Noțiuni de matematică

Vector

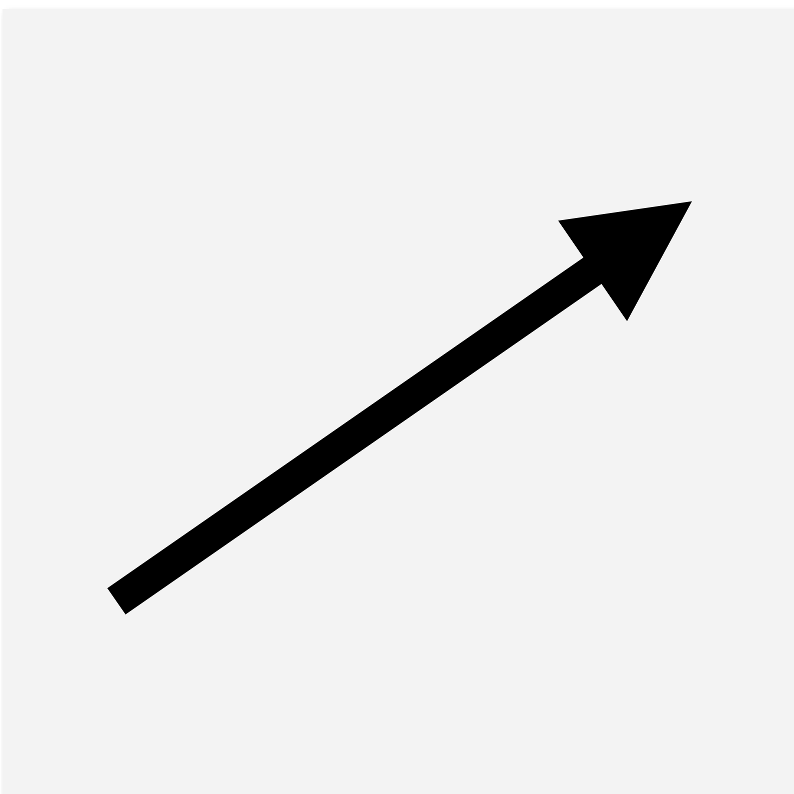
Vector - Entitate geometrică abstractă care reprezintă deplasarea dintre două puncte (ex. 10m spre sud)

Coordonatele unui vector - set de numere reale folosite pentru a specifica un vector (utilizând un sistem de coordonate)

Vector

Geometrie:

săgeată



Algebră:

sir de numere

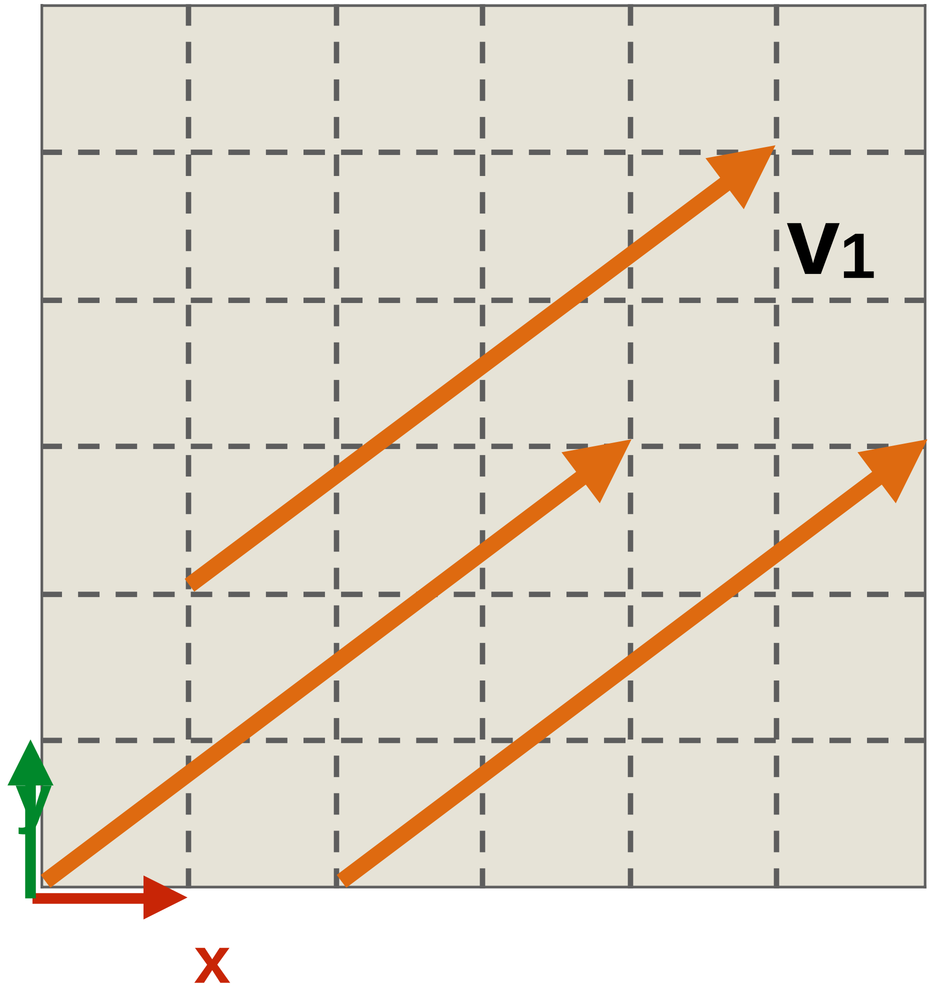
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Vector

Un vector este descris prin **lungime** și **direcție**

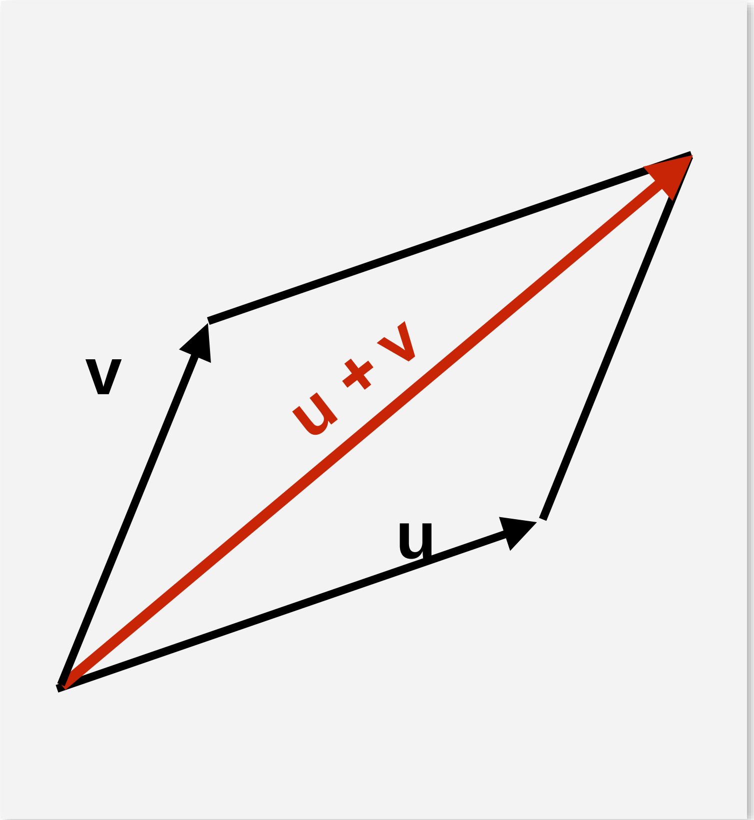
Reprezintă un **deplasament**

Doi vectori sunt **egali** dacă au aceeași **lungime** și **direcție**

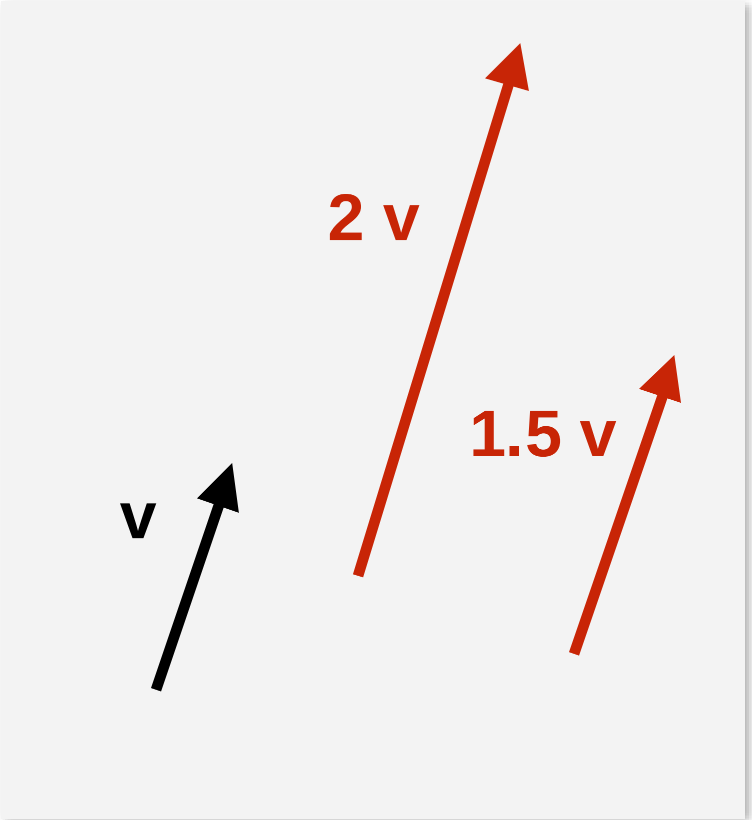


$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$

Operații cu vectori



Adunare



Înmulțirea cu un scalar

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \end{bmatrix}$$

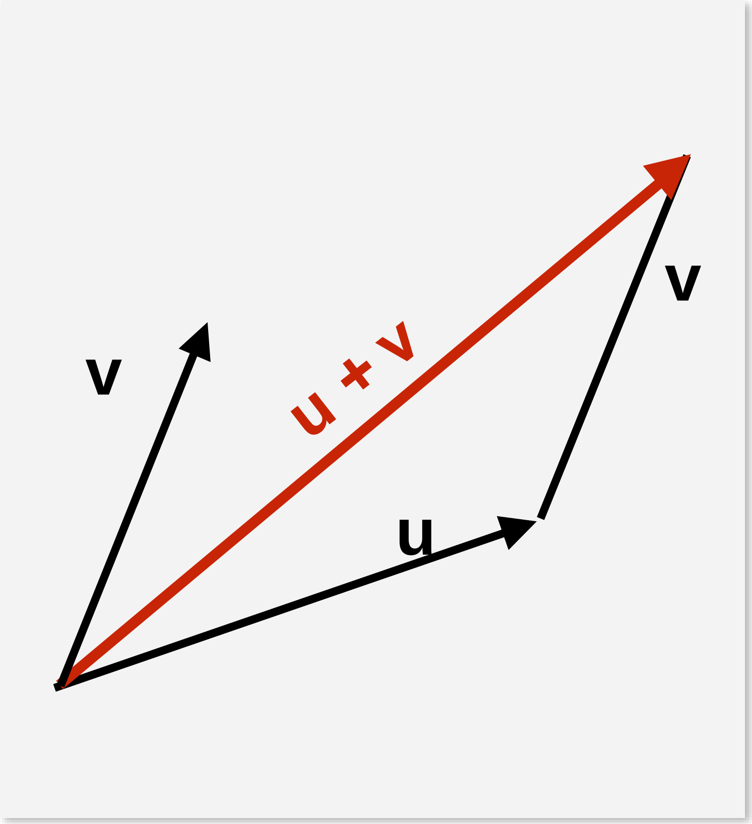
$$A\,\mathbf{u} = \begin{bmatrix} A\,u_x \\ A u_y \end{bmatrix}$$

