Curs nr. 3

Teoria Campului Electromagnetic

Universitatea Tehnica din Cluj-Napoca

http://www.et.utcluj.ro/~lcret

March 11 - 2013

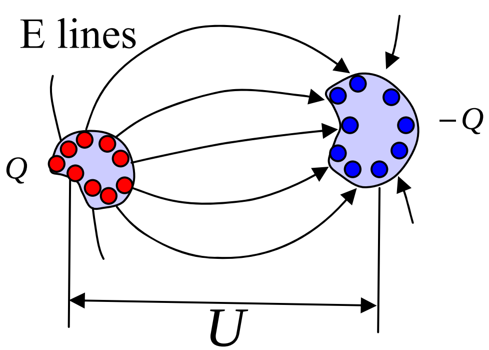
Capacitati

Capacitatea este o proprietate a unei configuratii geometrice, formata de obicei din doua obiecte conductoare separate de un mediu izolator.

Sistemul de doua conductoare, fiecare incarcate cu aceeasi sarcina electrica dar de semne opuse se numeste **condensator.**

Capacitatea este o masura a sarcinii cu care se poate incarca o anumita configuratie atunci cand aceasta este conectata si apoi deconectata de la o baterie cu U volti.

Cantitatea de sarcina Q cu care se incarca fiecare conductor va fi proportionala cu tensiunea U a bateriei si o constanta C, denumita capacitate.



Prin definitie:

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}}$$

Capacitate: Farad ={C/V}=F

Capacitate

O expresie generala pentru capacitati, in functie de vectorul E :

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{\iint\limits_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int\limits_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}}}$$

Daca mediul ce inconjoara electrozii este omogen (permitivitatea dielectrica este constanta), atunci capacitatea se scrie doar in functie de vectorul E:

$$\boxed{C = \varepsilon \cdot \frac{\iint\limits_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\int\limits_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}}}$$

Capacitate

Pentru un condesator cu un dielectric omogen, capacitatea este o functie de dimensiunile sale geometrice, ce caracterizeaza forma si pozitia relativa a armaturilor, si este direct proportionala cu permitivitatea dielectrica :

$$C = \varepsilon \cdot f\left(g_1, g_2, \ldots, g_n\right)$$

In cazul unui dielectric neomogen, permitiviatea dielectrica variaza, iar capacitatea este o functie de forma:

$$C = f\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\right)$$

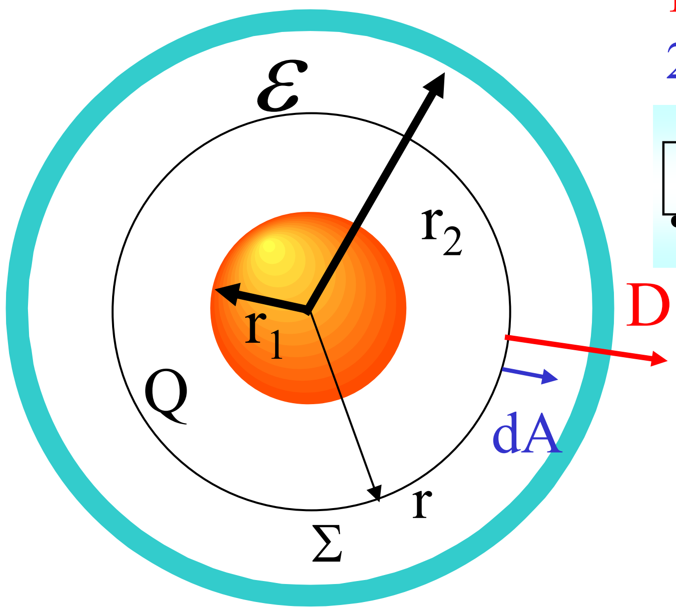
Calculul capacitatilor

Algoritm pentru calculul capacitatilor:

- Se identifica cei doi conductori incarcati cu sarcina
- Se calculeaza intensitatea campului electric
- Se calculeaza tensiunea electrica dintre cei doi conductori
- Se aplica definitia capacitatii

Electrostatica

Capacitatea condensatorului sferic



1. Cei doi conductori sunt incarcati cu Q si -Q

2. Se aplica legea fluxului electric.

$$\oiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iint_{\Sigma} D \cdot dA = D \cdot \iint_{\Sigma} dA = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot D = Q$$

$$D = \varepsilon \cdot E \qquad E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$$

3. Se calculeaza tensiunea dintre conductoare

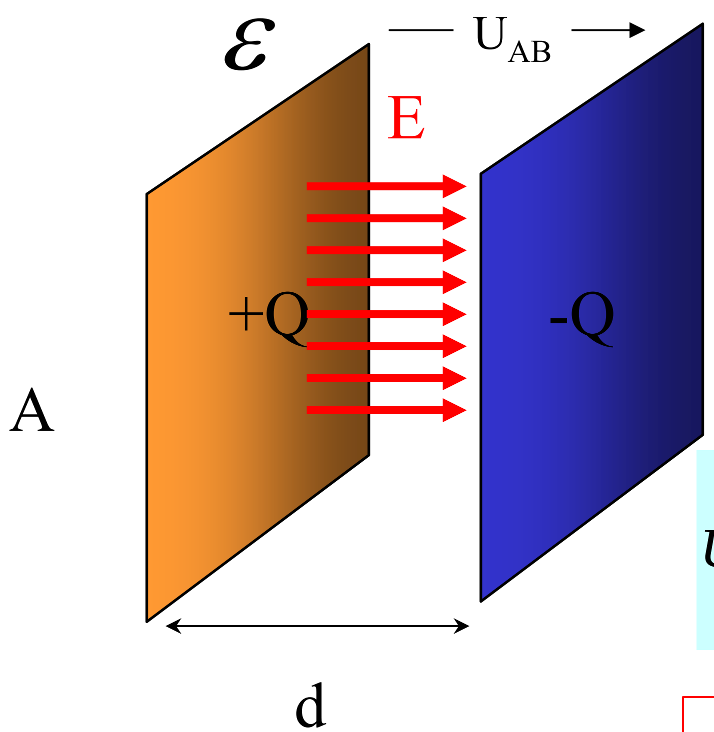
$$U_{AB} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 E \cdot ds = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2} \cdot dr = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

