. *Momentul de ordinul* r al v.a. X se defineşte astfel:

$$M_r(X) = \sum_{i \in I} x_i^r p_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x(n))^r (f \circ x)(n), \text{ dacă } X \text{ este o v.a. discretă}$$

$$M_r(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx, \text{ dacă } X \text{ este o v.a. continuă.}$$

Utilizând transformatele integrale şi discrete obţinem:

$$M_r(X) = \mathcal{F}_\infty\{(x(n))^r (f \circ x)(n); 0\}$$

$$= \mathcal{Z}\{(x(n))^r (f \circ x)(n)\}(1), \text{ dacă } X \text{ este o v.a. discretă}$$

$$M_r(X) = \mathcal{F}\{x^r f(x); 0\}, \text{ dacă } X \text{ este o v.a. continuă.}$$

Dacă X este o v.a. continuă, iar pdf a v.a. X are proprietatea $f(x) = 0$, $\forall\ x < 0$, atunci $M_r(X) = \mathcal{L}\{x^r f(x)\}(0)$.

2.2.2. *Valoarea medie* a v.a. X este momentul său de ordin 1, i.e.:

$$M(X) = E(X) = \sum_{i \in I} p_i x_i = \mathcal{F}_\infty\{x(n)(f \circ x)(n); 0\}$$

$$= \mathcal{Z}\{x(n)(f \circ x)(n)\}(1), \text{ dacă } X \text{ este o v.a. discretă;}$$

$$M(X) = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \mathcal{F}\{x f(x); 0\}, \text{ dacă } X \text{ este o v.a. continuă}$$

$$M(X) = E(X) = \mathcal{L}\{x f(x); 0\}, \text{ dacă } X \text{ este o v.a. continuă şi } f \in \mathcal{O}.$$

2.2.3. *Momentul centrat de ordinul* r al v.a. X se defineşte astfel:

$$\mu_r(X) = M_r(X - m) = M((X - m)^r), \text{ unde } m = M(X), \text{ i.e. :}$$

$$\mu_r(X) = \sum_{i \in I} (x_i - m)^r p_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x(n) - m)^r (f \circ x)(n)$$

$$= \mathcal{F}_\infty\{(x(n)-m)^r(f\circ x)(n);0\} = \mathcal{Z}\{(x(n)-m)^r(f\circ x)(n);1\}$$

$$\mu_r(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^r f(x)dx = \mathcal{F}\{(x-m)^r f(x);0\},$$

dacă X este o v.a. discretă, respectiv continuă.

2.2.4. *Dispersia* sau *varianţa* v.a. X este, prin definiţie, numărul real

$$D^2(X) = Var(X) = \mu_2(X), \quad \text{i.e.}$$

$$D^2(X) = \sum_{i\in I}(x_i-m)^2 p_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(x(n)-m)^2(f\circ x)(n)$$

$$= \mathcal{F}_\infty\{(x(n)-m)^2(f\circ x)(n);0\} = \mathcal{Z}\{(x(n)-m)^2(f\circ x)(n);1\};$$

$$D^2(X) = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 f(x)dx = \mathcal{F}\{(x-m)^2 f(x);0\},$$

dacă X este o v.a. discretă, respectiv continuă;

$D^2(X) = Var(X) = \mathcal{L}\{(x-m)^2 f(x);0\}$, dacă X este o v.a. continuă şi $f\in\mathcal{O}$.

• *Abaterea medie pătratică* a v.a. X este $\sigma(X) = \sqrt{D^2(X)}$.

• Are loc *formula dispersiei* $D^2(X) = Var(X) = M(X^2) - M^2(X) = M_2(X) - M_1^2(X)$, pentru orice v.a. 1D X (discretă sau continuă).

2.2.5. Exemple

• **Exemplul 1.** *Funcţia* $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$, $f(n) = p_n = a\left(\frac{4}{5}\right)^n$, $a>0$, *este pmf pentru o v.a. discretă* X. *Să se determine* $a>0$ *şi să se calculeze media şi dispersia v.a.* X.

Rezolvare. Observăm că pmf a v.a. X se poate defini, de asemenea, prin $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $f(n) = a\left(\frac{4}{5}\right)^n u(n-1)$, $n\in\mathbb{Z}$, unde u este funcţia treaptă-unitate discretă a lui Heaviside. Din condiţia $\sum_{n=1}^{\infty}p_n = \sum_{n=1}^{\infty}f(n) = 1$, primim:

$$\mathcal{Z}\{u(n-1)\}\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{4}{5}\mathcal{Z}\{u(n)\}\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{a} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{z}{z-1}\Big|_{z=5/4} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}.$$

Mai departe,

$$M(X) = E(X) = a\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{u(n-1)}{(5/4)^n} = a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nu(n)}{(5/4)^n}$$

$$= a\cdot\mathcal{Z}\{nu(n)\}\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}\Big|_{z=5/4} = 5;$$

$$M(X^2) = a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2u(n)}{(5/4)^n} = \frac{1}{4}\mathcal{Z}\{n^2u(n)\}\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\Big|_{z=5/4} = 45,$$

deci $D^2(X) = M(X^2) - M^2(X) = 20.$

• **Exemplul 2.** *Funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = ax^2e^{-3x}u(x)$, $a>0$, *reprezintă pdf pentru o v.a. 1D* X*. Să se determine* a *şi să se calculeze momentele de ordin* r*, media, dispersia şi abaterea medie pătratică ale v.a.* X*.*

Rezolvare. Din condiţia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, deducem:

$$a\int_0^{\infty} x^2e^{-3x}dx = 1 \;\Leftrightarrow\; a\mathcal{L}\{x^2\}(3) = 1 \;\Leftrightarrow\; a\cdot\frac{2!}{3^3} = 1 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{27}{2}.$$

Mai departe,

$$M_r(X) = a\int_0^{\infty} x^{r+2}e^{-3x}dx = a\mathcal{L}\{x^{r+2}\}(3)$$

$$= \frac{27}{2}\cdot\frac{(r+2)!}{3^{r+3}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(r+2)!}{3^r},\ r\geq 0;\quad M(X) = M_1(X) = 1;$$

$$D^2(X) = M_2(X) - M_1^2(X) = \frac{1}{3};\quad \sigma(X) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2.3. Funcţia caracteristică a unei variabile aleatoare 1D

2.2.1. Definiţie

Fie X *o v.a. 1D. Funcţia*

$$\varphi = \varphi_X : \mathbb{R}\to\mathbb{C},\quad \varphi(t) = M(e^{jtX}) = E(\exp(jtX)),\quad t\in\mathbb{R}$$

se numeşte **funcţia caracteristică** *a v.a.* X*.*

2.2.2. Formule de calcul

- X *este v.a. continuă*

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{jtx} = (\mathcal{F}f)(-t) = \mathcal{F}\{f(x); -t\};$$

$$\varphi(t) = 2\pi(\mathcal{F}^{-1}f)(t) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}\{f(x); t\}$$

- X *este v.a. discretă*

$$\varphi(t) = \sum_{i \in I} p_i \exp(jtx_i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f \circ x)(n) \exp(jtx(n))$$

- Dacă $x(n) = n, \ \forall \ n \in I$, atunci

$$\varphi(t) = \mathcal{F}_\infty(f \circ x)(t) = Z(f \circ x)(e^{jt}) \quad \text{sau}$$

$$\varphi(t) = \mathcal{F}_\infty\{f(n); t\} = Z\{f(n)\}(e^{jt}).$$

2.2.3. Calculul momentelor de ordin r

Are loc egalitatea $M_r(X) = j^{-r}\varphi^{(r)}(0)$.

