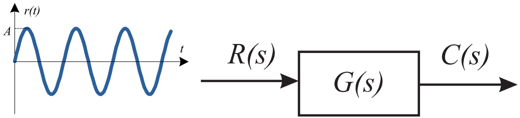
Răspunsul în frecvență

Paula Raica
Departmentul de Automatică
Str. Dorobantilor 71-73, sala C21, tel: 0264 - 401267
Str. Baritiu 26-28, sala M14, tel: 0264 - 401239
email: Paula.Raica@aut.utcluj.ro

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

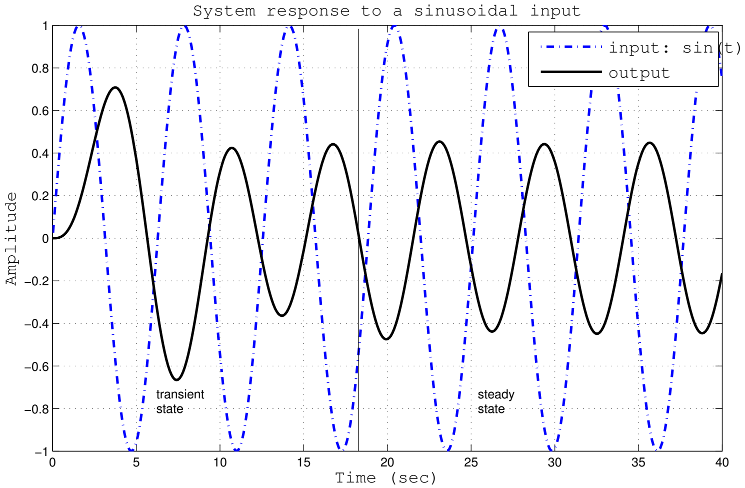
Introducere



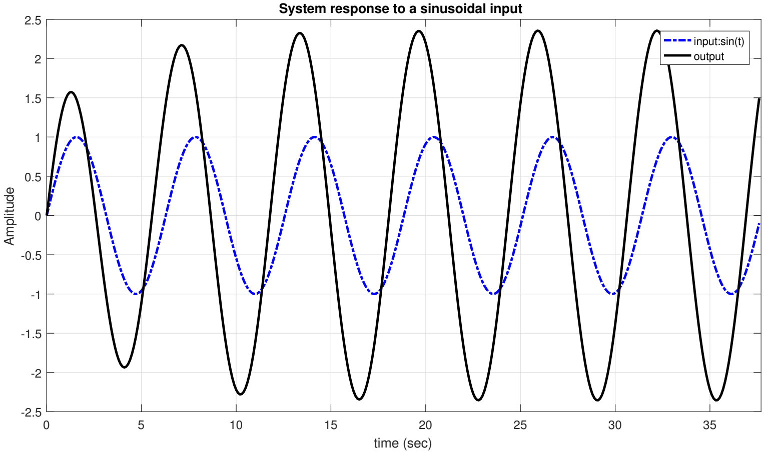
- Se analizează răspunsul în regim staționar al unui sistem cu intrare sinusoidală, când pulsația sinusoidei variază.
- Se examinează funcția de transfer $G(j\omega)$ și se prezintă o formă de reprezentare grafică.

Răspunsul în frecvență al unui sistem se definește ca răspunsul în regim staționar al unui sistem la intrare sinusoidală. Sinusoida este un semnal unic de intrare. Pentru un sistem liniar, **în regim staționar**, ieșirea rezultată este sinusoidală, *cu aceeași frecvență ca semnalul de intrare*. Diferă de semnalul de intrare numai în amplitudine și fază.

Exemplu

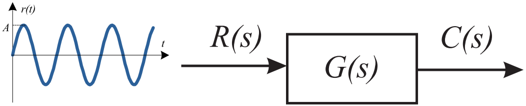

System response to a sinusoidal input
input: sin(t)
output
transient
state
steady
state
Amplitude
Time (sec)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
0
5
10
15
20
25
30
35
40

Exemplu



System response to a sinusoidal input
input:sin(t)
output
Amplitude
time (sec)
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
0
5
10
15
20
25
30
35

Răspunsul în frecvență



- Semnalul de intrare sinusoidal și transformata sa Laplace:

$$r(t) = A sin \omega t, \qquad R(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

- Pentru un sistem stabil cu funcția de transfer:

$$G(s) = \frac{m(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s + p_i)}$$

- semnalul de ieșire este:

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{k_1}{s + p_1} + \ldots + \frac{k_1}{s + p_n} + \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2}$$

Răspunsul în frecvență

- Deoarece sistemul este stabil $\Rightarrow$ p_i au părți reale negative diferite de zero și termenii corespunzători în $c(t)$ vor fi zero în regim staționar:

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_i}{s+p_i}\right] = 0$$

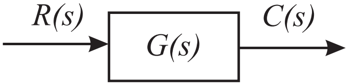
- Pentru $t \to \infty$ (în regim staționar) se poate demonstra că:

$$c_{ss}(t) = A|G(j\omega)|sin(\omega t + \varphi)$$

unde $\varphi = \angle G(j\omega)$.

