

114-3.

(1) Fie  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

a) Să se găsească polinomul  $P_0$  de grad zero pt care  $\max_{x \in [0,1]} |e^x - P_0(x)| = \inf_{P \in \Pi_0} \max_{x \in [0,1]} |e^x - P(x)|$

b) Polinomul  $P_1 \in \Pi_1$  pt care

$$\|e^x - P_1\| = \inf_{P \in \Pi_1} \|e^x - P\|$$

c) Care este relația între  $\|e^x - P_0\|$  și  $\|e^x - P_1\|$

(2) Fie  $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Să se determine  $P_0$  și  $P_1$  de la problema precedentă.

(3) Se consideră diviziunea.

$$\Delta: -2 = x_0 < x_1 < \dots < x_{10} = 2.$$

Se cere: a) Să se determine  $S_{\Delta}(f)$  dacă

$$f(x) = |x - x_4|$$

b)  $S_{\Delta,1}(f)$  dacă  $f(x) = |x - \frac{x_6 + x_7}{2}|$

(4) a) Fie  $f \in C[a,b]$ ,  $w: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}_+$  o pondere și  $P_n(f)$  polinomul de cea mai bună aproximație în medie pătratică al funcției  $f$ . Să se arate că  $\int_a^b w(x) P_n^2(f)(x) dx \leq \int_a^b w(x) f^2(x) dx$

b) Fie  $f \in C[a,b]$  și  $P_n(f)$  polinomul de cea mai bună aproximație în medie pătratică al funcției  $f$ . Să se arate că există  $n+1$  puncte distincte  $x_i \in (a,b)$  astfel încât  $P_n(f)(x_i) = f(x_i)$

c) Dacă  $f \in C[a,b]$  și  $P_n(f)$  este polinomul de cea mai bună aproximație în medie pătratică al funcției  $f$ , să se determine o evoluție pt  $\|f - P_n(f)\|_\infty$

⑦ Se consideră divizarea  $\Delta_n$

$\Delta_n: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .  $n! f \in C[a, b]$

a) Dacă divizarea  $\Delta_n$  are nodurile echidistante, să se arate că există un unic spline de gradul al doilea  $S_2$  cu nodurile  $\frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ ,  $i = \overline{1, n}$  având următoarele proprietăți:

- Are proprietăți:
  - a)  $S_2\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) = f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$   $i = \overline{1, n}$
  - b) Este tangent la graficul splineului  $S_{n,1}(f)$  în fiecare din punctele  $\frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ .

b) Dacă  $f \in C^{(2)}[a, b]$  să se găsească o soluție a problemei  $R_n(f) = f(x) - S_2(x)$ .

c) Prin intermediul afirmației de la a) arăsați dacă nodurile nu sunt echidistante?