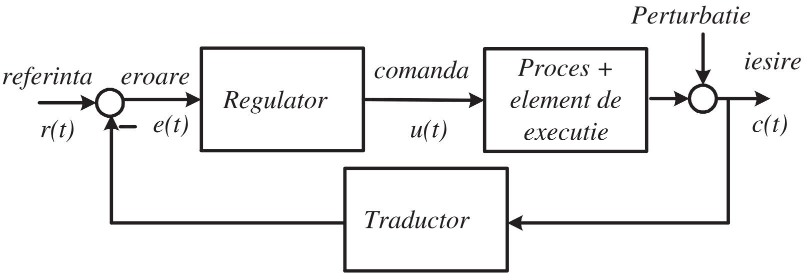
PID - Tehnica fundamentală a controlului automat

Paula Raica
Departmentul de Automatică
Str. Dorobantilor 71-73, sala C21, tel: 0264 - 401267
Str. Baritiu 26-28, sala C14, tel: 0264 - 202368
email: Paula.Raica@aut.utcluj.ro

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Introducere

Un sistem de control automat este proiectat pentru a genera un semnal de *comandă* care să corecteze comportamentul unui proces astfel încât să aducă ieșirea procesului la o valoare dorită numită *referință*.

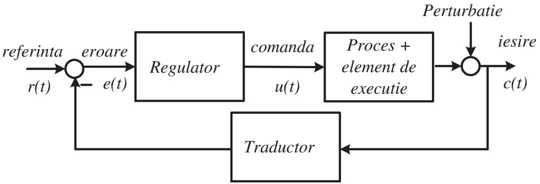


Exemplu

Sistemul de control a temperaturii într-o casă:

- Procesul - casa,
- Iesirea procesului - temperatura
- Referință - temperatura dorită în casă,
- Traductor/Senzor - Termocuplu care măsoară temperatura
- Regulator - termostat
- Semnalul de comandă - semnalul trimis spre aparatul de aer condiționat
- Elementul de execuție - aparatul de aer condiționat
- Perturbație - sursă aleatoare de căldură

Algoritmul PID



- PID (proportional-integrator-derivator) este algoritmul de control cel mau mult utilizat în automatizări industriale (95 %).

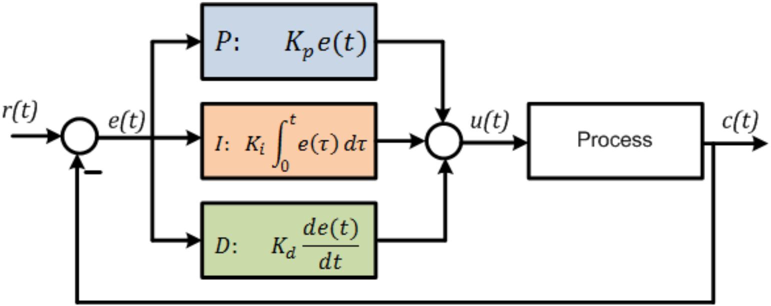
$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

- $u(t)$ - semnalul de comandă
- $e(t)$ - eroarea = diferența între referință și măsură

- K_P - *constanta de proporționalitate*
- K_I - *constanta de integrare*
- K_D - *constanta de derivare*

Ieșirea regulatorului PID ca funcție de timp:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$



Regulator PID

Funcția de transfer a unui regulator PID (ideal)

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt} \; |\mathcal{L}$$

$$U(s) = K_P E(s) + K_I \frac{1}{s} E(s) + K_D s E(s) = (K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s) E(s)$$

$$G_{PID}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s$$

regulator proporțional (P): $G_P(s) = K_P$

regulator proporțional-integrator (PI): $G_{PI}(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$

