# Curs nr. 4

# Teoria Campului Electromagnetic

Universitatea Tehnica din Cluj-Napoca

http://www.et.utcluj.ro/~lcret

**12 Martie 2018**

# Capitolul 3

# Campuri magnetostatice

# Campuri magnetostatice

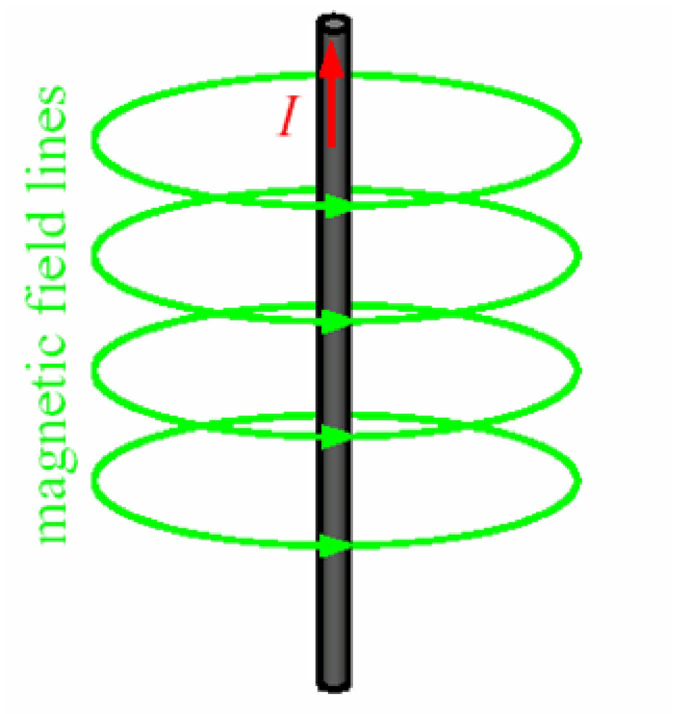
## Note introductive

• Hans Christian Oersted a descoperit (in 1819) forta magnetica produsa de un fir conductor parcurs de curent electric

• Regula mainii drepte face legatura intre directia curentului si cea a campului magnetic creat de acesta

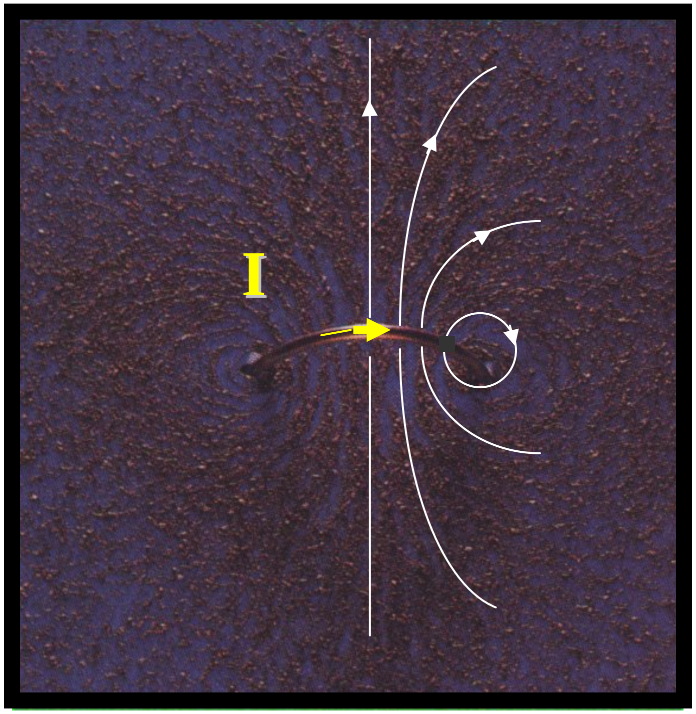
• André Marie Ampère masoara forta magnetica creata de un conductor parcurs de curent (1820-1825)

• Jean-Baptiste Biot si Felix Savart (1825) masoara cu precizie campul magnetic creat de un element de curent

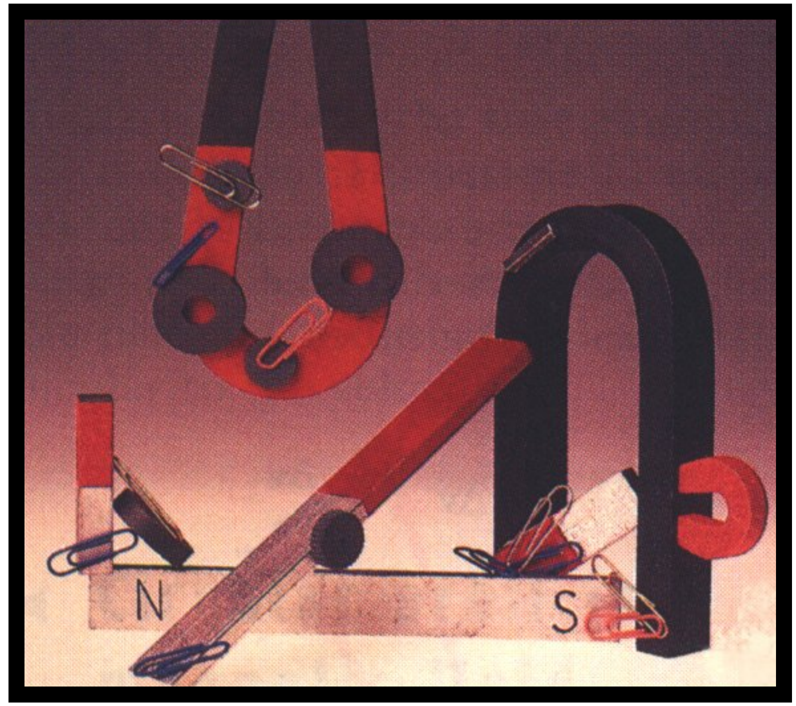


# Campuri magnetostatice

## Campuri Magnetice (B)




**Curenti**




**Magneti Permanenti**

# Campuri magnetostatice

- Magnetismul provine din miscarea sarcinilor electrice.
  Miscarea (inclusiv rotatia) sarcinilor genereaza campuri magnetice.

- Un curent electric genereaza un camp magnetic.

- Un camp magnetic va exercita o forta asupra unei sarcini aflate in miscare.

- Un camp magnetic va exercita o forta asupra unui conductor strabatut de un curent electric.

# Campuri magnetostatice

- **Sarcini stationare :**
  - $v_q = 0$
  - $E \neq 0 \qquad B = 0$

O sarcina stationara produce doar un camp electric.

- **Sarcini in miscare:**
  - $v_q \neq 0$ and $v_q = constant$
  - $E \neq 0 \qquad B \neq 0$

O sarcina ce se misca uniform produce un camp electric si un camp magnetic.

- **Sarcini accelerate:**
  - $v_q \neq 0$ and $a_q \neq 0$
  - $E \neq 0 \qquad B \neq 0 \qquad Camp\ radiant$

O sarcina accelerata produce un camp electric, un camp magnetic si un camp electromagnetic radiant.