Proprietățile operațiilor

Adunare:

- comutativitate: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- asociativitate: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- elementul zero: $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
- inversa: $\mathbf{u} + (-\,\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

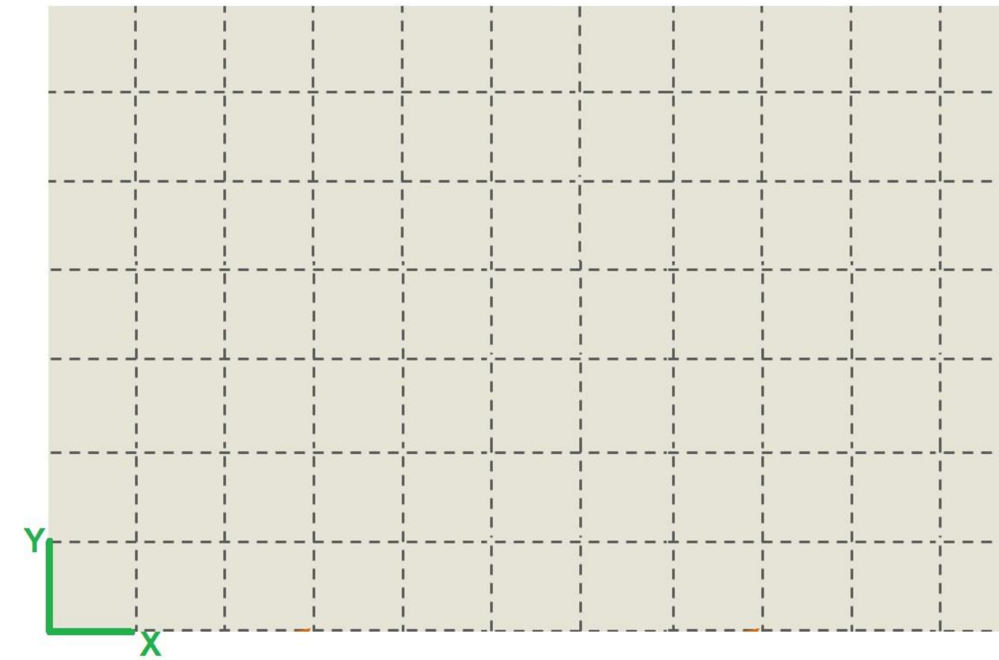
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \end{bmatrix}$$



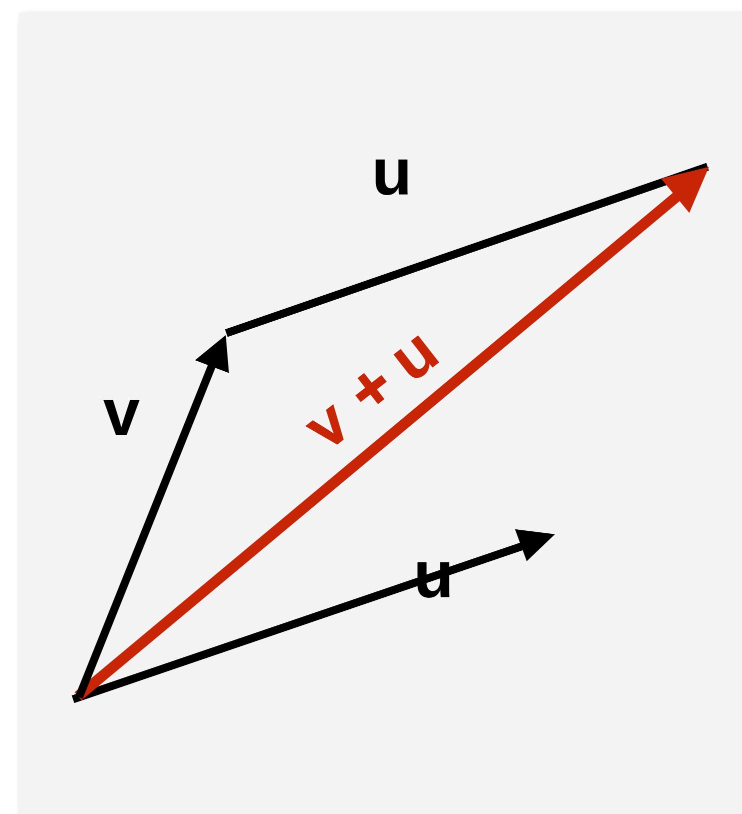
Proprietățile operațiilor

Înmulțirea cu un scalar:

- asociativitate: $(kp)\mathbf{u}=k(p\mathbf{u})$
- element identitate: $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

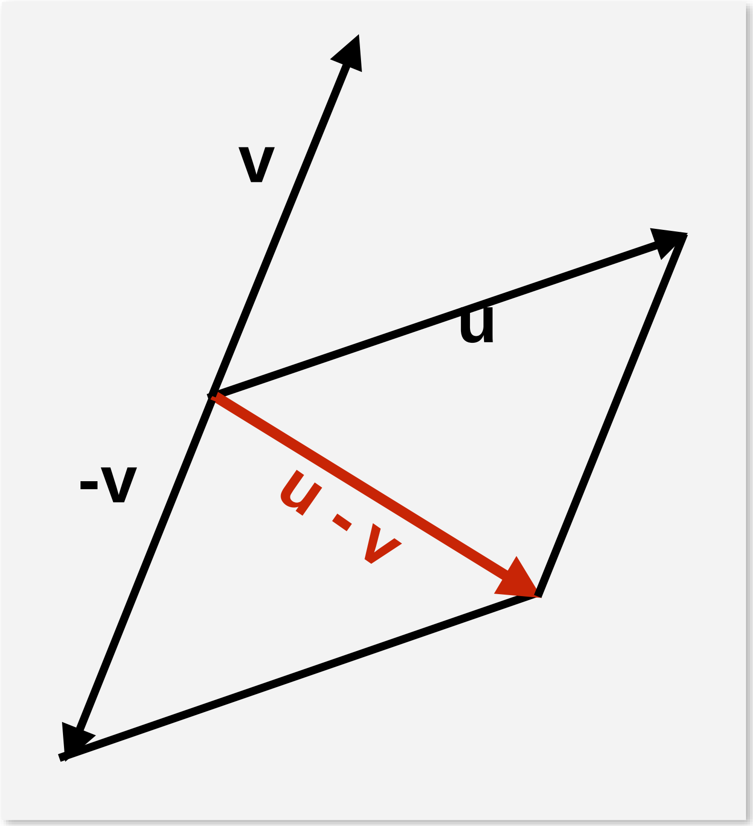


- înmulțirea cu un scalar este distributivă față de adunare: $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
- adunarea este distributivă față de înmulțirea cu un scalar: $(k + p)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + p\mathbf{u}$



$$A\,\mathbf{u} = \begin{bmatrix} A\,u_x \\ A u_y \end{bmatrix}$$

Operații cu vectori



Scăderea

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_x - v_x \\ u_y - v_y \end{bmatrix}$$

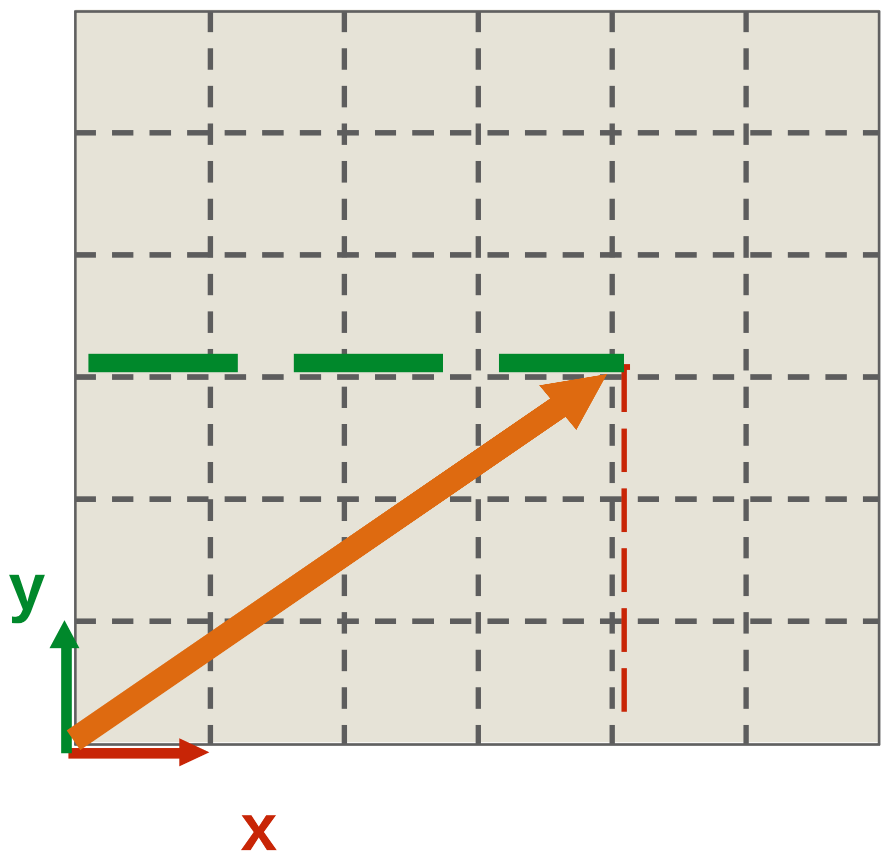
Combinații liniare/afine

Combinație liniară:

- $\mathbf{u} = a_1\mathbf{u_1} + a_2\mathbf{u_2} + \dots + a_k\mathbf{u_k}$

Combinație afină:

- $\mathbf{u} = a_1\mathbf{u_1} + a_2\mathbf{u_2} + \dots + a_k\mathbf{u_k}$
- $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1$



Dependență liniară

Independență liniară:

- $a_1\mathbf{u_1} + a_2\mathbf{u_2} + \ldots + a_k\mathbf{u_k} = 0$
- $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$

- Dependență liniară:
  - $a_1\mathbf{u_1} + a_2\mathbf{u_2} + \ldots + a_k\mathbf{u_k} = 0$
  - $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nu toți nuli

Spațiu vectorial

Baza (unui spațiu vectorial)

- set de vectori liniar independenți
- fiecare vector din acel spațiu poate fi definit ca o combinație liniară a vectorilor bază

Oricare spațiu vectorial poate avea mai multe baze (cu același număr de elemente)

Numărul elementelor din baza unui sistem vectorial este denumită **dimensiunea** spațiului vectorial