Vedeți exemplele și calculele detaliate din notele de curs Chap4.pdf

Răspunsul în frecvență



- Pentru un sistem descris de funcția de transfer $G(s)$,
- cu un semnal de intrare sinusoidal: $r(t) = A \sin \omega t$
- semnalul de ieșire **în regim staționar** este:

$$c_{ss}(t) = A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

$$c_{ss}(t) = A \cdot M \sin(\omega t + \varphi)$$

unde:

- A este amplitudinea semnalului de intrare
- ω este pulsația semnalului de intrare (rad/s)
- $G(j\omega)$ este funcția de transfer $G(s)$ în care $s \to j\omega$
- modulul: $M = |G(j\omega)|$
- faza: $\varphi = \angle G(j\omega)$

Exemplu

- Se consideră un sistem de ordinul 1 cu funcția de transfer:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

- Semnalul de intrare este $r(t) = \sin t$, (amplitudinea $A = 1$, pulsația $\omega = 1$ rad/s)
- Ieșirea $c(t)$ în regim staționar:

$$c_{ss}(t) = A \underbrace{|G(j\omega)|}_{M} \sin(\omega t + \underbrace{\angle G(j\omega)}_{\varphi})$$

- Se calculează:

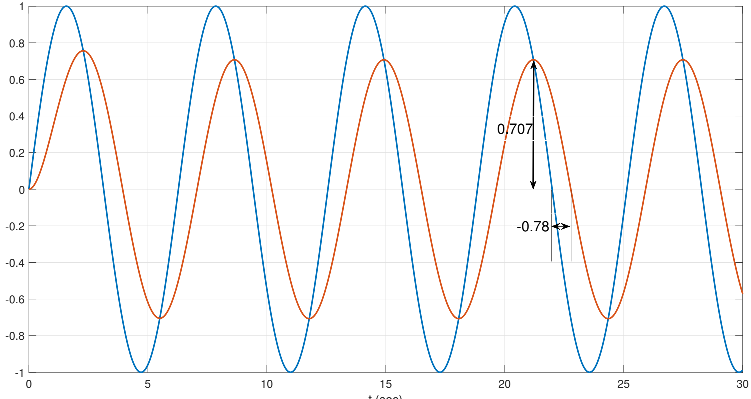
$$G(j \cdot 1) = \frac{1}{j+1}, \quad \Rightarrow \quad M = |G(j \cdot 1)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$$\varphi = \angle G(j \cdot 1) = \angle \frac{1}{j+1} = \angle 1 - \angle j + 1 = -\arctan 1 = -0.78$$

Exemplu

- Ieșirea în regim staționar este:

$$c_{ss}(t) = \underbrace{1}_{A} \cdot \underbrace{0.707}_{M} \sin(\underbrace{1}_{\omega} \cdot t \underbrace{-0.78}_{\varphi}) = 0.707 \sin(t - 0.78)$$



Răspunsul în frecvență

$$c_{ss}(t) = A\underbrace{|G(j\omega)|}_{M}\sin(\omega t + \underbrace{\angle G(j\omega)}_{\varphi})$$

- $M > 1$: semnalul de ieșire este amplificat față de intrare
- $M < 1$: semnalul de ieșire este atenuat față de intrare
- $\varphi > 0$: avans de fază
- $\varphi < 0$: întârziere de fază

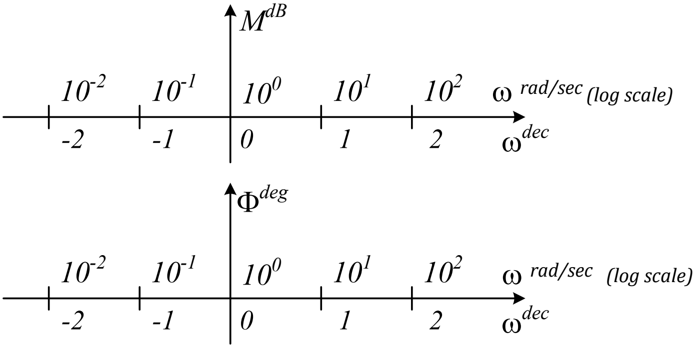
Pentru o funcție de transfer $G(j\omega)$, și $\omega \in (0, \infty)$ se va reprezenta grafic răspunsul în frecvență:

- o reprezentare a modulului $M = |G(j\omega)|$ în funcție de ω
- o reprezentare a fazei $\varphi = \angle G(j\omega)$ în funcție de ω

Diagrame Bode

Hendrik Wade Bode

- O diagramă Bode (logaritmică) conține:
  - un grafic al modulului lui $G(j\omega)$ in decibeli: $M^{dB} = |G(j\omega)|^{dB} = 20 log_{10}|G(j\omega)|$
  - un grafic al fazei $\angle G(j\omega)$ în funcție de $\omega^{dec} = log_{10}\omega$ (în scară logaritmică). Faza $\phi(\omega)$ se reprezintă în grade sau radiani.