4. Se aplica definitia capacitatii

$$\boxed{C = \frac{Q}{U_{AB}}} \qquad C = \frac{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1}$$

Daca: $r_2 \to \infty$ $C = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r_1$

Capacitatea condensatorului plan paralel



Campul electric dintre placile paralele:

$$\boxed{E = \frac{\rho_s}{\varepsilon}}$$

$$\rho_s = \frac{Q}{A}$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{A \cdot \varepsilon}$$

$$U_{AB} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 E \cdot ds = E \cdot \int_1^2 ds = E \cdot d = \frac{Q \cdot d}{A \cdot \varepsilon}$$

$$C = \frac{Q}{U_{AB}}$$

$$\boxed{C = \frac{A \cdot \varepsilon}{d}}$$

Energia electrostatica

Pentru a crea un camp electric intr-un domeniu in care acesta era initial nul, este necesar sa deplasam sarcini electrice de la infinit pana la corpurile care vor retine sarcina. Energia electrica a acestui camp este egala cu lucrul mecanic total necesar pentru a transporta aceste sarcini.

Pentru a defini energia astfel, se considera valide ipotezele:

mediul este izotrop, liniar si fara polarizatie permanenta.

stocarea sarcinilor pe conductoare se realizeaza foarte incet, pentru a se putea considera campul ca fiind electrostatic si pentru a nu se produce transformarea ireversibila a lucrului mecanic efectuat in caldura.

se considera ca sistemul de conductoare este imobil, astfel incat sa nu se piarda lucru mecanic pentru a deforma sau deplasa conductoarele.

Electrostatica

Energia electrostatica

Se considera *n* sfere conductoare si urmatoarele ipoteze suplimentare:

Toate conductoarele sunt in starea initiala neincarcate:

$$Q_i = 0 \qquad \forall \quad i = 1,2,..,n$$
$$V_i = 0$$

Starea finala a conductoarelor va fi:

$$Q_1, Q_2, \ldots\ldots\ldots Q_i, \ldots\ldots Q_n$$
$$V_1, V_2, \ldots\ldots\ldots V_i, \ldots\ldots V_n$$

O stare intermediara se va instala proportional, ceea ce se exprima prin existenta urmatoarelor relatii:

$$Q_i' = \lambda \cdot Q_i \qquad \forall \quad i = 1,2,..,n$$
$$V_i' = \lambda \cdot V_i$$

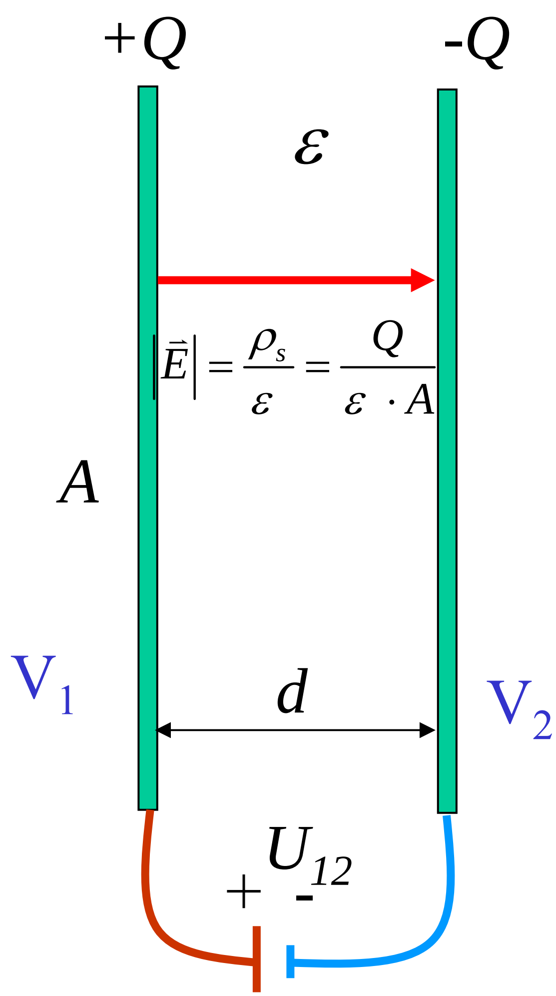
Electrostatica

Energia electrostatica

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} V_i \cdot Q_i$$

Relatia de mai sus exprima energia stocata in campul electric al unor conductoare, avand sarcinile elecrice si potentialele cunoscute.

Electrostatica



Energia electrostatica

Se considera un condensator cu diferenta de potential U_{12} si sarcina $+Q$, $-Q$ pe armaturi. Aria armaturilor (A) si distanta dintre ele (d).