Coordonatele unui vector

Oricare vector dintr-un spațiu vectorial poate fi exprimat printr-un set de coordonate unice **c_i**

$$\mathbf{v} = \sum_i c_i \mathbf{b}_i$$

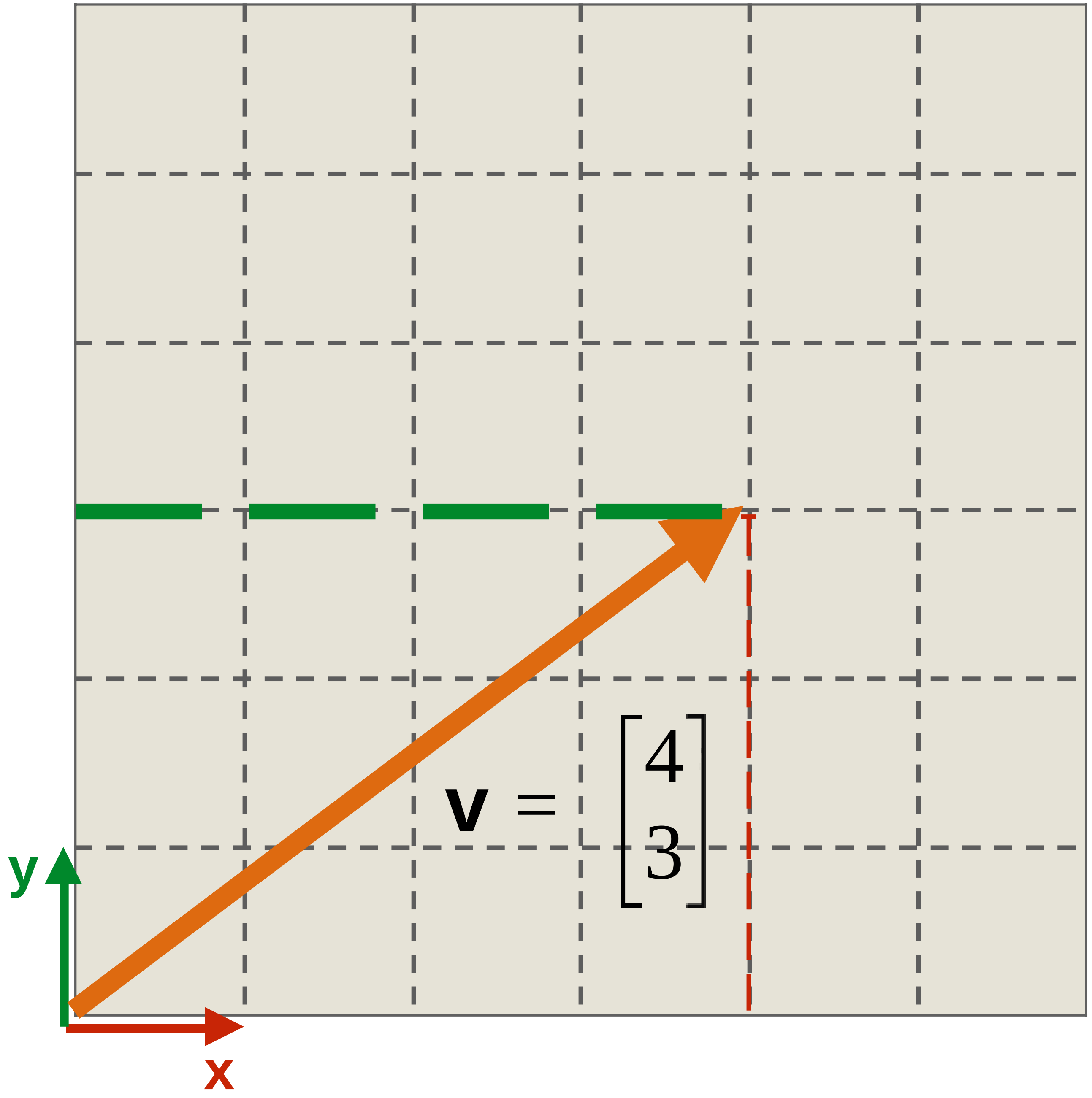
În **R^2**, oricare vector $[a\ b]^T$ poate fi exprimat astfel:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$$

În **R^3**, avem un set similar de vectori (bază) folosiți pentru a exprima oricare vector $[a\ b\ c]^T$:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + c\mathbf{z}$$

Coordonatele vectorilor



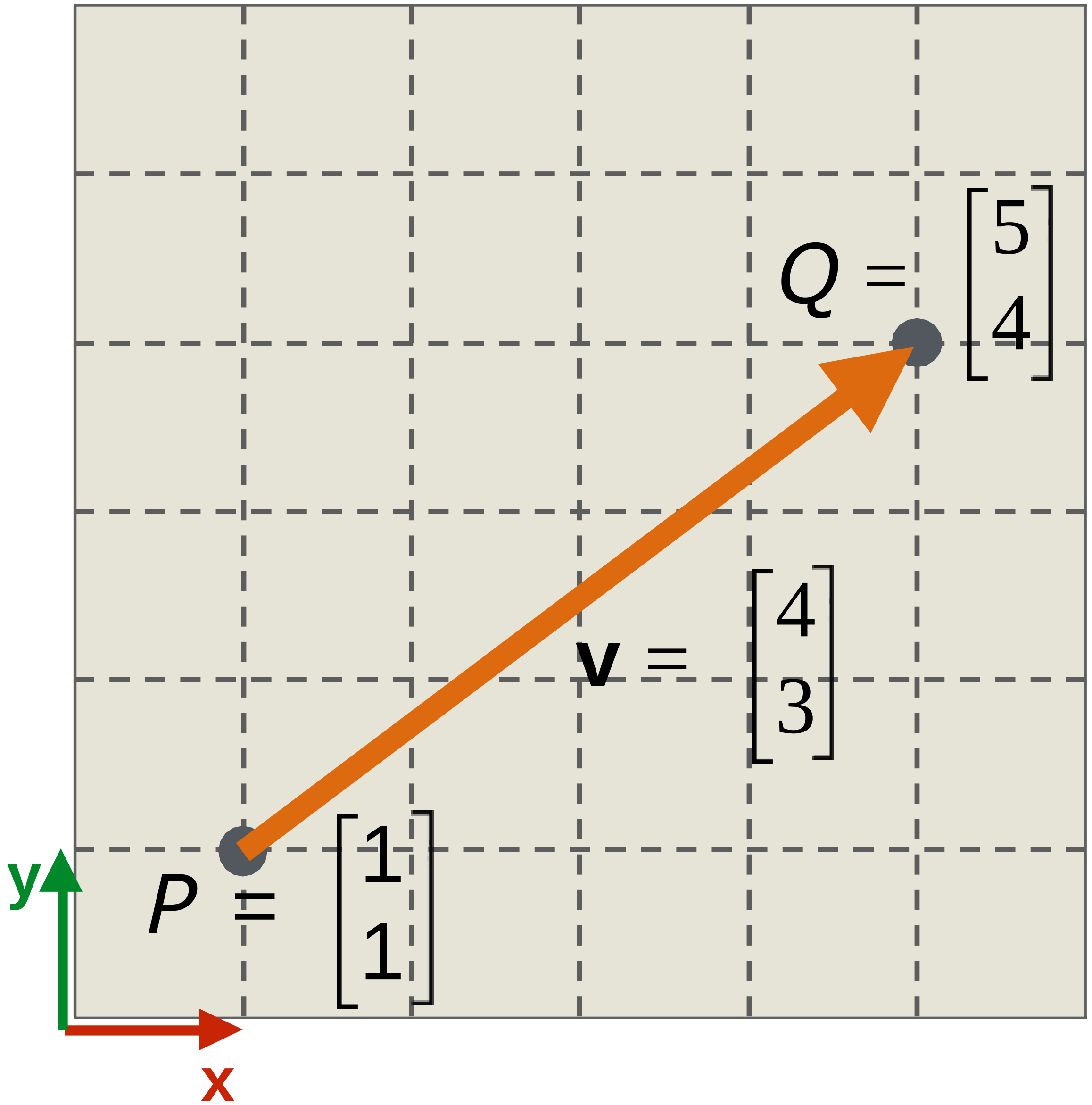
$$\mathbf{v} = 4\mathbf{x} + 3\mathbf{y}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = [\; x \quad y \;] \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Puncte vs Vectori

- **Punctele** reprezintă **locații**
- **Vectorii** reprezintă **deplasamentul** necesar pentru a ajunge de la un punct la un alt punct



Operații cu puncte și vectori

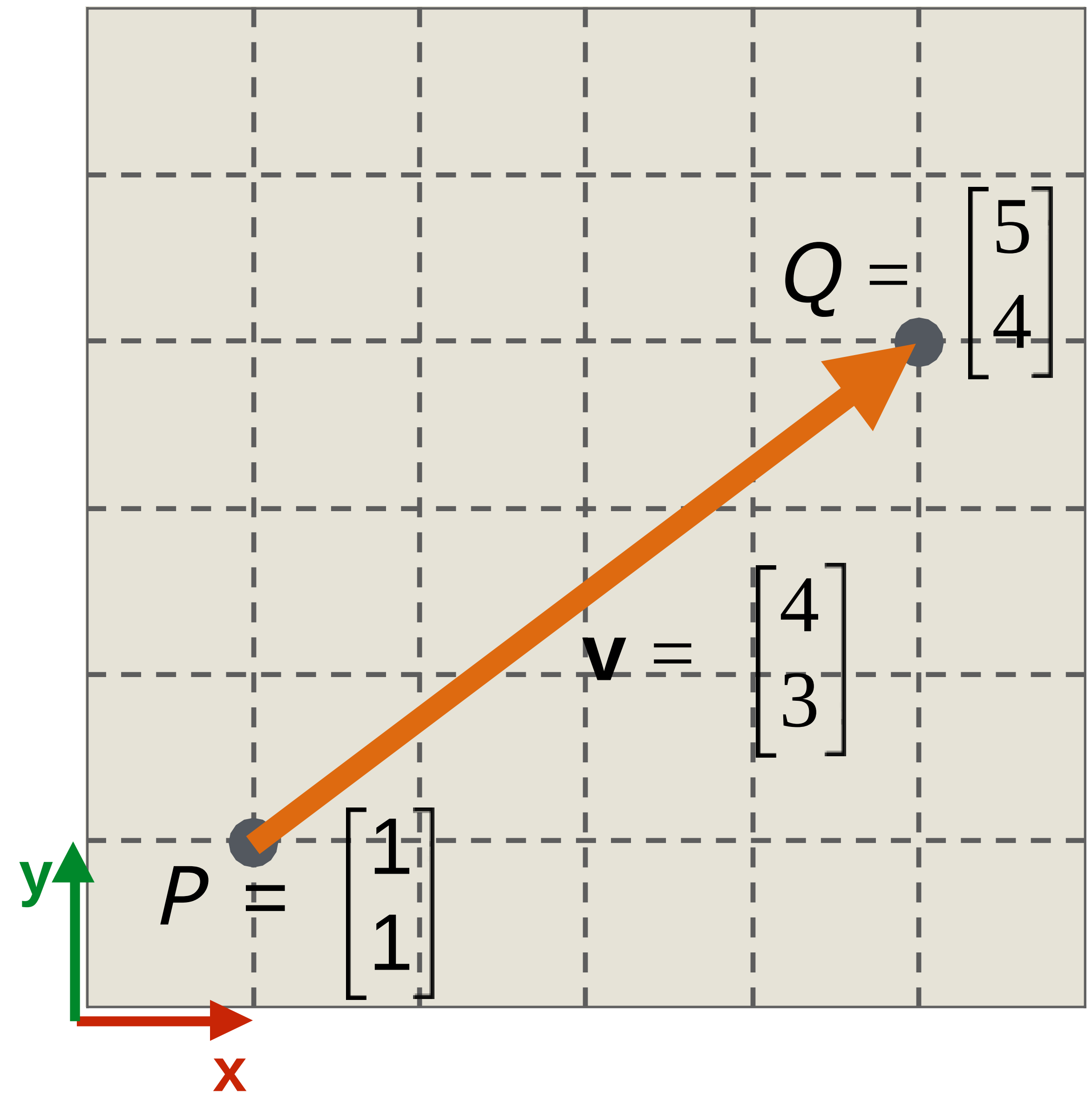
Scăderea dintre două puncte (rezultatul este un vector orientat de la P spre Q)

$$Q - P = \mathbf{v}$$

Adunarea între un vector și un punct (rezultatul este un nou punct)

$$P + \mathbf{v} = Q$$

Operația de însumare a două puncte nu este definită



Sistem de coordonate

$(O; \mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_n})$ - sistem de coordonate