Diagrame Bode. **dB = decibel**

- Dacă

$$M = |G(j\omega)| = \frac{A \cdot M}{A} = \frac{\text{amplitudinea semnalului de ieșire}}{\text{amplitudinea semnalului de intrare}}$$

$$M^{dB} = 20 \log_{10} M$$

- Exemple:

$$M = 10 \quad \Rightarrow \quad M^{dB} = 20 \log_{10} 10 = 20\ dB$$

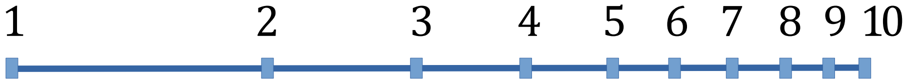
$$M = 100 \quad \Rightarrow \quad M^{dB} = 20 \log_{10} 10^2 = 40\ dB$$

$$M = 1 \quad \Rightarrow \quad M^{dB} = 20 \log_{10} 1 = 0\ dB$$

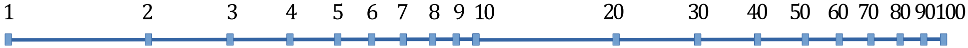
$$M = 0.1 \quad \Rightarrow \quad M^{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{10} = -20\ dB$$

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad M^{dB} = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{2}}{2} = -3.01\ dB$$

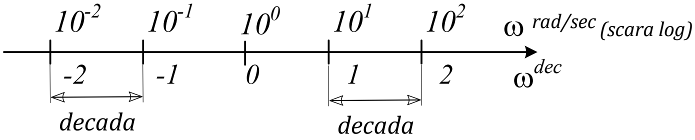
- Între $(10^0,\ 10^1)$



- Între $(10^0,\ 10^2)$



- Scara logaritmică. Decade



Diagrame Bode - modulul

Forma generală a funcției de transfer este:

$$G(j\omega) = \frac{k\prod_{i=1}^{m_1}(T_i(j\omega)+1)\prod_{p=1}^{m_2}(\frac{1}{\omega_p^2}(j\omega)^2+\frac{2\zeta_p}{\omega_p}(j\omega)+1)}{(j\omega)^n\prod_{l=1}^{n_1}(T_l(j\omega)+1)\prod_{k=1}^{n_2}(\frac{1}{\omega_k^2}(j\omega)^2+\frac{2\zeta_k}{\omega_k}(j\omega)+1)}$$

$$M^{dB} = |G(j\omega)|^{dB} = 20\log_{10}k + 20\sum_{i=1}^{m_1}\log_{10}|T_i(j\omega)+1| +$$

$$+20\sum_{p=1}^{m_2}\log_{10}|(\frac{1}{\omega_p^2}(j\omega)^2+\frac{2\zeta_p}{\omega_p}(j\omega)+1| - 20\log_{10}|j\omega|^n -$$

$$20\sum_{l=1}^{n_1}\log_{10}|T_l(j\omega)+1| - 20\sum_{k=1}^{n_2}\log_{10}|\frac{1}{\omega_k^2}(j\omega)^2+\frac{2\zeta_k}{\omega_k}(j\omega)+1|$$

Diagrame Bode - faza

Faza lui $G(j\omega)$ se poate calcula:

$$\Phi = \angle(G(j\omega)) = \angle\frac{k}{(j\omega)^n} + \sum_{i=1}^{m_1}\angle(T_i(j\omega)+1) +$$

$$+\sum_{p=1}^{m_2}\angle((\frac{1}{\omega_p^2}(j\omega)^2 + \frac{2\zeta_p}{\omega_p}(j\omega)+1) - \sum_{l=1}^{n_1}\angle(T_l(j\omega)+1) -$$

$$-\sum_{k=1}^{n_2}\angle(\frac{1}{\omega_k^2}(j\omega)^2 + \frac{2\zeta_k}{\omega_k}(j\omega)+1)$$

Diagrame Bode

Trei tipuri de factori pot apare într-o funcție de transfer:

1. Factori de proporționalitate k și factori derivatori sau integrali $\dfrac{k}{(j\omega)^n}$, (n poate fi pozitiv sau negativ)
2. Factori de ordinul 1: $T(j\omega)+1$, $\dfrac{1}{T(j\omega)+1}$
3. Factori de ordinul 2: $\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2+\frac{2\zeta}{\omega_n}(j\omega)+1$, sau $\dfrac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2+\frac{2\zeta}{\omega_n}(j\omega)+1}$ cu rădăcini complexe.

Se pot construi grafice compuse pentru $G(j\omega)$ prin adunarea graficelor individuale ale fiecarui tip de factori în parte.