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} V_i \cdot Q_i = \frac{1}{2} \cdot V_1 \cdot Q - \frac{1}{2} \cdot V_2 \cdot Q = \frac{1}{2} \cdot U_{12} \cdot Q$$

Dar: $$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{\varepsilon A}{d}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot U_{12} \cdot Q = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2_{12}$$

$$U_{12} = E \cdot d$$

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\varepsilon \cdot A}{d} \right) \cdot (E \cdot d)^2 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot A \cdot d \cdot E^2 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot V \cdot E^2$$

V este volumul dielectricului dintre armaturi NU potentialul

Energia electrostatica

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E \cdot E = \frac{1}{2} \cdot D \cdot E$$

Aceasta relatie este opusa primei relatii pentru energia electrostatica (ce exprima energia in functie de potentiale si sarcini si nu specifica unde este localizata energia - in conductoare sau in dielectrici). *w_e este densitatea de energie electrostatica.*

In general:

$$w_e = \frac{1}{2} \cdot \vec{D} \cdot \vec{E}$$

Energia electrica totala este:

$$W_e = \iiint_V w_e \cdot dv = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dv \text{!!!!}$$

Concluzie:

Energia electrica este localizata in dielectrici (acolo unde exista camp electric) si nu in conductoare (unde campul electric este nul).

Capitolul 2

Electrocinetica

Introducere

Pana acum s-a discutat despre electricitatea statica. Sarcinile erau statice. Acum dorim sa vedem ce se petrece cand sarcinile sunt in miscare. De aceea se vor studia preponderent conductoarele, si nu izolatoarele (in care sarcinile nu se pot misca). Idea de sarcini in miscare ne aduce imediat la conceptul de curenti electrici si campuri magnetice. In acest captitol se vor trata anumite aspecte legate de curenti electrici.
Aceasta ramura a electromagnetismului este cunoscuta ca: electrocinetica.

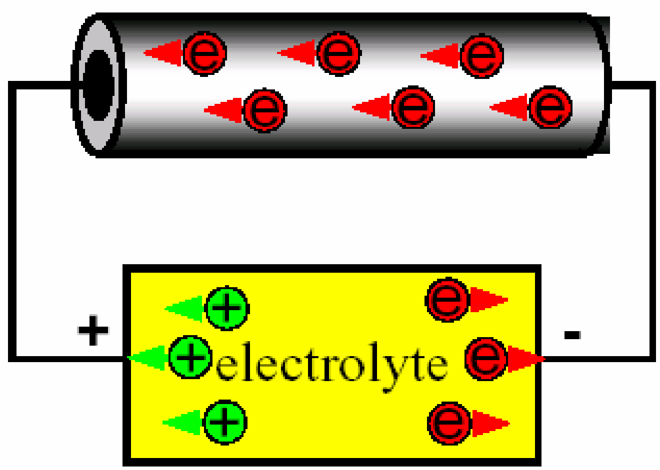
Intrucat sarcinile sunt de acum in miscare, nu mai exista echilibru electrostatic, de aceea proprietatile conductoarelor stabilite anterior nu mai sunt valide. In speta, atunci cand sarcinile sunt in miscare, campul electric total in interiorul unui conductor nu mai este nul:

$$\boxed{\vec{E} + \vec{E}_{external} \neq 0}$$

Nota: daca sarcina are o anumita acceleratie, ea creeaza o unda electromagnetica. Aceasta este tema urmatorului capitol despre campul electromagnetic.

Curentul electric

Daca sursele producătoare de FSE se află în contact fizic cu un corp metalic, electronii vor încerca imediat să le descarce până când nu va mai exista câmp electric în interiorul conductorului. Exact aceasta ar fi situatia daca sursa nu ar fi capabila sa furnizeze in mod continuu tot mai multe sarcini, printr-un anumit mecanism de transfer al sarcinilor electrice.



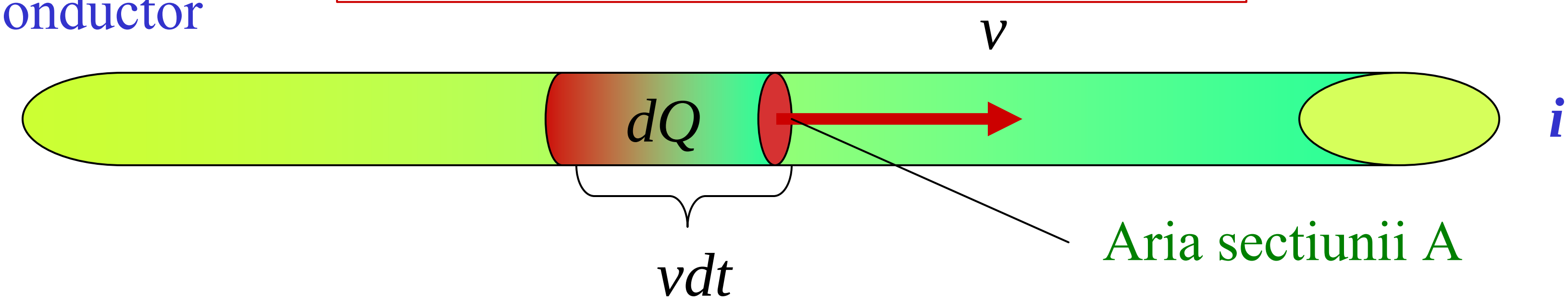
Curent electric

Daca exista un astfel de mecanism, apare o miscare dirijata a sarcinilor electrice, denumita curent el. de conductie, sau simplu curent electric *i (A)*.