- O - originea
- $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_n}$ - vectorii bază

Diferite sisteme de coordonate pot fi construite variind originea și/sau vectorii bază

Coordonatele unui punct:

- $P - O = \lambda_1 \mathbf{b_1} + \lambda_2 \mathbf{b_2} + \ldots + \lambda_n \mathbf{b_n}$
- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ reprezintă coordonatele unui punct P față de sistemul de coordonate $(O; \mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_n})$

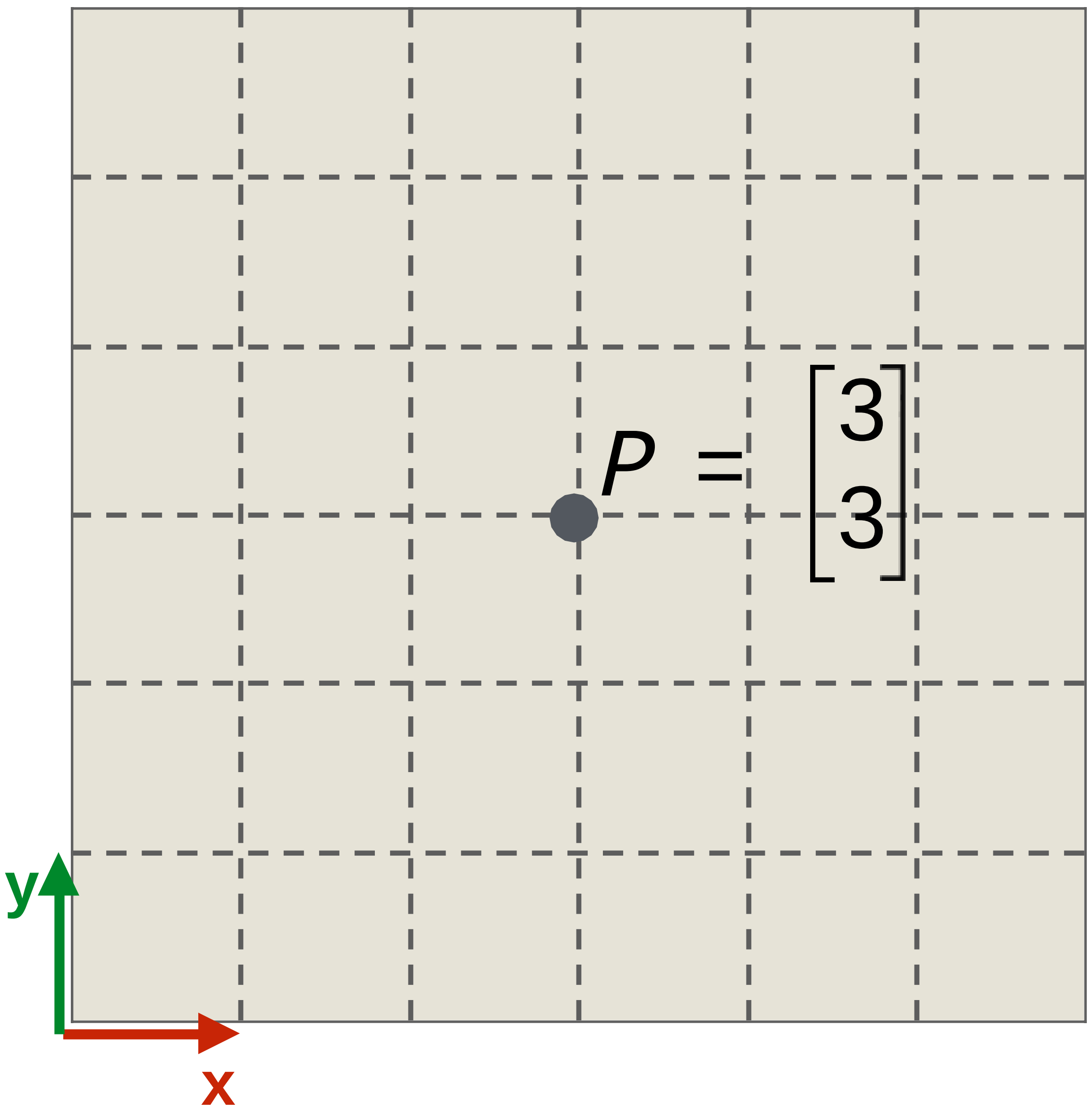
Coordonatele punctelor

Considerați un sistem de coordonate definit de vectorii bază **x** și **y** și originea $(0, 0)$

$$P = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\mathbf{x} + 3\mathbf{y}$$

Considerați un sistem de coordonate definit de vectorii bază **x** și **y** și originea $(1.5, 2)$

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \end{bmatrix} + 1.5\mathbf{x} + 1\mathbf{y}$$



Lungimea unui vector

Este egală cu radical din suma pătratelor elementelor vectorului

Pentru un vector 2D:

$$length(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vectorul nul $\quad || \mathbf{v} || = 0$

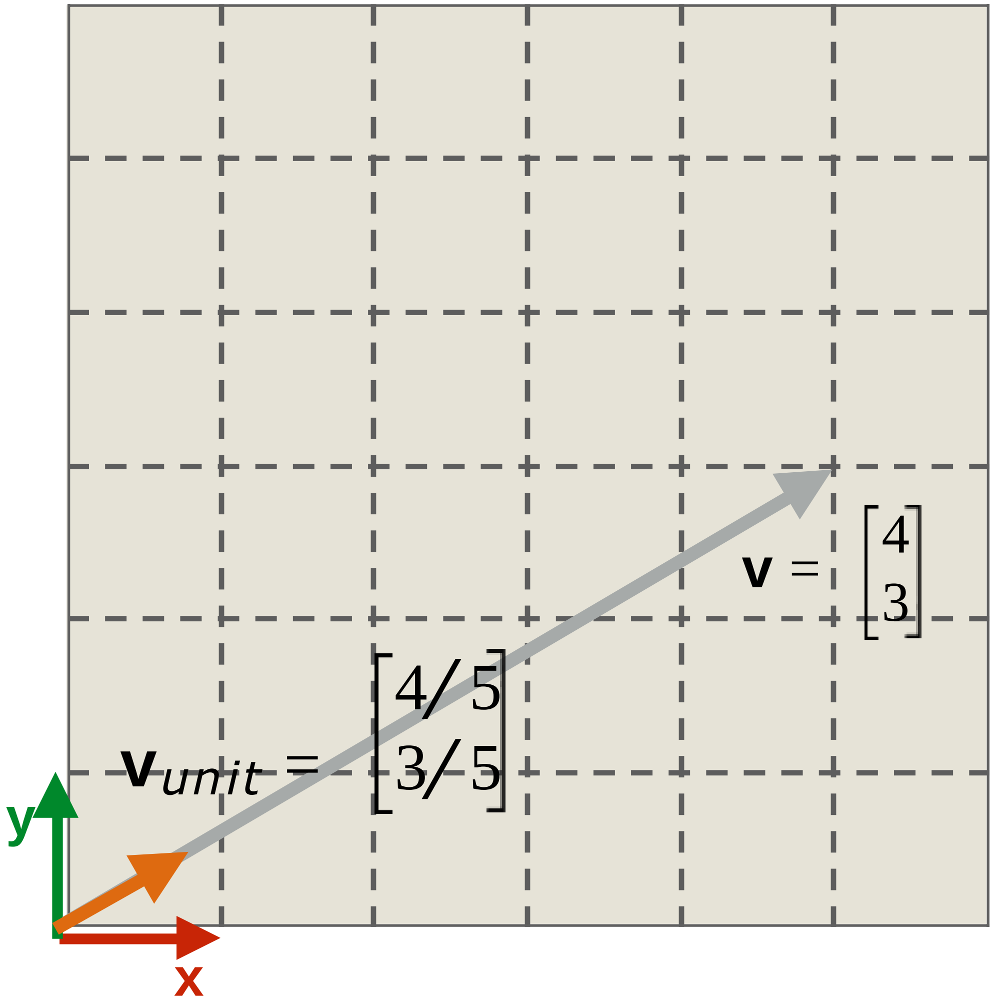
Vectorul identitate $\quad || \mathbf{v} || = 1$

Normalizarea

Convertește un vector într-un **vector unitate**

Cum? Împărțind vectorul (coordonatele sale) la lungimea sa

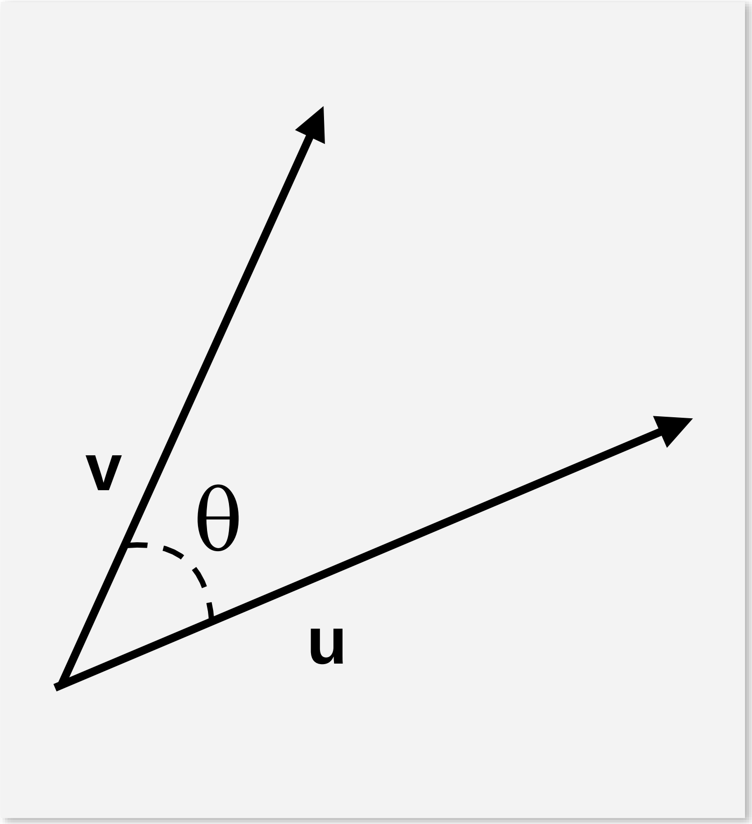
$$\mathbf{v}_{unit} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$