Exemple:

- $G_1(s) = \dfrac{100}{s^2(10^2 s^2 + s + 1)}$

$$\frac{100}{s^2} \quad \text{de forma } \frac{k}{s^n} \quad \Rightarrow \quad k = 100,\ n = 2$$

$$\frac{1}{10^2 s^2 + s + 1} \quad \text{de forma } \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1} \Rightarrow \omega_n = 10^{-1},\ \zeta = 0.05$$

- $G_2(s) = \dfrac{s}{10(0.2s + 1)}$

$$\frac{s}{10} = \frac{10^{-1}}{s^{-1}} \quad \text{de forma } \frac{k}{s^n} \quad \Rightarrow \quad k = 10^{-1},\ n = -1$$

$$\frac{1}{0.2s + 1} \quad \text{de forma } \frac{1}{Ts + 1} \quad \Rightarrow \quad T = 0.2$$

Exemple:

- $G_3(s) = \dfrac{100(s+1)}{2s+1}$

$$100 \quad \text{de forma } \frac{k}{s^n} \quad \Rightarrow \quad k = 100,\; n = 0$$

$$s+1 \quad \text{de forma } T_1 s + 1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 1$$

$$\frac{1}{2s+1} \quad \text{de forma } \frac{1}{T_2 s + 1} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2$$

- $G_4(s) = \dfrac{s^2}{9s^2+2s+1}$

$$s^2 = \frac{1}{s^{-2}} \quad \text{de forma } \frac{k}{s^n} \quad \Rightarrow \quad k = 1,\; n = -2$$

$$\frac{1}{9s^2+2s+1} \quad \text{de forma } \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} \quad \Rightarrow \omega_n = \frac{1}{3},\; \zeta = \frac{1}{3}$$

$$G_1(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)^n}$$

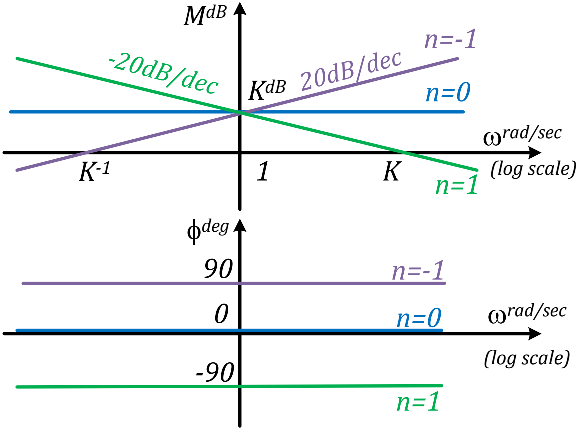
- $M_1^{dB} = 20\log_{10}\left|\frac{k}{(j\omega)^n}\right|$

$$M_1^{dB} = 20 logk - 20n\log_{10}\omega$$

$=$ ecuația unei drepte care pentru $\omega = 1$ are valoarea k^{dB} și are panta $-20n$ (dB/dec).

- Faza:

$$\Phi_1 = \angle k - \angle(j\omega^n) = -n \cdot arctan\frac{\omega}{0} = -90^o \cdot n$$



Diagrame Bode

$$G_2(\omega) = \frac{1}{T(j\omega)+1}$$

$$M_2^{dB} = 20\log_{10}\left|\frac{1}{Tj\omega+1}\right| = -20\log_{10}\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

- Pentru pulsații joase $\omega \ll \frac{1}{T}$ (asimptota la pulsații joase)

$$M_2^{dB}|_{\omega\ll} \cong -20log1 = 0\ dB$$

- Pentru pulsații înalte $\omega \gg \frac{1}{T}$ (asimptota la pulsații înalte)

$$M_2^{dB}|_{\omega\gg} \cong -20\log_{10}\omega T\ dB = -20\log_{10}\omega - 20\log_{10} T$$

Ecuația unei drepte cu panta -20 (dB/dec)

- Pulsația *de frângere*: $0 = -20\log_{10}\omega_c - 20\log_{10} T \ \Rightarrow\ \omega_c = \frac{1}{T}$

Diagrame Bode

- Eroarea la curba de modul apare la pulsația de frângere:

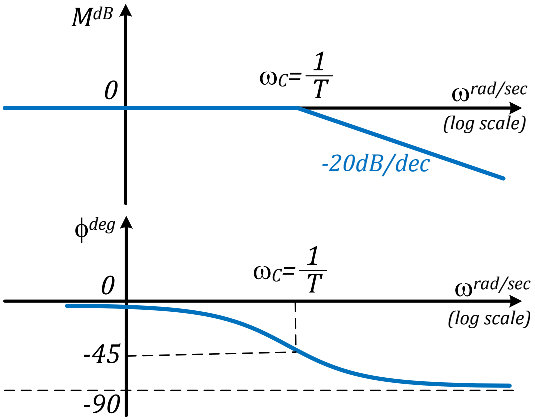
$$M_2^{dB}|_{\omega=\omega_c} = -20log\sqrt{1+T^2\cdot\frac{1}{T^2}} = -20log\sqrt{2} \cong -3.03\ dB$$