# Campuri magnetostatice

## **Unitati si definitii:**

$$1T = 10^4 G$$

Tesla

Gauss

SI unit

$$1T = 1\frac{Wb}{m^2}$$

Weber

$\vec{B}$ Vectorul inductie magnetica

$\vec{H}$ Vectorul intensitate camp magnetic

$$\boxed{\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}}$$

Campuri magnetostatice

## Permeabilitate

$$\boxed{\mu = \mu_r \cdot \mu_o}$$

Permeabilitatea vidului

Permeabilitatea relativa a unui mediu

Permeabilitatea mediului

$$\mu_o = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \left\{ \frac{H}{m} \right\}$$

Constanta exacta

$$\left\{ \frac{H}{m} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \frac{Wb}{m} \right\}$$

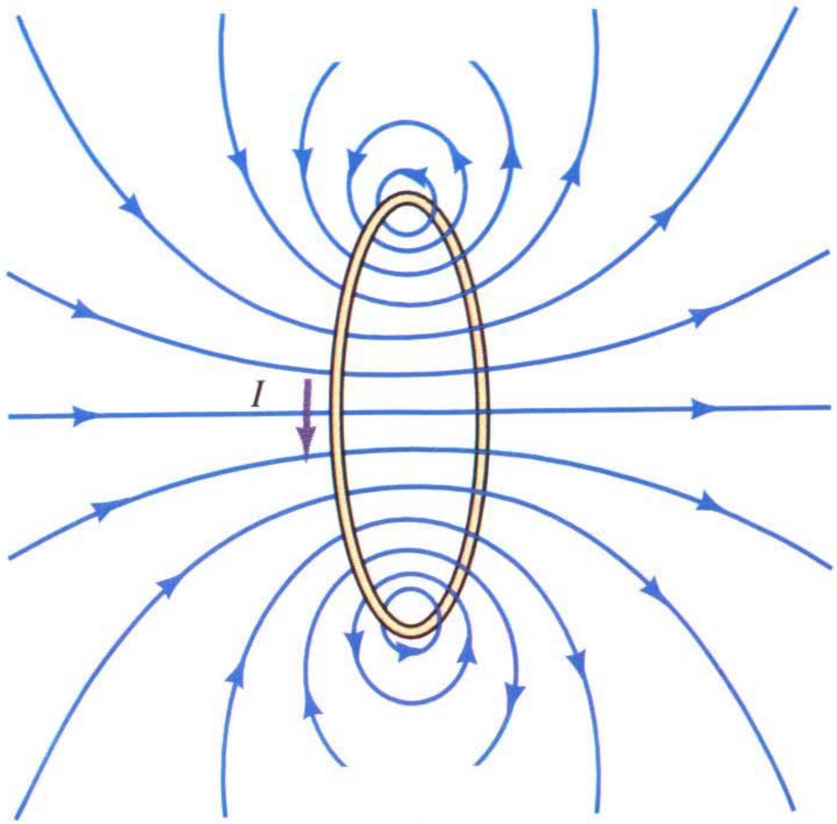
# Campuri magnetostatice

## Permeabilitatea relativa $\mu_r$ si susceptibilitatea $\chi_m$

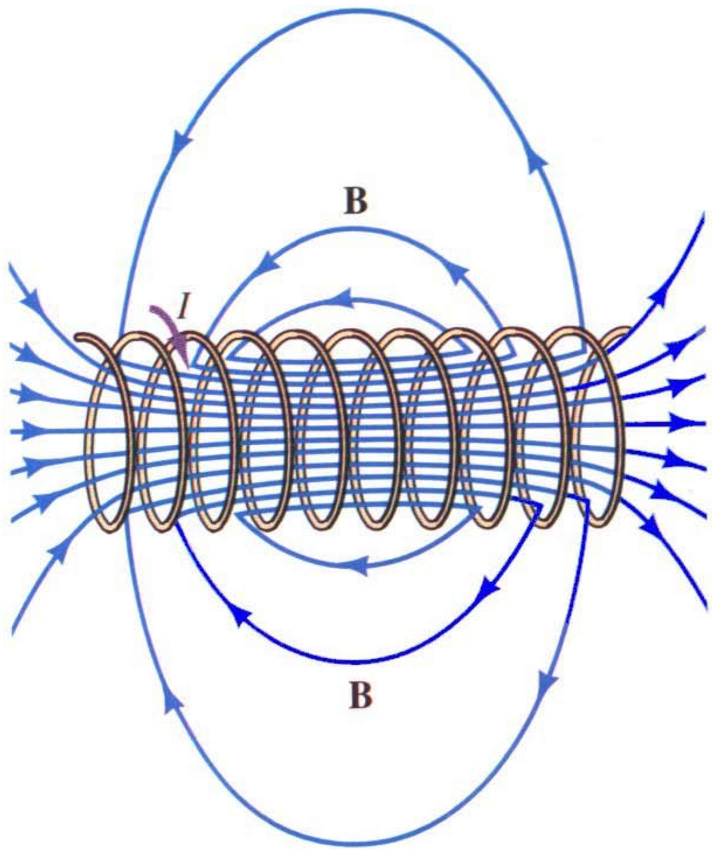
| Material | $\mu_r$ | $\chi_m$ | |
|---|---|---|---|
| Bismut | 0.99983 | -1.66 E-4 | Diamagnetic |
| Mercur | 0.999968 | -3.2 E-5 | Diamagnetic |
| Aur | 0.999964 | -3.6 E-5 | Diamagnetic |
| Argint | 0.99998 | -2.60 E-5 | Diamagnetic |
| Plumb | 0.999983 | -1.7 E-5 | Diamagnetic |
| Cupru | 0.999991 | -0.98 E-5 | Diamagnetic |
| Apa | 0.999991 | -0.88 E-5 | Diamagnetic |
| Vid | 1.000 | 0 | |
| Aer | 1.00000036 | 3.6 E-7 | Paramagnetic |
| Aluminiu | 1.000021 | 2.5 E-5 | Paramagnetic |
| Paladiu | 1.00082 | 8.2 E-4 | Paramagnetic |
| Cobalt | 250 | --- | Feromagnetic |
| Nickel | 600 | --- | Feromagnetic |
| Otel | 6000 | --- | Feromagnetic |

http://www.ndt-ed.org/EducationResources/CommunityCollege/MagParticle/Physics/MagneticMatls.htm

# Campuri magnetostatice




**Spira parcursa de current**




**Bobina sau solenoid**

# Campuri magnetostatice

## Flux magnetic

Fluxul magnetic printr-o suprafata deschisa S este definit ca:

$$\Psi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad [Weber = Wb]$$

In camp electrostatic, fluxul ce strabate o suprafata inchisa este egal cu sarcina delimitata de acesta suprafata. Este deci posibila existenta sarcinilor electrice izolate, iar liniile de camp electric nu sunt linii inchise (curbe).

Spre deosebire de liniile de camp electric, liniile de camp magnetic sunt intotdeauna inchise. Aceasta se datoreaza faptului ca nu e posibla existenta unor poli magnetici izolati (sau sarcini magnetice). De aceea, fluxul magnetic total printr-o suprafata inchisa trebuie sa fie zero:

$$\oiint_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Aceasta ecuatie se numeste legea conservarii fluxului magnetic sau legea lui Gauss pentru campuri magnetostatice.

# Campuri magnetostatice

## Legile magnetostaticii

### Legea fluxului magnetic

**Definitie:**

Fluxul magnetic total printr-o suprafata inchisa este intotdeauna nul.

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Forma integrala a legii

$$\boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iiint_{V_\Sigma} div\,\vec{B} \cdot dv = 0}$$

$$div\vec{B} = 0$$

Forma diferentiala a legii

$$div_s \vec{B} = \bar{n}_{12} \cdot \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = B_{2n} - B_{1n} = 0$$

Conditii de frontiera

# Campuri magnetostatice

## Legile magnetostaticii

### Legea magnetizatiei

Prin studii experimentale s-a determinat ca exista o stransa legatura intre vectorul magnetizatie (componenta temporara) si intensitatea campului magnetic. Pentru materialele uzuale, acesti doi vectori sunt coliniari si proportionali pentru o gama larga de valori ale lui H (materiale liniare si izotrope).

$$\boxed{\overrightarrow{M}_t = \chi_m \cdot \overrightarrow{H}}$$

Valida doar pentru materiale liniare

unde: $\chi_m$ este susceptibilitatea magnetica a materialului.