Cantitatea totala de sarcini ce se deplaseaza printr-o sectiune data per unitate de timp reprezinta curentul, notat uzual cu *i:*

$$\boxed{i = \frac{dQ}{dt}, \qquad [i]_{SI} = \frac{1C}{1s} = 1A\,(Amper)}$$

Conductor



Curent electric

Considerand curentul ce strabate o sectiune de arie unitara, se obtine o valoare ce poate fi definita in orice punct din spatiu ca un vector, notat cu $\vec{J}$, denumit densitate de curent de conductie :

$$\vec{J} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta A} \cdot \vec{n} = \frac{di}{dA} \cdot \vec{n}, \qquad [J]_{SI} = \frac{1A}{1m^2}$$

unde *n* este directia normala la (perpendiculara pe) plan.

Curentul total prin suprafetele terminale poate fi obtinut din densitatea de curent ca o integrala pe aria sectiunii conductorului.

$$i = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Curent electric de convectie

Curentul electric de conductie are proprietatea de a strabate intotdeauna mediul conductor, deplasarea particulelor incarcate cu sarcina electrica fiind o miscare relativa fata de conductor.

Daca sarcinile electrice sunt transportate direct de mase incarcate cu electricitate, apare un curent electric creat de deplasarea acestor mase, denumit **curent electric de convectie.**

Considerand un corp – conductor sau izolator – incarcat cu o sarcina electrica avand densitatea de volum ρ_v, care se deplaseaza intr-o anumita directie cu viteza v:

Densitatea de curent de convectie este definita ca: $\boxed{\vec{J}_C = \rho_v \cdot \vec{v}}$

iar curentul total ce-i corespunde este

$$\boxed{i_c = \int_A \vec{J}_C \cdot d\vec{A}}$$

Legea lui Ohm

Prin studii experimentale s-a constatat ca vectorul densitate de curent de conductie este strans legat de vectorul intensitate camp electric. Pentru majoritatea conductorilor, acesti doi vectori sunt coliniari si proportionali pentru o gama larga de valori ale lui E (materiale liniare).

Prima forma locala: $\boxed{\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}}$ Valida pt materiale liniare, fara camp electric extern!!

Unde σ este conductivitatea conductorului.

A doua forma locala: $\boxed{\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \cdot \vec{J} = \rho \cdot \vec{J}}$ Valida pt materiale liniare, fara camp electric extern!!

Unde ρ este rezistivitatea conductorului.

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\sigma}}$$

Legea lui Ohm

A treia forma locala:

$$\boxed{\vec{E} + \vec{E}_{emf} = \rho \cdot \vec{J}}$$

Valida pt materiale liniare si camp electric extern!!

A patra forma locala:

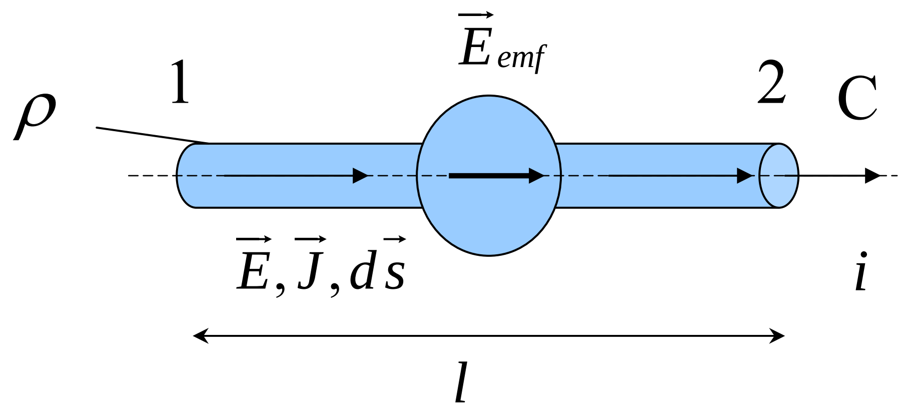
$$\boxed{\vec{J} = \sigma \cdot \left(\vec{E} + \vec{E}_{emf}\right)}$$

Valida pt materiale liniare si camp electric extern!!

Forma integrala a legii lui Ohm.

Se considera un material omogen cu conductivitatea σ, lungimea l si sectiune uniforma A, ca mai jos. In conductor J, E si E_{emf} au aceeasi directie ca si curentul i.

$$\boxed{\vec{E} + \vec{E}_{emf} = \rho \cdot \vec{J}}$$



Legea lui Ohm

Integrand forma locala a legii lui Ohm de-a lungul curbei *C*, intre capetele (1) si (2), se obtine (se observa ca toti vectorii sunt coliniari):

$$\int_{(1)}^{(2)} \left(\vec{E} + \vec{E}_{emf}\right) \cdot d\vec{s} = \int_{(1)}^{(2)} \left(\rho \cdot \vec{J}\right) \cdot d\vec{s}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{(1)}^{(2)} \left(\vec{E} + \vec{E}_{emf}\right) \cdot d\vec{s} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}_{emf} \cdot d\vec{s} = u_{12} + e_{12}$$

u_{12} Tensiunea electrica intre cele doua capete 1 si 2

e_{12} Tensiunea electromotoare dintre capetele 1 si 2

Legea lui Ohm

Se presupune ca densitatea de curent este uniforma prin sectiunea conductorului

$$\int_{(1)}^{(2)} \left(\rho \cdot \vec{J}\right) \cdot d\vec{s} = \int_{(1)}^{(2)} \left(\rho \cdot \frac{i}{A}\right) \cdot ds = i \cdot \int_{(1)}^{(2)} \frac{\rho \cdot ds}{A}$$

R_{12} este rezistenta conductorului intre (1) si (2)

