$C[a,b] = \{ f:[a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă} \}$

(mulțimea funcțiilor continue definite pe $[a,b]$)

$\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ reprezintă norma maxim

(norma Cebîșev, norma infinit, norma uniformă)

Această normă este folosită în teoria aproximării pentru că de multe ori se dorește determinarea / compararea

$$\|f-P\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)-P(x)| ,$$

unde P este un anumit polinom.

Un lucru natural este întrebarea: "Care ar fi polinomul de grad n a.î. să fie obținută cea mai bună aproximare?" Se introduce astfel <u>eroarea minimax</u>

$$\rho_n(f) = \min_{Q\in\Pi_n} \|f-Q\|_\infty = \min_{Q\in\Pi_n} \max_{x\in[a,b]} |f(x)-Q(x)|$$

Se dorește găsirea unui polinom $Q^* \in \Pi_n$ a.î.

$$\|f-Q^*\|_\infty = \rho_n(f) = \min_{Q\in\Pi_n} \max_{x\in[a,b]} |f(x)-Q(x)|$$

Această problemă se numește aproximare minimax a lui f.

O altă normă pe $C[a,b]$ este norma

$$\|f\|_2 = \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

(o generalizare a normei euclidiene din $\mathbb{R}^n$)

polinom de grad cel mult n

Fie $f \in C[a,b]$ funcție continuă și $P \in \Pi_n$ a.î. există $n+2$ puncte distincte $x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in [a,b]$ cu proprietatea

$$f(x_k) - P(x_k) = (-1)^k E \quad , \quad k = \overline{0, n+1}$$

unde $E = \| f - P \|_\infty$. Atunci

$$\min_{Q \in \Pi_n} \| f - Q \|_\infty = E$$

sau

$$\| f - P \|_\infty = \min_{Q \in \Pi_n} \| f - Q \|_\infty$$

<u>Rezolvare</u>:

Presupunem că $\min\limits_{Q \in \Pi_n} \| f - Q \|_\infty \neq E$. Mai exact, presupunem că

$$\min_{Q \in \Pi_n} \| f - Q \|_\infty < \| f - P \|_\infty$$

$\Rightarrow \exists \tilde{P} \in \Pi_n$ a.î. $\| f - \tilde{P} \|_\infty < \| f - P \|_\infty$ și $\tilde{P} \neq P$

Definim polinomul $R = P - \tilde{P} \in \Pi_n$

Avem

$$R(x_0) = P(x_0) - \tilde{P}(x_0) = [f(x_0) - \tilde{P}(x_0)] - [f(x_0) - P(x_0)] =$$
$$= [f(x_0) - \tilde{P}(x_0)] - (-1)^0 \cdot E = [f(x_0) - \tilde{P}(x_0)] - \| f - P \|_\infty \leq$$
$$\leq \| f - \tilde{P} \|_\infty - \| f - P \|_\infty < 0$$

$$R(x_1) = P(x_1) - \tilde{P}(x_1) = [f(x_1) - \tilde{P}(x_1)] - [f(x_1) - P(x_1)] =$$
$$= [f(x_1) - \tilde{P}(x_1)] - (-1)^1 \cdot E = [f(x_1) - \tilde{P}(x_1)] + E =$$

$$= [f(x_1) - \tilde{P}(x_1)] + \|f-P\|_\infty > \|f-P\|_\infty - \|f-\tilde{P}\|_\infty > 0$$

$$|f(x_1) - \tilde{P}(x_1)| \le \|f-\tilde{P}\|_\infty \Rightarrow f(x) - \tilde{P}(x_1) \ge -\|f-\tilde{P}\|_\infty$$

Prin inducție se arată că semnul lui $R(x_j)$ este $(-1)^{j+1}$, $j=\overline{0,n+1}$

$\Rightarrow$ R schimbă semnul de $n+2$ ori $\Rightarrow$ R admite $n+1$ rădăcini

$\Rightarrow$ R poate fi doar polinomul nul.

$R \in \Pi_n$, $\deg(R) \le n$

$\Rightarrow R = P - \tilde{P} = 0 \Rightarrow P = \tilde{P}$ contradicție

$$\Rightarrow \|f-P\|_\infty = \min_{Q\in\Pi_n} \|f-Q\|_\infty$$

sau

$$\|f-P\|_\infty = \min_{Q\in\Pi_n} \max_{x\in[a,b]} |f(x)-Q(x)|$$

sau

$$\rho_n(f) = \|f-P\|_\infty$$

<u>Observații</u>:

$E = \|f-P\|_\infty \ge 0$ (este normă)

Condițiile $f(x_k) - P(x_k) = (-1)^k \cdot E$, $k=\overline{0,n+1}$

arată că eroarea în punctele $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ "oscilează" uniform