Cand susceptibilitatea magnetica depinde de intensitatea campului magnetic H, se spune ca **mediul este neliniar**, deoarece toate ecuatiile de camp devin ecuatii neliniare. Cand susceptibilitatea magnetica depinde de pozitie in volumul corpului magnetic, se spune ca problema este **neomogena**, spre deosebire de cazul omogen, cand proprietatile de material sunt constante in intregul volum. Mai mult, proprietatile magnetice pot depinde de directia campului aplicat. Aceasta proprietate se numeste **anizotropia** materialelor magnetice.

# Campuri magnetostatice

## Legile magnetostaticii

### Legatura intre vectorii B, H si M

Suma vectoriala dintre vectorii magnetizatie (ambele componente) si intensitatea campului magnetic, inmultita cu permeabilitatea vidului, este egala, in orice moment si punct, cu inductia magnetica:

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 \cdot \left( \overrightarrow{H} + \overrightarrow{M_t} + \overrightarrow{M_p} \right)$$

Pentru materiale fara magnetizatie permanenta :

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 \cdot \left( \overrightarrow{H} + \overrightarrow{M_t} \right)$$

Pentru materiale liniare fara magnetizatie permanenta :

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 \cdot \left( \overrightarrow{H} + \overrightarrow{M_t} \right) = \mu_0 \cdot \left( \overrightarrow{H} + \chi_m \cdot \overrightarrow{H} \right) = \mu_0 \cdot \left( 1 + \chi_m \right) \cdot \overrightarrow{H} = \mu \cdot \overrightarrow{H}$$

Pentru materiale anizotrope si fara magnetizatie permanenta :

$$\overrightarrow{B} = \overline{\overline{\mu}} \cdot \overrightarrow{H}$$

# Campuri magnetostatice

## Legile magnetostaticii

### Legatura intre vectorii B, H si M

In acest caz, relatia dintre vectorul inductie magnetica si vectorul intensitate camp magnetic implica prezenta unui tensor:

$$\vec{B} = \overline{\overline{\mu}} \cdot \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}$$

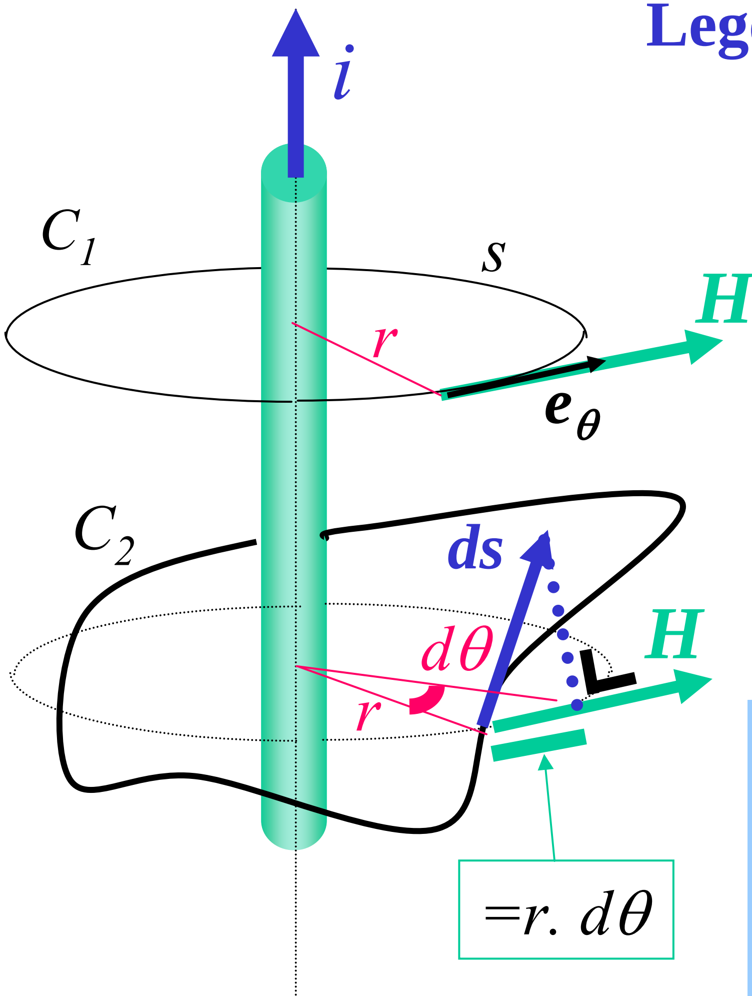
Din fericire, de obicei este suficient sa consideram mediul **omogen**, **liniar** si **izotrop**. Acesta este cel mai simplu caz posibil.

Nota finala asupra semnificatiei fizice a permeabilitatii magnetice relative: indica de cate ori creste sau scade intensitatea campului magnetic in volumul materialului magnetic (datorita efectului de magnetizare).

Note: In general, vectorul magnetizatie are 2 componente:
- o componenta temporara ($M_t$) si una permanenta ($M_p$)

# Campuri magnetostatice

## Legea lui Ampere




Sa se determine "circulatia vectorului ***H*** " de-a lungul unei curbe arbitrare *c*

$$\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{s} = i$$

Consecinte:

1. Mai multi curenti ce strabat suprafata delimitata de $C_2$ *se aduna*;
2. Curentii ce nu strabat suprafata delimitata de $C_2$ nu contribuie;
3. Pozitia curentilor in interiorul lui $C_2$ nu e importanta.

# Campuri magnetostatice

Forma diferentiala a legii lui Ampere poate fi dedusa astfel:

$$\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{s} = i \Rightarrow \oint_{C} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_C} \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$\iint_{S_C} rot\,\vec{H} \cdot d\vec{A} = \iint_{S_C} \vec{J} \cdot d\vec{A} \Rightarrow rot\,\vec{H} = \vec{J}$$

Forma diferentiala a legii lui Ampere (v = 0)

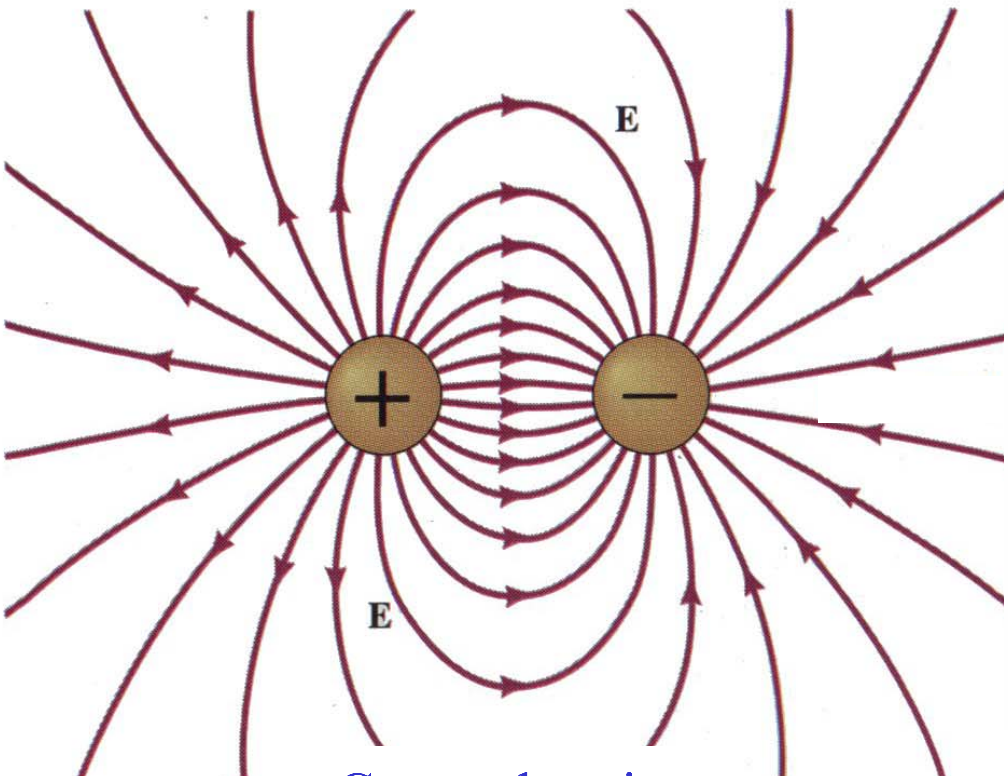
Este evident acum: curentii electrici sunt sursele ce creeaza rotoarele campului magnetic. Observatie: rotorul campului magnetic este ne-nul, fiind egal cu densitatea de curent electric, spre deosebire de campul electrostatic, al carui rotor este nul.