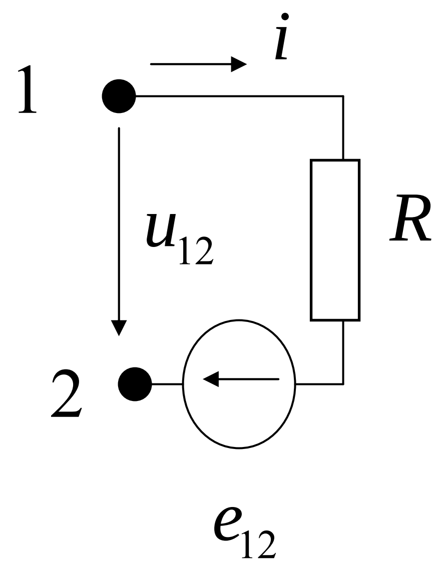
$$R_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \frac{\rho \cdot ds}{A}$$

Daca sectiunea este constanta de-a lungul intregii curbe, atunci rezistenta intre cele doua puncte (1) si (2) va fi:

$$R_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \frac{\rho \cdot ds}{A} = \frac{\rho}{A} \cdot \int_{(1)}^{(2)} ds = \frac{\rho \cdot l}{A}$$

Forma integrala a legii lui Ohm.

$$u_{12} + e_{12} = R_{12} \cdot i$$



$$\boxed{u_{12} \pm e_{12} = i \cdot R}$$

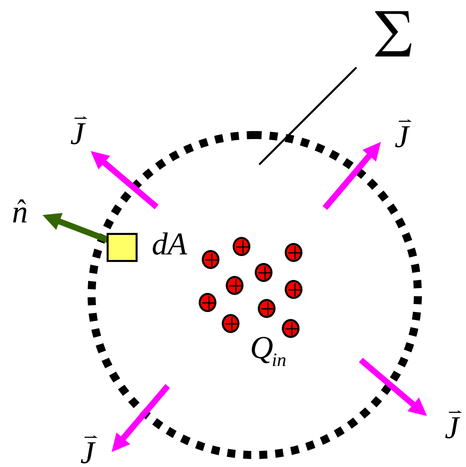
Legea conservarii sarcinilor electrice (legea continuitatii)

O lege fundamentala a fizicii spune ca sarcinile nu pot fi nici create nici distruse. Sarcinile pot fi deplasate dintr-un loc in altul de catre currentii electrici.

Scurgerea unui curent dintr-un volum inseamna, in mod inevitabil, scaderea numarului de sarcini din acest volum. Intrarea unui curent intr-un volum implica cresterea numarului de sarcini delimitate de acest volum.

Aceasta reprezinta asa numita lege a continuitatii curentilor (sau legea conservarii sarcinilor electrice). In forma integrala, aceasta este:

Legea conservarii sarcinilor electrice



Forma integrala

$$\boxed{i = -\frac{dQ}{dt} = \oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{A}}$$

$$\boxed{\Rightarrow -\frac{d}{dt}\left(\oint\!\!\oint\!\!\oint_{V_\Sigma} \rho_v \cdot dv \right) = \oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \oint\!\!\oint\!\!\oint_{V_\Sigma} div\vec{J} \cdot dv}$$

Remarca foarte importanta: cand in expresia unei legi a EM in **forma integrala** exista o derivata a unei integrale de volum (sau suprafata sau linie) sunt doua posibilitati diferite:

Volumul (sau suprafata sau linia) este imobila.

Volumul, suprafata sau linia se misca cu viteza v = const.

Legea conservarii sarcinilor electrice

Se presupune ca volumul *V* este mobil cu viteza *v*, atunci derivata in raport cu timpul a integralei de volum va fi:

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint_{V_\Sigma} \rho_v \cdot dv\right) = \underbrace{\iiint_{V_\Sigma} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \cdot dv}_{\text{Volumul este imobil}} + \underbrace{\oiint_{\Sigma} \rho_v \cdot \vec{v} \cdot d\vec{A}}_{\text{Volumul este mobil}}$$

In acest caz, forma locala a legii continuitatii va fi:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \iiint_{V_\Sigma} div\vec{J} \cdot dv = -\frac{d}{dt}\left(\iiint_{V_\Sigma} \rho_v \cdot dv\right) = -\iiint_{V_\Sigma} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \cdot dv - \oiint_{\Sigma} \rho_v \cdot \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{A} + \oiint_{\Sigma} \rho_v \cdot \vec{v} \cdot d\vec{A} = -\iiint_{V_\Sigma} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \cdot dv$$

Legea conservarii sarcinilor electrice

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{J}\cdot d\vec{A} + \oint\!\!\oint_{\Sigma} \rho_v \cdot \vec{v}\cdot d\vec{A} = \oint\!\!\oint_{\Sigma} \left(\vec{J} + \rho_v \cdot \vec{v}\right)\cdot d\vec{A} = -\iiint_{V_\Sigma} \frac{\partial \rho_v}{\partial t}\cdot dv$$

$$\vec{J}_c = \rho_v \cdot \vec{v}, \quad (convection \quad current \quad density)$$ convectie

$$\vec{J}, \quad (conduction \quad current \quad density)$$ conductie

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \left(\vec{J} + \vec{J}_c\right)\cdot d\vec{A} = -\iiint_{V_\Sigma} \frac{\partial \rho_v}{\partial t}\cdot dv$$

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \left(\vec{J} + \vec{J}_c\right)\cdot d\vec{A} = \iiint_{V_\Sigma} div\left(\vec{J} + \vec{J}_c\right)\cdot dv = -\iiint_{V_\Sigma} \frac{\partial \rho_v}{\partial t}\cdot dv$$

$$div\left(\vec{J} + \vec{J}_c\right) = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Forma locala generala a legii continuitatii

Legea conservarii sarcinilor electrice

$$div\left(\vec{J}+\vec{J}_c\right)=-\frac{\partial\rho_v}{\partial t}$$

Aceasta este forma locala a legii conservarii sarcinilor. Ea ne arata ca sursele densitatilor de curenti de convectie si de conductie sunt puncte, in care densitatea de sarcina se modifica in raport cu timpul.

