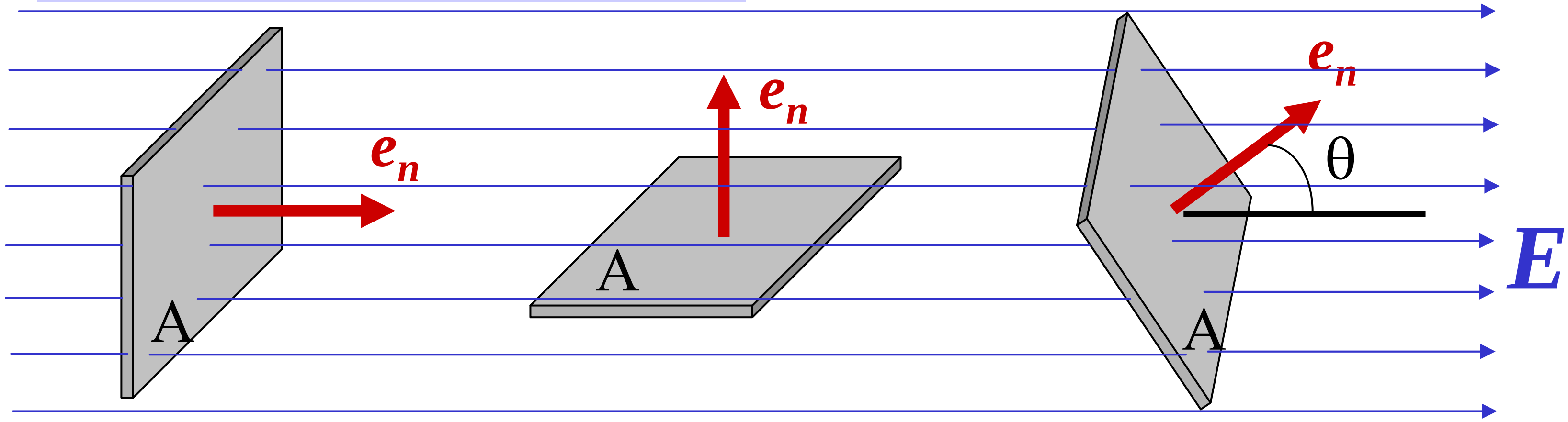
Curs nr. 2

Teoria Campului Electromagnetic

Universitatea Tehnica din Cluj-Napoca

Definitia fluxului electric Φ :

1. Camp electric *E* omogen



$\theta \equiv \sphericalangle(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{E}) = 0$

Def.: $\Phi = c.A.E$

Varianta: $c \equiv 1$

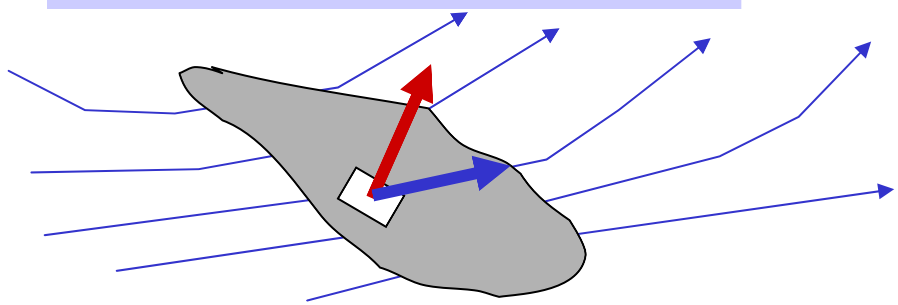
$\theta = 90^o$

$\Phi = 0$

$\Phi = E\,A\cos\theta$

$\Phi = (\boldsymbol{E}.\boldsymbol{e}_n)\,A$

2. Cazul general pentru *E*



Pentru elemente mici de suprata dA:

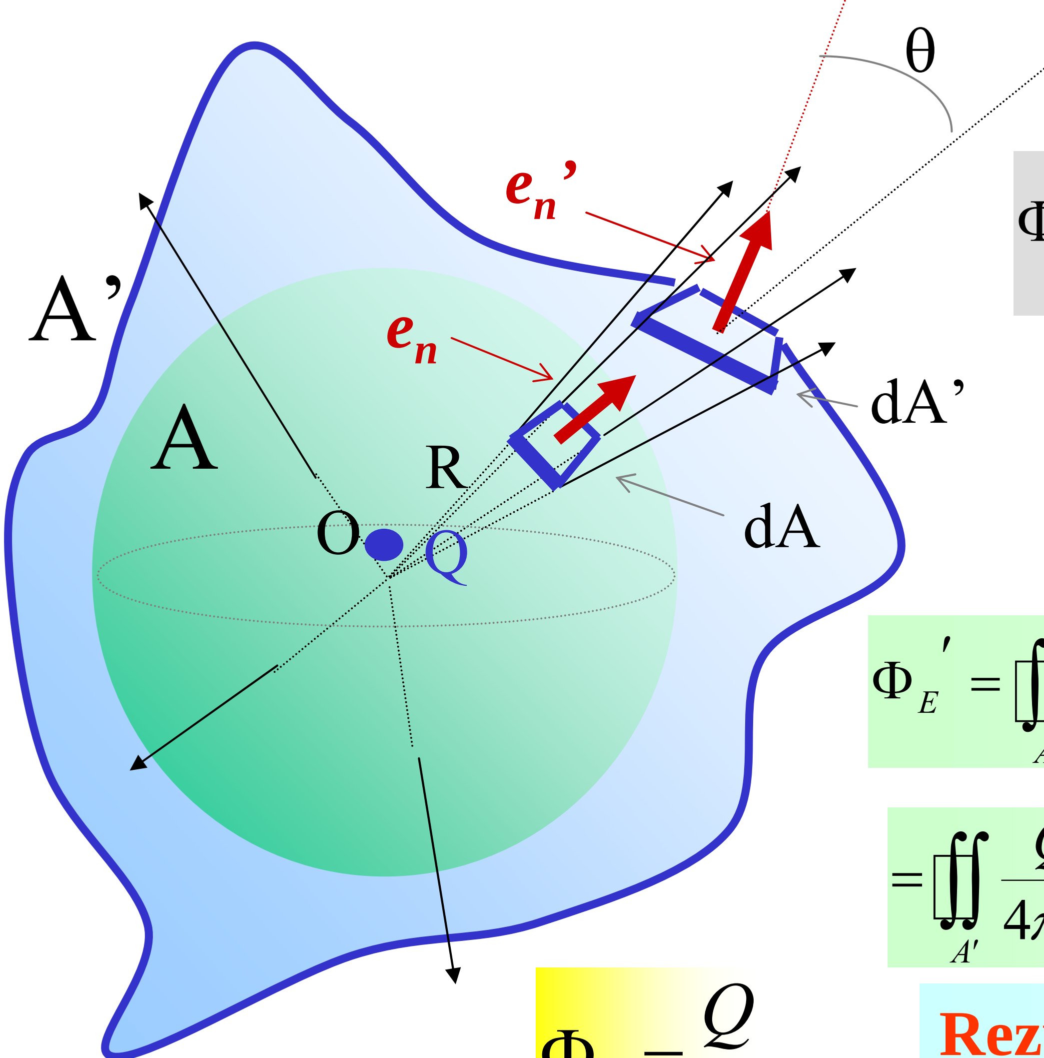
A si $\boldsymbol{e}_n$ sunt constante

$$\Phi = \iint_S \vec{E}\cdot\mathbf{e}_n\, dA = \iint_S \vec{E}\cdot \mathbf{d}\vec{A}$$

Electrostatica

Deducerea legii lui Gauss (1)

Sarcina Q in O



Fluxul Φ_E prin sfera A:

$$\Phi_E = \oiint_A \mathbf{E}\cdot\mathbf{dA} = \oiint_A \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{e_n}\,dA$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.1.4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Fluxul Φ_E' prin suprafata A':

$$\Phi_E{}' = \oiint_{A'} \mathbf{E}'\cdot\mathbf{dA} = \oiint_{A'} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\,\mathbf{e_{r'}}\cdot\mathbf{e_n}'\,dA'$$

$$= \oiint_{A'} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta.dA'}{r'^2} = \oiint_{A'} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dA}{R^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Rezultatul este independent de forma suprafetei !!!

Electrostatica

Legea lui Gauss (2): continuare

Flux: $$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Fluxul total printr-o suprafata inchisa este egal cu sarcina totala delimitata de aceasta suprafata, impartita la permitivitatea vidului.

Rezultatul este independent de forma suprafetei:

Consecinte:

- Q nu trebuie plasata in O
- sarcinile exterioare: nu creeaza flux
- mai multe sarcini in interiorul lui A:

$$\Phi_E = \sum_i \Phi_{E,i}$$

Electrostatica

Cum se foloseste teorema lui Gauss pentru:

- **Calculul campului electric E**
  - Daca se cunoaste distributia de sarcina si
  - Problema are simetria necesara pentru a permite evaluarea integralei.
- **Determinarea distributiei de sarcina:**
  - Sarcini plasate pe sfere conductoare,
  - Sarcini distribuite intr-un volum dat.

Electrostatica

Determinarea campului electric E folosind legea lui Gauss

- Intai **se gaseste o suprafata** Gaussiana a carui vector normal la elementul de suprafata este paralel cu campul electric E;

$$\oint \vec{E}d\vec{A} = \oint EdA$$

- Trebuie sa ne asiguram si de faptul ca pe suprafata Gaussiana, amplitudinea **campului electric E este constanta.**

$$\oint EdA = E\oint dA = EA$$

- Se foloseste geometria pentru a evalua A.
- Prin intermediul legii lui Gauss se face legatura intre E si sarcina localizata in interiorul suprafetei.