$$rot\,\vec{H} = \vec{J}$$

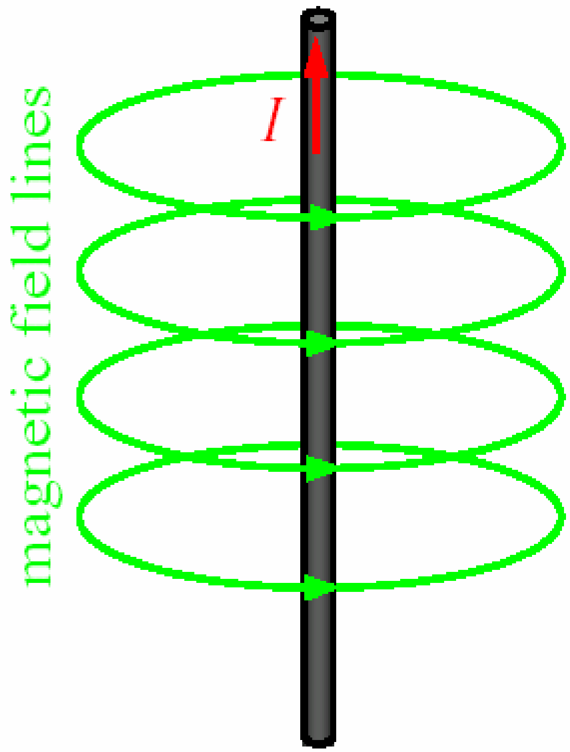
$$rot\,\overline{E} = 0$$

# Campuri magnetostatice

**Camp irotational** **Camp rotational**




Camp electric




Camp magnetic

$$rot\,\overline{E} = 0$$

$$rot\,\vec{H} = \vec{J}$$

# Campuri magnetostatice

Observatie: pana acum s-a considerat ca suprafata S este imobila.

In cazul cel mai general, al unui mediu aflat in miscare (suprafata are o viteza relativa fata de mediu), legea lui Ampere in forma diferentiala trebuie completata cu:

$$rot\,\overrightarrow{H} = \overrightarrow{J} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} + \rho_v \cdot \vec{v} + rot\left(\overrightarrow{D} \times \vec{v}\right) \quad , \quad A/m^2$$

Densitate de curent de conductie

Densitate de curent de deplasare

Densitate de curent de convectie

Densitate de curent Roentgen

Din punct de vedere fizic, curentul de convectie apare datorita deplasarii, cu viteza $v$ (fata de suprafata $S_C$), a corpurilor incarcate cu sarcina (avand densitatea de volum a sarcinii $\rho_v$ ) iar curentul Roentgen apare datorita deplasarii cu viteza $v$ a corpurilor polarizate.

# Campuri magnetostatice

$$\boxed{rot\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \rho_v \cdot \vec{v} + rot\left(\vec{D} \times \vec{v}\right)}$$

$$\boxed{\oint_{C(S)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_{S} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \rho_v \cdot \vec{v} + rot\left(\vec{D} \times \vec{v}\right)\right) \cdot d\vec{A}}$$

$$\boxed{\oint_{C(S)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = i + i_D + i_C + i_R}$$

**Forma integrala a legii lui Ampere**

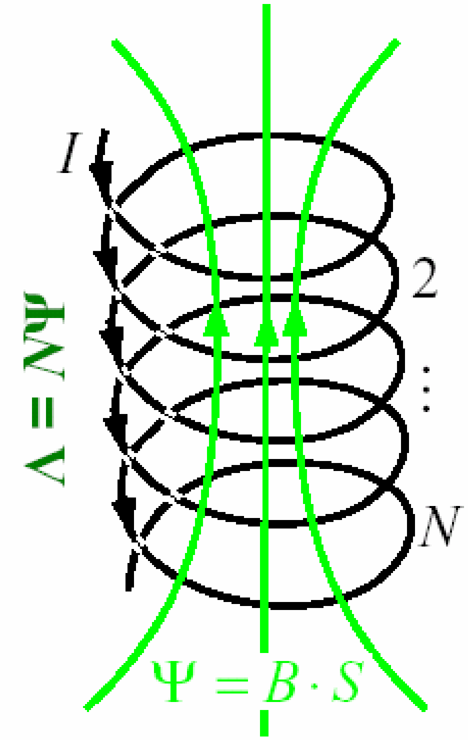
In cazul cel mai general, un camp magnetic poate fi produs prin:

- curenti de conductie
- curenti de deplasare
- curenti de convectie
- curenti Roentgen

# Campuri magnetostatice

## Flux fascicular

In inductoare, e important nu doar sa cream un flux magnetic cat mai puternic, dar este important si ca acest flux sa strabata suprafata mai multor bobine. *Suma tuturor fluxurilor ce strabat suprafetele delimitate de spirele unei bobine se numeste flux fascicular.*




In majoritatea bobinelor, fluxul ce strabate fiecare spira este acelasi, deci fluxul fascicular este: $\Lambda = N\Psi, \quad \mathrm{Wb}$

Astfel, daca inductia magnetica este uniforma in interiorul bobinei, fluxul fascicular este: $\Lambda = NBS, \quad \mathrm{Wb}$

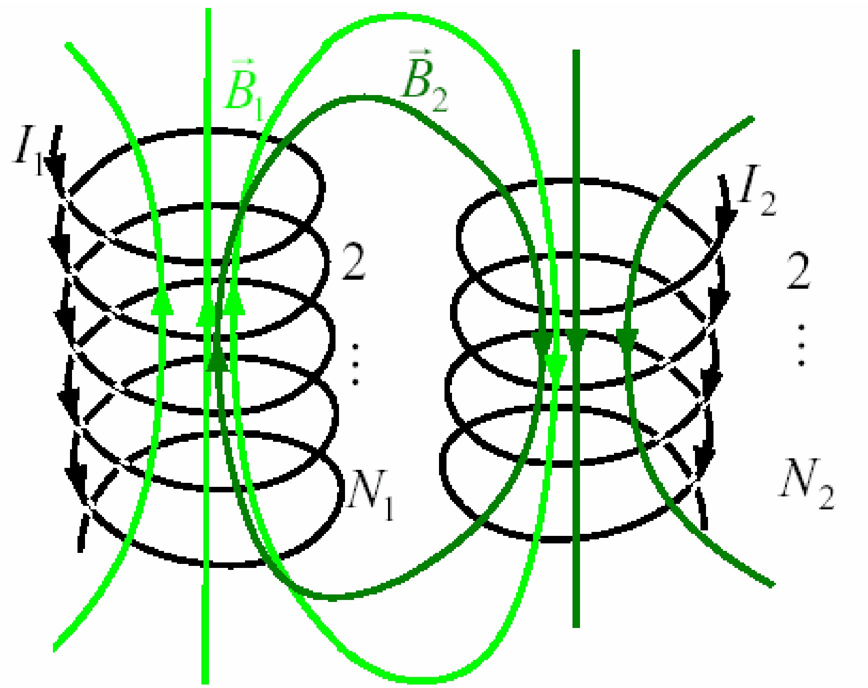
# Campuri magnetostatice

## Flux fascicular

Fluxul fascicular poate fi flux propriu sau flux mutual. O bobina izolata are doar flux propriu, adica fluxul creat de propriul sau curent, care circula prin spirele sale.