1) Caz particular. Volumul este imobil

$$\vec{J}_c=0$$

$$div\vec{J}=-\frac{\partial\rho_v}{\partial t}$$

Aceasta este legea continuitatii in forma diferentiala pentru structuri imobile.

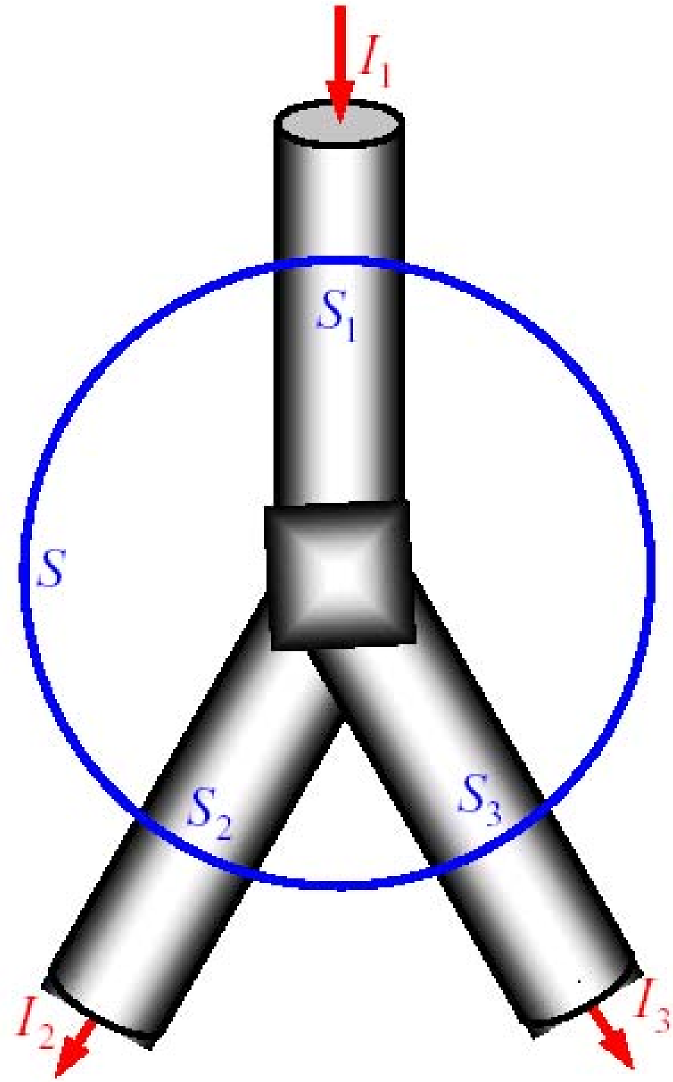
2) Caz particular. Volumul este imobil si regimul e stationar

Aici se considera curenti constanti. In acest caz, sarcinile se deplaseaza cu viteza constanta (in medie) si densitatea lor intr-un anumit punct nu variaza in timp. Deci,

$$\boxed{\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \Rightarrow div\vec{J} = 0}$$

$$\boxed{\iiint_{V_\Sigma} div\vec{J} \cdot dv = \oiint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0}$$

Se presupune acum ca integrarea se realizeaza pe o suprafata inchisa - delimiteaza un volum ce cuprinde un nod de circuit. Curentii exista doar in interiorul firelor metalice, deci integrala reprezinta in fapt suma integralelor pe suprafetele sectiunilor fiecarui fir in parte.



$$\boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{J}\cdot d\vec{A} = \iint_{S_1} \vec{J}\cdot d\vec{A} + \iint_{S_2} \vec{J}\cdot d\vec{A} + \iint_{S_3} \vec{J}\cdot d\vec{A} = 0}$$

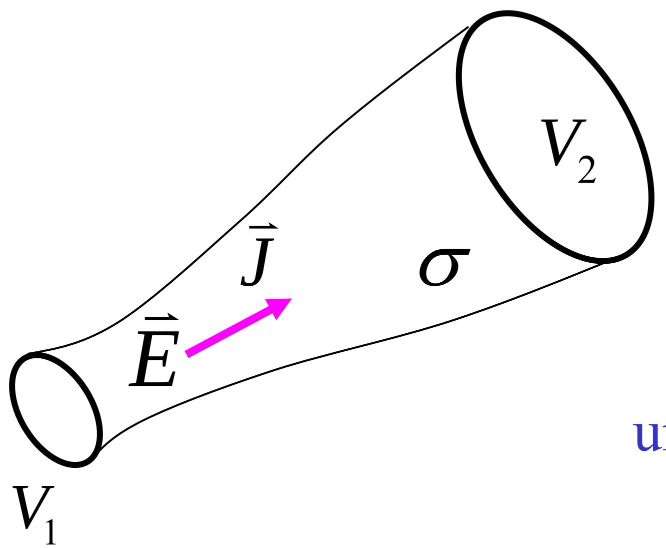
$$\boxed{-I_1 + I_2 + I_3 = 0}$$

Aceasta reprezinta teorema I a lui Kirchhoff referitoare la curenti, care in teoria circuitelor electrice are forma generala:

$$\boxed{\Rightarrow \sum_n I_n = 0}$$

Rezistenta

Se prezinta expresia generala pentru obtinerea rezistentei electrice a unui obiect.