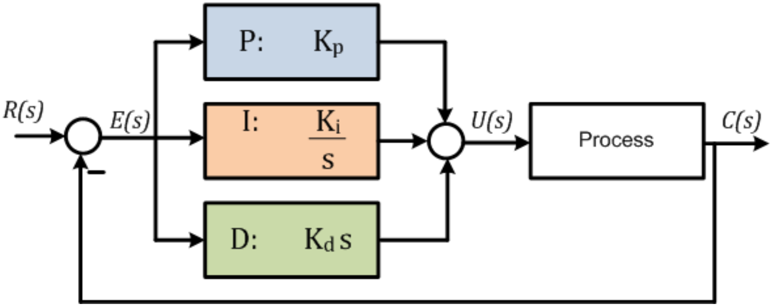
regulator proporțional-derivator (PD): $G_{PD}(s) = K_P + K_D \cdot s$

regulator proporțional-integrator-derivator (PID): $G_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$

Regulator PID

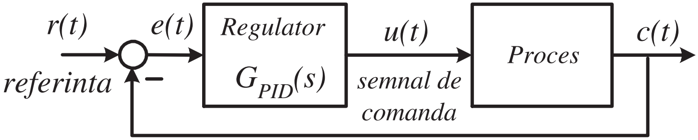
Funcția de transfer a unui regulator PID (ideal)

$$G_{PID}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s$$



Efectul termenilor PID

Se consideră un sistem în buclă închisă, cu un proces cu funcția de transfer $G(s)$ și un regulator PID.



Pentru fiecare termen P, I și D, se analizează:

- eroarea $e(t)$ și semnalul de comandă $u(t)$
- ieșirea procesului $c(t)$

Acțiunea P

$K_D = 0$, $K_I = 0$. Ieșirea regulatorului P este:

$$u(t) = K_P e(t) \text{ și funcția de transfer: } G_P(s) = K_P$$

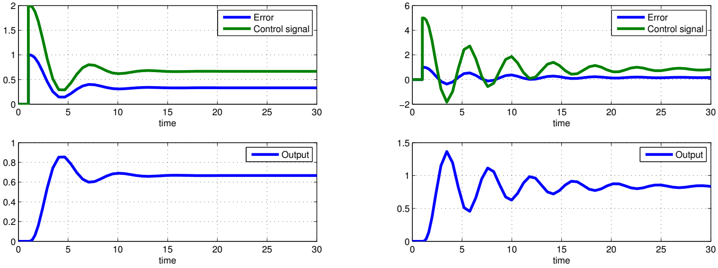


Figure: (stânga) $K_P = 2$, (dreapta) $K_P = 5$

Acțiunea P

Se observă:

- eroarea staționară descrește cu creșterea constantei K_P
- răspunsul sistemului devine mai oscilant cu creșterea constantei K_P

Acțiunea I

$K_D = 0$. Ieșirea regulatorului PI este:

$$u(t) = K_P e(t) + \int_0^t e(\tau) d\tau \text{ și funcția de transfer: } G_{PI}(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

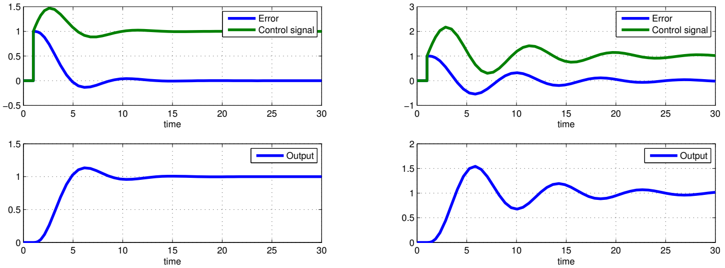


Figure: Control PI. (stânga) $K_P = 1, K_I = 0.5$, (dreapta) $K_P = 1, K_I = 1$

Acțiunea I

Se observă:

- ieșirea procesului este mai rapidă (timp de creștere mai mic), dar este mai oscilantă cu creșterea K_I
- Eroarea staționară este zero pentru orice valoare a constantei K_I
- Principala funcție a efectului integrator este anularea erorii staționare.
- Un regulator cu acțiune integrală produce un semnald e comandă care crește chiar și pentru o eroare mică pozitivă. O eroare negativă va deterina scăderea semnalului de comandă, chiarși pentru o valoare mică a erorii.