Fluxul mutual exista **doar** daca exista o pereche de bobine cuplate magnetic.

Fluxul fascicular mutual al bobinei 1 este datorat campului magnetic al bobinei 2, care induce o t.e.m. in bobina 1.




$$\Lambda_{11} = N_1 \Psi_{11} \sim N_1^2 I_1 \qquad \Lambda_{22} = N_2 \Psi_{22} \sim N_2^2 I_2$$

$$\Lambda_{12} = N_1 \Psi_{12} \sim N_1 N_2 I_2 \qquad \Lambda_{21} = N_2 \Psi_{21} \sim N_2 N_1 I_1$$

$$\underline{\Lambda_1 = \Lambda_{11} + \Lambda_{12}} \qquad \underline{\Lambda_2 = \Lambda_{22} + \Lambda_{21}}$$

# Campuri magnetostatice

## Inductivitate proprie si mutuala

S-a aratat deja ca fluxul magnetic (si deci si fluxul fascicular) in bobine solenoidale sau toroidale este proportional cu curentul. Coeficientul de proportionalitate dintre fluxul fascicular si curent se numeste *inductivitate L*:

$$\Lambda = LI, \quad \mathrm{Wb{=}V\times s} \qquad \Rightarrow \boxed{L = \frac{\Lambda}{I}}, \quad \mathrm{H} = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{V\times s}}{\mathrm{A}} = \Omega\times\mathrm{s}$$

Inductivitatea proprie corespunde cu fluxul fascicular propriu:

$$L_{11} = \frac{\Lambda_{11}}{I_1}, \quad \mathrm{H}$$

Inductivitatea mutuala este definita prin intermediul fluxului fascicular mutual:

$$M_{21} = M_{12} = \frac{\Lambda_{21}}{I_1} = \frac{\Lambda_{12}}{I_2}, \quad \mathrm{H}$$

# Campuri magnetostatice

## Inductivitate proprie si mutuala

Se poate demonstra ca fluxul creat de un curent constant este proportional cu acest curent, deci *inductivitatea circuitului parcurs de acest curent este constanta, daca si permeabilitatea magnetica este constanta.*

$$\boxed{\Psi_{11} = \iint_{S_1} \overrightarrow{B_1} \cdot d\overrightarrow{A}_1 \,, \quad Wb}$$

Din legea lui Biot-Savart, inductia magnetica produsa de curentul ce parcurge conturul $C_1$ intr-un punct oarecare este:

$$\boxed{\overrightarrow{B_1} = \frac{\mu \cdot I_1}{4 \cdot \pi} \oint_{C_1} \frac{d\overrightarrow{s_1} \times \vec{r}}{r^3}, \quad T}$$

Considerand o bucla $C_1$ parcursa de curent, fluxul magnetic prin suprafata $S_1$ delimitata de aceasta bucla este:

$$\boxed{\Psi_{11} = \iint_{S_1} \left( \frac{\mu \cdot I_1}{4 \cdot \pi} \oint_{C_1} \frac{d\overrightarrow{s_1} \times \vec{r}}{r^3} \right) \cdot d\overrightarrow{A} \,, \quad Wb \qquad \Psi_{11} \propto \mu \cdot I_1}$$

# Campuri magnetostatice

## Inductivitate proprie si mutuala

Daca permeabilitatea magnetica $\mu$ nu depinde de curent, inductivitatea este si ea o constanta a unei configuratii, care nu depinde de curentul $I$.

Pentru materialele feromagnetice, permeabilitatea magnetica depinde de intensitatea campului H. Astfel, depinde si de curent. De aceea, inductivitatea bobinelor cu miez feromagnetic este o functie neliniara de curent.

$$\Psi \sim \mu(I)I \Rightarrow \Psi = L(I)\cdot I, \quad \text{Wb}$$

In general, inductivitatea proprie a oricarui contur $C$ poate fi exprimata prin intermediul vectorilor din magnetostatica astfel:

$$\boxed{L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\iint\limits_{S[C]} \vec{B}\cdot d\vec{A}}{\oint\limits_{C} \vec{H}\cdot d\vec{s}} = \mu \cdot \frac{\iint\limits_{S[C]} \vec{H}\cdot d\vec{A}}{\oint\limits_{C} \vec{H}\cdot d\vec{s}},}$$

# Campuri magnetostatice

$$L = \mu \cdot \frac{\iint\limits_{S[C]} \vec{H} \cdot d\vec{A}}{\oint\limits_{C} \vec{H} \cdot d\vec{s}}, \qquad [H]$$

$$C = \varepsilon \cdot \frac{\iint\limits_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\int\limits_{1}^{2} \vec{E} \cdot d\vec{s}}, \qquad [F]$$

Dupa cum s-a aratat pentru condensatoare: $\boxed{\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma}}$

Se poate demonstra ca: $\boxed{L_{ext} \cdot C = \mu \cdot \varepsilon}$

Nota: $L_{ext}$ reprezinta doar inductivitatea externa, legata de fluxul extern al unui inductor.

Intr-un inductor precum cablul coaxial sau o linie de transmisie formata din doua fire paralele, inductivitatea produsa de fluxul intern al conductoarelor se numeste inductivitate interna $L_{int}$ in vreme ce cea produsa de fluxul extern se numeste inductivitate externa. Inductivitatea totala L este:

$$\boxed{L = L_{int} + L_{ext}}$$

# Energia campului magnetostatic

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \psi_i \cdot i_i$$

Relatia de mai sus reda expresia energiei stocate in campul magnetic al mai multor circuite electrice parcurse de curent.

$$w_m = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H \cdot H = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H$$

Densitate de energie magnetica

In general:

$$w_m = \frac{1}{2} \cdot \vec{B} \cdot \vec{H}$$

$$W_m = \iiint_V w_e \cdot dv = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{H} \cdot dv$$

# Analogie

| Electrostatica | Magnetostatica |
| --- | --- |
| Potential scalar - V | Potential vector - A |
| Camp electric - E | Camp magnetic - H |
| Permitivitate | Permeabilitate |
| Densitate volumica de sarcina | Densitate de curent |
| Densitate superficiala de sarcina | Densitate superficiala de curent |
| Capacitate - C | Inductivitate - L |
| Ecuatie Laplace | Ecuatie Laplace |
| Ecuatie Poisson | Ecuatie Poisson |

# Camp electromagnetic

## Introducere

Pana acum avem:

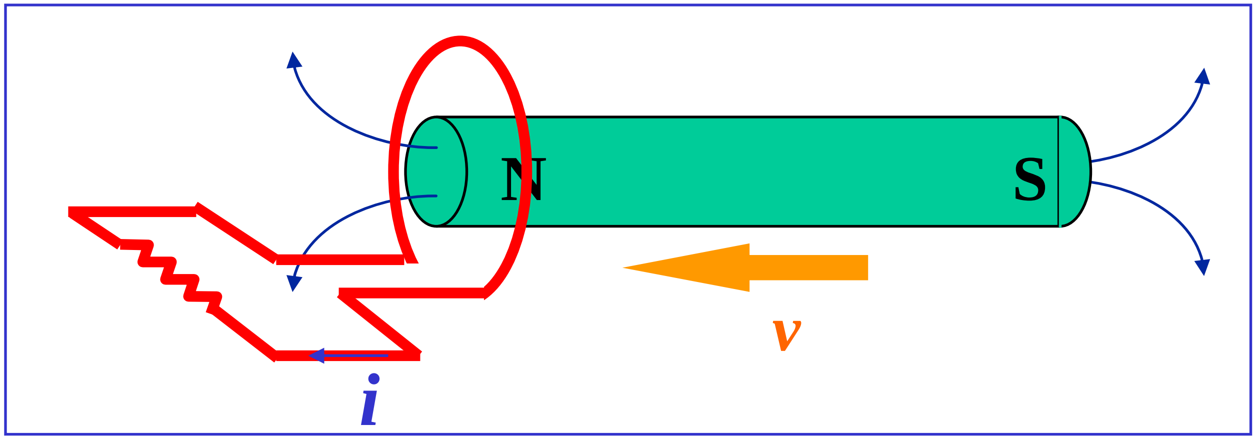
$$\boxed{div\vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon}} \quad \boxed{rot\vec{E} = 0} \quad \boxed{div\vec{B} = 0} \quad \boxed{rot\vec{H} = \vec{J}}$$

**Camp electrostatic** **Camp magnetostatic**

Aceste ecuatii sunt corecte pentru campuri statice, adica acele campuri care nu variaza in timp. Cand campurile variaza ca functii de timp, ecuatiilor cu rotor li se adauga un termen in plus.