Demonstraţie

Din egalitatea $\varphi(t) = (\mathcal{F}f)(-t)$ şi din Proprietatea 2.10, Cap.2 (Teorema derivării spectrului Fourier), deducem:

$$\varphi^{(r)}(t) = ((\mathcal{F}f)(-t))^{(r)} = (-1)^r(\mathcal{F}f)^{(r)}(-t) = (-1)^r j^{-r}\mathcal{F}\{x^r f(x); -t\}$$

de unde rezultă:

$$\mathcal{F}\{x^r f(x); -t\} = j^{-r}\varphi^{(r)}(t)$$

şi

$$M_r(X) = \mathcal{F}\{x^r f(x); 0\} = j^{-r}\varphi^{(r)}(0).$$

2.2.4. Exemplu

Fie m şi $\sigma > 0$ numere reale date. O variabilă aleatoare continuă X având pdf $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right], \quad x \in \mathbb{R},$$

se numeşte **variabilă aleatoare normală (de tip Gauss)**.

Să se determine funcţia caracteristică, media şi dispersia unei v.a. de tip Gauss.

Rezolvare. $\varphi(t) = \mathcal{F}\{f(x); -t\} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[jtx - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx.$

Utilizând schimbările de variabilă $x - m = \tau\sigma/\sqrt{2}$ şi $\tau - jt\sigma/\sqrt{2} = y$, primim:

$$\varphi(t) = \frac{\exp(jtm)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\tau - \frac{jt\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2\right] \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2}\right) d\tau$$

$$= \frac{\exp(jtm)}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy = \exp\left(jtm - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right);$$

$$M(X) = j^{-1}\varphi'(0) = j^{-1}(jm - t\sigma^2)\exp\left(jtm - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)\Big|_{t=0} = m;$$

$$D^2(X) = M(X^2) - M^2(X) = j^{-2}\varphi''(0) - (j^{-1}\varphi'(0))^2 = \sigma^2.$$

2.2.5. Teorema de inversiune

Dacă $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, atunci pdf f a v.a. X există, este mărginită, continuă şi verifică egalitatea

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-jtx} dt = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}\varphi)(x) = (\mathcal{F}^{-1}\varphi)(-x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

3 Transformarea Hilbert integrală

3.1. Definiţie

Dacă $f \in L^2(\mathbb{R})$ este un semnal dat, definim **transformata Hilbert** *a semnalului $f(x)$ drept semnalul (funcţia) $H \in L^2(\mathbb{R})$, unde*

$$H(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{t-x} dx, \ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

iar integrala se ia în sensul valorii principale.

Notaţie. $H(t) = (\mathcal{H}f)(t) = \mathcal{H}\{f(x); t\}$.

Operatorul $\mathcal{H} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $f \mapsto \mathcal{H}f$ se numeşte **operator de transformare Hilbert** (sau **transformarea Hilbert**) în $L^2(\mathbb{R})$.

3.2. Proprietăţi ale transformării Hilbert

3.2.1. *Liniaritatea* $\mathcal{H}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{H} f + \beta \mathcal{H} g; \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in K.$

3.2.2. $H(t) = f(t) * \dfrac{1}{\pi t}.$

3.2.3. *Relaţia cu transformarea Fourier*

$$\mathcal{F}\{H(t); \omega\} = -j(\mathrm{sgn}\omega)\mathcal{F}\{f(t); \omega\}, \ \forall \ f \in L^2(\mathbb{R}).$$

3.2.4. *Transformata inversă.* Dacă $H(t) = \mathcal{H}\{f(x); t\}$, atunci

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(t)}{x - t} dt, \ \forall \ f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Se notează $f(x) = \mathcal{H}^{-1}\{H(t); x\}$.
Au loc relaţiile: **(i)** $\mathcal{H}^{-1} = -\mathcal{H}$, deci $\mathcal{H}^2 = -id(L^2(\mathbb{R}))$ şi $\mathcal{H}^4 = id(L^2(\mathbb{R})$.
(ii) $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{j(\mathrm{sgn}\omega)\mathcal{F}\{H(t); \omega\}; x\}$.

3.2.5. *Proprietatea de ortogonalitate*
Dacă $f \in L^2(\mathbb{R})$, atunci $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)H(t)dt = 0.$

3.2.6. *Convoluţia.* Dacă $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, atunci

$$\mathcal{H}\{(f * g)(x); t\} = \mathcal{H}\{f(x); t\} * g(t) = f(t) * \mathcal{H}\{g(x); t\}.$$

3.2.7. *Proprietatea energetică*
Dacă $f \in L^2(\mathbb{R})$, atunci $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(t)|^2 dt.$

4 Relaţii de transformare Hilbert. Transformarea Hilbert discretă

Transformările de tip Hilbert pe care le prezentăm în acest paragraf facilitează stabilirea de relaţii între părţile reală şi imaginară (sau între modulele şi fazele) ale transformatelor Fourier asociate semnalelor discrete; aceste relaţii se numesc, în mod uzual, *relaţii de transformare Hilbert.*

4.1. Relaţii de transformare Hilbert asociate semnalelor din l^1

Fiind dat semnalul $x \in S_d$, definim semnalele $x^{(p)}$ şi $x^{(i)}$ din S_d prin:

$$x^{(p)}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)], \quad \text{respectiv} \quad x^{(i)}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)], \quad n \in \mathbb{Z}$$

numite *semnalul par* (*partea pară*), respectiv *semnalul impar* (*partea impară*) asociate semnalului $x \in S_d$.

Introducem semnalul $s \in S_d^+$ astfel:

$$s(n) = 2, \text{ dacă } n > 0; \quad s(0) = 1; \quad s(n) = 0, \text{ dacă } n < 0.$$

Au loc relaţiile:

$$x = x^{(p)}s \quad \text{şi} \quad x = x^{(i)}s + x(0)\delta. \tag{4.1}$$

Să considerăm acum transformarea de tip Fourier (§1)

$$F_\infty(\omega) = (\mathcal{F}_\infty x)(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cos n\omega - j\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sin n\omega,$$

unde $x \in S_d \cap l_1$; notăm $P = \operatorname{Re} F_\infty(\omega)$ şi $Q = \operatorname{Im} F_\infty(\omega)$.

Are loc egalitatea

$$(\mathcal{F}_\infty x)(\omega) = (Zx)(e^{j\omega}) \text{ sau } F_\infty(\omega) = X(e^{j\omega});\ \omega \in \mathbb{R};\ x \in S_d \cap l^1. \tag{4.2}$$

(i) Relaţii de tip Hilbert pentru semnale din l^1

Se constată prin calcul direct că pentru semnale reale din $S_d \cap l^1$ avem:

$$(\mathcal{F}_\infty x^{(p)})(\omega) = P(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\cos n\omega$$

$$-j(\mathcal{F}_\infty x^{(i)})(\omega) = Q(\omega) = -\sum_{n=0}^{\infty} x(n)\sin n\omega.$$

Ţinând seama de relaţia (4.2) deducem:

Transformata z a semnalului (real) $x \in S_d \cap l^1$ poate fi determinată (recuperată) dacă se cunoaşte doar partea reală (sau imaginară) a sa pe cercul unitate.

