Fie $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ o funcție periodică și $x_k \in (-\pi,\pi)$, $k=\overline{0,2m}$ puncte distincte. Să se arate că există un unic polinom trigonometric

$$T_m(x)=a_0+\sum_{k=1}^{m}\left(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right)$$

care interpolează funcția f în punctele x_k, $k=\overline{0,2m}$

Rezolvare.

Dacă t_m interpolează pe f în $x_k\in(-\pi,\pi)$, $k=\overline{0,2m}$

atunci
$$t_m(x_k)=f(x_k)\quad,\ k=\overline{0,2m}\quad (*)$$

Vom reduce problema aceasta, numită "problemă de interpolare trigonometrică" la una de interpolare polinomială.

Folosind formulele $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ și $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

obținem

$$T_m(x)=a_0+\sum_{k=1}^{m}a_k\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}+\sum_{k=1} b_k\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}=$$

$$=a_0+\sum_{k=1}^{m}\left(a_k\frac{e^{ikx}}{2}-ib_k\frac{e^{ikx}}{2}\right)+\sum_{k=1}^{m}\left(a_k\frac{e^{-ikx}}{2}+b_ki\frac{e^{-ikx}}{2}\right)=$$

$$=\underbrace{a_0}_{\overset{not}{=}c_0}+\sum_{k=1}^{m}\underbrace{\frac{a_k-ib_k}{2}}_{\overset{not}{=}c_k}e^{ikx}+\sum_{k=1}^{m}\underbrace{\frac{a_k+ib_k}{2}}_{\overset{not}{=}c_{-k}}e^{-ikx}=$$

$$=c_0+\sum_{k=1}^{m}c_k(e^{ix})^k+\sum_{k=1}^{m}c_{-k}(e^{ix})^{-k}\overset{-k\overset{not}{=}s}{=}$$

$$=c_0+\sum_{k=1}^{m}c_k(e^{ix})^k+\sum_{s=-m}^{-1}c_s(e^{ix})^s\overset{s\overset{not}{=}k}{=}$$

$$=\sum_{k=-m}^{m}c_k(e^{ix})^k$$

Notăm $e^{ix} = z$ și putem scrie T_m ca o funcție complexă

$$Q_m(z) = \sum_{k=-m}^{m} c_k z^k$$

x_k - distincte în $(-\pi, \pi)$ $\Rightarrow$ z_k sunt puncte distincte pe cercul unitate, $|z_k| = 1$

Problema de interpolare trigonometrică $(*)$ se reduce la

$$Q_m(z_k) = f(x_k), \ k = \overline{0,2m} \quad (\overset{*}{*})$$

Introducem $L_{2m}(z) = z^m Q_m(z)$

$$\Rightarrow L_{2m}(z) = z^m \sum_{k=-m}^{m} c_k z^k = \sum_{k=-m}^{m} c_k z^{k+m} \underset{\underset{k+m=s}{\uparrow}}{=} \sum_{s=0}^{2m} \overline{c}_s z^s$$

unde $c_{s-m} = \overline{c}_s$, $s = \overline{0,2m}$

Problema de interpolare $(\overset{*}{*})$ este echivalentă cu

$$L_{2m}(z_k) = z_k^m f(x_k), \quad k = \overline{0,2m}$$

care admite ca soluție unică polinomul L_{2m}

Deoarece există o relație de determinare între $\overline{c}_k$ și a_k, b_k deducem că există un unic polinom T_m cu proprietatea din enunț.