Produs scalar (dot product)

În **2D**: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}_x \mathbf{v}_x + \mathbf{u}_y \mathbf{v}_y$

În **3D**: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}_x \mathbf{v}_x + \mathbf{u}_y \mathbf{v}_y + \mathbf{u}_z \mathbf{v}_z$



$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||\cos\theta$

Returnează o valoare dependentă de lungimea vectorilor și cosinusul unghiului dintre ei

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}|| \cos\theta$$

Produs scalar (dot product)

Asociativ și **distributiv**

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{u}$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

$$(k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

Într-un sistem de coordonate **Cartezian**:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = 1$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$$

Produs scalar

Calcularea **lungimii** unui vector

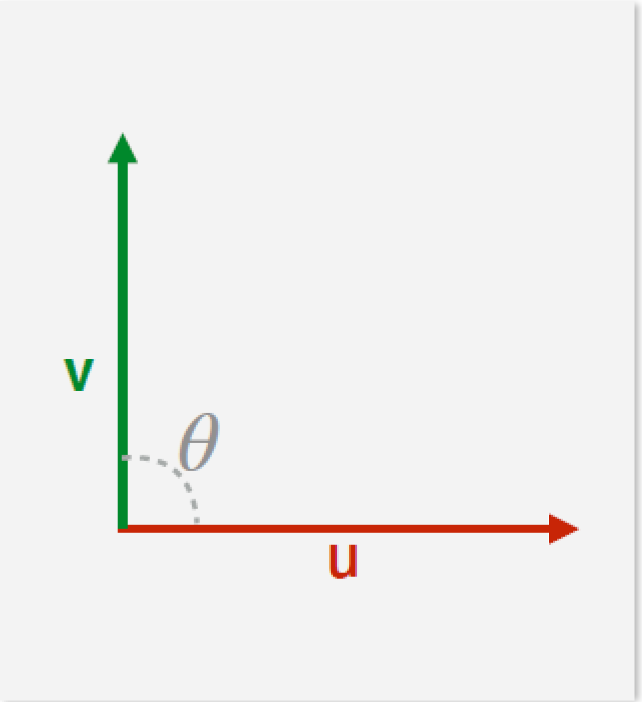
$$length(\mathbf{v}) = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

Calcularea **distanței** dintre două puncte P și Q

$$\mathbf{v} = Q - P, distance(P, Q) = length(\mathbf{v}) = ||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

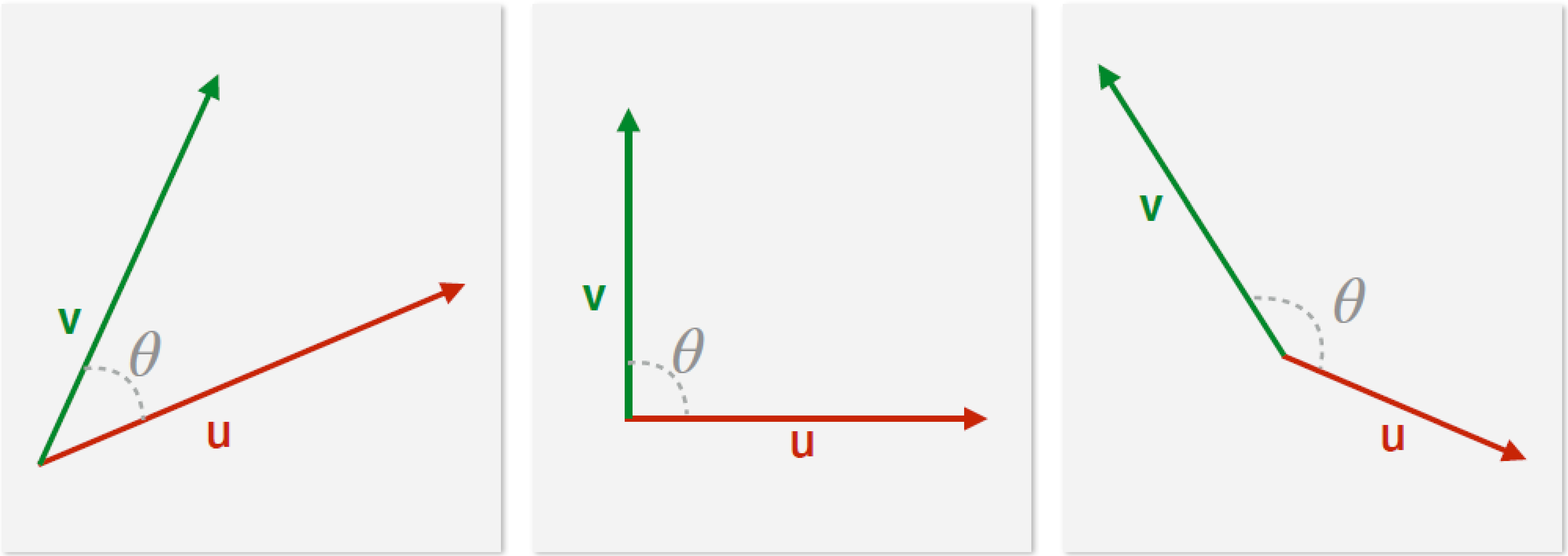
Ortogonalitate

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$



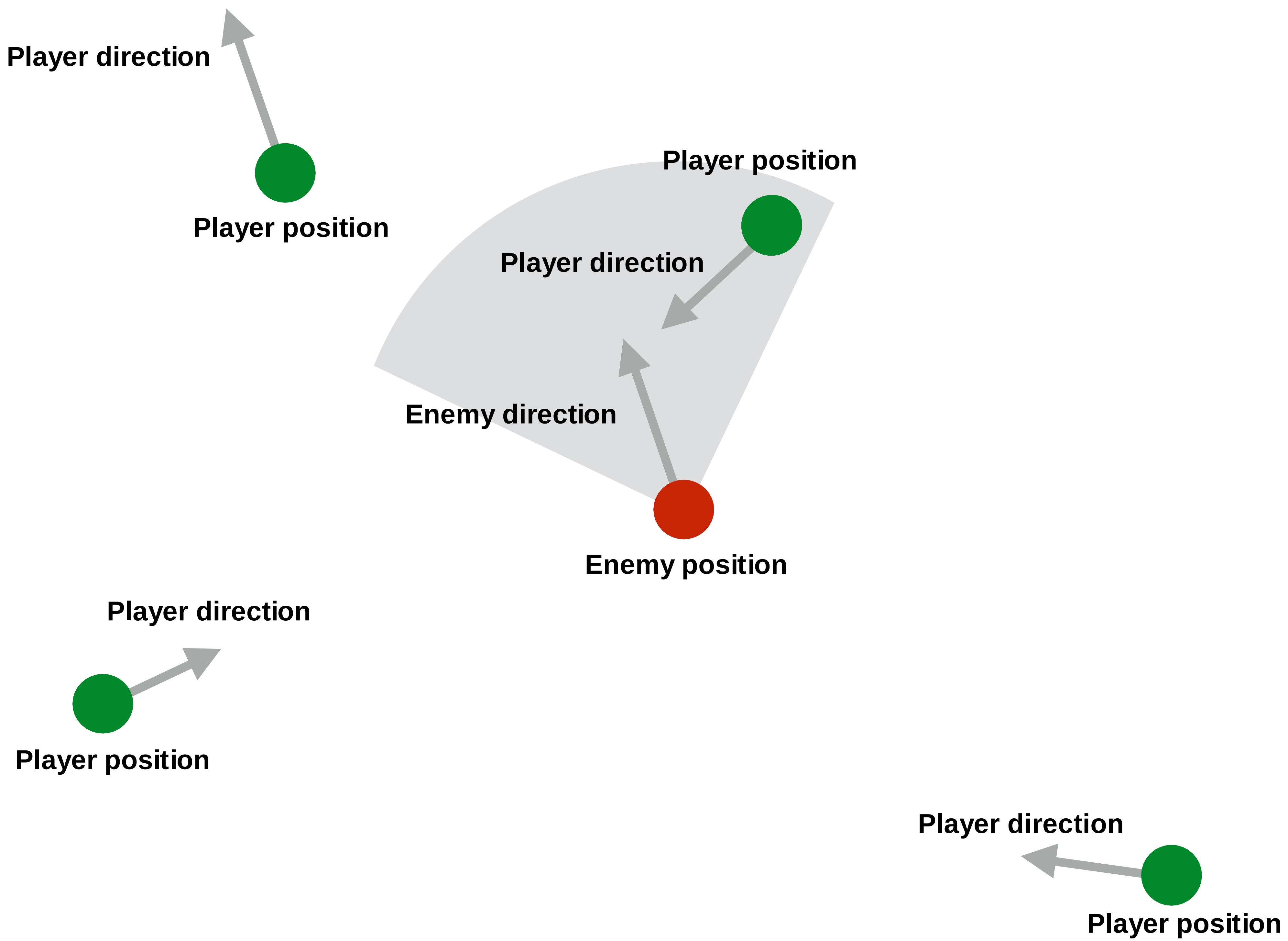
Unghiul dintre doi vectori

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$



$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0 => \theta < 90^o$ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 => \theta = 90^o$ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0 => \theta > 90^o$

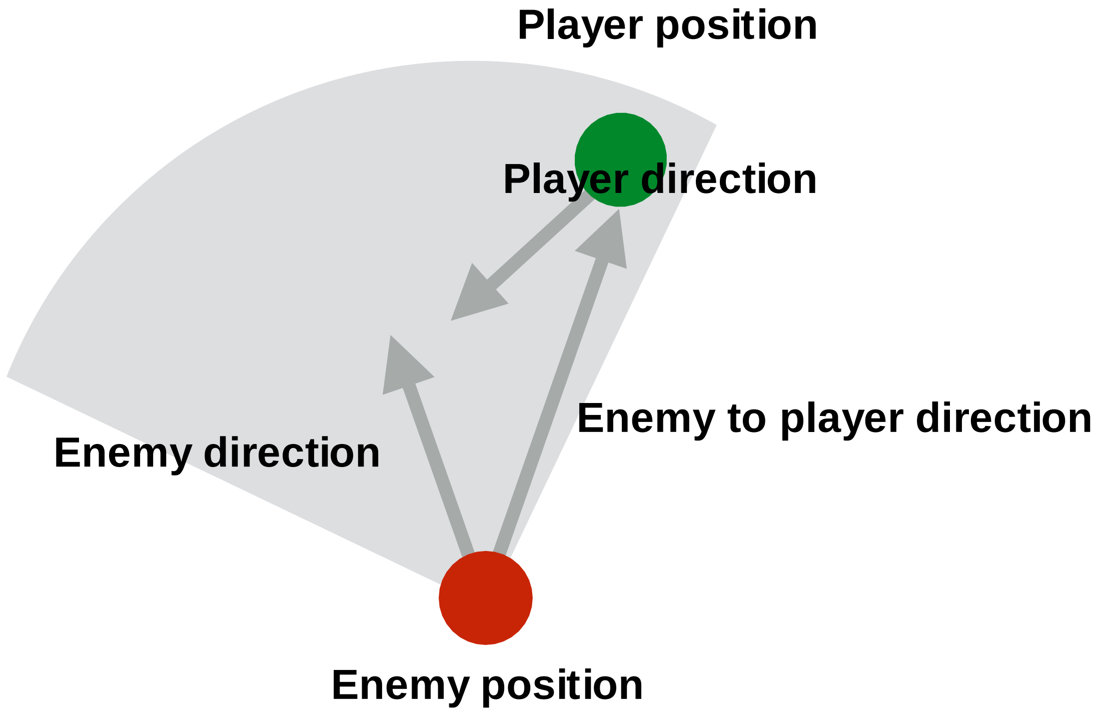
Produs scalar - exemple



Produs scalar - exemple

```
detected = FALSE
enemy_to_player_direction = player_position - enemy_position
distance_to_player = distance(enemy_to_player_direction)

if distance_to_player <= DETECTABLE_DISTANCE
    normalize(enemy_to_player_direction)
angle = acos(dot_product(enemy_direction, enemy_to_player_direction))  if
    abs(angle) <= FOV / 2
    detected = TRUE
```