Electrostatica

Determinarea campului electric E folosind legea lui Gauss

In cazul general

- Se utilizeaza **simetria** distributiei de sarcina pentru a determina sablonul liniilor de camp.
- Se urmareste alegerea **suprafetei Gaussiene** astfel incat E sa fie paralel cu A, sau suprafata sa poata fi descompusa in componente paralele si perpendiculare, intrucat:

$$\vec{E}_{perp}.\vec{A} = 0$$

- Daca E este paralel cu A, trebuie sa ne asiguram ca E este constant pe toata suprafata.

Electrostatica

Determinarea campului electric E folosind legea lui Gauss

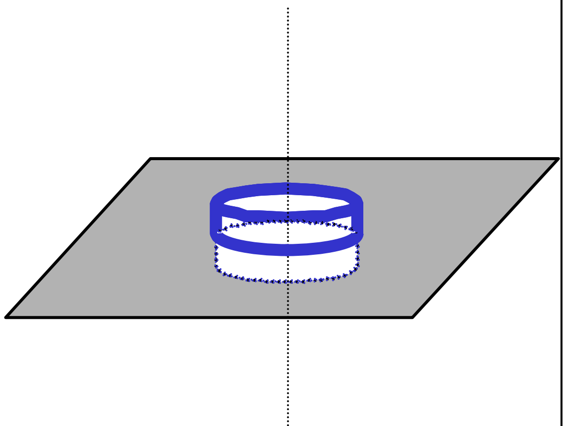
Algoritmul de calcul:

- Analiza problemei si a simetriei acesteia
- Abordarea solutiei
- Calcule
- Concluzii

Electrostatica

Simetrii de baza pentru legea lui Gauss

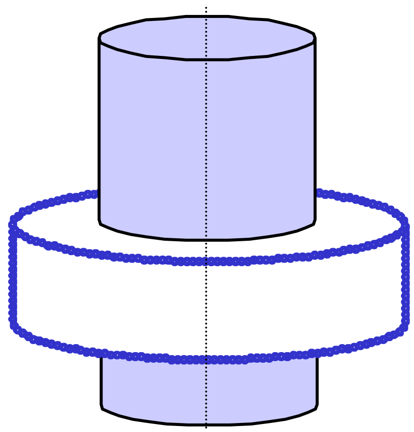
plan ∞ extins



“Cutie de pastile” Gauss

Inaltimea→ 0

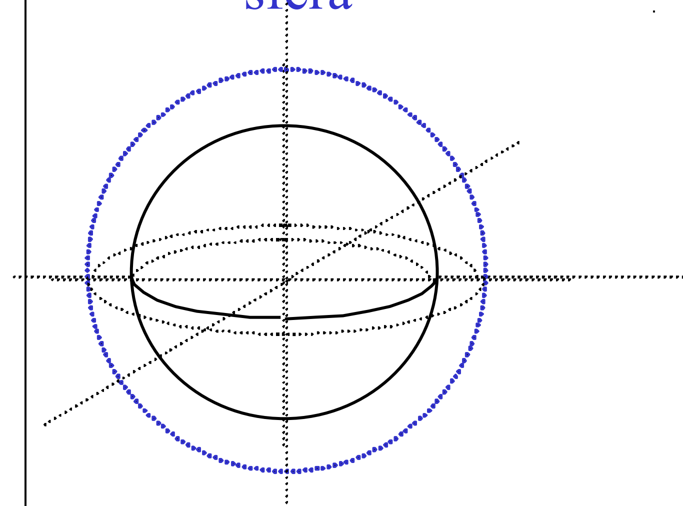
cilindru ∞ lung



Cilindru Gauss

Raza r (r < R sau r > R), lungime L

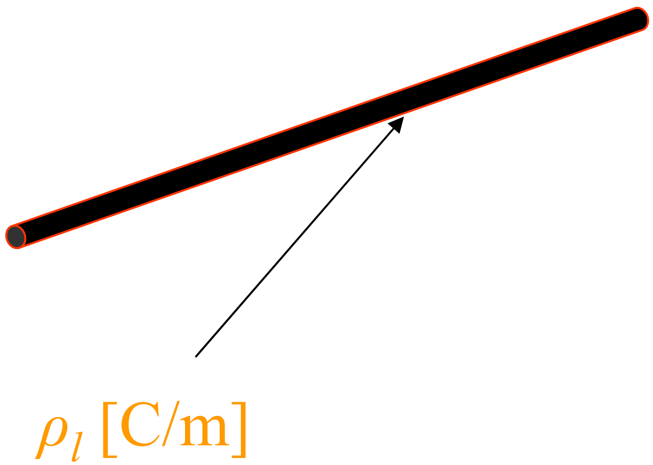
sfera



Sfera Gauss

Raza r (r < R sau r > R).

Legea lui Gauss pentru o distributie liniara de sarcina infinit lunga:



<u>Se da:</u>

Distributie de sarcina pe o linie infinit lunga, cu densitatea ρ_l [C/m]

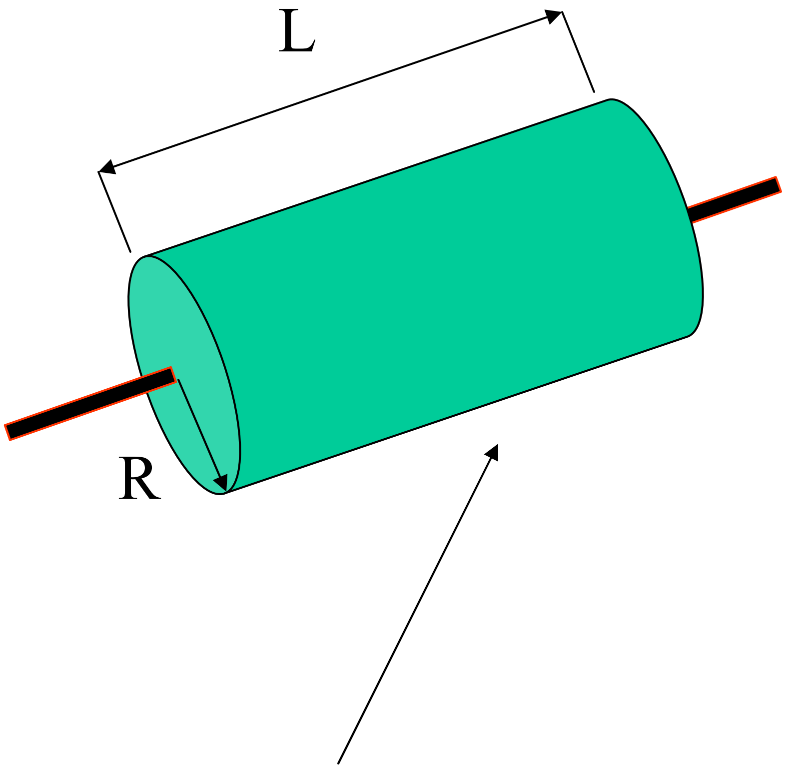
<u>Se cere:</u>

Sa se calculeze campul electric $\boldsymbol{E}$ in puncte arbitrare situate in afara liniei

Electrostatica

Legea lui Gauss pentru o distributie liniara de sarcina infinit lunga:

Analiza problemei si a simetriei acesteia



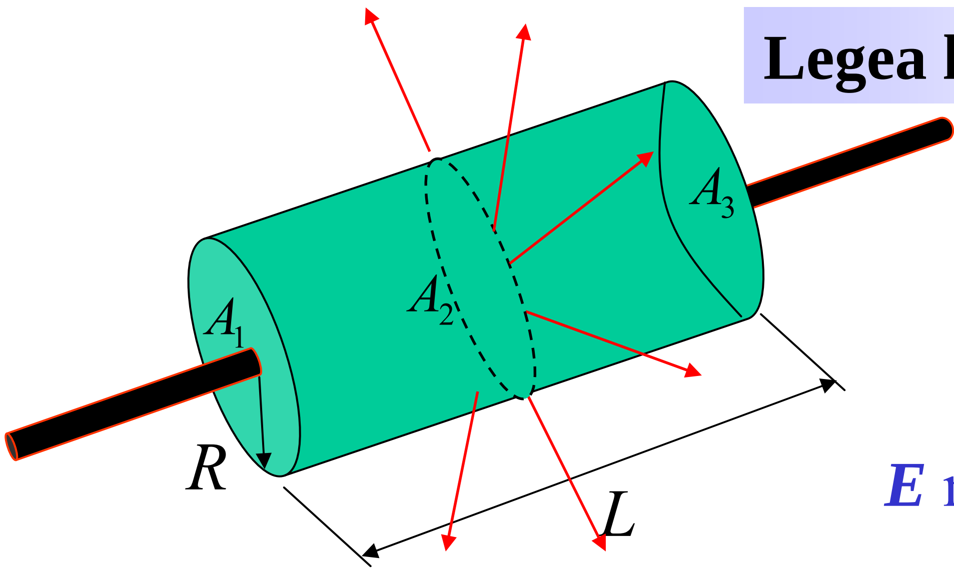
Supraf. Gaussiana imaginara

1. Linie infinit lunga.
2. Distributie de sarcina: omogena. ρ_l [C/m].
3. Simetrie cilindrica.

Consecinte:
Cutie imaginara Gauss:
un cilindru coaxial de raza R, lungime L.