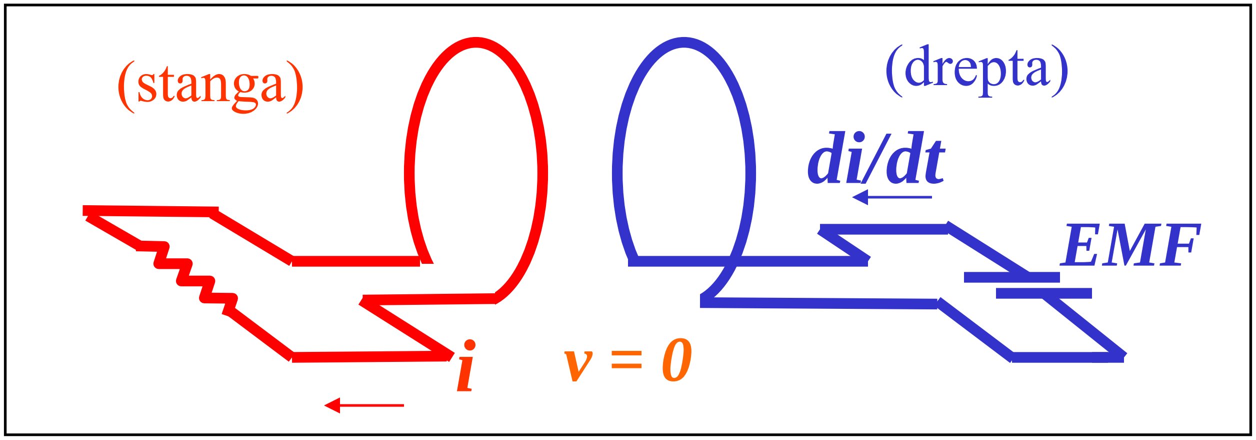
$$\boxed{rot\vec{E} = 0} \text{ se adauga } \boxed{-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} \qquad \boxed{rot\vec{H} = \vec{J}} \text{ se adauga } \boxed{\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}$$

# Experimentele lui Faraday



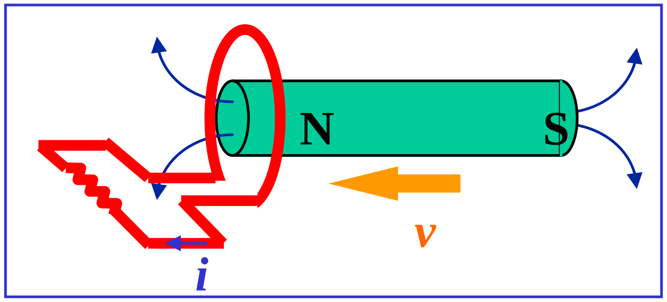

- Michael Faraday a descoperit inductia el-mg in 1831.
- Miscarea magnetului induce un curent i.
- Inversarea sensului de deplasare duce la inversarea sensului curentului.
- Miscarea spirei induce un curent.
- Curentul indus este generat de o *TEM indusa*.

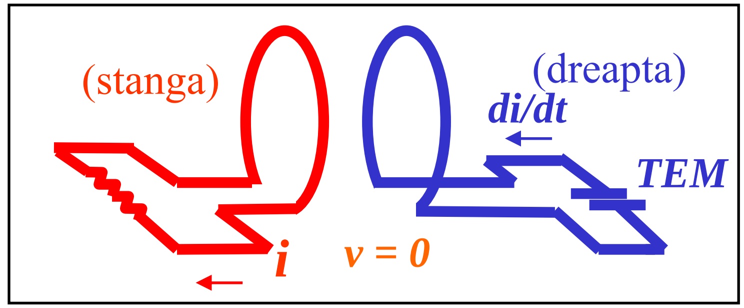
# Experimentele lui Faraday




- Variatia curentului in bobina din partea dreapta (albastra) induce un curent in bobina din partea stanga (rosie).
- Curentul indus nu depinde de valoarea intensitatii curentului din bobina din partea drepta.
- Curentul indus depinde de ***di/dt***.

# Experimentele lui Faraday

1) 


2) 


- Miscarea magnetului modifica fluxul Ψ (1) – TEM indusa prin miscare.
- Variatia curentului modifica fluxul Ψ (2) – TEM indusa prin transformare.

***Faraday:*** variatia fluxului induce o TEM (e).

$$e = -\frac{d\Psi}{dt}$$

## Legea lui Faraday

TEM indusa in spira

egala cu viteza de variatie a fluxului prin suprafata spirei.

# Camp electromagnetic

Faraday a formulat legea ce-i poarta numele

Tensiunea electromotoare indusa (TEM) - $e_{tem}$ sau simplu (e), in orice contur conductor inchis (circuit) este egala cu derivata in raport cu timpul a fluxului magnetic total prin suprafata delimitata de acel contur.

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_{S_\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{A}\right)$$

Forma integrala a legii lui Faraday

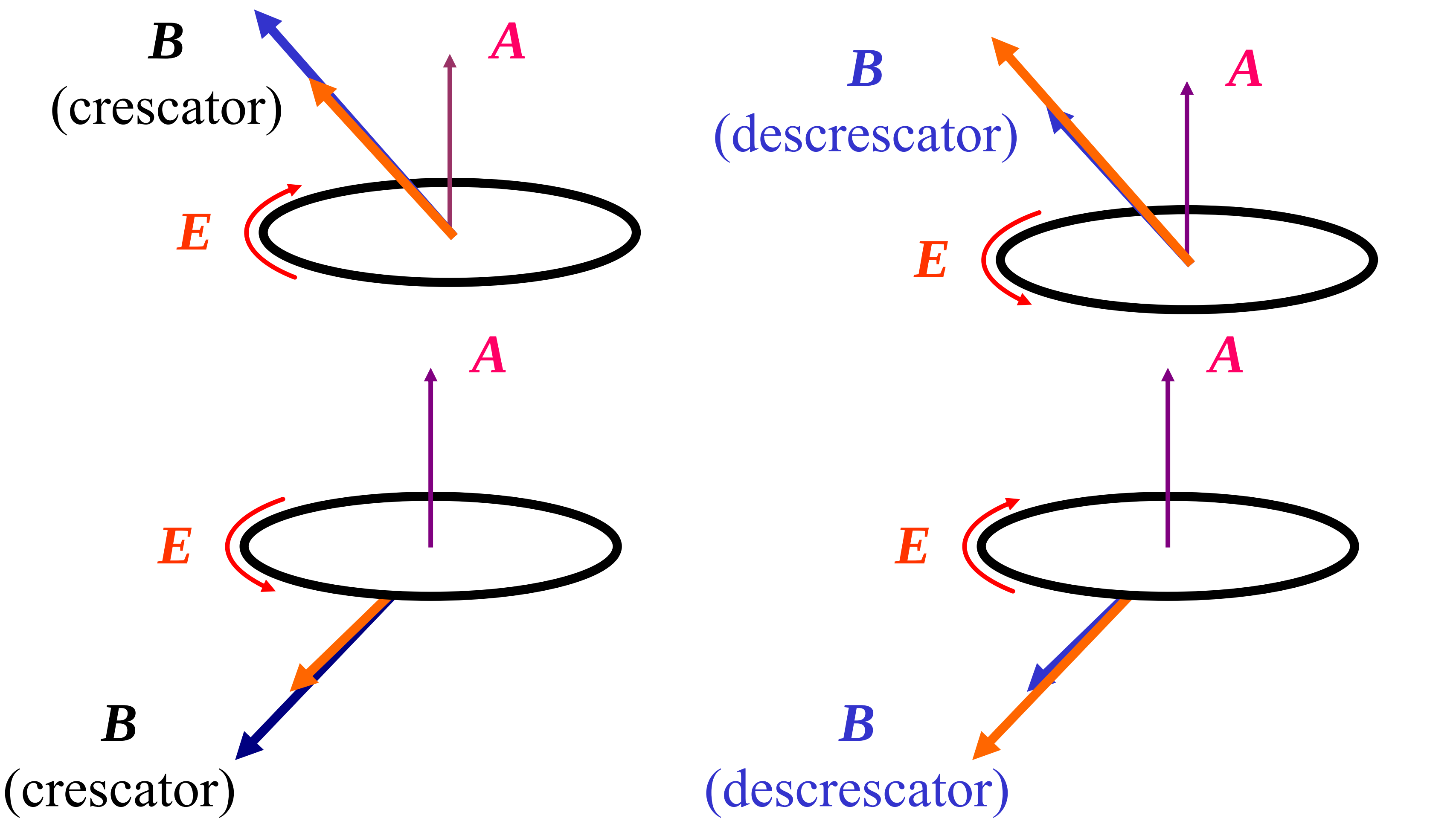
Semnul minus arata ca tem indusa (si curentii) vor actiona a.i. sa se opuna variatiei fluxului ce a creat-o. Aceasta lege este cunoscuta ca legea lui Lentz.