Acțiunea D

$K_I = 0$. Ieșirea regulatorului PD este:

$$u(t) = K_P e(t) + K_D \frac{de(t)}{dt} \text{ și funcția de transfer:}$$

$$G_{PI}(s) = G_{PI}(s) = K_P + K_D s$$

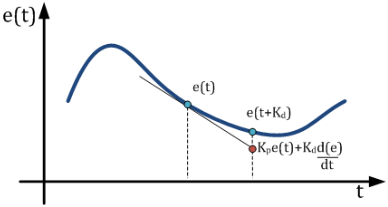


Figure: Derivata ca predicție

Acțiunea PD poate fi interpretată: semnalul de comandă este proporțional cu ieșirea *prezisă* a procesului, unde predicția se face extrapolând eroarea pe tangenta la curba erorii.

Acțiunea D

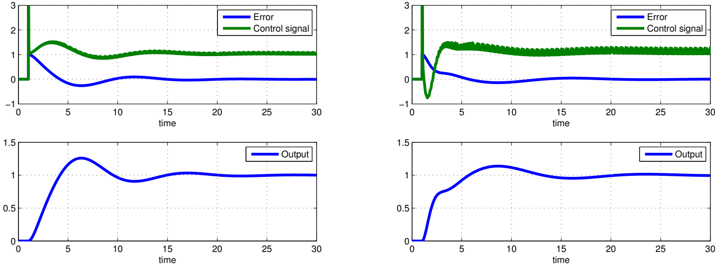


Figure: PID control. (stânga) $K_P = 1, K_I = 1, K_D = 1$, (dreapta) $K_P = 1, K_I = 1, K_D = 3$

ActiuneaD

Se observă:

- eroarea staționară este zero datorită termenului I
- suprareglajul descrește cu creșterea lui K_D
- datorită schimbării bruște în eroare la timpul inițial, termenul D are o valoare mare la timpul inițial și astfel determină un semnal de comandă foarte mare.

Alte forme ale regulatorului PID

- Funcția de transfer a unui regulator PID ideal este:

$$G_{PID}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s \qquad (1)$$

- Expresia de mai sus se poate rearanja:

$$\begin{aligned} G_{PID}(s) &= K_P \left(1 + \frac{K_I}{K_P s} + \frac{K_D}{K_P} s\right) \\ &= K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \qquad (2) \end{aligned}$$

- unde parametrii regulatorului sunt:
  - K_P constanta de proporționalitate
  - $T_i = \frac{K_P}{K_I}$ timpul (constanta de timp) de integrare
  - $T_d = \frac{K_D}{K_P}$ timpul (constanta de timp) de derivare

Regulatorul PID - filtrarea efectului derivator

- Expresiile anterioare ale unui regulator PID au presupus că un efect D ideal poate fi realizat, dar în realitate acest lucru nu este posibil
- Un regulator PID **real** are și un efect de întârziere inclus în termenul D, sub forma unui element cu funcția de transfer:

  $$G_D(s) = \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1}$$

  unde N are o valoarea mare.
- Funcția de transfer a unui PID real este:

$$G_{PID} = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} \right)$$

Acordarea regulatoarelor PID

Acordare = alegerea constantelor K_P, K_I, K_D astfel încât suma efectelor determină ieșirea procesului să evolueze astfel încât să se elimine eroarea.

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

Pentru un proces lent:

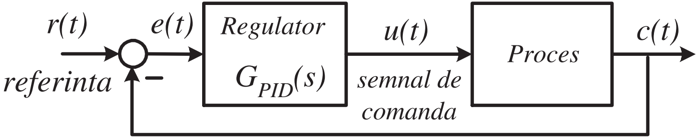
- Daca eroarea se schimbă brusc - termenul D se modifică primul
- Termenul P menținea ieșirea regulatorului până când eroarea este eliminată
- Termenul I contribuie la ieșirea regulatorului când eroarea se acumulează în timp. Poate produce suprareglaj.

Acordarea regulatoarelor PID

Trei abordări :

1. 'Trial-and-error' - se bazează pe experiența. Exemplu: scăderea K_I reduce suprareglajul dar reduce și viteza de variație a erorii
2. Abordarea analitică. Daca se cunoaște modelul matematic al procesului există numeroase metode de acordare a regulatoarelor.
3. Un compromis între abordarea experimentală și analitică. A fost propusă în 1942 de John G. Ziegler și Nathaniel B. Nichols de la Taylor Instruments.