$$\boxed{R_{12} = \frac{u_{12}}{i} = \frac{V_1 - V_2}{i}}$$

unde

$$u_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$$

si

$$i = \int_\Sigma \vec{J} \cdot \overrightarrow{dA} = \int_\Sigma \sigma \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA}$$

Rezistenta

O expresie generala pentru rezistenta in functie de vectorul E:

$$\boxed{R_{12} = \frac{u_{12}}{i} = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\iint_\Sigma \vec{J} \cdot d\vec{A}} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\iint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{A}}, \quad 1\Omega = \frac{1V}{1A}}$$

Atentie: punctul (1) trebuie sa fie un punct de pe electrodul cu potential mai mare, si (2) un punct de pe electrodul cu potential mai mic:

$$\boxed{G_{12} = \frac{i}{u_{12}} = \sigma \cdot \frac{\iint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}}, \quad 1S = \frac{1A}{1V} = 1\Omega^{-1}}$$

Rezistenta

Analogia dintre conductanta si capacitate este evidenta:

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon \cdot \frac{\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\int_{1}^{2} \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

$$G = \frac{i}{u} = \sigma \frac{\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\int_{1}^{2} \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Se presupune existenta a doua structuri cu exact aceeasi forma a electrozilor. Diferenta este ca regiunea ce separa electrozii este un dielectric in primul caz, si un conductor in al doilea caz. Raportul dintre capacitate si conductanta este:

$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

Rezistenta

Formula precedenta este foarte convenabila pentru determinarea rezistentei (sau a conductantei) unei structuri pentru care s-a calculat deja capacitatea.

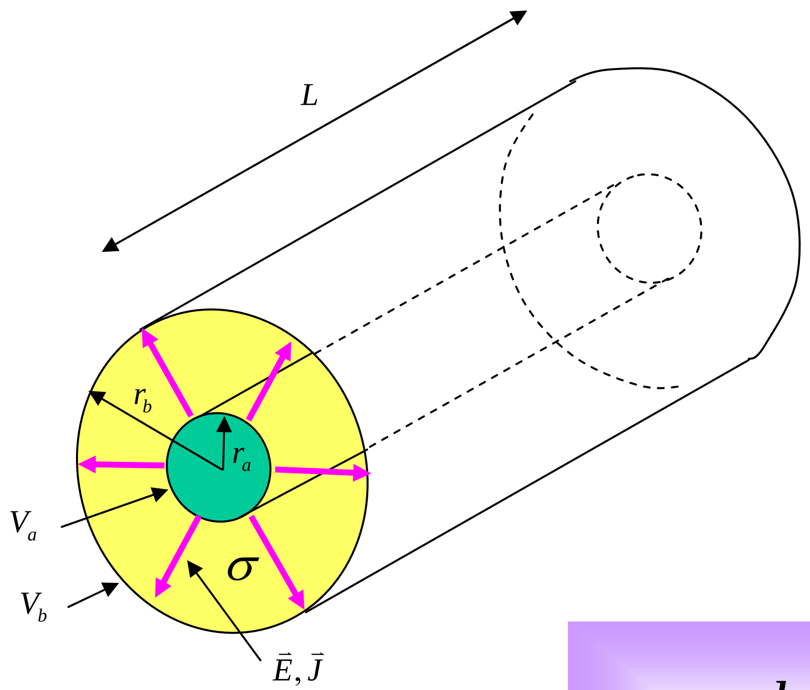
Exemplu: conductanta unei structuri plan-paralele este:

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}, \quad F} \qquad \boxed{G = \frac{\sigma \cdot A}{d}, \quad \Omega^{-1}} \qquad \boxed{R = \frac{d}{A \cdot \sigma}, \quad \Omega}$$

unde, *A* este aria armaturilor si *d* este distanta dintre armaturi.

Rezistenta

Expresia rezistentei dintre cilindrul interior si cel exterior, indicate in figura este:



$$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot L}{ln \frac{r_b}{r_a}}$$

$$G = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot L}{ln \frac{r_b}{r_a}}$$

$$R = \frac{\rho \cdot ln \frac{r_b}{r_a}}{2 \cdot \pi \cdot L}$$

Analogie intre campul electrostatic si campul electrocinetic

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$u_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$div\vec{D} = \rho_v$$

$$\oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{f\Sigma}$$

$$\oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{J} \cdot d\vec{A} = i$$

$$div\vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

$$div_S \vec{D} = \vec{n} \cdot \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \rho_s$$

$$div_S \vec{J} = \vec{n} \cdot \left(\vec{J}_2 - \vec{J}_1\right) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} + \vec{P}_p$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} + \sigma \cdot \vec{E}_{emf}$$

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$G = \frac{i}{u}$$

Analogie intre campul electrostatic si campul electrocinetic

$$U_{AB} \Leftrightarrow u_{AB}$$

$$\vec{E} \Leftrightarrow \vec{E}$$

$$\vec{D} \Leftrightarrow \vec{J}$$

$$Q \Leftrightarrow i$$

$$\varepsilon \Leftrightarrow \sigma$$

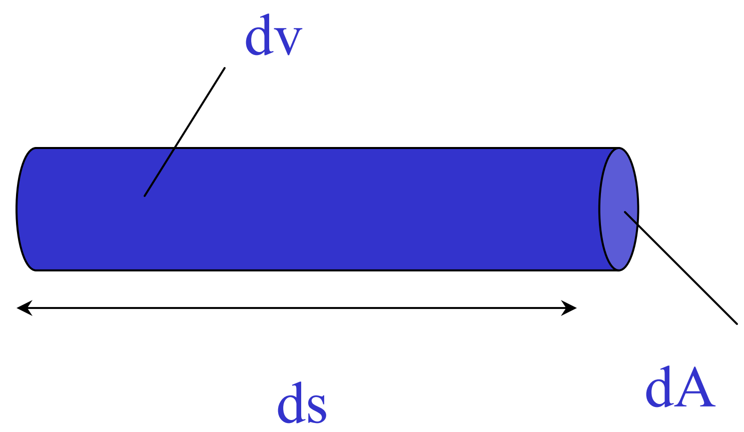
$$\vec{P}_p \Leftrightarrow \sigma \cdot \vec{E}_{emf}$$

$$C \Leftrightarrow G$$

Analogia este foarte utila pentru multe probleme practice. Problemele de electrostatica sunt de obicei mai usor de rezolvat in comparatie cu problemele electrocinetice echivalente.

