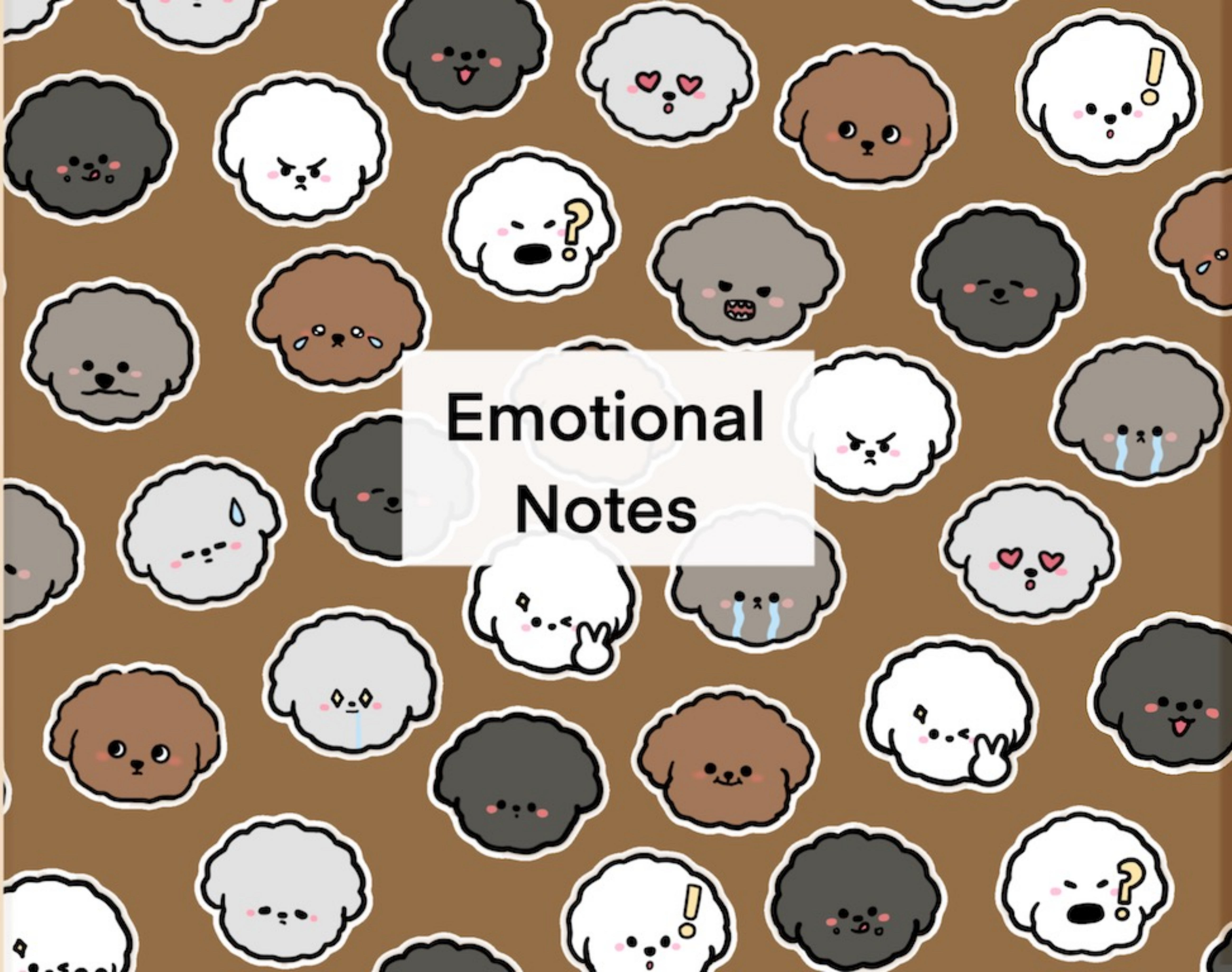
Emotional Notes



a) Se consideră un polinom $P \in \Pi_n$, $n \geq 3$. Să se determine restul împărțirii lui P la polinomul $(X-a)(X-b)$

b) Să se determine restul împărțirii unui polinom $P \in \Pi$ cu $\deg(P) \geq n+1$ la polinomul

$\ell(X) = (X-X_0)(X-X_1)\dots(X-X_n)$

~ Rezolvare ~

a) Vom folosi teorema împărțirii cu rest:

"Dacă $P, Q \in \Pi$ a.î. $\deg(P) \geq \deg(Q)$ atunci $\exists!$ $C, R \in \Pi$ cu proprietatea:

$$\begin{cases} P(X) = C(X) \cdot Q(X) + R(X) \\ \deg(R) < \deg(Q) \end{cases}$$ "

Π – mulțimea polinoamelor;

Π_n – mulțimea polinoamelor cu gradul $\leq n$.

În cazul nostru obținem: $\exists\, C, R \in \Pi$ a.î.

$$\begin{cases} P(X) = (X-a)(X-b)\,C(X) + R(X) \\ \deg(R) < \deg\big((X-a)(X-b)\big) = 2 \end{cases} \Rightarrow R(X) = \alpha X + \beta$$

$$\Rightarrow P(X) = (X-a)(X-b)\,C(X) + \alpha X + \beta$$

Considerăm:

$$\begin{cases} X = a \Rightarrow P(a) = 0 \cdot C(a) + (\alpha a + \beta) \\ X = b \Rightarrow P(b) = 0 \cdot C(b) + (\alpha b + \beta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha a + \beta = P(a) \\ \alpha b + \beta = P(b) \end{cases} \Rightarrow \alpha(a-b) = P(a) - P(b) \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{P(a) - P(b)}{a-b}}$$

Pt. β avem:

$$\frac{P(a) - P(b)}{a-b} \cdot a + \beta = P(a) \Rightarrow \frac{P(a)-P(b)}{a-b} + \frac{\beta(a-b)}{a-b} = \frac{P(a)(a-b)}{a-b} \Rightarrow aP(a) - aP(b) + \beta(a-b) = aP(a) - bP(a)$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{aP(b) - bP(a)}{a-b}}$$

Restul va fi: $R(X) = \dfrac{P(a) - P(b)}{a-b} X + \dfrac{aP(b) - bP(a)}{a-b}$

b) Folosind teorema împărțirii cu rest pt. polinoame deducem că $\exists$ $C, R \in \Pi$ a.î.:

$$\begin{cases} P(X) = C(X)\cdot \ell(X) + R(X) \\ deg(R) < deg(\ell) = n+1 \end{cases}$$

Polinomul ℓ s.n. polinomul nodal, deoarece $\ell(x_i) = 0 \ \forall\, i = \overline{0,n}$ și are $deg(\ell) = n+1$

Din $P(X) = C(X)\cdot \ell(X) + R(X) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P(x_i) = C(x_i)\cdot \ell(x_i) + R(x_i) \\ \ell(x_i) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(x_i) = R(x_i),\ i = \overline{0,n}$

Am ajuns la: $\left.\begin{array}{l} deg(R) \le n \\ R(x_i) = P(x_i),\ i = \overline{0,n} \\ deg(P) \ge n+1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ R este polinomul de interpolare Lagrange asociat perechilor $(x_i, P(x_i))_{i=\overline{0,n}}$

$$R = L_n(P; x_0, \dots, x_n)$$