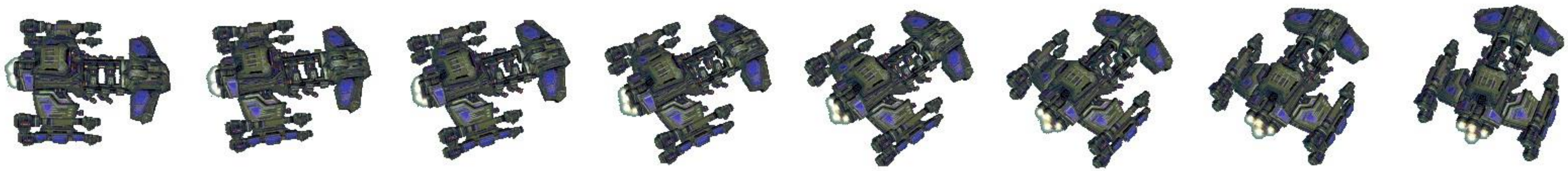


Produs scalar - exemple

Produs scalar - exemple

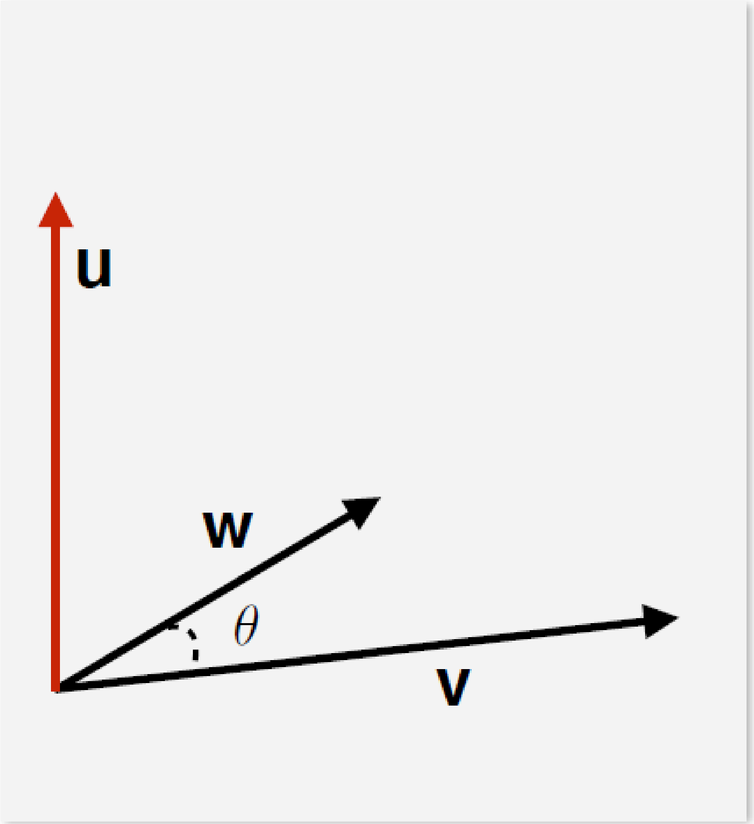
Produs scalar - exemple

Unghiul vectorului directie cu axa Ox



Produs vectorial (Cross product)

Produsul vectorial a doi vectori are ca rezultat un **vector ortogonal** pe cei doi vectori



Direcția vectorului rezultat este dictată de **regula mâine drepte**

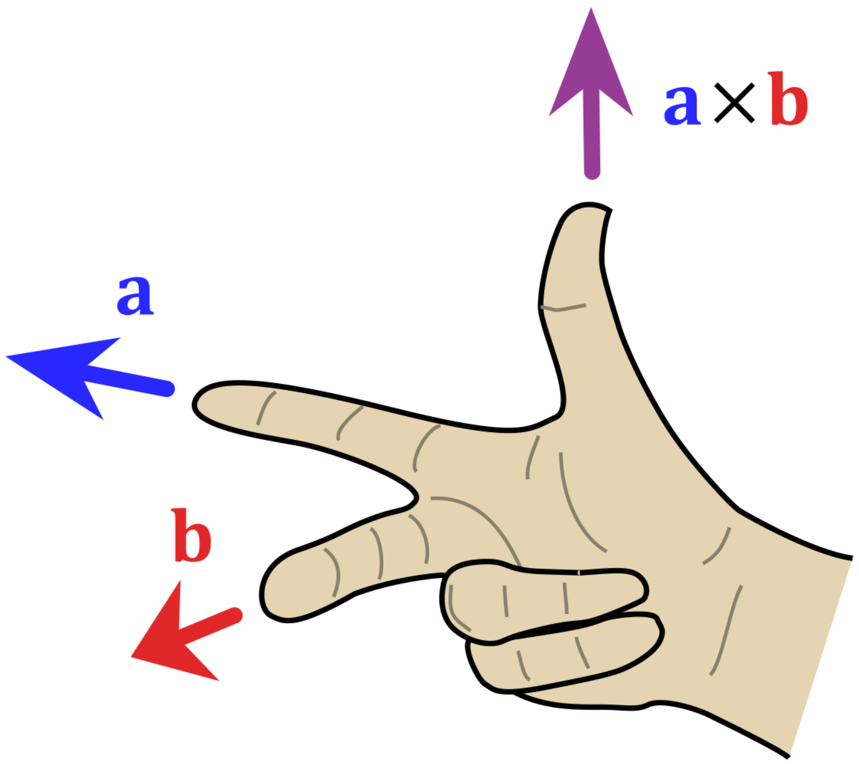
Lungimea vectorului rezultat depinde de lungimile vectorilor și sinusul unghiului dintre cei doi vectori:

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \sin\theta$$

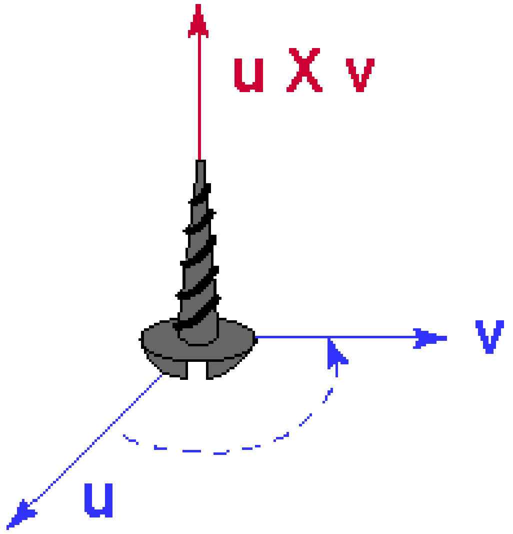
$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_z w_x - v_x w_z \\ v_x w_y - v_y w_x \end{bmatrix}$$

Produs vectorial

Regula mainii drepte



Regula șurubului



Produs vectorial

Regula șurubului

Produs vectorial (Cross product)

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \left| \begin{bmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix} \right|$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{e_1} \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} - \mathbf{e_2} \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} + \mathbf{e_3} \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{u} = (v_y w_z - v_z w_y)\mathbf{e_1} + (v_z w_x - v_x w_z)\mathbf{e_2} + (v_x w_y - v_y w_x)\mathbf{e_3}$$

$$\mathbf{u} = (v_y w_z - v_z w_y) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (v_z w_x - v_x w_z) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (v_x w_y - v_y w_x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_z w_x - v_x w_z \\ v_x w_y - v_y w_x \end{bmatrix}$$

Proprietăți

Anticomutativ:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$$

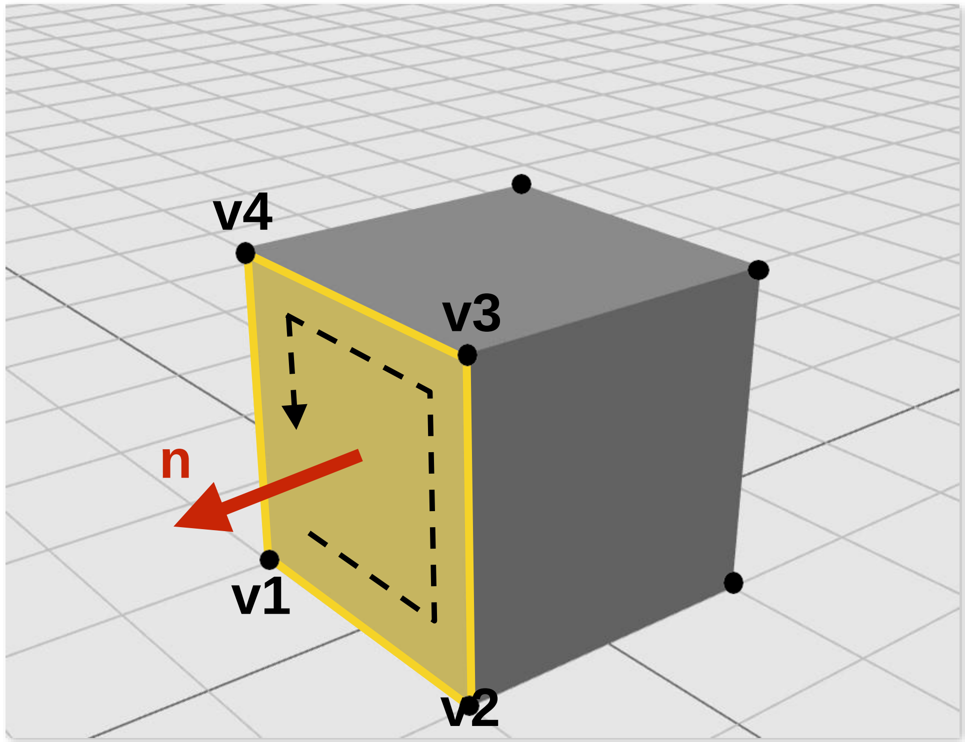
Distributiv față de operațiile de adunare și înmulțire cu un scalar:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