Acordarea regulatoarelor PID



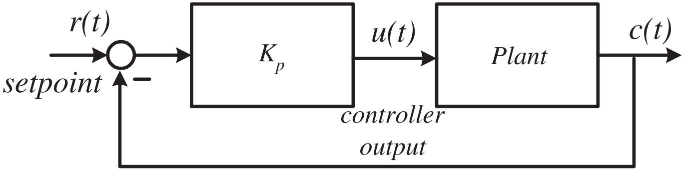
In practică ieșirea unui PID este dat de:

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

$$G_{PID}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

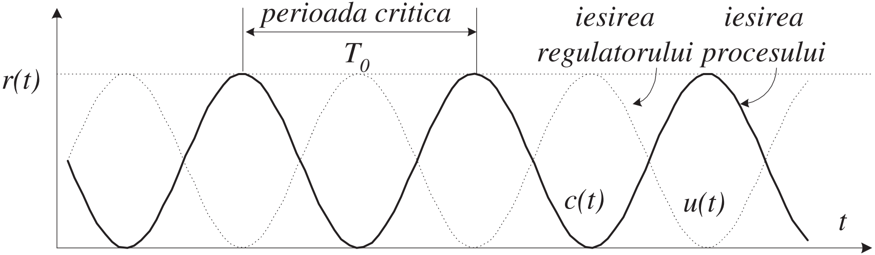
unde: K_p = constanta de proporționalitate, T_i = timpul de integrare, T_d = timpul de derivare

Metoda în buclă închisă



- Se setează $T_i = \infty$, și $T_d = 0$.
- Se crește K_p de la 0 la o valoare critică K_0 unde ieșirea $c(t)$, prezintă oscilații întreținute.

Metoda în buclă închisă



Se determină experimental:

- K_0 - constanta de proporționalitate critică
- T_0 - perioada critică a oscilațiilor.

PID - Metodele Ziegler-Nichols

Metoda în buclă închisă

Type of controller	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_0$	∞	0
PI	$0.45K_0$	$1/1.2\,T_0$	0
PID	$0.6K_0$	$0.5\,T_0$	$0.125\,T_0$

PID - Metodele Ziegler-Nichols

Un regulator PID acordat cu metoda ZN rezultă:

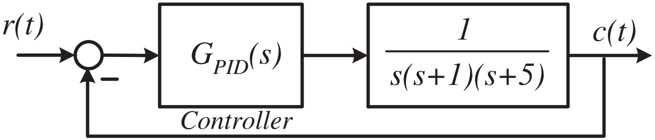
$$\begin{aligned} G_{PID}(s) &= K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)=0.6K_0\left(1+\frac{1}{0.5\,T_0 s}+0.125\,T_0 s\right) \\ &= 0.075K_0 T_0\frac{(s+4/T_o)^2}{s} \end{aligned}$$

Regulatorul are un pol în origine și un zero dublu la $s=-4/T_0$.

Termenul derivator. Dacă ieșirea procesului este afectată de zgomot termenul D poate determina variații mari ale comandei (ex. reglarea presiunii și nivelului)

PID - Metodele Ziegler-Nichols

Metoda se poate aplica pentru procese cu model cunoscut



$T_i = \infty$, $T_d = 0$, funcția de transfer a buclei închise:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{s(s+1)(s+5) + K_p}$$

Cu metoda Routh-Hurwitz se determină valoarea lui K_p pentru care sistemul este la limita de stabilitate.