Electrostatica

Abordarea solutiei si calcule



Legea lui Gauss: $$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dA} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Datorita simetriei pe suprafata Σ a cutiei Gauss:

E normal si constant pe suprafata A_2

E paralel pe suprafetele A_1 si A_3

$$\boxed{\Phi_E = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \underbrace{\int_{A_1} \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{\text{Fata}} + \underbrace{\int_{A_3} \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{\text{Spate}} + \underbrace{\int_{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{\text{Lateral}}}$$

Electrostatica

Calcule

$$\Phi_E = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_3} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\int_{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A_2} E \cdot dA$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

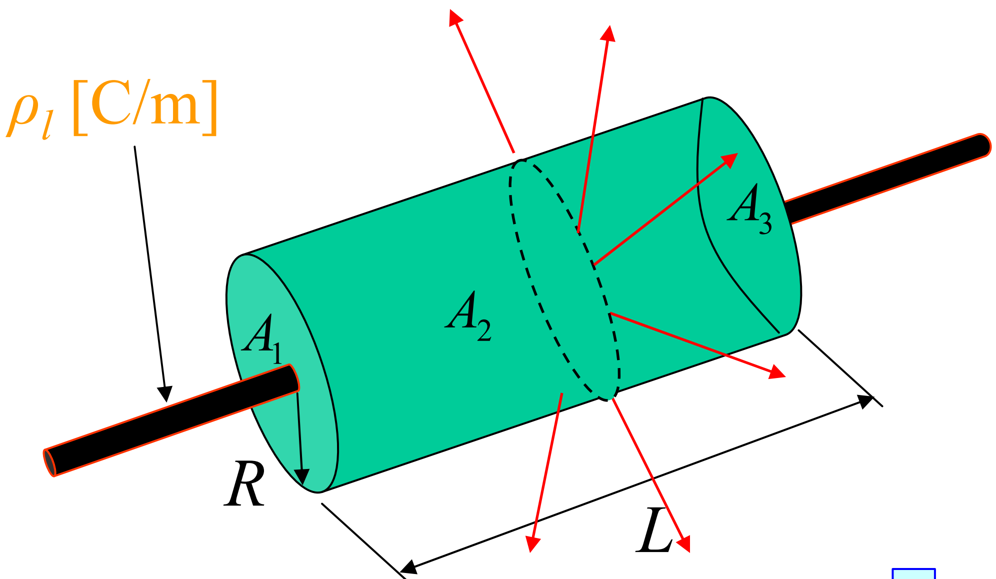
Datorita simetriei, E constant pe A_2

$$\Phi_E = \int_{A_2} E \cdot dA = E \cdot \int_{A_2} dA = E \cdot A_2 = E \cdot \underbrace{2 \cdot \pi \cdot R \cdot L}_{\text{Aria laterala a cilindrului}}$$

Electrostatica

Calcule

Sarcina totala delimitata de suprafata Gaussiana este localizata doar pe segmentul de linie delimitat de suprafata din fata si cea din spate.



$$Q(enclosed) = \rho_\ell \cdot L$$

$$\Phi_E = \iint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{dA} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_E = E \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot L$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R} \cdot \vec{u} = \frac{\rho_l}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R} \cdot \frac{\vec{R}}{R}$$

Important !!

Potential Electric

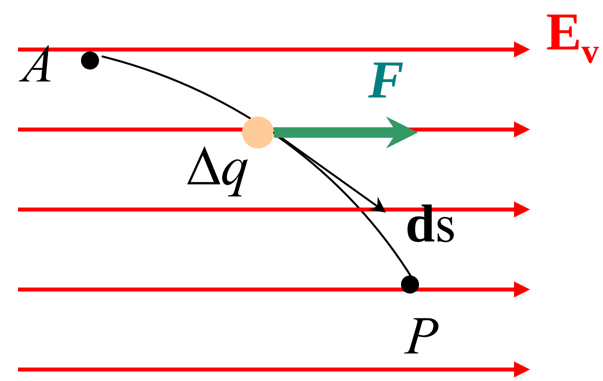
- Definitia potentialului electric
- Suprafete echipotentiale
- Potential datorat unei distributii de sarcina continua
- Calculul campului electric cunoscand potentialul

Potential Electric

Cand o sarcina de proba Δq se deplaseaza de la *A* la *P (origine de potential)* intr-o regiune cu camp electric **E** campul efectueaza lucru mecanic asupra sarcinii. Pentru o deplasare infinitezimala d**s** lucrul efectuat de camp este:

$$L_{AP} = \int_A^P \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^P \Delta q \cdot \vec{E_v} \cdot d\vec{s} = \Delta q \int_A^P \vec{E_v} \cdot d\vec{s}$$

Potentialul electric este definit ca energia potentiala *per unitate de sarcina*, si este independent de sarcina de proba Δq. Are o valoare unica in fiecare punct aflat in camp electric.



$$V_A = \frac{L_{AP}}{\Delta q} = \int_A^P \vec{E}_v \cdot d\vec{s}$$

Potential Electric

Proprietati ale potentialului electric

- potentialul electric este o marime scalara.
- potentialul electric nu depinde de calea de integrare aleasa.
- campul electrostatic este un camp conservativ!!!!
- unitatea de masura in SI pentru potentialul electric :

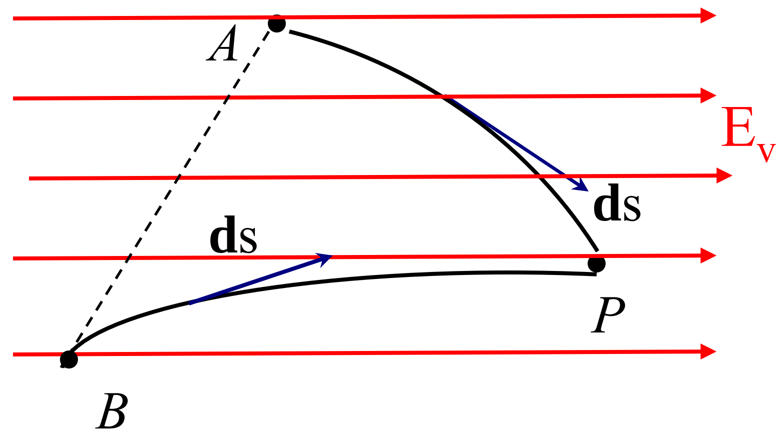
$$\boxed{V_A = \frac{L_{AP}}{\Delta q}} \Rightarrow \boxed{\text{Unitatea e J/C}} \Rightarrow \textbf{Volts (V)}$$

Diferenta de potential

Diferenta de potential $U_{AB} = V_B - V_A$ intre doua puncte A si B este:

$$U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^P \vec{E}_v \cdot d\,\vec{s} - \int_B^P \vec{E}_v \cdot d\,\vec{s} = \int_A^P \vec{E}_v \cdot d\,\vec{s} + \int_P^B \vec{E}_v \cdot d\,\vec{s} = \int_A^B \vec{E}_v \cdot d\,\vec{s}$$

Intrucat forta electrica este conservativa, **diferenta de potential** nu depinde de calea de integrare, ci doar de punctul initial si cel final. Nu depinde nici de originea de potential.



Daca se considera o curba inchisa:

$$U_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{E}_v \cdot d\,\vec{s} = 0$$

Noi unitati de masura pentru campul electric

$E = (V_A - V_B)/s$ camp uniform, a.i. **E** se masoara in V/m

Note: 1 N/C = 1 V/m

Suprafete echipotentiale si linii echipotentiale

Reamintim definita diferentei de potential intre doua puncte A si B:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}_v \cdot \overrightarrow{ds}$$

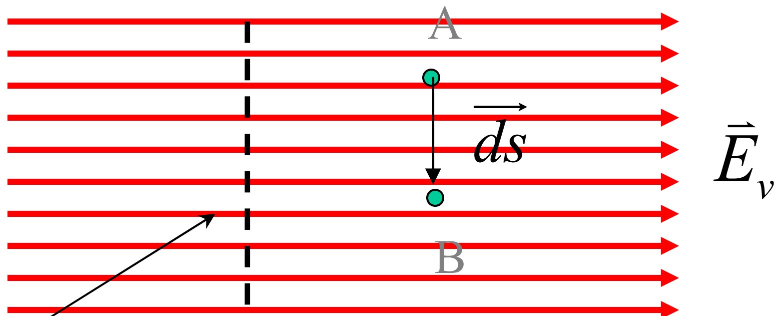
Puncte echipotentiale: puncte unde $V_A = V_B$.

$$\int_A^B \vec{E}_v \cdot \overrightarrow{ds} = 0 \Rightarrow \vec{E}_v \cdot \overrightarrow{ds} = 0$$

Orice suprafata, plana sau curba, pentru care potentialul este constant se numeste suprafata echipotentiala. Suprafata echipotentiala poate sa coincida sau nu cu o suprafata fizica.

