Exercitii 1

a) Să se rezolve ecuația $x^{n+2} = L(f; x_0, x_1 \dots x_n)(x)$ unde $f(t) = t^{n+2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare:

a) Ecuația poate fi scrisă sub forma:

$$x^{n+2} = L(x^{n+2}; x_0, x_1, \dots x_n)(x)$$ și notăm

prescurtat cu $L(x)$ polinomul $L(x^{n+2}; x_0, x_1, \dots x_n)(x)$.

L este un polinom de grad n, $\deg(L) = n$ și verifică

$$L(x_0) = x_0^{n+2}, L(x_1) = x_1^{n+2}, \dots, L(x_n) = x_n^{n+2}$$

(interpolează funcția $f(t) = t^{n+2}$ în punctele $x_0, x_1, \dots x_n$)

Considerăm polinomul de grad $n+2$

$$Q(x) = x^{n+2} - L(x)$$

Aceasta verifică:

$Q(x_0) = Q(x_1) \dots = Q(x_n) = 0$

Are ca rădăcini pe $x_0, x_1, \dots, x_n$, deci poate fi scris

$$Q(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)(x - \alpha)$$

unde α este a $n+2$-a rădăcină care trebuie determinată

Din definiția lui Q obținem relația (egalitatea)

$$x^{n+2} - L(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)(x - \alpha)$$

În partea stângă lipsește termenul pentru x^{n+1} (gradul lui L este n)

Deducem că în partea dreaptă coeficientul lui x^{n+1} trebuie să fie egal cu 0.

Avem

$$(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)(x-\alpha) = \left(x^{n+1} - S_1x^n + S_2x^{n-1} + \dots + (-1)^{n+1}S_{n+1}\right)\cdot(x-\alpha)$$

unde
$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=0}^{n} x_i; \\ S_2 &= \sum_{0\le i<j\le n} x_ix_j \\ &\dots \\ S_{n+1} &= x_0x_1\dots x_n \end{aligned}\right\}$$
Sumele lui Viete pt. $x_0, x_1, \dots x_n$

Obținem $(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)(x-\alpha) =$
$$= x^{n+2} - S_1x^{n+1} - \alpha x^{n+1} + S_2x^n \dots$$

Coeficientul lui x^{n+1} este $-S_1-\alpha$. Egalând cu 0 obținem a $n+2$-a rădăcină a lui Q
$$\alpha = S_1 = x_0+x_1+\dots+x_n$$

Dar rădăcinile lui Q sunt soluțiile ecuației noastre. Așadar avem ca soluții
$$\{x_0, x_1, \dots x_n, \underbrace{x_0+x_1+\dots+x_n}_{}\}$$
($n+2$ soluții)