- Faza Φ_2 unui factor $\dfrac{1}{Tj\omega+1}$ este:

$$\Phi_2 = -arctan\,\omega T, \qquad \Phi_2|_{\omega=0} = 0^o$$

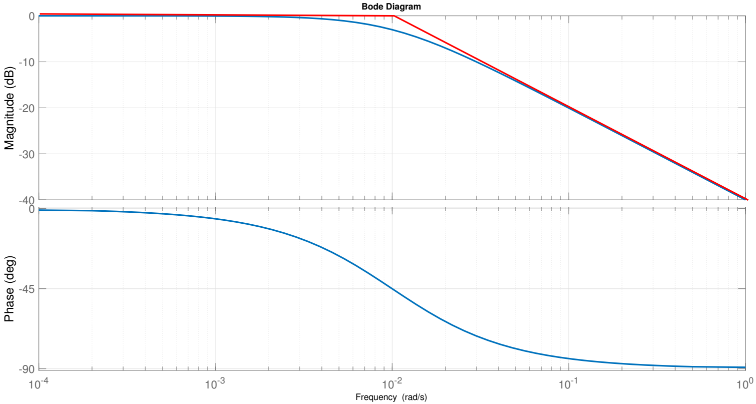
$$\Phi_2|_{\omega=\omega_c} = -arctan\frac{T}{T} = -45^o, \qquad \Phi_2|_{\omega=\infty} = -arctan\ \infty = -90^o$$

Diagrama logaritmică pentru $\dfrac{1}{Tj\omega + 1}$



Diagrame Bode. Exemplu

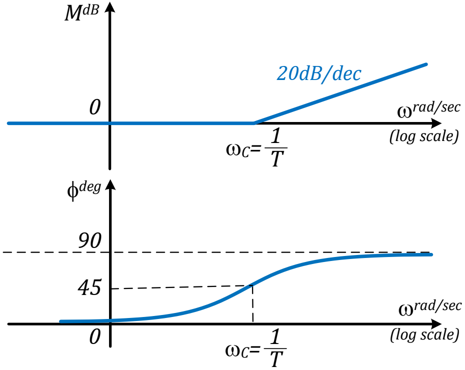
$$G(s) = \frac{1}{100s+1}, \quad T = 100, \ \omega_c = \frac{1}{100} = 10^{-2}, \ \text{panta} \ -20dB/dec$$



Diagrame Bode

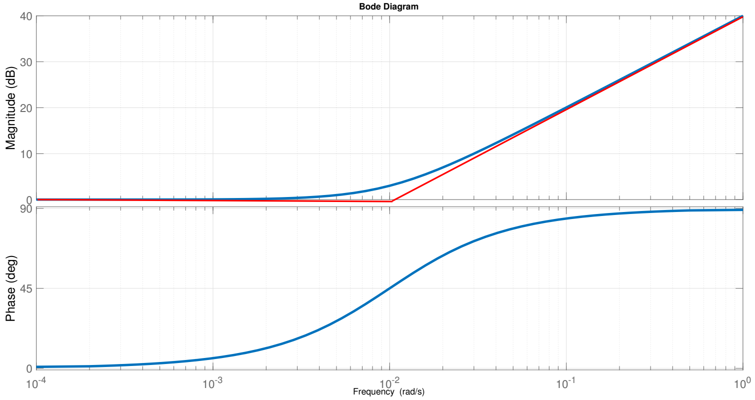
$$20log\,|Tj\omega+1| = -20log\left|\frac{1}{Tj\omega+1}\right|, \quad \angle(Tj\omega+1) = -\angle\left(\frac{1}{Tj\omega+1}\right)$$

Diagrama logaritmică pentru $Tj\omega+1$



Diagrame Bode. Exemplu

$$G(s) = 100s + 1, \quad T = 100, \ \omega_c = \frac{1}{100} = 10^{-2}, \ \text{panta } 20dB/dec$$



Diagrame Bode

$$G_3(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}(j\omega) + 1}$$

$$M_3^{dB} = -20log\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\zeta\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

- Pentru pulsații joase $\omega \ll \omega_n$

$$M_3^{dB}|_{\omega\ll} = -20log1 = 0dB$$

- Pentru pulsații înalte $\omega \gg \omega_n$

$$M_3^{dB}|_{\omega\gg} = -20log\frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40log\omega - 40log\omega_n$$

Ecuația unei drepte cu panta $-40\ dB/dec$.

- Pulsația de frângere ω_c: $-40log\omega_c - 40log\omega_n = 0, \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \omega_n$

- In jurul pulsației de frângere ω_c, apare eroarea maximă:

$$M_3^{dB}|_{\omega=\omega_c} = -20log\sqrt{(1-\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2})^2+(2\zeta\frac{\omega_n}{\omega_n})^2}$$

$$= -20log(2\zeta) = -20log2 - 20log\zeta \cong -6^{dB} - \zeta^{dB}$$

- Faza unui factor pătratic:

$$\Phi_3 = \angle\left(\frac{1}{(\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2+\frac{2\zeta}{\omega_n}(j\omega)+1)}\right) = -arctan\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\Phi_3|_{\omega=0} = 0,\ \ \Phi_3|_{\omega=\omega_c} = -90^o,\ \ \Phi_3|_{\omega=\infty} = -180^o,$$

