Fie $A: C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcțională liniară și pozitivă. Să se arate că pentru orice f convexă pe $[a,b]$ are loc inegalitatea

$$A(f) \geq A(e_0) \cdot f\left(\frac{A(e_1)}{A(e_0)}\right)$$

unde $e_0(x) = x^0$ și $e_1(x) = x^1$

<u>Rezolvare</u>:

A liniară : $A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g)$, $\forall f, g \in C[a,b]$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

A pozitivă : $A(f) \geq 0 \quad \forall f \in C[a,b]$, $f \geq 0$

<u>Observații</u>:

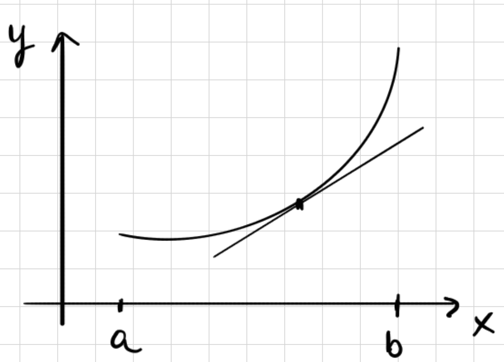
$\alpha = 1$, $\beta = -1$, $g = f \Rightarrow A(1 \cdot f + (-1) \cdot f) = 1 \cdot A(f) + (-1) A(f)$
$\Rightarrow A(0) = 0$

funcția nulă

$f_1, f_2 \in C[a,b]$ a.î. $f_1 \geq f_2 \Rightarrow f_1 - f_2 \geq 0 \Rightarrow A(f_1 - f_2) \geq 0$ (A pozitivă)

$\xRightarrow{\text{A liniară}} A(f_1) - A(f_2) \geq 0 \Rightarrow A(f_1) \geq A(f_2) \Rightarrow$ A monotonă

f-convexă $\Rightarrow$ graficul lui f este "deasupra" tangentei în fiecare punct



P.p. că f este derivabilă pe $[a,b]$. Fie $t \in [a,b]$ fixat.

$$f(x) \geq \underbrace{f'(t)(x-t)+f(t)}_{\text{ecuația tangentei în punctul } (t, f(t))}$$

$$\Leftrightarrow f \geq f'(t)(e_1 - te_0) + f(t)e_0$$

$$\overset{A \text{ monotonă}}{\Longrightarrow} A(f) \geq A(f'(t)(e_1 - te_0) + f(t)e_0)$$

$$\overset{A \text{ liniară}}{\Longleftrightarrow} A(f) \geq A(f'(t)(e_1 - te_0)) + A(f(t)\cdot e_0)$$

$$\overset{A \text{ liniară}}{\Longleftrightarrow} A(f) \geq f'(t)\cdot A(e_1 - te_0) + f(t)\cdot A(e_0)$$

$$\overset{A \text{ liniară}}{\Longleftrightarrow} A(f) \geq f'(t)(A(e_1) - tA(e_0)) + f(t)\cdot A(e_0)$$

Considerăm $t = \dfrac{A(e_1)}{A(e_0)} \in \mathbb{R}$

$$A(f) \geq f'\left(\frac{A(e_1)}{A(e_0)}\right)\underbrace{\left(A(e_1) - \frac{A(e_1)}{A(e_0)}\cdot A(e_0)\right)}_{=0} + f\left(\frac{A(e_1)}{A(e_0)}\right)\cdot A(e_0)$$

$$\Rightarrow A(f) \geq A(e_0)\cdot f\left(\frac{A(e_1)}{A(e_0)}\right)$$