Într-adevăr, dacă se cunoaşte $P(\omega)$, atunci $x^{(p)}$ se determină potrivit formulei din Definiţia 1.3, iar din (4.1) rezultă x; similar pentru $Q(\omega)$.

(ii) Relaţii de tip Hilbert pentru semnale din $S_d^+ \cap l^1$

Să determinăm acum transformata z a unui semnal $x \in S_d^+ \cap l^1$, cunoscând modulul (sau faza sa) pe cercul unitate.

Scriind $z = r\exp(j\omega)$, $r > 1$, obţinem:

$$H(\omega) = (Zx)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{(p)}(n)s(n)r^{-n}e^{-jn\omega} = \mathcal{F}_\infty\{x(n)s(n)r^{-n};\omega\}.$$

Prin calcul direct, [11], [43] rezultă:

$$(4.3)\quad H(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{j\theta})\frac{1 + r^{-1}\exp j(\theta-\omega)}{1 - r^{-1}\exp j(\theta-\omega)}d\theta, \quad P = \operatorname{Re} H = \operatorname{Re} Zx,$$

ceea ce dă expresia lui $(Zx)(z)$ pentru $|z| = r > 1$, cunoscând partea reală a transformatei z pe cercul unitate.

Trecând la limită în (4.3) pentru $r \to 1$, $r > 1$, obţinem:

$$(4.4)\qquad Q(\omega) = \operatorname{Im} H(\omega) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{j\theta})\operatorname{ctg}\frac{\theta-\omega}{2}d\theta.$$

Similar, primim:

$$(4.5)\qquad P(\omega) = \operatorname{Re} H(\omega) = x(0) - \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\pi}^{\pi} Q(e^{j\theta})\operatorname{ctg}\frac{\theta-\omega}{2}d\theta.$$

Definiţie. *Fie $g \in C(\mathbb{R})$ o funcţie reală şi periodică, de perioadă 2π. Funcţia $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H(\omega) = v.p. \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\omega}{2}d\theta$, $\omega \in \mathbb{R}$, se numeşte transformata Hilbert a funcţiei periodice g.*

Se notează $H = \widetilde{\mathcal{H}}g$.

Relaţiile de tip Hilbert (4.4) şi (4.5) devin:

$$(4.6)\qquad \begin{cases} P = \operatorname{Re} Zx = x(0) - \dfrac{1}{2\pi}\widetilde{\mathcal{H}}Q \\ Q = \operatorname{Im} Zx = \dfrac{1}{2\pi}\widetilde{\mathcal{H}}P,\ \forall\ x \in S_d^+ \cap l^1 \end{cases}$$

4.2. Relaţii de transformare Hilbert pentru semnale cauzale din K^N. Transformarea Hilbert discretă

Să considerăm, pentru $N \in \mathbb{N}$ par, $N \geq 2$, un *semnal real* $x \in K^N$, care satisface condiţia $x(n) = 0$, dacă $\frac{N}{2} + 1 \leq n \leq N - 1$. Introducem semnalul

$t \in K^N$ astfel:

$$t(0) = t\left(\frac{N}{2}\right) = 1;\ t(n) = 2,\ \text{dacă } 1 \le n \le \frac{N}{2} - 1;$$

$$t(n) = 0,\ \text{dacă } \frac{N}{2} + 1 \le n \le N - 1.$$

Au loc egalităţile:

$$x = x^{(p)}t; \quad x = x^{(i)}t + x(0)\delta + x(N/2)\delta_{N/2}.$$

Prin calcul direct, notând $T = \mathcal{F}_d t \in K^N$, avem:

$$T(0) = N; \quad T(m) = -2j\mathrm{ctg}\,\frac{\pi m}{N},\ \text{dacă } m \text{ par}; \quad T(m) = 0,\ \text{dacă } m \text{ impar}.$$

Fie $X = \mathcal{F}_d x = U + jV$. Au loc relaţiile [43]:

$$U = \mathcal{F}_d x^{(p)} \quad \text{şi} \quad V = \mathcal{F}_d x^{(i)}.$$

Introducând semnalul $T^* \in K^N$, $T^* = T - N\delta$, primim:

(4.7) $$T^*(m) = -2j\mathrm{ctg}\,\frac{\pi m}{N}\ \text{dacă } m \text{ par}; \quad T^*(m) = 0,\ \text{dacă } m \text{ impar}.$$

Prin calcul direct se deduc relaţiile [43]:

(4.8) $$\begin{cases} V(m) = \mathrm{Im}\,X(m) = -\dfrac{j}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} U(n)T^*(m-n) \\ U(m) = \mathrm{Re}\,X(m) = \dfrac{j}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} V(n)T^*(m-n) + x(0) + (-1)^m x\left(\dfrac{N}{2}\right) \end{cases}$$

Aşadar:

TFD $X = \mathcal{F}_d x$ a semnalului cauzal $x \in K^N$, cu $x(n) = 0$ pentru $\frac{N}{2} + 1 \le n \le N-1$, se poate recupera (determina) din cunoaşterea semnalelor $U = \mathrm{Re}\,X$, respectiv $V = \mathrm{Im}\,X$.

Introducem acum noţiunea de transformare Hilbert discretă.

Definiţie. *Fie $y \in K^N$ un semnal real dat.*

Semnalul $Y \in K^N$, $Y(m) = -j\sum_{n=0}^{N-1} y(n)T^*(m-n)$, $0 \le m \le N-1$, cu T^* definit prin (4.7), se numeşte **transformata Hilbert discretă** *a semnalului y.*

Se notează $Y = \mathcal{H}_d y$, iar $\mathcal{H}_d$ se numeşte *operator de transformare Hilbert discretă.*

Astfel, *relaţiile de transformare Hilbert* (3.8) se scriu

$$V = \frac{1}{N}\mathcal{H}_d U; \quad U = x(0) + x\left(\frac{N}{2}\right)\sigma - \frac{1}{N}\mathcal{H}_d V,$$

unde $\sigma \in K^N$, $\sigma(m) = (-1)^m$, $0 \leq m \leq N-1$.

5 Transformarea Mellin

5.1. Definiţie

Fie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *o funcţie cu proprietatea că există* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*,* $\alpha < \beta$ *şi există* $C_1, C_2 > 0$ *astfel încât* $|f(x)| < C_1 x^{-\alpha}$*, dacă* $x \in (0,1)$ *şi* $|f(x)| < C_2 x^{-\beta}$ *dacă* $x > 1$*.*

Transformata Mellin *a funcţiei* $f(x)$ *este funcţia*

$$M : \{s \in \mathbb{C} : \ \alpha < \operatorname{Re} s < \beta\} \to K, \quad M(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx.$$

Notaţie. $M(s) = (\mathcal{M}f)(s) = \mathcal{M}\{f(x); s\}$.