Suprafete echipotentiale si linii echipotentiale

$$\vec{E}_v \cdot d\vec{s} = 0$$



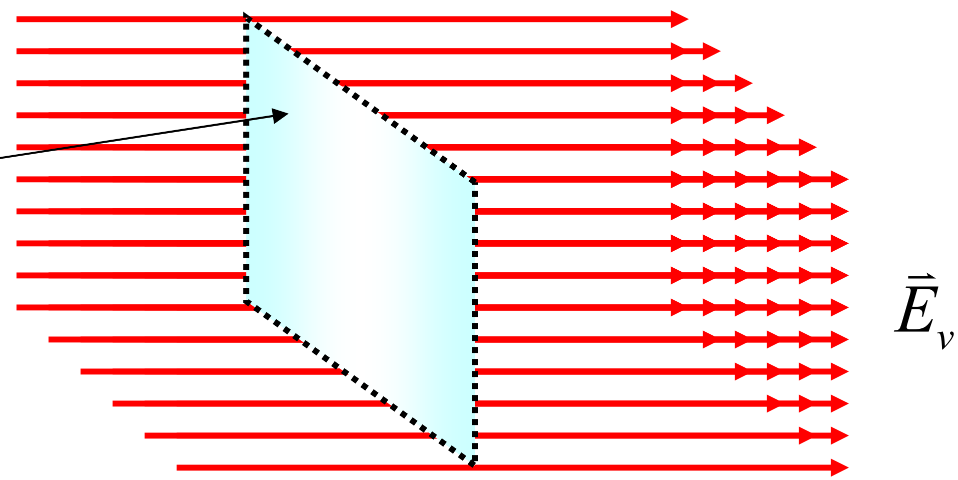
$\left.\begin{array}{l}\vec{E}_v \\ d\vec{s}\end{array}\right\}$ perpendiculare

Linii echipotentiale

Colectia tuturor punctelor avand acelasi potential formeaza o linie in 2-D.

Suprafete echipotentiale

Colectia tuturor punctelor avand acelasi potential formeaza o suprata in 3-D.



Electrostatica

Ecuatia liniilor echipotentiale:

$$\vec{E}_v \cdot \vec{ds} = 0$$

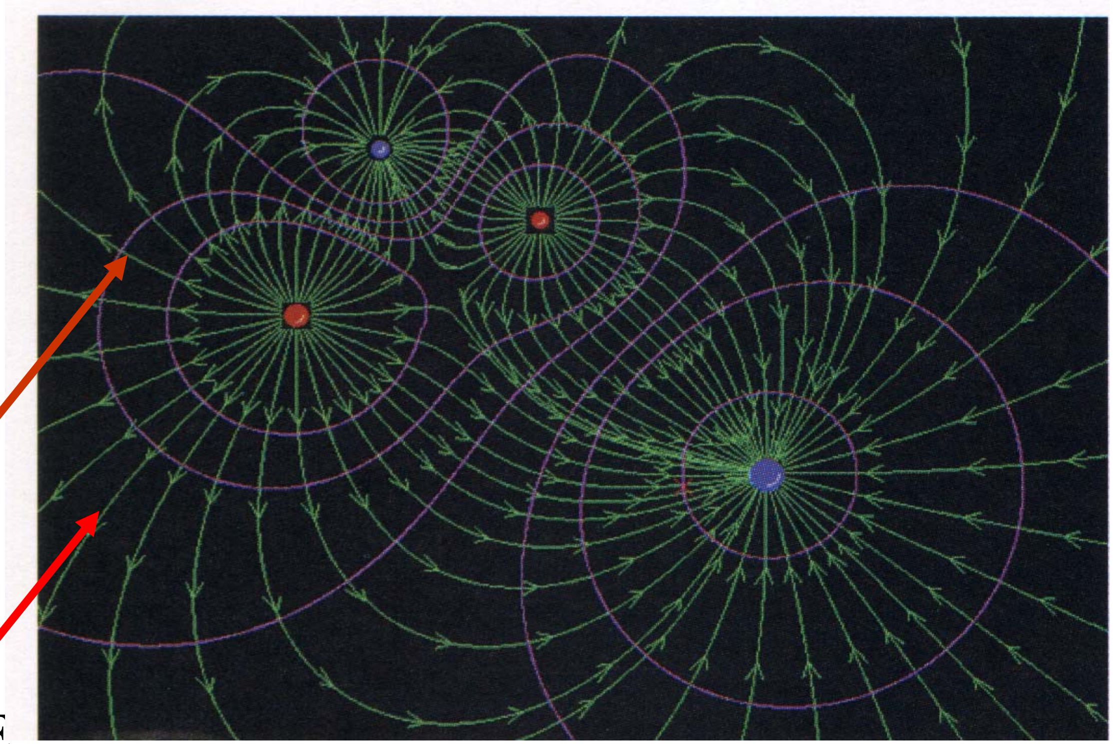
Ecuatia liniilor de camp electric:

$$\vec{E}_v \times \vec{ds} = 0$$

Liniile echipotentiale sunt ortogonale cu liniile de camp electric!!!

Exemplu

Campul electric al diferitelor sarcini



Echipotential, camp E

Potentialul unor sarcini punctiforme

Pentru o colectie de sarcini punctiforme, potentialul electric se determina folosind principiul superpozitiei:

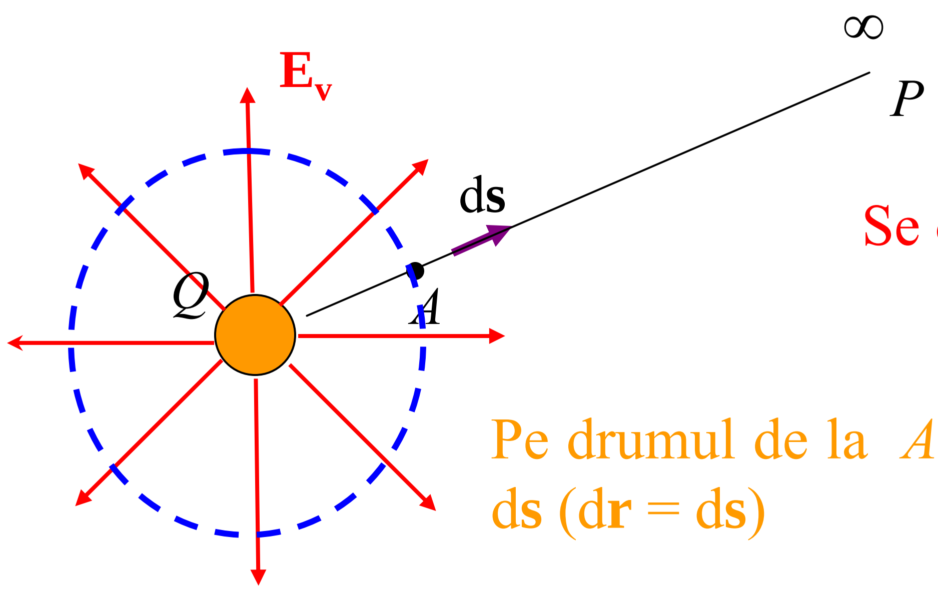
$$\boxed{V = \sum_i V_i}$$

Intrucat *V* este scalar e mult mai usor de evaluat decat vectorul camp electric $\mathbf{E}_\mathbf{v}$.

Intrebare fara raspuns:

Daca se cunoaste V cum se poate determina E?

Potentialul electric al unei sarcini punctiforme



$$\vec{E}_v = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

Se obisnuieste alegerea originii de potential la $r_p = \infty$.

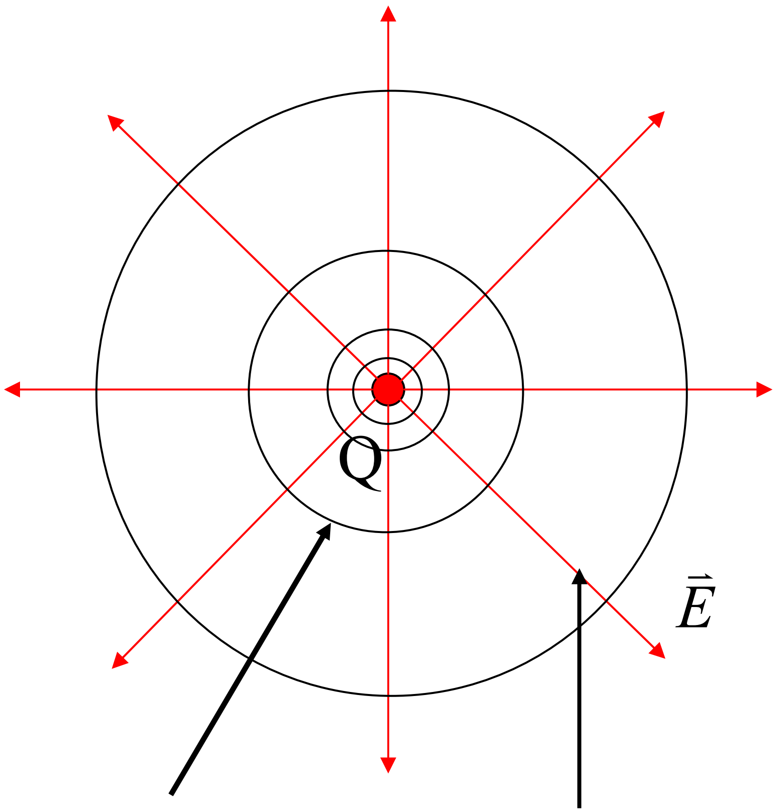
Pe drumul de la A (r_A) la P ($r_p = \infty$), $\mathbf{E_v}$ e paralel cu ds (d**r** = d**s**)

$$V_A = \int_A^P \vec{E}_v \cdot d\vec{s} = \int_A^P \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_A^P \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}d\vec{r} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{r_A}^{\infty}\frac{1}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_A}^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_A}$$

V este constant pe suprafete sferice centrate pe sarcina punctiforma.