Daca circuitul consta din N spire toate avand aceeasi arie si daca Ψ este fluxul printr-o spira, tem totala indusa este:

$$\boxed{e = -\frac{d\Lambda}{dt} = -N\cdot\frac{d\Psi}{dt}}$$

# Camp electromagnetic

**Legea lui Lenz :** Directia oricarui efect al inductiei el-mg (curent indus) este a.i. acesta se opune cauzei ce l-a produs. (Se opune schimbarii=inertie!)



# Camp electromagnetic

Forma diferentiala a legii lui Faraday

$$e = -\frac{d\Psi}{dt}$$

$$e = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\Psi = \iint_{S_{\Gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Nota: $S_{\Gamma}$ este o suprafata deschisa.

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\left( \iint_{S_{\Gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{A} \right)$$

# Camp electromagnetic

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_{S_\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{A}\right)$$

Aplicand teorema lui Stokes:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \left(\iint_{S_\Gamma} rot\,\vec{E}\cdot d\vec{A}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\iint_{S_\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{A}\right)$$

Presupunand ca suprafata $S_\Gamma$ este mobila cu viteza *v*, derivata in raport cu timpul a integralei de suprafata va fi:

$$\frac{d}{dt}\left(\iint_{S_\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{A}\right) = \underbrace{\left(\iint_{S_\Gamma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{A}\right)}_{\text{Suprafata este imobila}} + \underbrace{\iint_{S_\Gamma} rot\left(\vec{B}\times\vec{v}\right)\cdot d\vec{A}}_{\text{Suprafata este mobila cu viteza v}}$$

# Camp electromagnetic

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_{S_\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{A}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\iint_{S_\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{A}\right) = \left(\iint_{S_\Gamma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{A}\right) + \iint_{S_\Gamma} rot\left(\vec{B}\times\vec{v}\right)\cdot d\vec{A}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\iint_{S_\Gamma} rot\,\vec{E}\cdot d\vec{A}\right) = -\left(\iint_{S_\Gamma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{A}\right) - \iint_{S_\Gamma} rot\left(\vec{B}\times\vec{v}\right)\cdot d\vec{A}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + rot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)}$$

Forma diferentiala a legii lui Faraday

# Camp electromagnetic

Tensiunea electromotoare indusa (tem) intr-un circuit poate fi separata in doi termeni:

- Componenta tem indusa prin transformare, datorata variatiei in timp a vectorului inductie magnetica B :

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow e_{transformer} = \oint_{\Gamma} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \iint_{S_\Gamma} rot\,\vec{E}\cdot d\vec{A} = -\iint_{S_\Gamma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{A}$$

- Componenta tem indusa prin miscare, datorata miscarii circuitului:

$$\vec{E} = \vec{v}\times\vec{B} \Rightarrow e_{motional} = \oint_{\Gamma} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{s}$$

Nota: Campul electric indus este non-conservativ!!!! $rot\,\vec{E} \neq 0$

Campul electric este conservativ doar in regim electrostatic!!!!

$$rot\,\vec{E} = 0$$

# Camp electromagnetic

Cazuri particulare :

1) Suprafata este imobila (v = 0):

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad V}$$

TEM indusa prin miscare e nula:

$$\boxed{e_{motional} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{s} = 0}$$

TEM indusa prin transformare e ne-nula:

$$\boxed{e_{transformer} = -\iint_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\oint_{\Gamma} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{s}}$$

Forma diferentiala a legii lui Faraday:

$$\boxed{rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

2) Suprafata e mobila dar campul magnetic B este constant in timp:

$$\boxed{\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} - grad V}$$

TEM indusa prin miscare e ne-nula:

$$\boxed{e_{motional} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{s}}$$

# Camp electromagnetic

## Ecuatiile lui Maxwell (v = 0)

| Forma integrala | Forma diferentiala | Semnificatie |
|---|---|---|
| $\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}}$ | $\boxed{rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ | Legea lui Faraday<br>**Maxwell 1** |
| $\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{s} = i + \iint_{S} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A}}$ | $\boxed{rot\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$ | Legea lui Ampère<br>**Maxwell 2** |
| $\boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q}$ | $\boxed{div\,\vec{D} = \rho_v}$ | Legea fluxului electric<br>**Maxwell 3** |
| $\boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0}$ | $\boxed{div\,\vec{B} = 0}$ | Legea fluxului magnetic<br>**Maxwell 4** |

# Camp electromagnetic

## Ecuatiile lui Maxwell

In regiuni fara pierderi ($\sigma=0$) si fara surse ($J=0$), ecuatiile lui Maxwell sunt perfect simetrice, evidentiind faptul ca un camp electric variabil in timp genereaza un camp magnetic, a carui variatie in timp creeaza la randul ei un camp electric.

$$\left.\begin{aligned} \boxed{rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \\ \boxed{rot\,\vec{H} = +\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \boxed{rot\,\vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}} \\ \boxed{rot\,\vec{H} = +\varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \end{aligned}$$

Cele doua ecuatii fundamentale ale lui Maxwell sunt <u>axiome ale electromagnetismului</u>. Ele *sunt presupuse a fi corecte.* Totusi, corectitudinea lor este demonstrata de nenumarate rezultate experimentale. Intreaga tehnologie moderna, electrica, electronica si de comunicatii se bazeaza pe aceste ecuatii fundamentale.