Operatorul $\mathcal{M}$, care ataşează fiecărei funcţii f cu proprietăţile din Definiţia 5.1 transformata sa Mellin, se numeşte *operator de transformare Mellin.*

5.2. Proprietăţi ale transformatei Mellin

5.2.1. *Liniaritatea* $\mathcal{M}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{M} f + \mu \mathcal{M} g$, $\forall\ \lambda, \mu \in K$.

5.2.2. *Transformata inversă Mellin.* Fie $M(s)$ o funcţie complexă olomorfă în banda $\alpha < \operatorname{Re} s < \beta$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.

Transformata Mellin inversă a funcţiei $M(s)$ este $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} M(s)x^{-s}ds,$$

unde $\sigma \in (\alpha, \beta)$ este fixat.

Se notează $f(x) = \mathcal{M}^{-1}\{M(s); x\}$.

5.2.3. *Formulă de calcul.* Presupunem că f este o funcţie complexă, olomorfă pe $\mathbb{C}$ exceptând un număr finit de poli z_k, $1 \leq k \leq n$, care nu se află pe semiaxa reală pozitivă, iar $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Atunci are loc egalitatea

$$\mathcal{M}\{f(x); s\} = -\frac{\exp(-\pi s j)}{\sin(s\pi)} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Rez}[f(z)z^{s-1}; z_k].$$

6 Transformata Radon bidimensională (2D)

Este definită de relaţia

$$(\mathcal{R}f)(u, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\delta(u_1 x + u_2 y - a)dxdy,$$

unde $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $u_1^2 + u_2^2 = 1$, $a \in \mathbb{R}$, iar δ este impulsul lui Dirac.

Notând $s = a$, $\cos\theta = u_1$, $\sin\theta = u_2$, $0 \le \theta$ cu $s \in \mathbb{R}$, $0 \le \theta < \pi$, obţinem

$$(\mathcal{R}f)(u, a) = g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - s)dxdy. \tag{6.1}$$

Punând $x = s\cos\theta - t\sin\theta$, $y = s\sin\theta + t\cos\theta$, $t \in \mathbb{R}$, relaţia (6.1) devine (păstrând notaţia $\mathcal{R}f$):

$$(\mathcal{R}f)(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\theta - t\sin\theta, s\sin\theta + t\cos\theta)dt. \tag{6.2}$$

Transformata Radon inversă. Dacă $g(s, \theta) = (\mathcal{R}f)(s, \theta)$, $s \in \mathbb{R}$, $0 \le \theta < \pi$, atunci

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial g}{\partial s}}{x\cos\theta + y\sin\theta - s} ds, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Problema inversării transformării Radon este de mare interes în *tomografia computaţională*, unde se reconstruiesc imagini multidimensionale (2D sau 3D) din secţiuni-segmentări ale lor sau din proiecţii.

7 Transformarea Gabor (Transformarea Fourier cu fereastră glisantă)

Fie $f : \mathbb{R} \to K$ un semnal-funcţie care admite spectru Fourier (de exemplu $f \in L^1(\mathbb{R})$), dat de

$$F(\omega) = (\mathcal{F}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Există câteva dezavantaje ale acestei formule:

- pentru a calcula spectrul unei singure frecvenţe $F(\omega_0)$ trebuie să cunoaştem semnalul $f(t)$ pe întreaga axă reală, deci este obligatoriu să folosim atât informaţia trecută cât şi cea viitoare despre semnal; similar, reconstituirea lui f prin formula de inversare este posibilă doar cunoscând F pe toată plaja de valori ale frecvenţelor
- integrala improprie care exprimă spectrul $F(\omega)$ nu este rapid convergentă;
- nu reflectă faptul că frecvenţele se dezvoltă în timp
- apar dificultăţi şi chiar defecţiuni la prelucrarea în timp real pe calculator.

În practică este suficient să cunoaştem semnalul f pe intervale de timp astfel încât informaţia spectrală să fie generată într-o bandă de frecvenţă prescrisă. În acest mod, s-a ajuns la ideea de fereastră flexibilă timp-frecvenţă care să se îngusteze pentru frecvenţe înalte şi să se lărgească pentru frecvenţe joase. Ferestrele unui semnal sunt restricţii ale lui f la anumite intervale de timp $[t_1, t_2]$ sau ale spectrului $\widehat{f}$ la anumite benzi (intervale) de frecvenţă $[\omega_1, \omega_2]$. Din punct de vedere matematic, "trunchierea" unui semnal f la un interval $[a, b]$ sau "deschiderea" unei "ferestre" dreptunghiulare pe $[a, b]$ este realizată prin multiplicarea semnalului f cu semnalul dreptunghiular $\chi_{[a,b]}$.

Studiul ferestrelor flexibile timp-frecvenţă a fost fundamentat de Nyquist, N. Wiener şi, mai ales D. Gabor. Într-o primă fază s-a considerat doar translaţia de ferestre, studiind separat comportarea lui f şi $\widehat{f} = \mathcal{F}f$ pe intervale de forma $[t_1 - \alpha, t_2 - \alpha]$, respectiv $[\omega_1 - \beta, \omega_2 - \beta]$, pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ulterior, apariţia analizei wavelet a permis o bună localizare, simultan în timp şi frecvenţă, a unui semnal.

Ne referim, pentru început, la studiul separat al semnalului f şi al spectrului $\widehat{f} = \mathcal{F}f$ prin translaţia de ferestre (ferestre glisante).

7.1. Definiţie

Se numeşte **fereastră** *orice funcţie nenulă* $h : \mathbb{R} \to K$ *astfel încât* $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ *şi* $t \cdot h(t) \in L^2(\mathbb{R})$.

Numărul $t^* = \dfrac{1}{\|h\|_2^2} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t|h(t)|^2 dt$ *se numeşte* **centrul ferestrei**, *iar*

$$\Delta_h = \frac{1}{\|h\|_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*)^2 |h(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$ *se numeşte* **raza ferestrei**.

Lărgimea ferestrei *este egală cu* $2\Delta_h$.

În anul 1940, D. Gabor a introdus următoarea noţiune:

7.2. Definiţie

Fie h o funcţie-fereastră dată. Aplicaţia $\mathcal{F}_h : L^2(\mathbb{R}) \to K^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$, dată de $f \mapsto \mathcal{F}_h f$, unde

$$(7.1)\quad (\mathcal{F}_h f)(b,\omega) = \mathcal{F}_h(f;b,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{h}(t-b)e^{-jt\omega}dt,\ \forall\ (b,\omega) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

reprezintă **transformarea Gabor sau transformarea Fourier cu fereastra glisantă** *h. Funcţia $\mathcal{F}_h f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to K$, dată prin relaţia (7.1) se numeşte* **transformata Fourier a semnalului f cu fereastra glisantă h** *sau* **transformata Gabor**.

Astfel, transformata Gabor $\mathcal{F}_h f$ este o funcţie depinzând de două variabile (parametri): variabila temporală b şi variabila frecvenţială ω.

Pentru detalii, se pot consulta [24], [44].