Potentialul electric al unei sarcini punctiforme



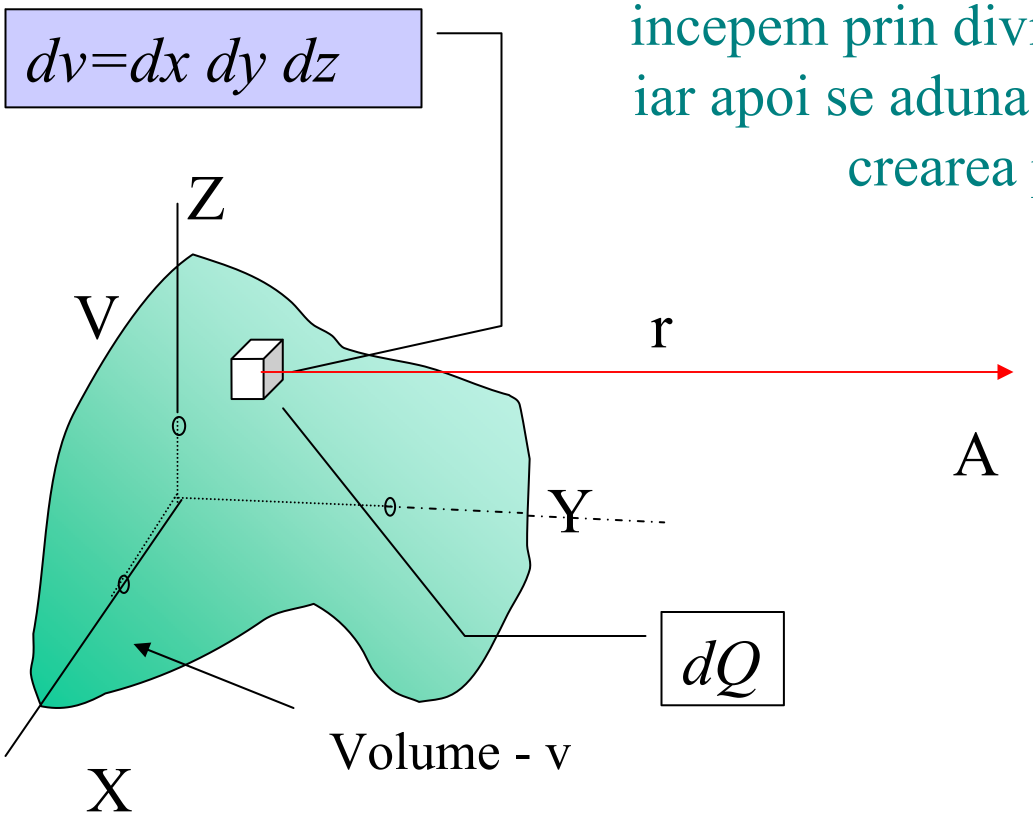
$$\vec{E}_v = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

Echipotential, linii de camp E

Potentialul produs de o distributie continua de sarcini

In cazul unei distributii continue de sarcini, incepem prin divizarea sarcinii in portiuni mici, iar apoi se aduna contributia fiecarei portiuni la crearea potentialului electric:



$$dV_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r} \cdot dv$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_v \frac{dQ}{r}$$

Potentialul produs de o distributie continua de sarcini

Sarcini distribuite in volum

$$dQ = \rho_v \cdot dv$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_v}{r}dv$$

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_v}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}dv$$

Sarcini distribuite pe o suprafata

$$dQ = \rho_s \cdot dA$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\rho_s}{r}dA$$

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\rho_s}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}dA$$

Sarcini distribuite pe o curba

$$dQ = \rho_l \cdot dl$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{\rho_l}{r}dl$$

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{\rho_l}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}dl$$

Camp si potential electric

$$V_A(x,y,z) = \int_{A(x,y,z)}^{P(fix)} \overrightarrow{E_v} \cdot d\vec{s}$$

$$dV_A(x,y,z) = -\vec{E}_v \cdot d\vec{s} = -(E_{vx} \cdot \vec{i} + E_{vy} \cdot \vec{j} + E_{vz} \cdot \vec{k}) \cdot (dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k})$$

$$dV_A(x,y,z) = -E_{vx} \cdot dx - E_{vy} \cdot dy - E_{vz} \cdot dz$$

Dar:

$$dV_A(x,y,z) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot dz$$

$$\boxed{E_{vx} = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_{vy} = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_{vz} = -\frac{\partial V}{\partial z}}$$

Camp si potential electric

$$\boxed{E_{vx} = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_{vy} = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_{vz} = -\frac{\partial V}{\partial z}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{E_v} = -\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\cdot\vec{k} = -\nabla V = -gradV}$$

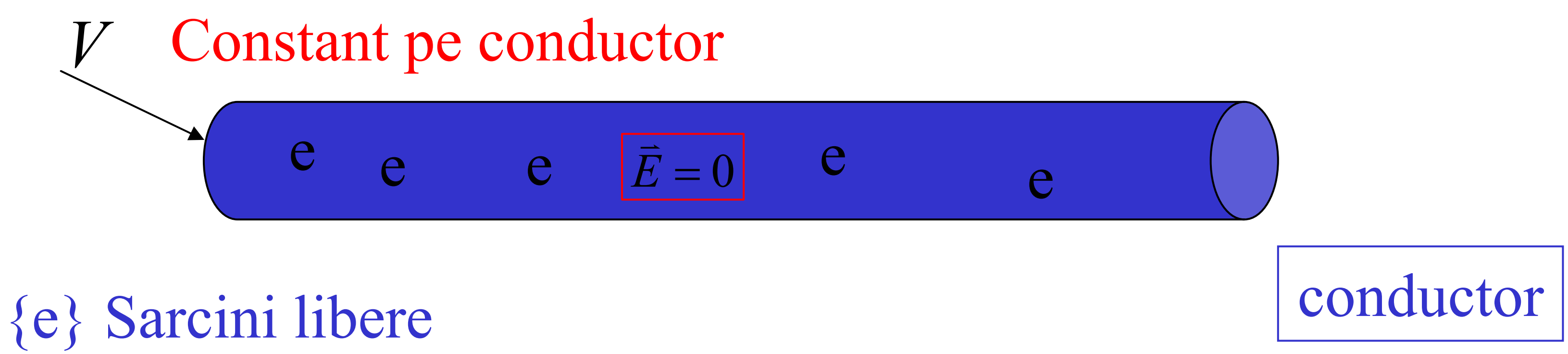
Important !!

Conductoare in camp electrostatic

- un conductor poate **conduce**, sau trasporta, sarcini electrice.

- in situatii statice, un conductor este un mediu in care **campul electric interna este mereu nul**.

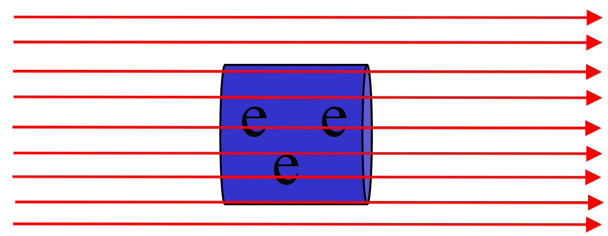
- rezulta ca **toate partile conductorului au acelasi potential**.



Conductoare in camp electrostatic

Se considera conductorul plasat intr-un camp electric extern $\vec{E}_{ex}$

Timp t = 0

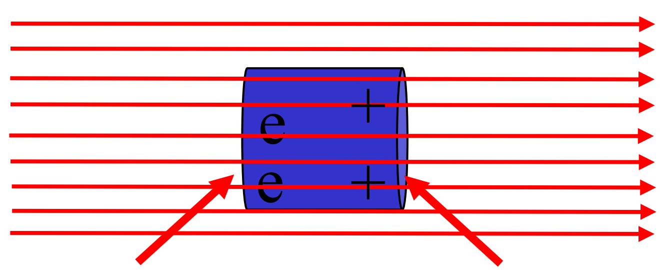


$\vec{E}_{ex}$

Forta asupra electronilor $\vec{F} = -e \cdot \vec{E}_{ex}$

La un foarte scurt interval de timp dupa aplicarea lui $\vec{E}_{ex}$ redistribuirea sarcinilor inceteaza.