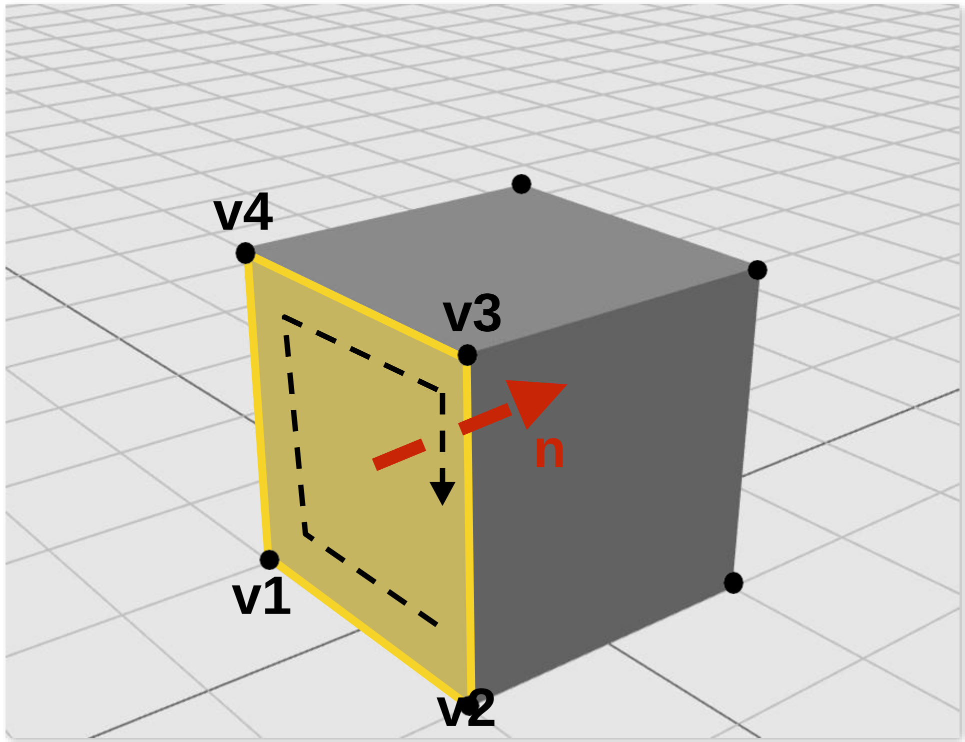
Vector normală

n = **e**$_1$ **x e**$_2$, unde **e**$_1$ și **e**$_2$ sunt doi vectori definiți de două muchii consecutive ale unui poligon



Vectorul normală este orientat în **exteriorul** obiectului

Sens **trigonometric** (**counterclockwise)** de parcurgere la vârfurilor, ex. v_1, v_2, v_3, v_4



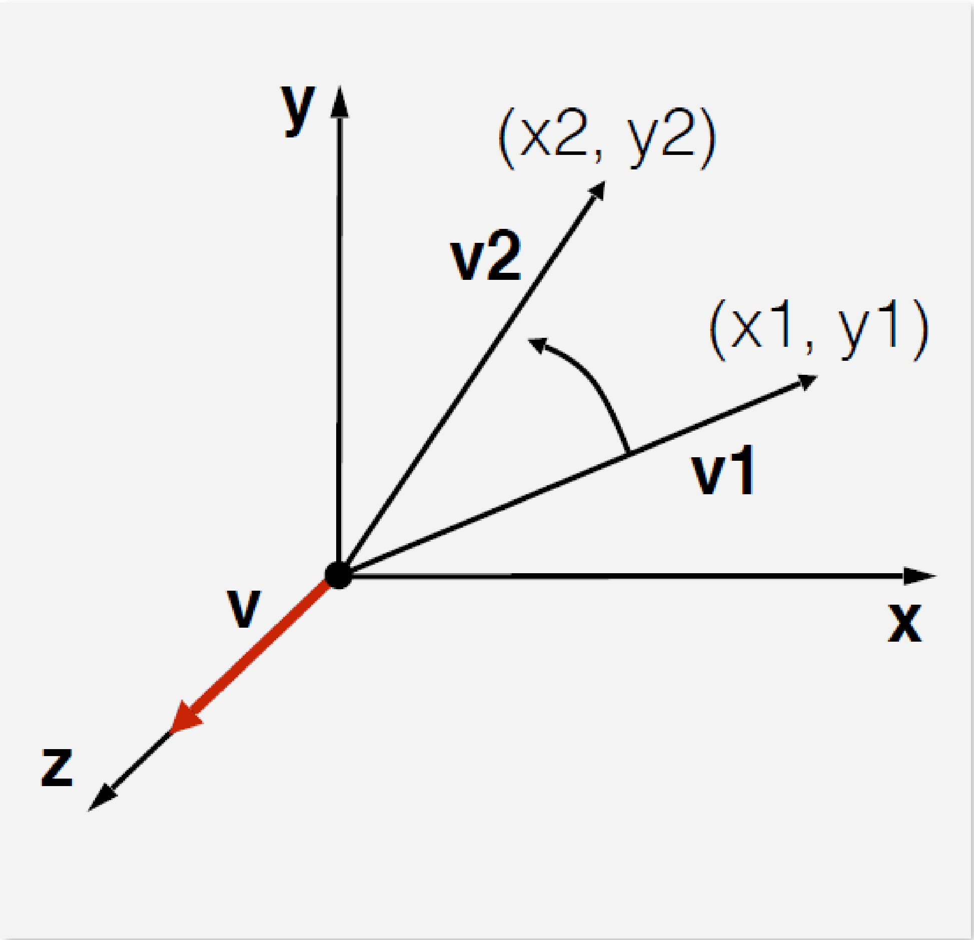
Vectorul normală este orientat spre **interiorul** obiectului

Sens **antitrigonometric** (**clockwise)** de parcurgere la vârfurilor, ex. v_1, v_4, v_3, v_2

Aria unui triunghi

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2} = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{bmatrix} \right\|$$

$$\mathbf{v} = (x_1 y_2 - x_2 y_1)\mathbf{e_3}$$

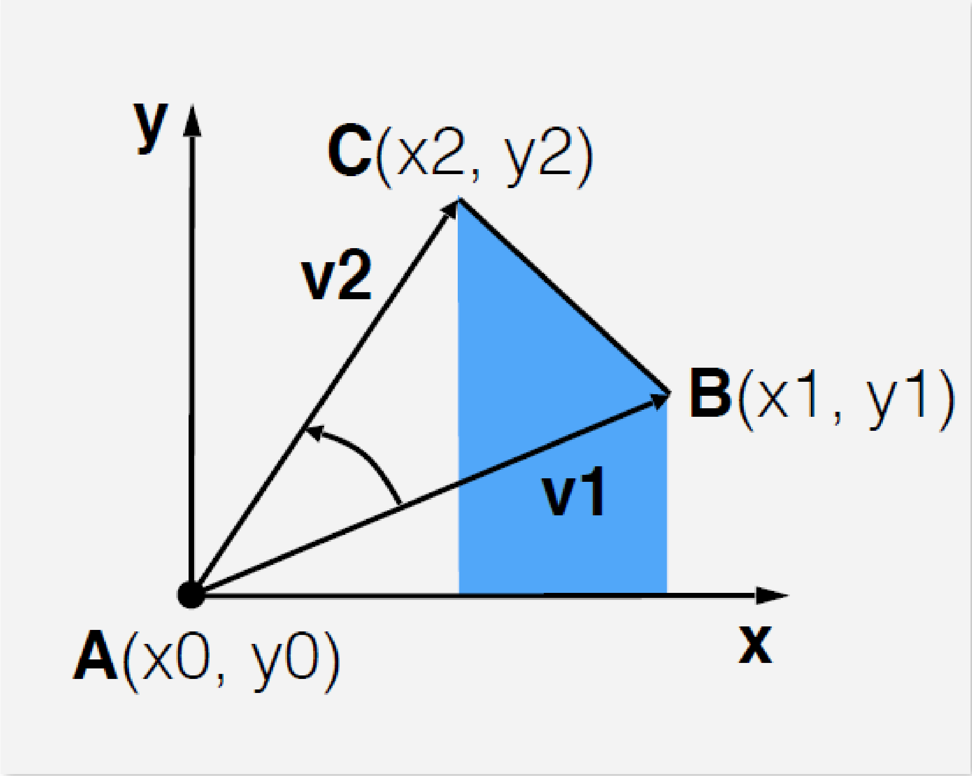


Aria unui triunghi

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + \frac{1}{2}(x_2 - x_0)(y_2 + y_0) + \frac{1}{2}(x_0 - x_1)(y_0 + y_1)$$

$$\frac{1}{2}(x_0y_1 - x_1y_0 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_0 - x_0y_2)$$

$$S = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) = \frac{1}{2}\|\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}\|$$



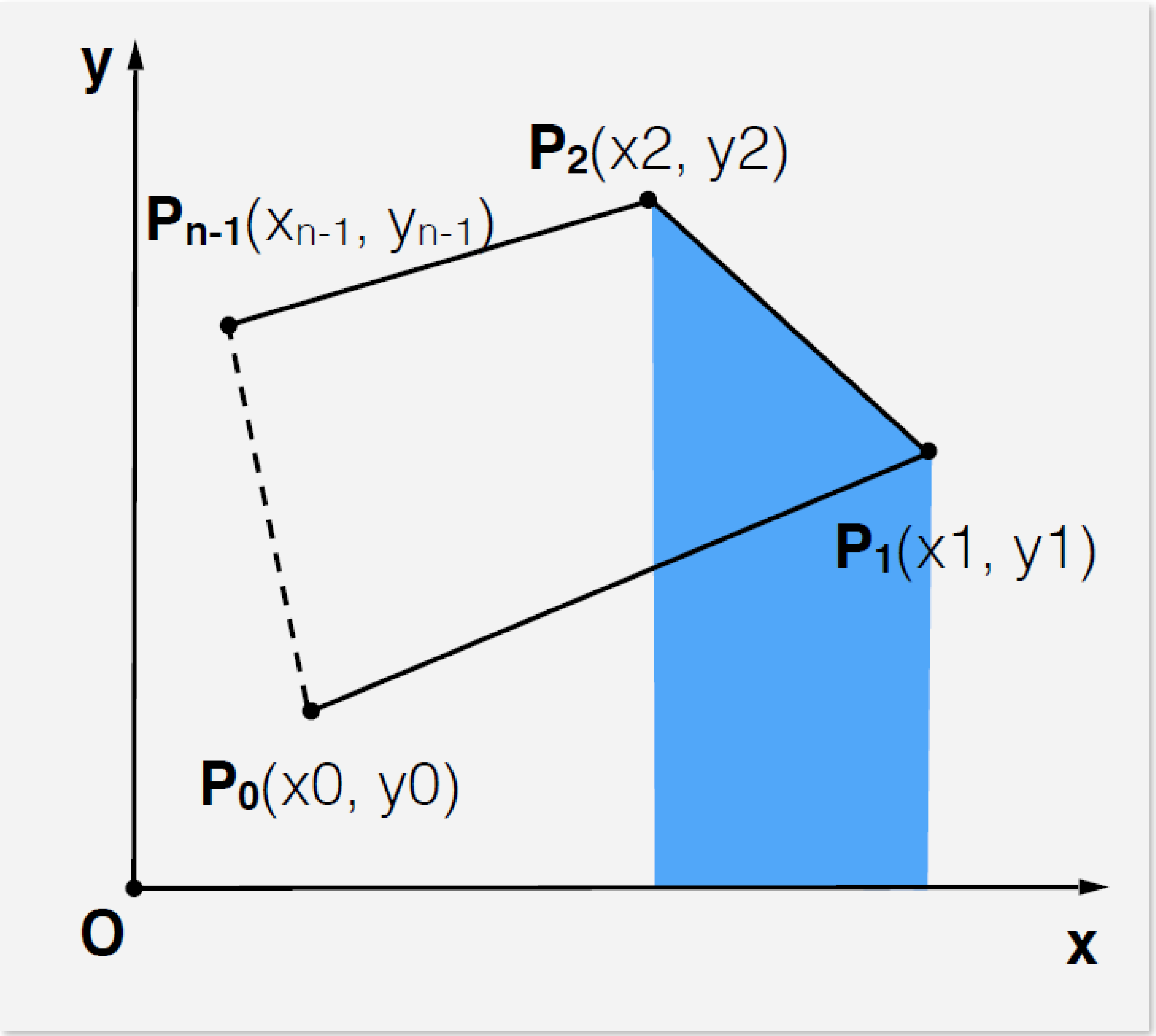
Aria unui poligon

$\frac{1}{2}(x_0-x_1)(y_0+y_1) + \frac{1}{2}(x_1-x_2)(y_1+y_2) + \ldots \frac{1}{2}(x_n-x_0)(y_n+y_0) =$