7.3. Observaţie

Alegând ferestre convenabile h, din informaţii asupra lui $f(t)$ se deduc informaţii locale asupra lui $(\mathcal{F}_h f)(b,\omega)$ şi reciproc. Există însă un inconvenient: faptul că pentru h se consideră doar translaţii $h(t-b)$, deci fereastra are o durată fixă, reprezintă un handicap în prelucrarea unor clase importante de semnale (de exemplu prospecţiuni geologice sau semnalul vocal, mai precis recunoaşterea vocii). Pentru a evita acest neajuns, J. Morlet a propus (1983) o modificare esenţială, anume ca fereastra să fie variabilă atât prin translaţie-glisare, cât şi prin dilatare sau contracţie. În acest mod s-au pus bazele analizei wavelet sau analizei undinelor.

8 Analiza wavelet

8.1. Introducere

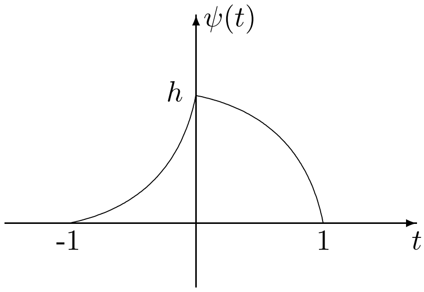
Fie $\psi : \mathbb{R} \to K$ o funcţie dată. Pentru orice $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ se consideră funcţia $\psi_{a,b} : \mathbb{R} \to K$, unde

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

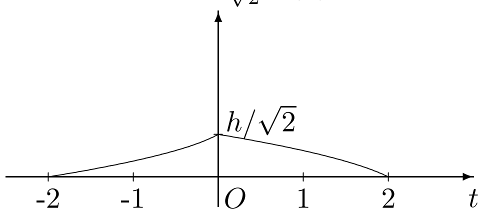
Familia de funcţii $\{\psi_{a,b}: \ (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}$, numită şi *set de funcţii de bază generate de* ψ, depinde de parametrii a şi b: parametrul a se referă la contracţii sau dilatări, iar b se referă la translatarea graficului funcţiei ψ.

Cazuri particulare. Dacă $a = 1$, funcţia $\psi_{1,b}(t) = \psi(t - b)$ reprezintă o *translaţie* (*glisare*). Dacă $a > 1$, avem o *dilatare* (în timp), iar pentru $0 < a < 1$ se obţine o *contracţie.*

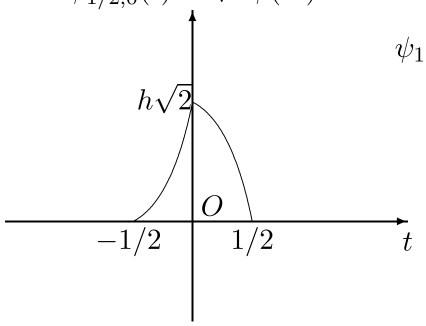
Iată câteva situaţii de acest tip, pornind de la o funcţie $\psi : \mathbb{R} \to K$, cu $\mathrm{supp}\psi = [-1, 1]$.



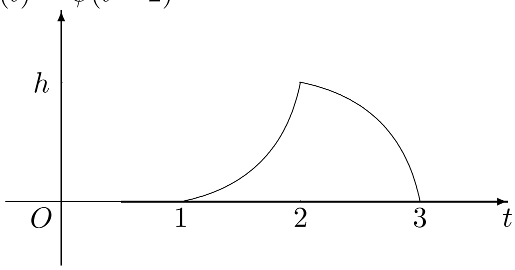
$\psi_{2,0}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{t}{2}\right)$



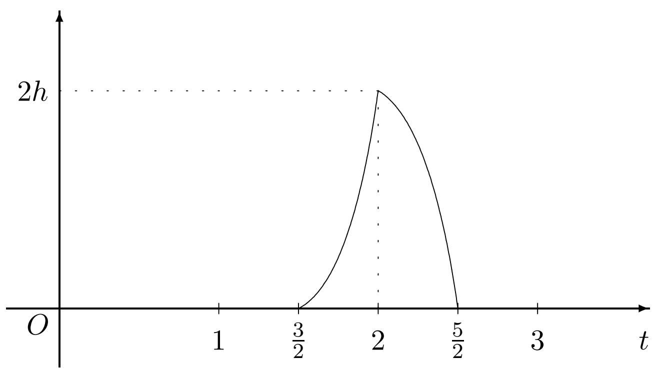
$\psi_{1/2,0}(t) = \sqrt{2}\psi(2t)$



$\psi_{1;2}(t) = \psi(t - 2)$



$\psi_{1/4;2}(t) = 2\psi\left(\frac{t-2}{1/2}\right)$



8.2. Definiţie

O funcţie $\psi : \mathbb{R} \to K$ *se numeşte* **undină** *sau* **funcţie wavelet** *dacă îndeplineşte următoarele condiţii:*

(i) $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

(ii) $C(\psi) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|(\mathcal{F}\psi)(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty.$

8.3. Observaţie

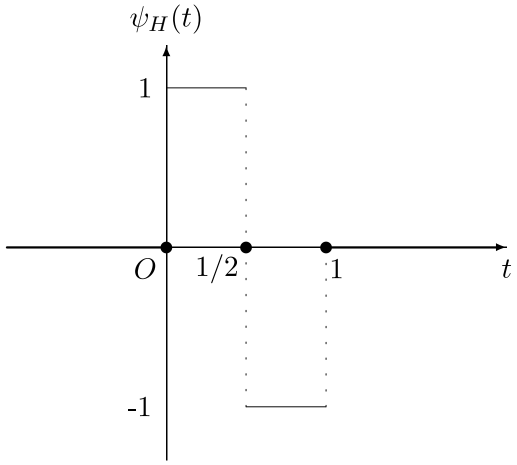
Din definiţia precedentă rezultă că $\widehat{\psi} = \mathcal{F}\psi$ este o funcţie continuă şi mărginită; în plus $(\mathcal{F}\psi)(0) = \widehat{\psi}(0) = 0$ i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0.$

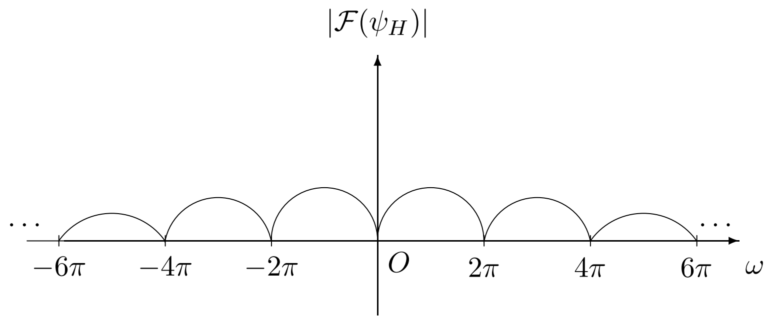
8.4. Exemple

8.4.1. Funcţia lui Haar (primul exemplu istoric de funcţie wavelet)

Este funcţia $\psi_H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi_H(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} < t < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

Spectrul în frecvenţă este $\mathcal{F}(\psi_H;\omega) = \widehat{\psi}_H(\omega) = \frac{1}{4} j\omega e^{-j\omega/2} sa^2\left(\frac{\omega}{4}\right)$. Avem $\lim\limits_{|\omega|\to\infty} \widehat{\psi}_H(\omega) = 0$, dar convergenţa spre zero este lentă. Graficul funcţiei ψ_H şi graficul amplitudinii sale în frecvenţă $|\mathcal{F}(\psi_H)|$ sunt redate alăturat.