Diagrame Bode

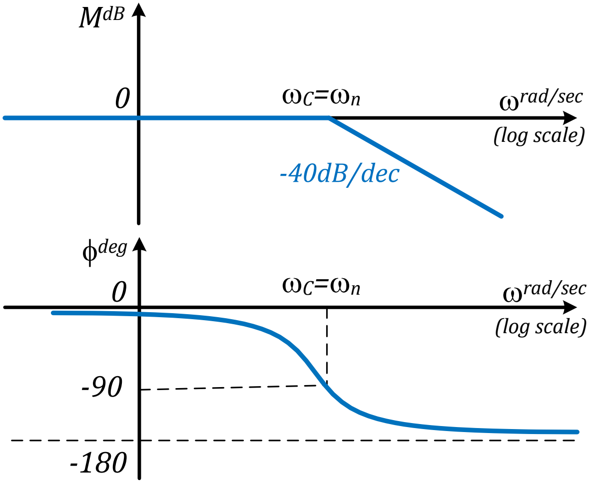
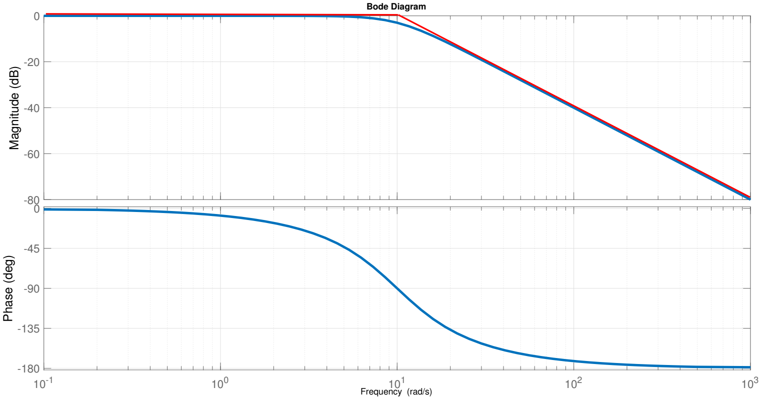


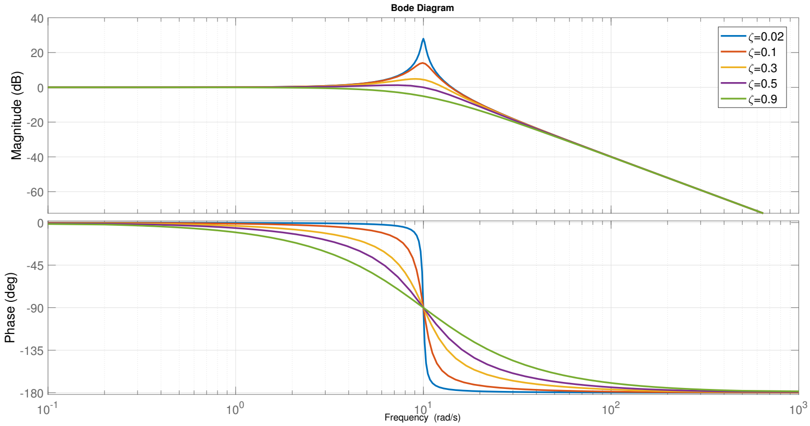
Figure: Diagrama logaritmică pentru un sistem de ordinul 2

Diagrame Bode. Exemplu

$$G(s) = \frac{1}{10^{-2}s^2 + 0.1414s + 1},\ \omega_n = 10,\ \omega_c = 10,\ \text{panta}\ \ -40dB/dec$$



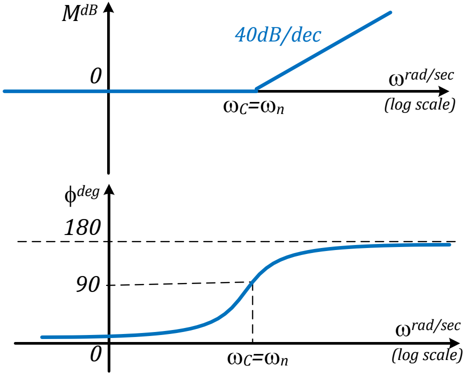
Diagrame Bode. Influența factorului de amortizare



$$M_3^{dB}|_{\omega=\omega_c} = -6^{dB} - \zeta^{dB}$$

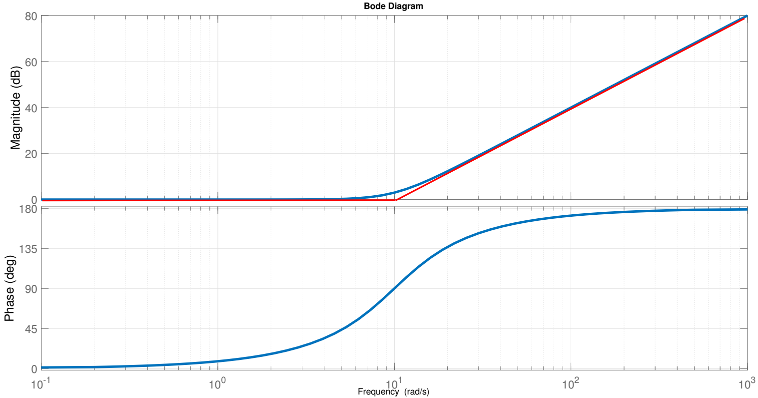
Diagrame Bode

$$\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}(j\omega) + 1$$



Diagrame Bode. Exemplu

$$G(s) = 10^{-2}s^2 + 0.1414s + 1,\ \omega_n = 10,\ \omega_c = 10,\ \text{panta } 40dB/dec$$