Timp t > 0



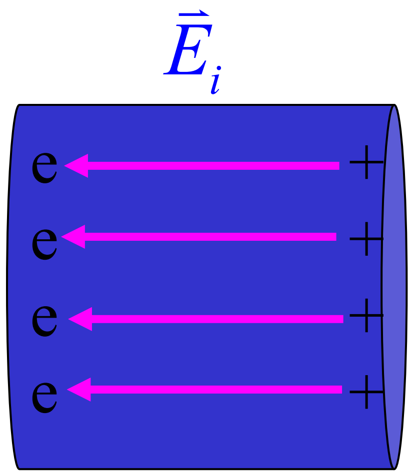
$\vec{E}_{ex}$

Acumulare de sarcini negative

Acumulare de sarcini pozitive

Conductoare in camp electrostatic

Separarea sarcinilor produce un camp electric intern $\vec{E}_i$ in conductor



Redistribuirea sarcinilor continua pana cand amplitudinea campului electric intern este egala cu cea a campului electric aplicat.

$$\vec{E}_{net} = \vec{E}_{ex} + \vec{E}_i$$

$$\vec{E}_{net} = 0$$

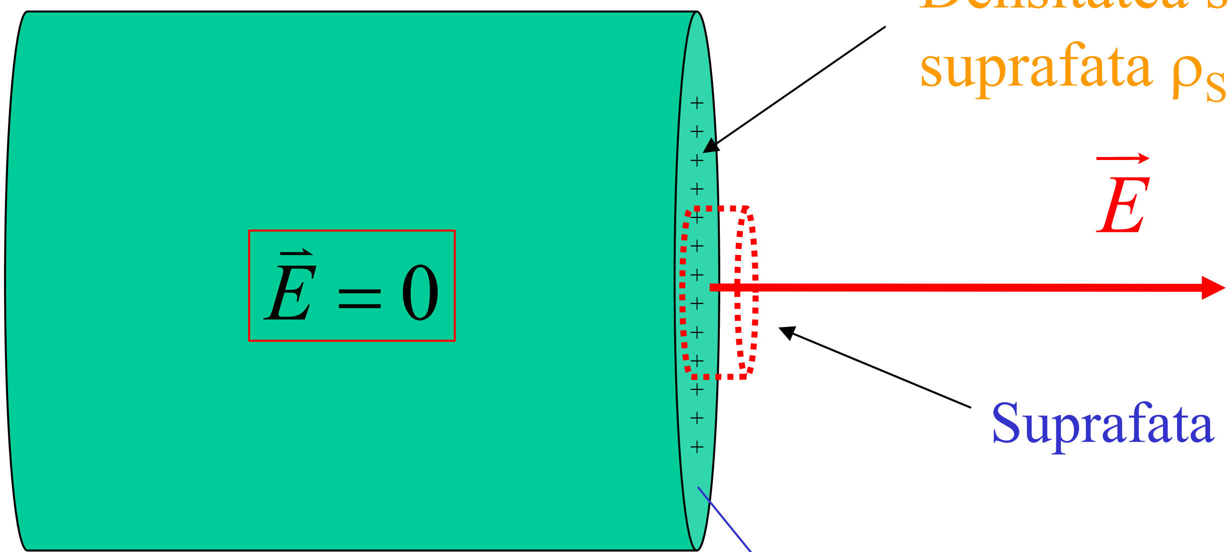
In interiorul conductorului, campul electric total este zero dupa redistribuirea sarcinilor

Timp $t \approx 10^{-10}$ s

Electrostatica

Conductoare in camp electrostatic

Densitatea sarcinilor pe suprafata ρ_S



Suprafata Gaussiana, Arie A

Legea lui Gauss

$$E \cdot A = \frac{\rho_S A}{\varepsilon_o}$$

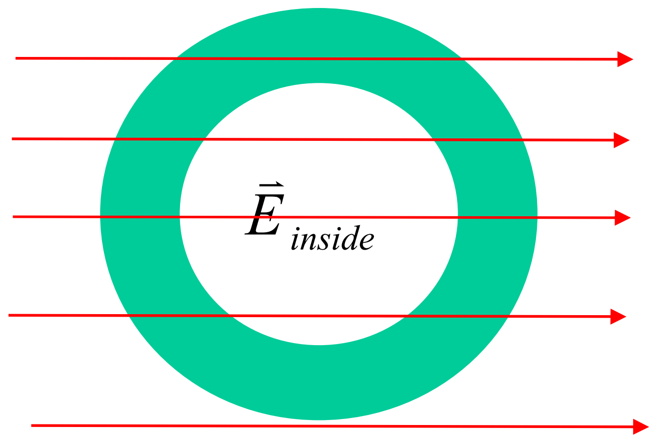
$$\rho_S = E \cdot \varepsilon_0$$

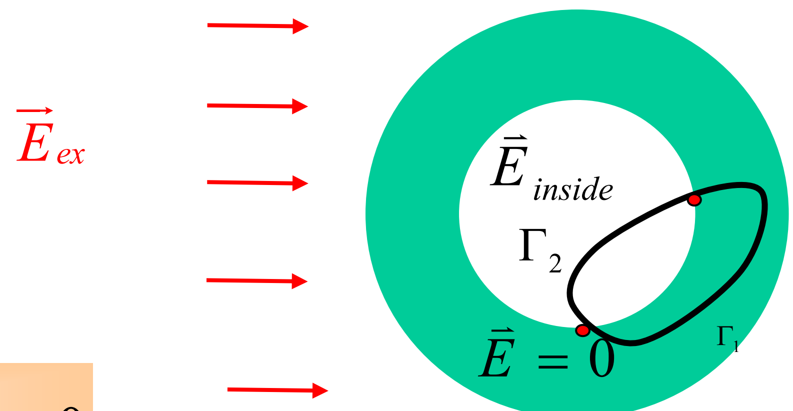
Daca E = constant, ρ_S constant !!

Conductoare in camp electrostatic

Se considera o coaja conductoare sferica. Care este valoarea campului electric in interiorul acesteia cand se aplica un camp electric extern si dupa ce redistribuirea sarcinilor s-a incheiat?

Se presupune ca $\vec{E}_{inside} \neq 0$ dupa ce redistribuirea sarcinilor s-a incheiat.





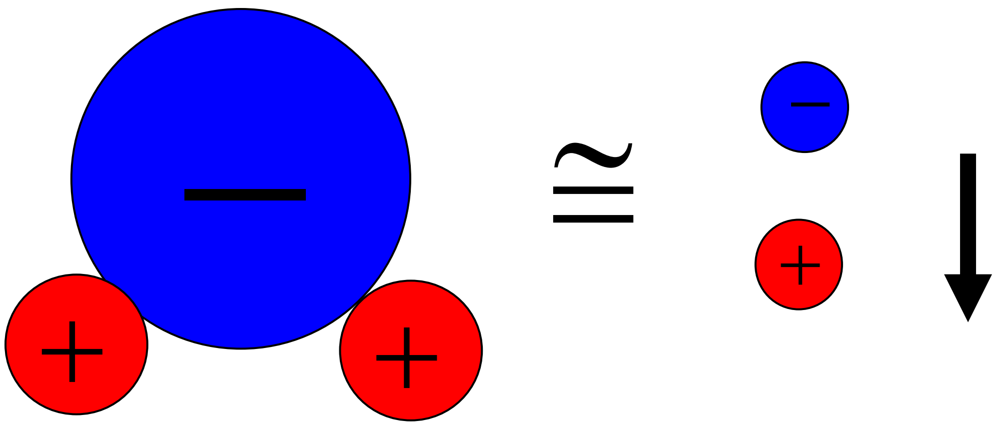
$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \oint_{\Gamma_2} \vec{E}_{inside} \cdot d\vec{s} = 0$$

0 fiindca $\vec{E} = 0$

Singura metoda pt a obtine 0 pentru orice Γ_2 este ca

$$\vec{E}_{inside} = 0$$

Dipolul electric



Momentul dipolilor anumitor molecule

$$H_2{}^{(+)}O^{(-)} = 6.1\times10^{-30}\,Cm$$

$$H^{(+)}Cl^{(-)} = 3.4\times10^{-30}\,Cm$$

$$N^{(-)}H_3{}^{(+)} = 5.0\times10^{-30}\,Cm$$

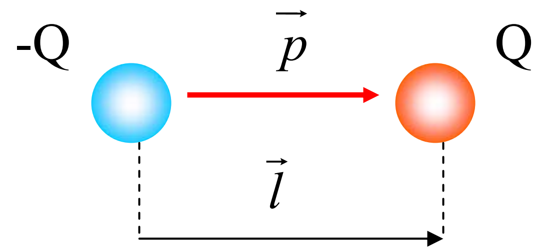
Un dipol cunoscut: apa

Dipolul electric

Un dipol electric este format din doua sarcini egale dar opuse ca polaritate, aflate in imediata vecinatate.

Un dipol este caracterizat prin **momentul dipolului electric**:

$$\boxed{\vec{p} = Q \cdot \vec{l} \quad , C \cdot m}$$

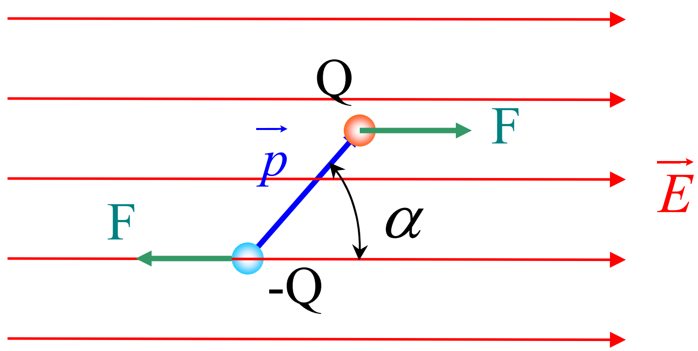


Se va considera campul creat de dipol la distante mult mai mari decat lungimea acestuia l, care este prin definitie infinitezimala.

Electrostatica

Dipolul electric

Dipolul intr-un camp electric extern



Dipolul tinde sa se roteasca pana cand momentul sau se aliniaza cu campul extern.

Cuplul este:

$$\boxed{\vec{m} = \vec{l} \times \vec{F} = \vec{l} \times \left(\vec{E} \cdot Q\right) = \left(\vec{l} \cdot Q\right) \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} \;\Rightarrow m = p \cdot E \;\cdot \sin\alpha, \quad Nm}$$

Momentul dipolului electric este egal cu cuplul resimtit de dipol intr-un camp extern de valoare unitara si ortogonal pe directia lungimii dipolului.

Materialele dielectrice si polarizatia

Exemplele anterioare ilustreaza polarizatia electronica, care apare in dielectrii ai caror atomi si molecule sunt initial neutre. Procesul de polarizare este contrabalansat de forta de atractie Coulomb.