Densitatea de putere si legea lui Joule

Se considera un volum infinitezimal *dv* dintr-un material rezistiv



Lucrul mecanic efectuat de campul electric pentru a deplasa o sarcina infinitezimala *dQ* de la un capat la altul este:

$$\boxed{d^2W = dV \cdot dQ = \left(\vec{E} \cdot d\vec{s}\right) \cdot dQ, \quad Joule}$$

Puterea este definita ca rata de variatie a energiei in timp. Puterea necesara pentru a transfera aceasta sarcina este:

$$\boxed{dP = \frac{d^2W}{dt} = \frac{\left(\vec{E} \cdot d\vec{s}\right) \cdot dQ}{dt} = \left(\vec{E} \cdot d\vec{s}\right) \cdot i = \left(\vec{E} \cdot d\vec{s}\right) \cdot \left(\vec{J} \cdot d\vec{A}\right)}$$

Densitatea de putere si legea lui Joule

Puterea necesara pentru a deplasa sarcini intr-un volum infinitezimal *dv* poate fi scrisa si ca:

$$dP = \left(\vec{E} \cdot d\vec{s}\right) \cdot \left(\vec{J} \cdot d\vec{A}\right) = \left(\vec{E} \cdot \vec{J}\right) \cdot d\vec{s} \cdot d\vec{A} = \left(\vec{E} \cdot \vec{J}\right) \cdot dv$$

Densitatea de putere este definita ca puterea per unitate de volum consumata de campul electric pentru a deplasa sarcini in acel volum:

$$p = \frac{dP}{dv} = \vec{E} \cdot \vec{J} = \sigma \cdot J^2 = \rho \cdot E^2 \quad W / m^3$$

Legea lui Joule specifica faptul ca pentru un volum dat V_Σ puterea electrica totala consumata pentru a deplasa sarcini in intregul conductor, convertita in caldura, este:

$$P = \iiint_{V_\Sigma} p \cdot dv = \iiint_{V_\Sigma} \left(\vec{E} \cdot \vec{J}\right) \cdot dv, \quad W$$

Densitatea de putere si legea lui Joule

Intr-un conductor cu sectiune uniforma $dv = dAds$, cu ds masurat in directia lui J. Ecuatia precedenta devine:

$$P = \iiint_{V_\Sigma} \left(\vec{E}\cdot\vec{J}\right)\cdot\left(d\vec{A}\cdot d\vec{s}\right) =$$

$$= \iiint_{V_\Sigma} \left(\vec{E}\cdot d\vec{s}\right)\cdot\left(\vec{J}\cdot d\vec{A}\right) = \underbrace{\left(\int_s \vec{E}\cdot d\vec{s}\right)}_{u_{12}}\underbrace{\left(\iint_A \vec{J}\cdot d\vec{A}\right)}_{i}$$

unde, i este curentul prin conductor.

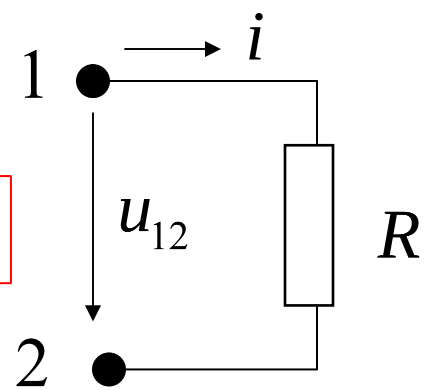
$$\boxed{P = u_{12}\cdot i}$$

Aceasta este forma integrala a legii lui Joule (Lenz) pentru o ramura de circuit fara surse.

Densitatea de putere si legea lui Joule

Expresia puterii disipate este:

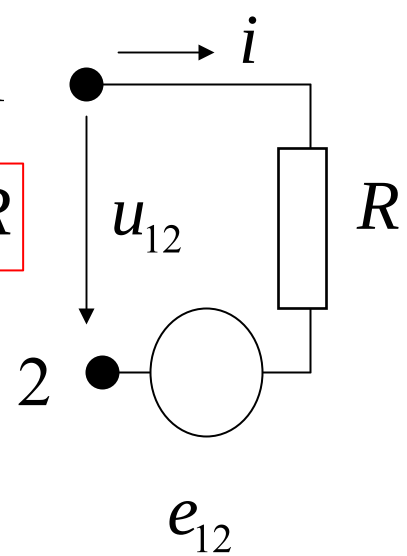
$$\boxed{u_{12} = i \cdot R}$$



$$\boxed{P = u_{12} \cdot i}$$

$$\boxed{P = R \cdot i^2}$$

$$\boxed{u_{12} \pm e_{12} = i \cdot R}$$



$$\boxed{P = \left(i \cdot R \mp e_{12}\right) \cdot i = i^2 \cdot R \mp e_{12} \cdot i}$$