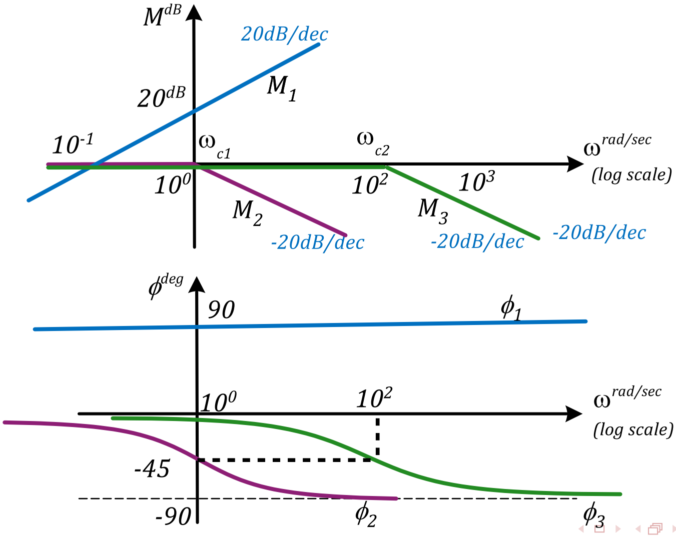


Diagrame Bode. Exemplu

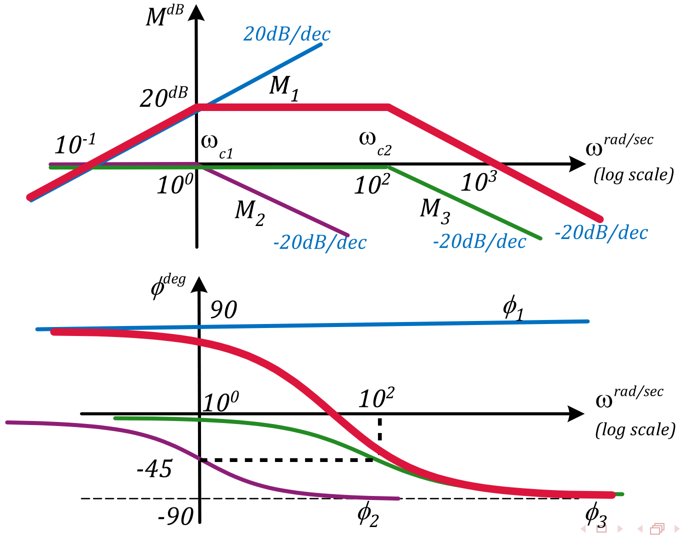
$$G(s) = \frac{10s}{(s+1)(10^{-2}s+1)}$$

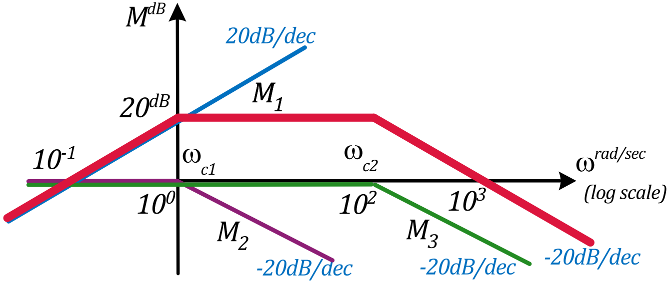
- $G_1(s) = 10s = \frac{10}{s^{-1}}$, $k = 10$, $n = -1$, $M_1^{dB}|_{\omega=10^0} = k^{dB} = 20\log_{10}10 = 20dB$, panta $=$ 20dB/dec
  $\phi_1 = -90 \cdot n = 90^o$
- $G_2(s) = \frac{1}{s+1}$, $T_1 = 1$, $\omega_{c1} = \frac{1}{T_1} = 1$, panta $=$ -20dB/dec
  $\phi_2 \in (0, -90^o)$ (arctan), inflexiune: $(\omega_{c1} = 1, -45^o)$
- $G_3(s) = \frac{1}{10^{-2}s+1}$, $T_2 = 10^{-2}$, $\omega_{c2} = 10^2$, panta $=$ -20dB/dec
  $\phi_3 \in (0, -90^o)$ (arctan), inflexiune: $(\omega_{c2} = 10^2, -45^o)$