Polarizatia ionica apare in molecule formate din ioni pozitivi si negativi, care sunt initial amestecati a.i. sarcina totala a dielectricului este nula.

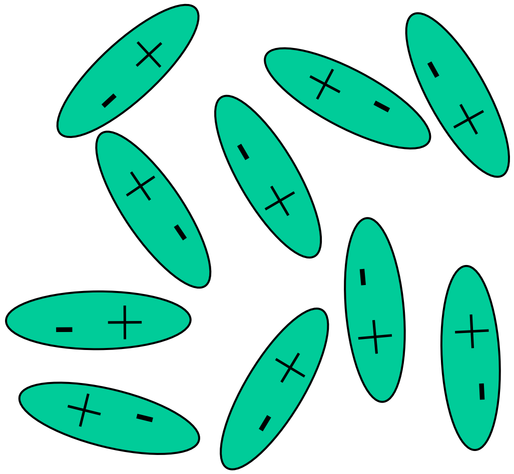
Polarizatia de orientare apare in materiale constand in sub-domenii cu separare permanenta microscopica a sarcinilor (electreti, lichide polare, etc.)

Fiecare regiune polarizata microscopic este caracterizata de momentul dipolului

$$\boxed{\vec{p} = Q \cdot \vec{l}}$$

Electrostatica

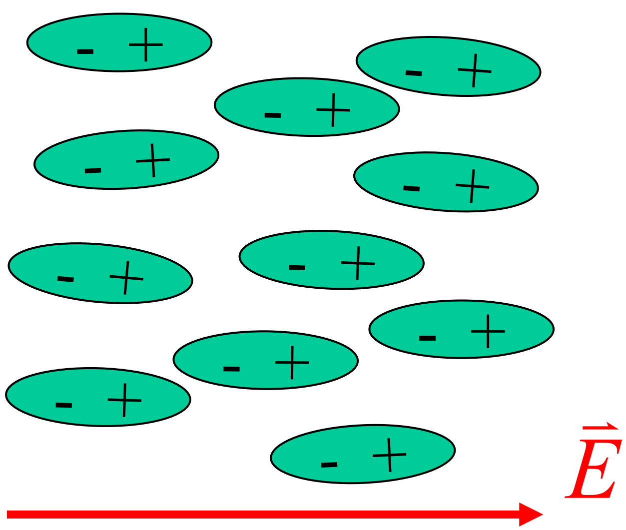
Materialele dielectrice si polarizatia



Agitatia termica face ca orientarea moleculelor sa fie aleatoare. Valoarea medie a momentelor dipolilor din orice volum ales este zero:

$$\sum \vec{p}_i = 0$$

Nu se aplica un camp electric extern



Un camp electric extern produce un cuplu asupra fiecarui dipol, aliniid momentele acestora cu liniile de camp electric.

$$\sum \vec{p}_i \neq 0$$

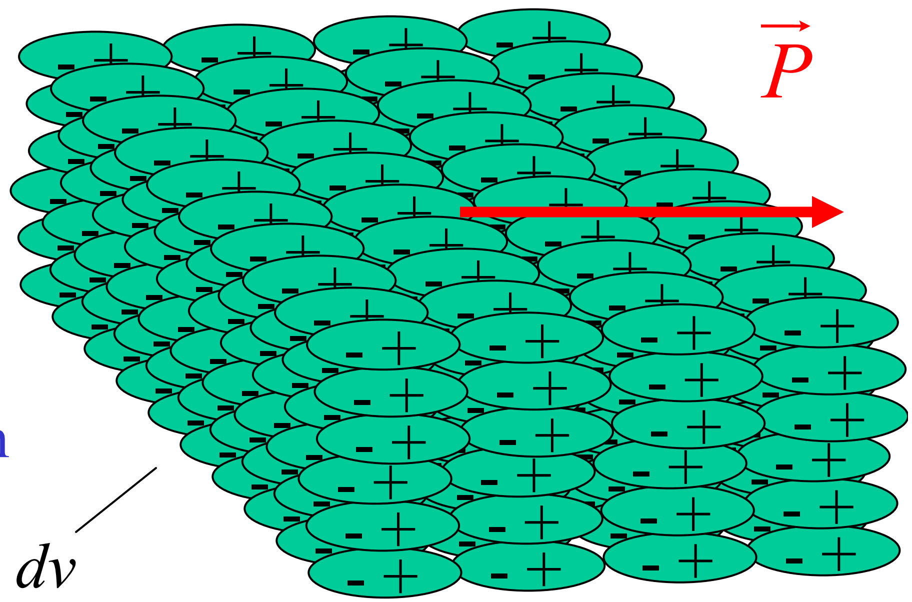
Se aplica un camp electric extern

Materialele dielectrice si polarizatia

Pentru a cuantifica efectul polarizatiei la nivel macroscopic, vectorul polarizatie $\vec{P}$ egal cu suma momentelor dipolilor pe unitatea de volum este:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta v} = \frac{d\vec{p}}{dv} \quad ,C/m^2$$

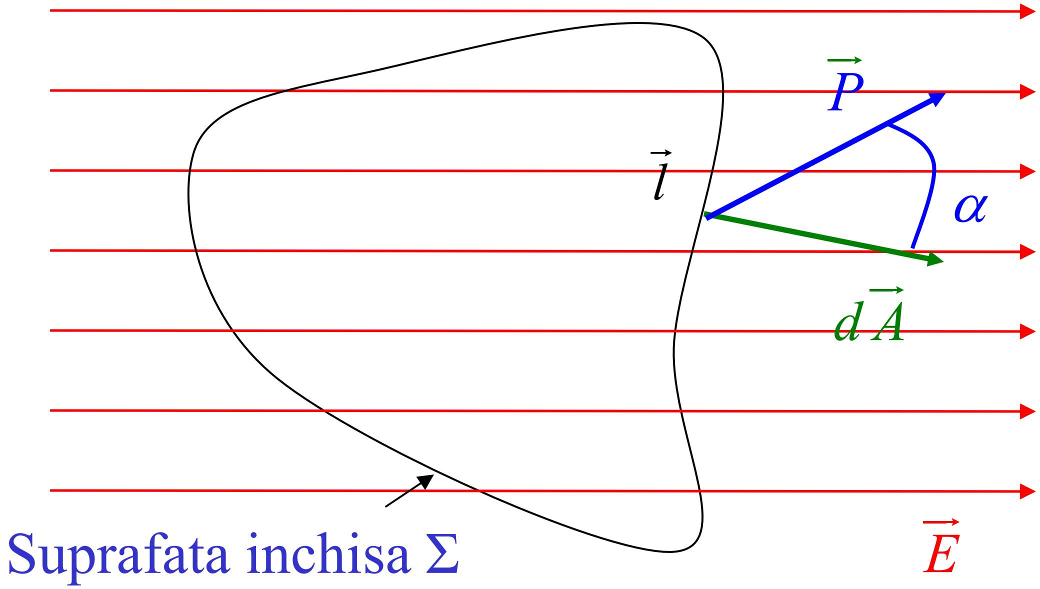
$$d\vec{p} = \vec{P} \cdot dv$$



Daca o bucata de dielectric este plasata in camp electric extern, dipolii se vor alinia (mai mult sau mai putin) cu campul.

Sarcinile interne se vor compensa dar sarcini de suprafata necompensate vor aparea pe ambele margini ale dielectricului.

Materialele dielectrice si polarizatia



Sarcina de polarizatie pentru intreaga suprafata inschisa este:

$$Q_{p\Sigma} = -\oiint_{\Sigma} \vec{P} \cdot d\vec{A}$$

Campul electric in materialele dielectrice

Se cunosc acum doua tipuri de sarcini: sarcini libere (in conductoare) si sarcini "legate" (in dielectrici). Sarcinile "legate" reprezinta comportarea atomilor / moleculelor de dielectric in vid.

Se aplica legea lui Gauss (dedusa in vid) in prezenta ambelor tipuri de sarcini:

$$\boxed{\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{f\Sigma}+Q_{p\Sigma}}{\varepsilon_0}}$$

dar:

$$\boxed{Q_{p\Sigma} = -\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{P}\cdot d\vec{A}}$$

$$\boxed{\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{f\Sigma}-\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{P}\cdot d\vec{A}}{\varepsilon_0}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_0\cdot\left\{\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E}\cdot d\vec{A}\right\}+\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{P}\cdot d\vec{A} = Q_{f\Sigma}}$$

Electrostatica

Campul electric in materialele dielectrice

$$\boxed{\varepsilon_0 \cdot \left\{ \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{A} \right\} + \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{P} \cdot d\vec{A} = Q_{f\Sigma}} \Rightarrow \boxed{\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \left(\varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} \right) \cdot d\vec{A} = Q_{f\Sigma}}$$

Acum se poate defini un vector nou, care depinde doar de sursele de sarcini libere:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}} \qquad \boxed{\left[D \right]_{SI} = 1C / 1m^2} \Rightarrow \boxed{\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{f\Sigma}}$$

denumit inductie electrica.