# Camp electromagnetic

$$rot\,\vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow rot\left(rot\,\vec{E}\right) = -\mu \cdot \frac{\partial}{\partial t} rot\,\vec{H}$$

$$rot\,\vec{H} = +\varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$rot\left(rot\,\vec{E}\right) = -\mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow grad\left(div\,\vec{E}\right) - \Delta\vec{E} = -\mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

In vid:

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho_V}{\varepsilon} = 0$$

$$\Delta\vec{E} = \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

sau

$$\Delta\vec{H} = \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

cu:

$$\mu \cdot \varepsilon = \frac{1}{c^2} \cdot \mu_r \cdot \varepsilon_r$$

In vid:

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

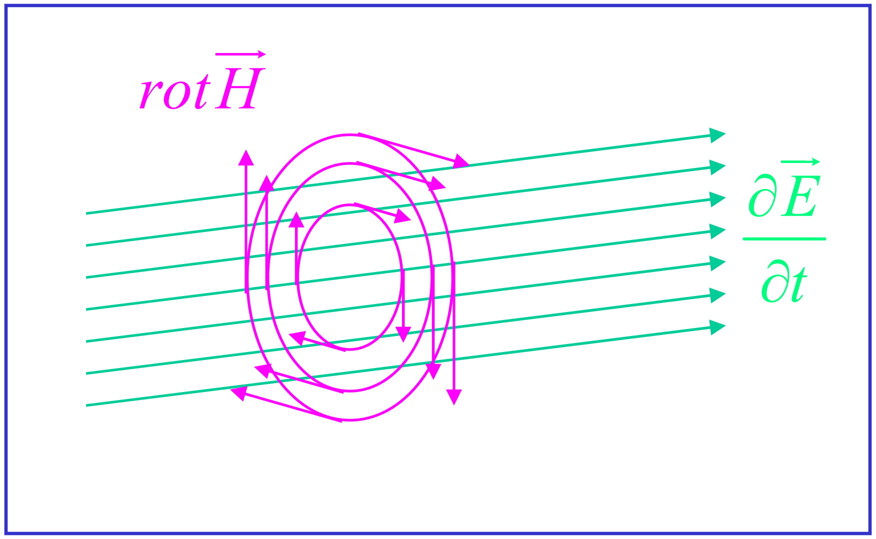
$$\Delta\vec{H} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

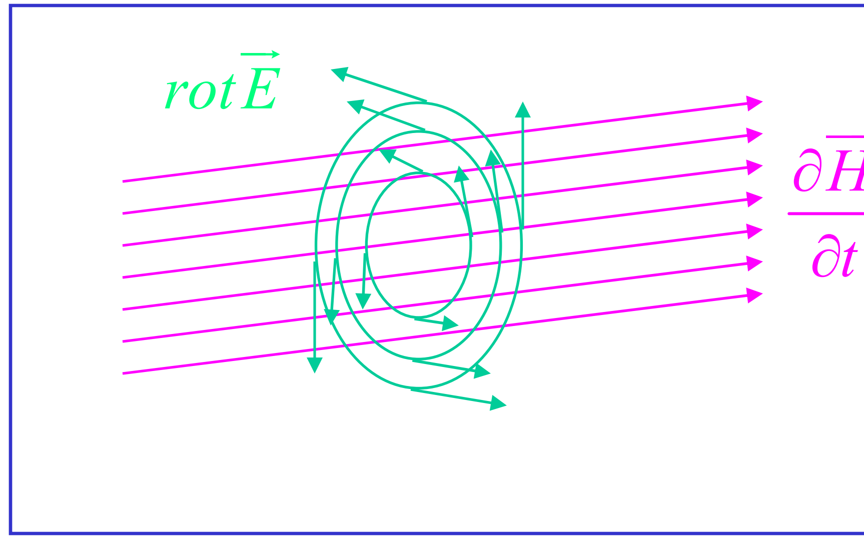
Ecuatiile undelor

# Camp electromagnetic

$$\boxed{rot\,\vec{H} = +\varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

$$\boxed{rot\,\vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}$$




**Caz special : unde plane**

$$\vec{E} = E_y(x,t)\cdot\vec{j}$$

$$\vec{H} = H_z(x,t)\cdot\vec{k}$$

satisfac ecuatia undelor

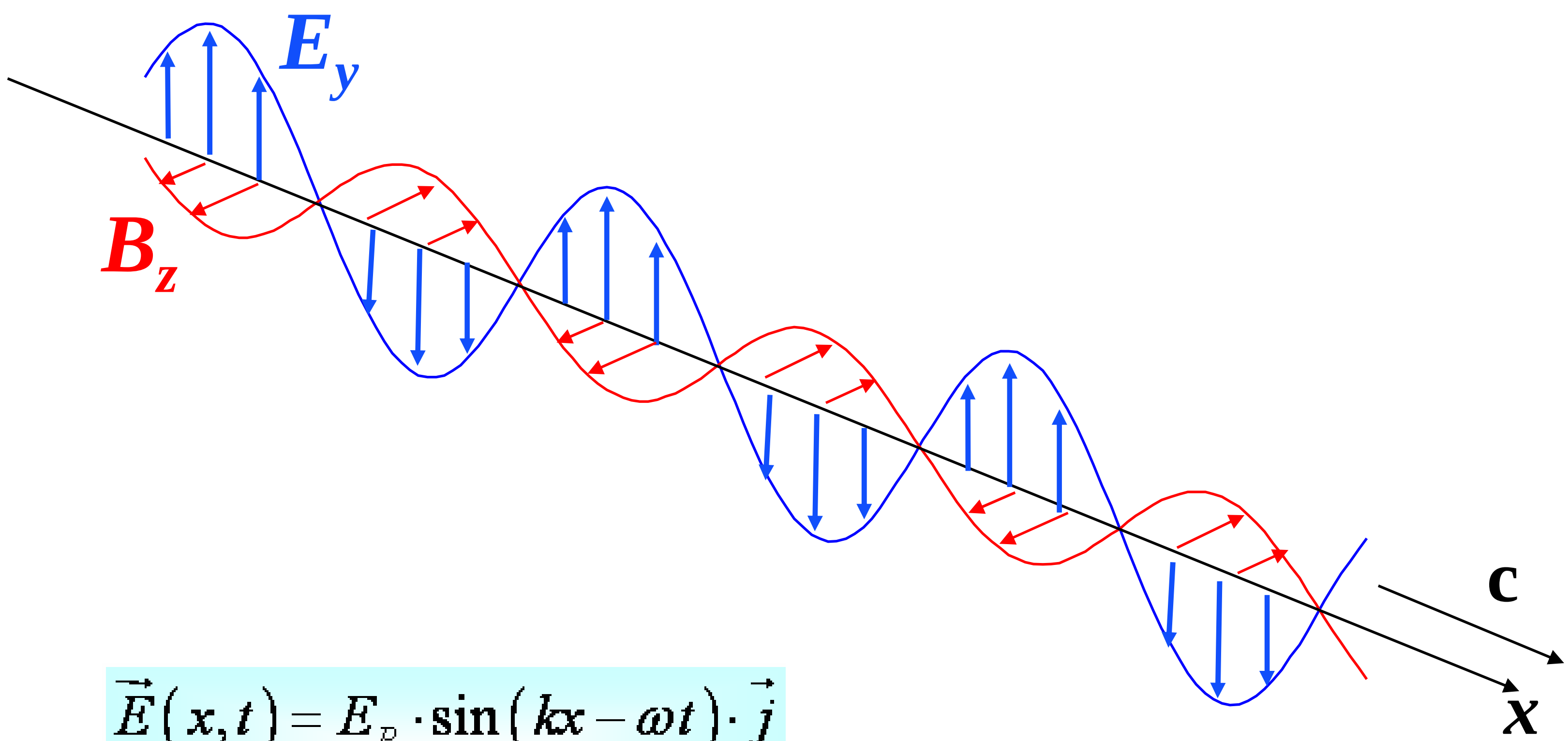
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Cu solutia cunoscuta de forma

$$\psi = A\sin(\omega t + \phi)$$

# Camp electromagnetic

Unda electromagnetica plana




$$\vec{E}(x,t) = E_P \cdot \sin(kx - \omega t) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{B}(x,t) = B_P \cdot \sin(kx - \omega t) \cdot \vec{k}$$