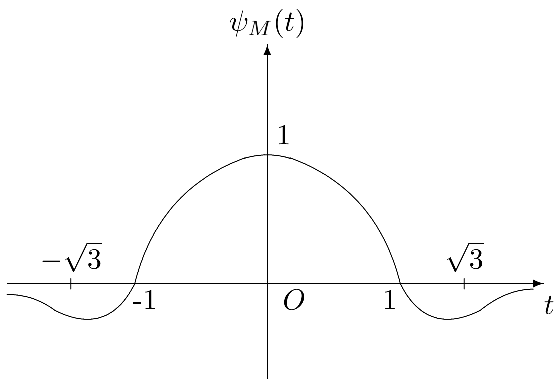
8.4.2. Pălăria mexicană

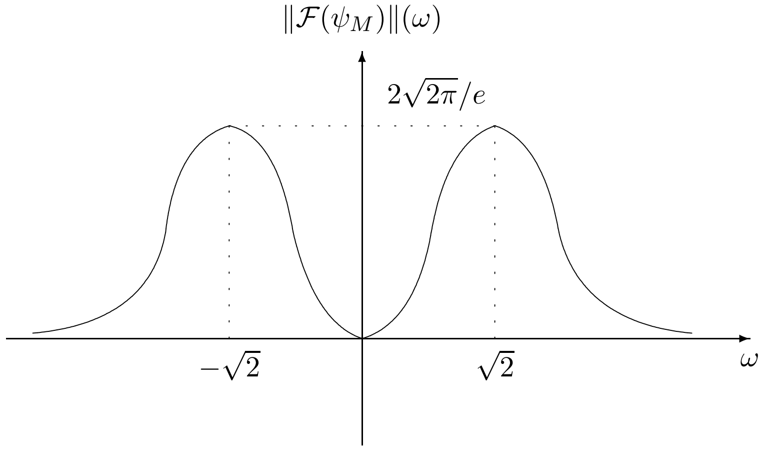
Este funcţia $\psi_M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi_M(t) = (1 - t^2) \exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)$.

Observăm că $\psi_M(t) = (-\exp(-t^2/2))''$. Spectrul "pălăriei mexicane" este

$$(\mathcal{F}\psi_M)(\omega) = \widehat{\psi}_M(\omega) = \sqrt{2\pi}\omega^2 \exp(-\omega^2/2).$$

Graficele pentru undina ψ_M şi pentru amplitudinea sa în frecvenţă $|\mathcal{F}\psi_M|$ sunt redate alăturat.





8.5. Definiţia transformatei wavelet integrale a unui semnal de energie finită

Fie ψ o undină (funcţie wavelet) şi $f \in L^2(\mathbb{R})$ date.
Funcţia $W_\psi f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to K$, unde

$$(W_\psi f)(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi}_{a,b}(t)dt = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \tag{8.1}$$

$\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, *se numeşte* **transformata wavelet integrală** *a semnalului de energie finită f, relativ la undina ψ.*

Observăm că $(W_\psi f)(a,b) = (f, \psi_{a,b})$.

Numerele $c_f(a,b) = (W_\psi f)(a,b)$, definite prin (8.1) se numesc *coeficienţii lui f relativ la ψ.*

8.6. Definiţia transformării wavelet integrale

Fie ψ o funcţie wavelet (undină) dată. Operatorul $W_\psi : L^2(\mathbb{R}) \to K^{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}}$, $f \mapsto W_\psi f$, unde $W_\psi f$ este transformata wavelet integrală a semnalului f relativ la ψ, dată prin (8.1), reprezintă **transformarea wavelet integrală** *asociată undinei ψ.*

8.7. Proprietăţi ale transformării wavelet

8.7.1. Translaţie, scalare

Fie $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\tau \in \mathbb{R}$ şi $\alpha > 0$ date. Pentru orice $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ au loc relaţiile:

1° $|(W_\psi f)(a,b)| \leq E(f)$

2° $(W_\psi(T_\tau f))(a,b) = (W_\psi f)(a, b-\tau)$, unde $T_\tau f$ este translaţia lui f cu τ, i.e. $(T_\tau f)(t) = f(t-\tau)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

3° Dacă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(\alpha t)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, atunci

$$(W_\psi g)(a,b) = \frac{1}{\alpha}(W_\psi f)(\alpha a, \alpha b).$$

8.7.2. Teorema de conservare a energiei semnalelor

Dacă $f \in L^2(\mathbb{R})$, atunci are loc egalitatea

$$E^2(f) = \frac{1}{C(\psi)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} |(W_\psi f)(a,b)|^2 dadb,$$

unde $C(\psi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|(\mathcal{F}\psi)(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega$ (vezi Definiţia 8.2).

8.7.3. Formula de reconstrucţie-inversare

Fie $\psi : \mathbb{R} \to K$ o funcţie wavelet şi $C(\psi) > 0$ dată în Definiţia 8.2. Dacă $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ şi $\mathcal{F}f = \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, atunci are loc egalitatea

$$f(t) = \frac{1}{C(\psi)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} (W_\psi f)(a,b) \psi_{a,b}(t) dadb, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

9 Probleme

Enunţuri

1. *Să se calculeze transformatele Hilbert pentru fiecare din următoarele funcţii:*

(i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x|}}{x^2 - 2x + 2} u(x)$ **(ii)** $f(x) = \sin ax$ **(iii)** $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

(iv) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x(x^2+1)}$ **(v)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

2. *Să se calculeze transformatele Mellin pentru următoarele funcţii:*

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x^3+8}$ pentru $s = \dfrac{5}{3}$

(ii) $f(x) = x^\alpha e^{-ax},\ \alpha \geq 0,\ a > 0,\ x \geq 0$

(iii) $f(x) = \cos x,\ x \geq 0$

3. *Pentru fiecare din ferestrele (semnalele) de mai jos, să se calculeze energia, centrul şi raza:*

(i) $h(t) = t^n e^{-t} u(t),\ n \in \mathbb{N}$

(ii) $h(t) = g_a(t) = \exp(-at^2),\ a > 0$

(iii) $h(t) = \Pi_A(t),\ A > 0$; **(iv)** $h(t) = Tr(t)$

(v) $h(t) = \dfrac{1}{t^2 + 2t + 2}$ **(vi)** $h(t) = \dfrac{1}{t^2 + 2j}$

(vii) $h(t) = \dfrac{\exp(jt)}{t^2 - 2jt + 3}$ **(viii)** $h(t) = \dfrac{\cos t}{(t + j)^2}$

(ix) $h(t) = \dfrac{\sin t}{t(t + j)}$ **(x)** $h(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{t\sqrt{t^2 - 2t + 2}}$.