Intr-un mediu arbitrar (altul decat vidul) campul electrostatic este complet definit folosind 2 vectori de camp:

$$\boxed{\vec{D}, \vec{E}}$$

Legile electrostaticii

Legea fluxului electric
(generalizare a legii lui Gauss valida doar in vid)

Definitie:

Fluxul total al vectorului inductie electrica pritr-o suprafata inchisa este egal cu sarcina totala reala libera localizata in interiorul suprafetei.

$$\boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{f\Sigma}}$$

Forma integrala a legii

$$\boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_{V_\Sigma} div\vec{D} \cdot dv = Q_{f\Sigma} = \iiint_{V_\Sigma} \rho_{vf} \cdot dv}$$

$$\boxed{\rho_{vf} = div\vec{D}}$$

Forma diferentiala a legii

Electrostatica

Legile electrostaticii

Legea polarizatiei

Prin studii experimentale s-a stabilit ca vectorul polarizatie (componenta temporara) este strans legata de vectorul camp electric. Pentru dielectricii uzuali, acesti doi vectori sunt coliniari si proportionali pentru o gama larga de valori ele lui E (materiale liniare).

$$\boxed{\vec{P}_t = \chi_e \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}}$$ Valida doar pt. materiale liniare

unde: χ_e este susceptibilitatea electrica a materialului.

In acest caz, folosind relatia dintre $\vec{E}, \vec{D}$ *and* $\vec{P}_t$ vom avea:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}_t = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \underbrace{\left(1 + \chi_e\right)}_{\varepsilon_r} \cdot \vec{E}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}}$$

ε_r Permitivitate dielectrica relativa

Electrostatica

Legile electrostaticii

Legea polarizatiei

Constanta dielectrica ε_r nu este mereu constanta. Ea poate depinde de frecventa sau de intensitatea campului electric. Se mai numeste si **permitivitate dielectrica relativa**.

Cand permitivitatea dielectrica depinde de intensitatea campului electric E, se spune ca **mediul este neliniar**, deoarece toate relatiile de camp devin ecuatii neliniare.

Cand permitivitatea dielectrica depinde de pozitia in volumul corpului dielectric $\varepsilon(x, y, z)$ se spune ca problema este **neomogena**, contrarul cazului omogen cand proprietatile de material sunt constante in volum.

Cand proprietatile dielectrice ale materialelor depind de directia campului aplicat, datorita anumitor proprietati ale structurilor cristaline, dielectricul se numeste **anizotrop**.

Lgile electrostaticii

Legea polarizatiei

Relatia dintre vectorul inductie electrica si vectorul intensitate camp electric include un tensor:

$$\vec{D} = \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

Din fericire, de cele mai multe ori se poate considera ca mediul este **omogen**, **liniar** si **izotrop**. Acesta este cel mai simplu caz posibil.

Nota finala asupra semnificatiei fizice a permitivitatii dielectrice relative: indica de cate ori este mai mare forta electostatica in vid decat in mediul respectiv pentru acelasi sistem fizic (datorita efectului de anulare al corpurilor polarizate).

Nota: In general, vectorul polarizatie are 2 componente:
- una temporara (P_t) si una permanenta (P_p)

Legile electrostaticii

Relatia dintre vectorii D, E si P

Suma vectoriala dintre polarizatie (ambele componente) si intensitatea campului electric multiplicata cu permitivitatea vidului este egala, in orice moment si punct, cu inductia electrica:

$$\boxed{\overrightarrow{D} = \varepsilon_0 \cdot \overrightarrow{E} + \overrightarrow{P_t} + \overrightarrow{P_p}}$$

Pentru materiale fara polarizatie permanenta: $\boxed{\overrightarrow{D} = \varepsilon_0 \cdot \overrightarrow{E} + \overrightarrow{P_t}}$

Pentru materiale liniare fara polarizatie permanenta: $\boxed{\overrightarrow{D} = \varepsilon \cdot \overrightarrow{E}}$

Pentru materiale anizotrope si fara polarizatie permanenta:

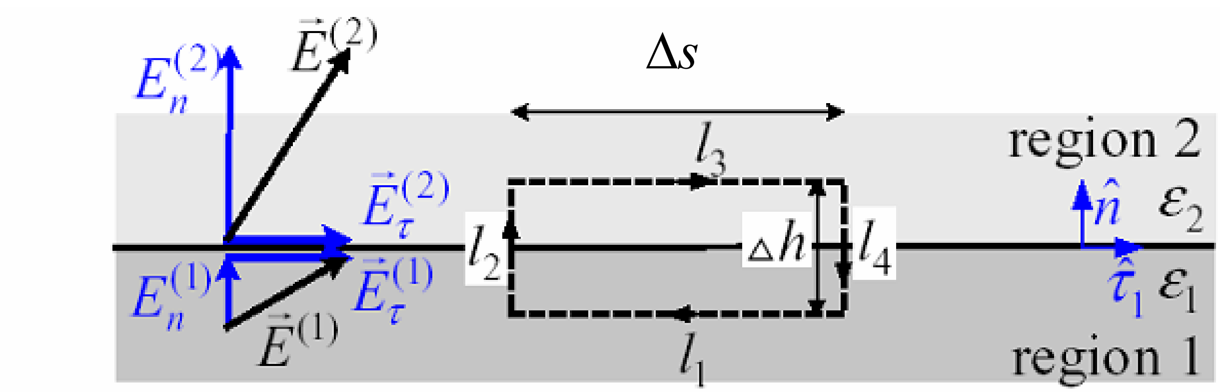
$$\boxed{\overrightarrow{D} = \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \overrightarrow{E}}$$

Conditii de frontiera in electrostatica

Majoritatea problemelor practice presupun existenta a mai mult de doua regiuni cu proprietati electrice diferite. Regiunile invecinate sunt separate prin suprafete numite frontiere (sau interfete). Comportarea campului pe aceste frontiere este descrisa prin anumite ecuatii: **conditii de frontiera.**

Aceste ecuatii sunt deduse din ecuatiile generale de camp, valabile in volum. Conditiile de frontiera sunt esentiale pentru solutionarea oricaror probleme de camp electrostatic. Aceste probleme au o solutie unica doar daca se cunosc conditiile de frontiera.

Conditiile de frontiera pentru componenta tangenta la interfata a campului



Conditii de frontiera in electrostatica

$$\boxed{\vec{n} \times \left[\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)} \right] = 0}$$

Conponenta tangentiala a vectorului camp electric este continua prin interfata dintre materiale.

!!

$$\boxed{\vec{n} \cdot \left(D^{(2)} - D^{(1)} \right) = \rho_s}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\varepsilon_2 \cdot E_n^{(2)} - \varepsilon_1 \cdot E_n^{(1)} = \rho_s}$$

!!!

Daca pe suprafata de separatie dintre dielectrici nu exista **sarcini libere**, atunci *componenta normala a inductiei electrice va fi continua.*

Electrostatica

Conditii de frontiera in electrostatica

$$D_n^{(1)} = D_n^{(2)}$$

$$\varepsilon_1 \cdot E_n^{(1)} = \varepsilon_2 \cdot E_n^{(2)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{E_n^{(2)}}{E_n^{(1)}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Componenta normala a campului electric este discontina la interfata dintre 2 dielectrici.

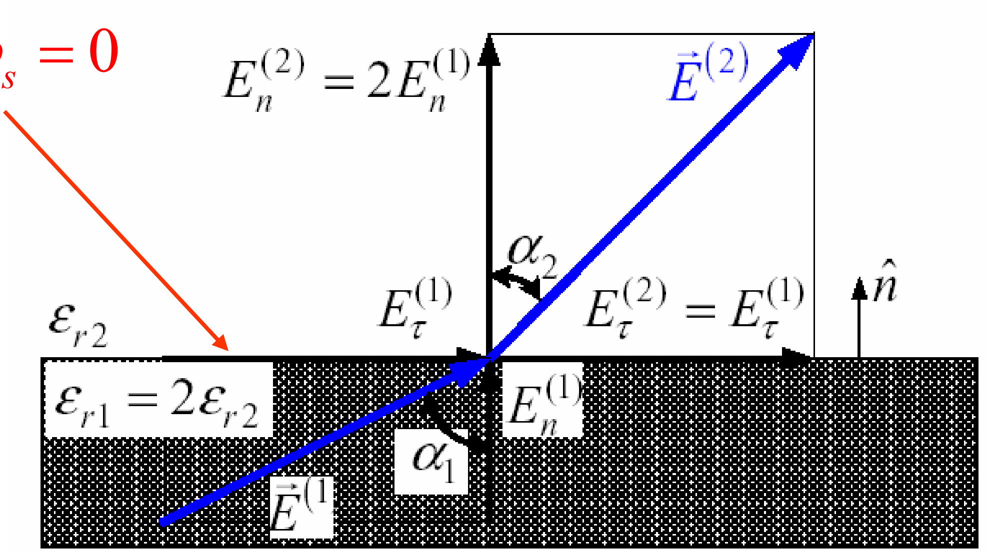
Conditii de frontiera in electrostatica

La interfata dintre dielectrici, inductia electrica normala si campul electric tangential sunt continue. Aceasta face ca vectorul camp electric sa-si schimbe brusc directia (NUMAI pt suprafete fara distributii de sarcina):

$$\boxed{E_{\tau_2}^{(1)} = E_{\tau_2}^{(2)}} \Rightarrow \boxed{E^{(1)} \cdot \sin\alpha_1 = E^{(2)} \cdot \sin\alpha_2}$$

$$\boxed{\varepsilon_1 \cdot E_n^{(1)} = \varepsilon_2 \cdot E_n^{(2)}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 \cdot E^{(1)} \cdot \cos\alpha_1 = \varepsilon_2 \cdot E^{(2)} \cdot \cos\alpha_2}$$

$\rho_s = 0$



$$\boxed{\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

Foarte important !!