Să se rezolve ecuația:

$$L(f; x_0, x_1, \dots, x_n)(x) = f(x) \quad , \text{ unde } f(t) = t^{n+3}$$

Rezolvare:

Vom folosi scrierea prescurtată L pentru $L(f; x_0, x_1, \dots, x_n)$

Definim polinomul $Q(x) = f(x) - L(x) = x^{n+3} - L(x)$

Rădăcinile lui Q sunt soluțiile ecuației noastre.

Mai mult, Q are gradul $n+3$, $\deg(Q) = n+3$ și verifică

$$Q(x_i) = f(x_i) - L(x_i) = 0 \quad , \forall\ i = \overline{0,n}$$

Polinomul Q are ca rădăcini cele $n+1$ valori $x_0, x_1, \dots, x_n$. Deducem că

$$Q(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)(x-\alpha)(x-\beta) \quad ,$$

unde α și β sunt cele două rădăcini necunoscute (în total are $n+3$ și cunoaștem $n+1$)

Ajungem la $x^{n+3} - L(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)(x-\alpha)(x-\beta)$

$$\iff x^{n+3} - L(x) = \left(x^{n+1} - S_1 x^n + S_2 x^{n-1} + \dots + (-1)^{n+1} S_n\right)(x-\alpha)(x-\beta) \quad ,$$

unde $S_1, S_2 \dots S_n$ sunt sumele Viète pentru $x_0, x_1, \dots, x_n$

$$S_1 = x_0 + x_1 + \dots + x_n$$

$$S_2 = x_0 x_1 + x_1 x_2 + \dots + x_{n-1} x_n$$

$$\vdots$$

$$S_n = x_0 x_1 \dots x_n$$

Observăm că în partea stângă nu apar termenii x^{n+2} și x^{n+1}. Deducem că în partea dreaptă, coeficienții lui x^{n+1} și x^{n+2} sunt egali cu 0.

$$\left(x^{n+1} - S_1 x^n + S_2 x^{n-1} - S_3 x^{n-2} + \dots\right)\left(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\right) =$$

$$= x^{n+3} - S_1 x^{n+2} + S_2 x^{n+1} - (\alpha+\beta)x^{n+2} + S_1(\alpha+\beta)\cdot x^{n+1} + \alpha\beta x^{n+1} - \dots =$$

$$= x^{n+3} - (S_1 + \alpha + \beta)x^{n+2} + \left(S_2 + S_1(\alpha+\beta) + \alpha\beta\right)x^{n+1} - \dots$$

Obținem sistemul $\begin{cases} \alpha + \beta + S_1 = 0 \\ S_2 + S_1(\alpha+\beta) + \alpha\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -S_1 \\ S_2 - S_1^2 + \alpha\beta = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -S_1 \\ \alpha\beta = S_1^2 - S_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha(-S_1 - \alpha) = S_1^2 - S_2 \Rightarrow -\alpha^2 - \alpha S_1 = S_1^2 - S_2$$

$$\alpha^2 + \alpha S_1 + S_1^2 - S_2 = 0$$

$$\Delta = S_1^2 - 4(S_1^2 - S_2) = 4S_2 - 3S_1^2 \quad \Rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{-S_1 \pm \sqrt{4S_2 - 3S_1^2}}{2}$$

$$\beta_{1,2} = -S_1 + \frac{S_1}{2} \mp \frac{\sqrt{4S_2 - 3S_1^2}}{2} = -\frac{S_1}{2} \mp \frac{\sqrt{4S_2 - 3S_1^2}}{2}$$

$\Rightarrow$ soluțiile sunt $x_0, x_1, \dots, x_n$, α și β determinați anterior

c) $L(f; -4, -3, 0, 4, 3)(x) = f(x)$, unde $f(t) = t^7$

analog cu rezolvarea anterioară pentru

$x_0 = -4$, $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = 3$, $n = 4$