4. *Să se calculeze transformata Fourier a semnalului f cu fereastra glisantă h în următoarele situaţii:*

(i) $f(t) = e^{-t}u(t)$; $h(t) = \Pi(t)$

(ii) $f(t) = t\exp(-t^2)$; $h(t) = \exp(-t^2)$

5. *Să se calculeze transformata wavelet integrală a semnalului f relativ la undina ψ în următoarele situaţii:*

(i) $f(t) = \Pi(t)$; $\psi(t) = \psi_M(t)$

(ii) $f(t) = Tr(t)$; $\psi(t) = (1 + jt)^{-2}$

(iii) $f(t) = \Pi(t)$; $\psi(t) = (1 + jt)^{-2}$

6. *Fie $a > 0$ şi $p \in (0, 1)$. Variabila aleatoare 1D discretă X are pmf $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f_X(n) = ap^{n-1}$, $\forall\ n \geq 1$.*

Ştiind că $M(X) = 10$, să se determine numerele reale a şi p, funcţia caracteristică a v.a. X şi să se calculeze dispersia v.a. X.

7. *Variabila aleatoare 1D continuă X are pdf $f(x) = 32x^2e^{-4x}u(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $M_n(X)$, $M(X)$ şi $D^2(X)$.*

8. *Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a\sqrt{x}e^{-3x}u(x)$, $x \in \mathbb{R}$, este pdf pentru o v.a. 1D continuă X, cu $a > 0$ potrivit ales. Să se arate că $a = 6\sqrt{3/\pi}$ şi să se calculeze $M_n(X)$ şi $\sigma(X)$.*

9. *Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \dfrac{x^2}{1 + x^8}$, $x \in \mathbb{R}$ este pdf pentru o v.a. X. Să se calculeze $M_n(X)$ (dacă există) şi $D^2(X)$.*

10. *Să se determine pdf pentru v.a. 1D continuă X, având funcţia caracteristică dată ($t \in \mathbb{R}$):*

(i) $\varphi(t) = (4t^2 + 1)^{-2}$; *(ii)* $\varphi(t) = (t^2 + 1)\exp(-|t|)$.

Răspunsuri

1. (i) $[t\sqrt{2\sqrt{2} + 2} + 2u(-t)\sqrt{|t|} - 2\sqrt{1 + \sqrt{2}}] \cdot 2^{-1}(t^2 - 2t + 2)^{-1}$.

(ii) $-(\text{sgn}a)\cos at$; **(iii)** $\dfrac{1-\cos t}{t}$

(iv) $\dfrac{t^2+1-t^2e^{-1}-\cos t}{t(t^2+1)}$ **(v)** $\dfrac{t}{1+t^2}$

2. (i) $\left(6\sqrt[3]{2}\sin\dfrac{4\pi}{9}\right)^{-1}$; **(ii)** $\dfrac{\Gamma(\alpha+s)}{a^{\alpha+s}}$

(iii) Fie $f(x)=x^{s-1}$; $g(x)=e^{-x}$; $F_c(\omega)=\mathcal{F}_c(f;\omega)$; $G_c(\omega)=\mathcal{F}_c(g;\omega)$ şi egalitatea $\displaystyle\int_0^\infty F_c(\omega)G_c(\omega)d\omega=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty f(x)g(x)dx$, vezi Cap.3, §11; rezultă $\mathcal{M}(\cos x;s)=\Gamma(s)\cos\dfrac{s\pi}{2},\quad 0<s<1.$

3. (i) $E(h)=\|h\|_2^2=\displaystyle\int_0^\infty t^{2n}e^{-2t}dt=2^{-2n-1}\Gamma(2n+1)=(2n)!\cdot 2^{-2n-1}$;

$$t^*=\frac{2^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^\infty t^{2n+1}e^{-2t}dt=\frac{2n+1}{2};$$

$$\Delta_h^2=\frac{2^{2n+1}}{(2n)!}\int_{-\infty}^\infty\left(t-\frac{2n+1}{2}\right)^2t^{2n}e^{-2t}dt=\frac{2n+1}{4},$$

deci $\Delta_h=\dfrac{1}{2}\sqrt{2n+1}$

(ii) $E(g_a)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2a}}$; $t^*=0$; $\Delta_h=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

(iii) $E(\Pi_A)=2A$; $t^*=0$; $\Delta_h=A/\sqrt{3}$.

(iv) $E(Trt)=2/3$; $t^*=0$; $\Delta_h=1/\sqrt{10}$.

(v) $\pi/2$; -1; 1; **(vi)** 1; 0; $\sqrt{\pi/2}$

(vii) $\pi/77$; 0; $\sqrt{77}/2$; **(viii)** $\pi(1-3e^{-2})/4$; 0; $\sqrt{2(e^2+3)^{-1}}$

(ix) $\pi e^{-2}(1+e^2)/2$; 0; $\sqrt{\text{th}1}$

(x) $\pi^3/2$; $\pi^{-2}(1-e^{-2\pi})/2$; $\pi^{-2}\sqrt{(1+e^{-2\pi})(2\pi^2+\pi-1+e^{-2\pi})/2}$.

4. (i) $(\mathcal{F}_hf)(b,w)=\displaystyle\int_{b-1}^{b+1}e^{-t}u(t)e^{-j\omega t}dt=$

$$=\begin{cases}0, & b<-1,\ \omega\in\mathbb{R}\\ \dfrac{1}{1+j\omega}\left[1-\dfrac{\cos(\omega+\omega b)-j\sin(\omega+\omega b)}{\exp(1+b)}\right], & -1\le b<1,\ \omega\in\mathbb{R}\\ \dfrac{1}{1+j\omega}\left[\dfrac{\cos(\omega-\omega b)+j\sin(\omega-\omega b)}{\exp(1-b)}-\right. & \\ \qquad\left.-\dfrac{\cos(\omega+\omega b)-j\sin(\omega+\omega b)}{\exp(1+b)}\right], & b\ge 1,\ \omega\in\mathbb{R}\end{cases}$$

(ii) $\sqrt{\pi/2}(2b - j\omega/2)\exp(b^2 - 2b\omega j - \omega^2/4)$

5. (i) $\frac{1}{\sqrt{|a|}}\left[(1-b)\exp\left(-\left(\frac{1-b}{a}\right)^2\right) + (1+b)\exp\left(-\left(\frac{1+b}{a}\right)^2\right)\right]$

(ii) $\frac{1}{\sqrt{|a|}}a^2 \ln\left(1 + \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}j\right)$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{|a|}} \cdot \frac{2a^2}{a^2+1-b^2+2jab}$.

6. $a = 1/10$; $p = 9/10$; $\varphi(t) = e^{jt}(10 - 9e^{jt})$; $D^2(X) = 90$.

7. $M_n(X) = (n+2)! \cdot 2^{-2n-1}$; $D^2(X) = 3/16$.

8. $M_n(X) = 2^{-2n-1} \cdot 3^{-n} A_{2n+2}^{n+1}$; $\sigma(X) = 1/\sqrt{6}$.

9. $M_1(X) = M_3(X) = 0$; $M_2(X) = 1$; $M_4(X) = 1 + \sqrt{2}$;
$M_n(X)$ nu există pentru $n \geq 5$; $D^2(X) = 1$.