Diagrame Bode. Exemplu



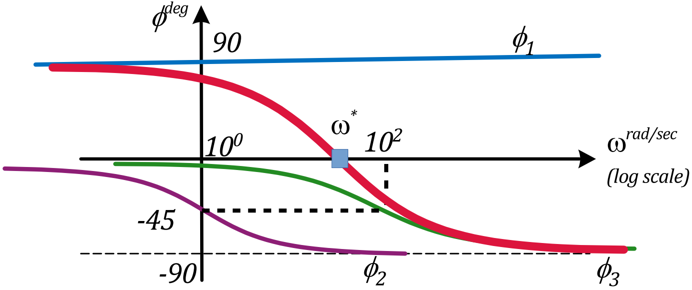
Diagrame Bode. Exemplu. Rezultanta





- $\omega^{rad/sec} \in (0, 10^{-1}) \bigcup (10^3, \infty) \quad \Rightarrow \quad M^{dB} < 0, \; M < 1$, pentru aceste pulsații ale semnalului de intrare sistemul atenuează intrările sinusoidale
- $\omega^{rad/sec} \in (10^{-1}, \; 10^3) \quad \Rightarrow \quad M^{dB} > 0, \; M > 1$ pentru aceste pulsații ale semnalului de intrare sistemul amplifică intrările sinusoidale
- $\omega^{rad/sec} = 10^{-1}, \; \omega^{rad/sec} = 10^3, \quad M^{dB} = 0, \; M = 1$ amplitudinea ieșirii = amplitudinea intrării

Diagrame Bode. Exemplu. Analiza



- $\omega^{rad/sec} \in (0, \omega^*) \quad \Rightarrow \quad \phi > 0$ avans de fază
- $\omega^{rad/sec} \in (\omega^*, \infty) \quad \Rightarrow \quad \phi < 0$ întârziere de fază

Diagrame Bode. Exemplu

Desenați diagrama Bode pentru sistemul:

$$G(s) = \frac{10^3(s+10)}{s(s+1)(s^2+10s+100)} = \frac{10^2(\frac{1}{10}s+1)}{s(s+1)(\frac{1}{100}s^2+\frac{1}{10}s+1)}$$

$$\begin{aligned}
G_1(j\omega) &= \frac{10^2}{j\omega} = \frac{k}{(j\omega)^1};\\
G_2(j\omega) &= \frac{1}{10}(j\omega)+1 = T_1(j\omega)+1;\\
G_3(j\omega) &= \frac{1}{j\omega+1} = \frac{1}{T_2 j\omega+1};\\
G_4(j\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{100}(j\omega)^2+\frac{1}{10}(j\omega)+1} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2+\frac{2\zeta}{\omega_n}(j\omega)+1}
\end{aligned}$$

Diagrame Bode. Exemplu

Diagrama Bode se desenează pentru fiecare din acești factori și curbele se adună grafic.

$$k = 10^2; \quad T_1 = \frac{1}{10}; \quad T_2 = 1; \quad \omega_n = 10; \quad \zeta = 0.5.$$

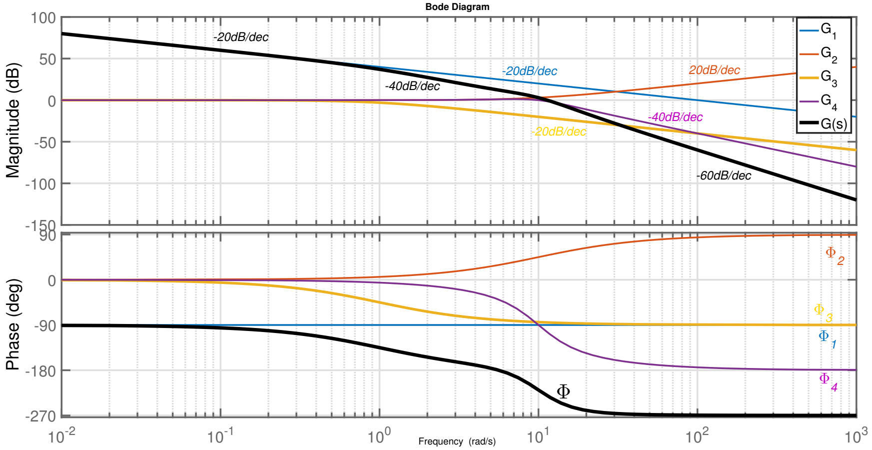
$$k^{dB} = 20\log_{10} 10^2 = 40dB, \quad \Phi_1 = -90^o$$

$$\omega_{c1} = \frac{1}{T_1} = 10^1; \quad \Phi_2 \in [0, 90^o]$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{T_2} = 1 = 10^0, \quad \Phi_3 \in [0, -90^o]$$

$$\omega_{c3} = \omega_n = 10; \quad \Phi_4 \in [0, -180^o]$$

Diagrame Bode. Exemplu



Cum se citește o diagramă Bode

- Dacă $|G(j\omega)| > 1$ (sau $M^{dB} = |G(j\omega)|^{dB} > 0$), ieșirea este amplificată.
- Dacă $|G(j\omega)| < 1$ (sau $M^{dB} = |G(j\omega)|^{dB} < 0$), ieșirea este atenuată.
- Dacă $\Phi > 0$ ieșirea este defazată față de intrare și defazajul este pozitiv (avans de fază)
- Dacă $\Phi < 0$ ieșirea este defazată față de intrare și defazajul este negativ (întârziere de fază).