PID - Metodele Ziegler-Nichols

Ecuația caracteristică:

$$s^3 + 6s^2 + 5s + K_p = 0$$

$$\begin{array}{lccc} s^3 & : & 1 & 5 \\ s^2 & : & 6 & K_p \\ s^1 & : & \dfrac{30 - K_p}{6} & 0 \\ s^0 & : & K_p & \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad K_0 = K_p = 30$$

$$s^3 + 6s^2 + 5s + 30 = 0$$

$$(s+6)(s^2+5) = (s+6)(s^2+\omega_n^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{5} = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot \frac{1}{T_0},$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.81$$

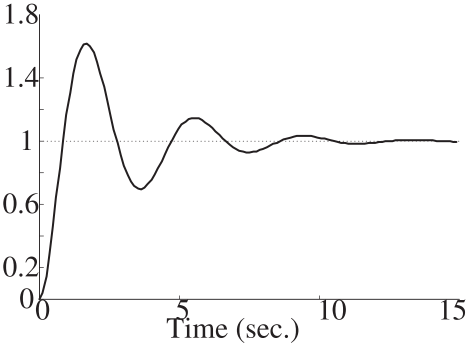
$$K_p = 0.6K_0 = 18, \quad T_i = 0.5T_0 = 1.405, \quad T_d = 0.125T_0 = 0.35$$

PID - Metodele Ziegler-Nichols

Funcția de transfer a regulatorului PID:

$$G_{PID}(s) = 18\left(1 + \frac{1}{1.405s} + 0.35s\right) = \frac{6.32(s+1.42)^2}{s}$$

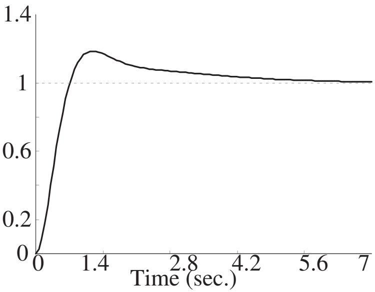
Răspunsul la treaptă a sistemului închis:



PID - Metodele Ziegler-Nichols

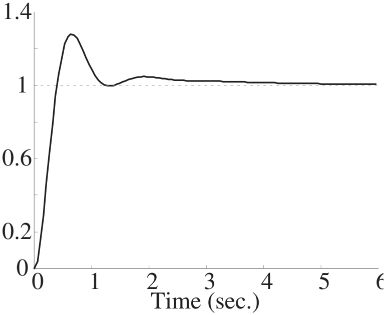
Se muta zeroul la -0.65:

$$G_{PID}(s) = \frac{13.84(s+0.65)^2}{s}$$



Se crește K_p la 39.42:

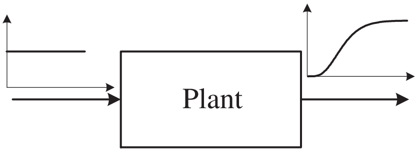
$$G_{PID}(s) = \frac{30.322(s+0.65)^2}{s}$$



PID - Metodele Ziegler-Nichols

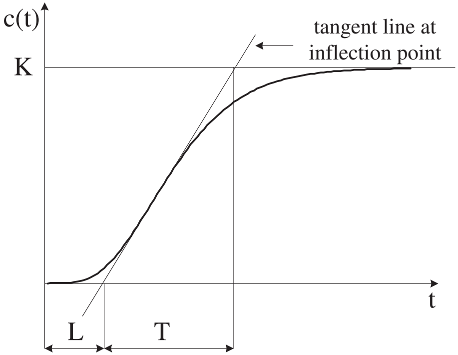
2. Metoda în buclă deschisă

Se aplică o treaptă la intrarea procesului și se măsoară ieșirea:



$\Rightarrow$ constanta de proporționalitate K, timpul mort L, constanta de timp T.

Metoda în buclă deschisă



Funcția de transfer a procesului = sistem de ordinul 1 cu timp mort:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts+1}$$

PID - Metodele Ziegler-Nichols

Metoda în buclă deschisă

Type of controller	K_p	T_i	T_d
P	T/L	∞	0
PI	$0.9T/L$	$L/0.3$	0
PID	$1.2T/L$	$2L$	$0.5L$

Regulatorul PID:

$$G_{PID}(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) = 0.6T\frac{(s + 1/L)^2}{s}$$

pol în origine și un zerou dublu la $s = -1/L$.

PID - Metodele Ziegler-Nichols

Metodele de acordare Zeigler-Nichols produc un răspuns tranzitoriu oscilant. Regulatorul trebuie acordat fin înainte de a fi pus în funcțiune.