10. Se aplică Teorema 2.2.5.

(i) $f(x) = \frac{1}{16}(2 + |x|)\exp\left(-\frac{|x|}{2}\right)$

(ii) Din $\mathcal{F}\{t^2\varphi(t); x\} = j^2((\mathcal{F}\varphi)(x))''$ rezultă $f(t) = \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{\pi(x^2+1)^2}$.

Bibliografie

[1] Agratini O., Chiorean I., Coman Gh., Trîmbiţaş R., *Analiză numerică şi teoria aproximării*, Vol.3, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2002.

[2] Brânzănescu V., Stănăşilă O., *Matematici speciale*, Ed. All, 1998.

[3] Burrus C. S., Parks T. W., *Frequency Analysis*, Bruel & Kjaer, 1987.

[4] Cartianu Gh. şi col., *Semnale. Circuite. Sisteme*, EDP, Bucureşti, 1980.

[5] Câşlaru C., Prepeliţă V., Drăguşin C., *Matematici speciale*, Ed. Fair Partners, Bucureşti, 2002.

[6] Corovei I., Pop V., *Transformate integrale*, U. T. Cluj-Napoca, 1993.

[7] Corovei I., Gurzău M., Ivan M., Tomuţa F., *Probleme de matematici speciale*, Lito U. T. Cluj-Napoca, 1988.

[8] Crstici B., Bânzaru T., Lipovan O. şi col., *Matematici speciale*, EDP, Bucureşti, 1981.

[9] Dragu I., Iosif I. M., *Prelucrarea numerică a sistemelor discrete în timp*, Ed. Militară, Bucureşti, 1985.

[10] Evgrafov M. şi col., *Recueil de problèmes sur la théorie des fonctions analytiques*, Ed. Mir, Moscou, 1974.

[11] Gavrea, I., *Matematici speciale*, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2006.

[12] Gârlaşu S., *Prelucrarea în timp real a semnalelor fizice*, Ed. Scrisul Românesc, Craiova, 1978.

[13] Gonzales R. C., Woods R. E., *Digital Image Processing*, Addison Wesley Publ. Comp., Massachusets, 1992.

[14] Hamburg P., Mocanu P., Negoescu M., *Analiză matematică (Funcţii complexe)*, EDP, Bucureşti, 1982.

[15] Homentcovschi D., *Funcţii complexe cu aplicaţii în ştiinţă şi tehnică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1986.

[16] Iacob C. şi col., *Matematici clasice şi moderne*, vol. III, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1981.

[17] Indolean I., Mureşan V., *Matematici speciale*, Lito U. T. Cluj-Napoca, 1987.

[18] Jaeger J. C., Newstead G. H., *Introducere în teoria transformatei Laplace cu aplicaţii în tehnică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1971.

[19] Kecs W., Teodorescu P. P., *Introducere în teoria distribuţiilor cu aplicaţii în tehnică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1975.

[20] Kecs W., *Complemente de matematici cu aplicaţii în tehnică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1981.

[21] Lungu N., *Matematici cu aplicaţii tehnice*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1990.

[22] Mitrea A. I., *Analiză matematică în complex*, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2005.

[23] Mitrea A. I., Lungu N., Dumitraş D., *Capitole speciale de matematică*, Ed. Albastră (Microinformatica), Cluj-Napoca, 1996.

[24] Mitrea A. I., *Matematici pentru tehnologia informaţiei. Transformări integrale şi discrete*, Ed. Mediamira, 2005.

[25] Mitrea A. I., *Variabile şi semnale aleatoare*, Ed. UT Pres, Cluj-Napoca, 2006.

[26] Mocanu C. I., *Teoria circuitelor electrice*, EDP, Bucureşti, 1979.

[27] Mocanu P., *Funcţii complexe*, Lito UBB, 1972.

[28] Mocică, Gh., *Probleme de funcţii speciale*, EDP Bucureşti, 1988.

[29] Moon, T.K., *Stirling W.C., Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing*, Prentice Hall, New Jersey, 2000.

[30] Myskis, A.D., *Advanced Mathematics for Engineers*, Mir Publ., Moscow, 1975.

[31] Niţă A., Stănăşilă T., *1001 de probleme rezolvate şi exerciţii fundamentale* (coordonator Stănăşilă O.), Ed. All, Bucureşti, 1997.

[32] Opriş Gh., *Matematici speciale*, Lito UTCN, 1990.

[33] Oran Brigham, E., *Fast Fourier Transform*, Prentice Hall Inc., 1974.

[34] Pavel G., Tomuţa F., Gavrea I., *Matematici speciale. Aplicaţii*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1981.

[35] Popescu V., *Semnale, Circuite şi Sisteme* (partea I), Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2002.

[36] Precupanu A., *Funcţii reale*, EDP, Bucureşti, 1976.

[37] Prepeliţă V., Câşlaru C., Drăguşin C., *Matematici speciale*, Ed. Fair Partners, Bucureşti, 2002.

[38] Randall R. B., Techn B., *Frequency Analysis*, Bruel & Kjaer, 1987.

[39] Rudner V., Nicolescu C., *Probleme de matematici speciale*, EDP, Bucureşti, 1982.

[40] Rusu C., Popescu V., Ţopa M., *SCS - Culegere de probleme*, U. T. Cluj-Napoca, 1997.

[41] Selinger V., Blaga L., Dezsö G., *Matematici speciale - Culegere de probleme*, Lito UTCN, 1984.

[42] Smirnov V. I., *Matematici speciale*, vol. II, EDP, Bucureşti, 1960.

[43] Stanomir D., Stănăşilă O., *Metode matematice în teoria semnalelor*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1980.

[44] Stănăşilă O., *Analiza matematică a semnalelor şi undinelor*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 1997.

[45] Stănăşilă T., Niţă A., *1000 de probleme rezolvate şi exerciţii fundamentale* (coordonator O. Stănăşilă), Ed. All, Bucureşti, 1997.

[46] Stoka M., *Funcţii de variabile reale şi funcţii de variabilă complexă*, EDP, Bucureşti, 1964.

[47] Stolojanu I. G., Podaru V., Cetină F., *Prelucrarea numerică a semnalului vocal*, Ed. Militară, Bucureşti, 1984.

[48] Şabac I. Gh., *Matematici speciale*, EDP, Bucureşti, 1981.

[49] Toader Gh., *Capitole de Matematici Speciale*, U. T. Press, Cluj-Napoca, 2004.

[50] Ţopa M. D., *Semnale, Circuite şi Sisteme* (partea a doua), Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2002.

[51] Trandafir R., *Probleme de matematici pentru ingineri*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1977.

[52] Vladimirov V. şi col., *Culegere de probleme de ecuaţiile fizicii matematice*, Ed. Şt. Encicl., Bucureşti, 1981.

[53] Vlaicu A., *Prelucrarea digitală a imaginilor*, U. T. Cluj-Napoca, 1996.

[54] Dicţionar de Analiză Matematică, Ed. Şt. Encicl., Bucureşti, 1989.

[55] *Spectrum Analysis and FFT*, Motorola, 2000.

[56] *Discrete Fourier Transform and FFT*, Motorola, 2001.

[57] *The fundaments of Signal Analysis*, Hewlett-Packard, 1990.

Index