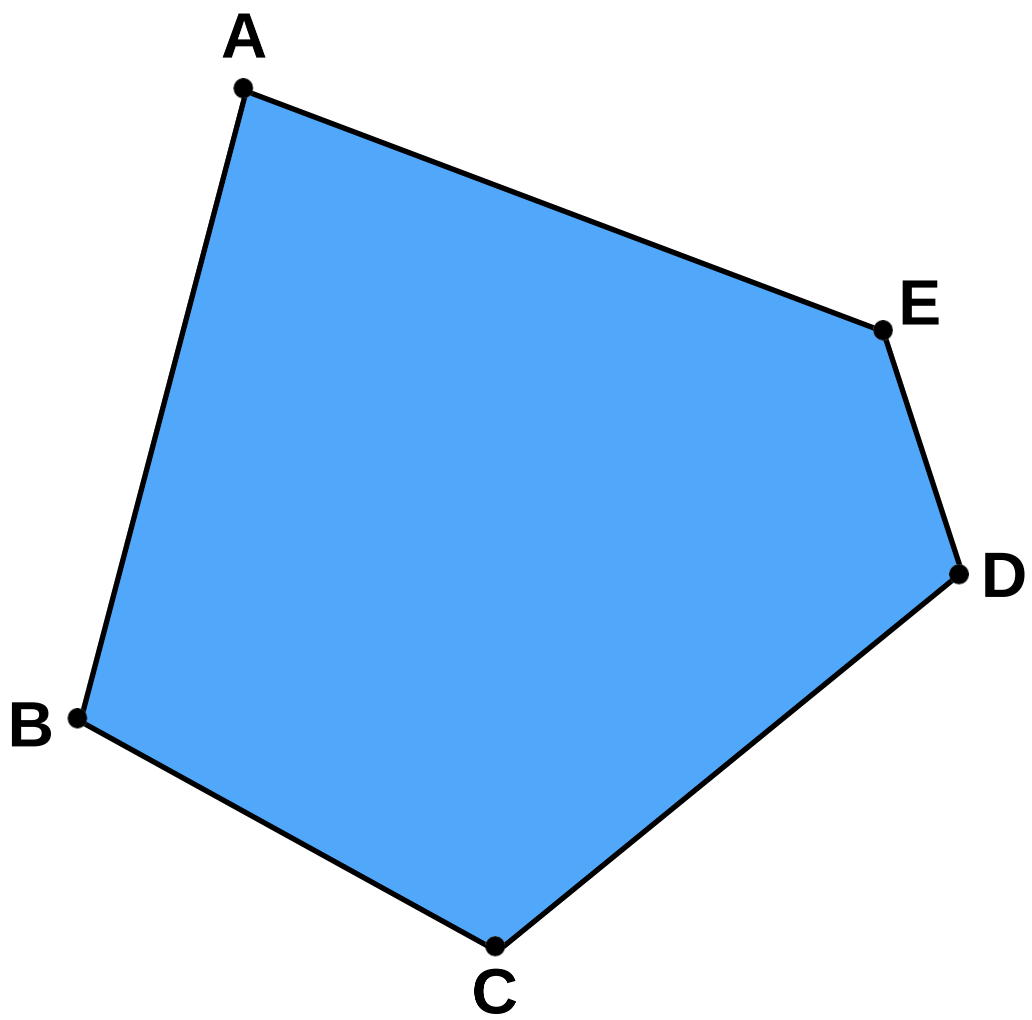
$\frac{1}{2}(x_0y_0+x_0y_1-x_1y_0-x_1y_1 + x_1y_1+x_1y_2-x_2y_1-x_2y_2 + \ldots x_ny_n+x_ny_0-x_0y_n-x_0y_0)$

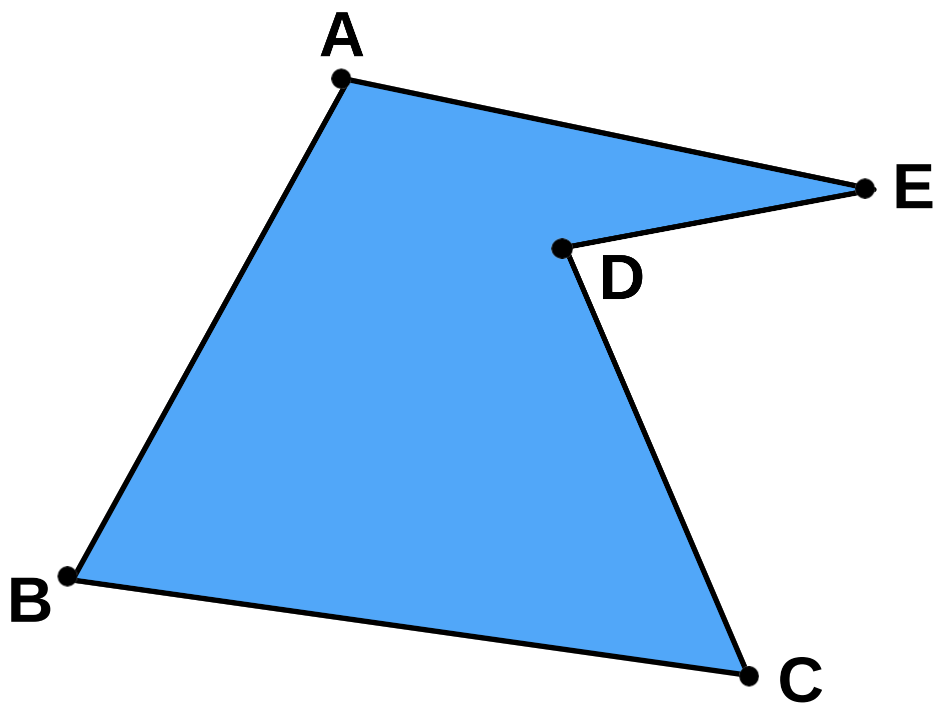
$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i)$$

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\|\mathbf{v_i} \times \mathbf{v_{i+1}}\|$$



Poligon convex / concav



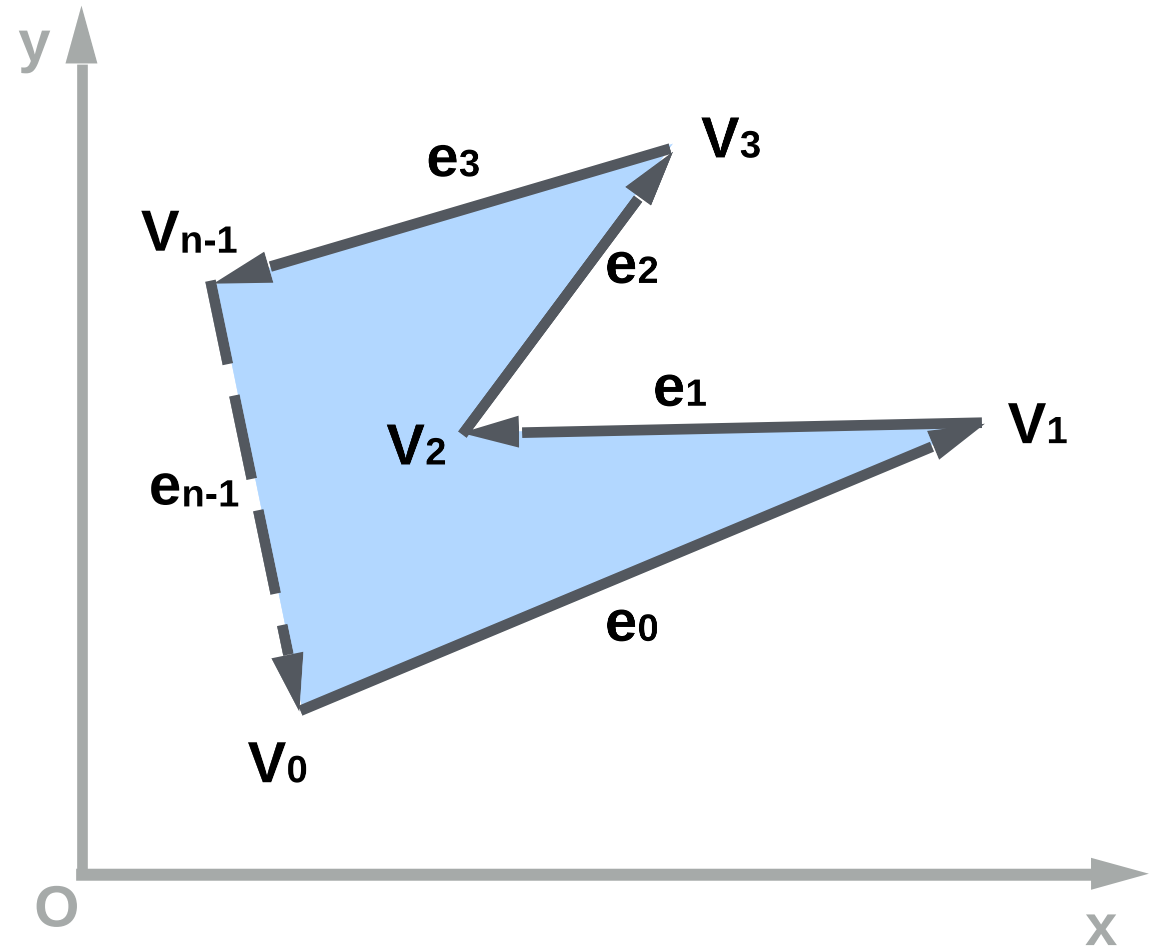


Poligon convex / concav (2D)

- Se calculează vectorii de muchie în sens trigonometric (counterclockwise)

  $\mathbf{e}_k = \mathbf{V}_{k+1} - \mathbf{V}_k$

- Se setează pentru fiecare vector de muchie componenta **z** egală cu **0**
- Pentru fiecare pereche de vectori de muchie consecutivi se calculează **produsul vectorial** (**cross product**)
- Dacă poligonul este **convex** atunci toate **componentele z** ale vectorilor rezultați în urma aplicării produsului vectorial vor avea **același semn (> 0)**
- Dacă poligonul este **concav** atunci unele dintre **componentele z** ale vectorilor rezultați în urma aplicării produsului vectorial vor avea **semn diferit**



$$(\mathbf{e_0} \times \mathbf{e_1})_z > 0$$

$$(\mathbf{e_1} \times \mathbf{e_2})_z < 0$$

$$(\mathbf{e_2} \times \mathbf{e_3})_z > 0$$

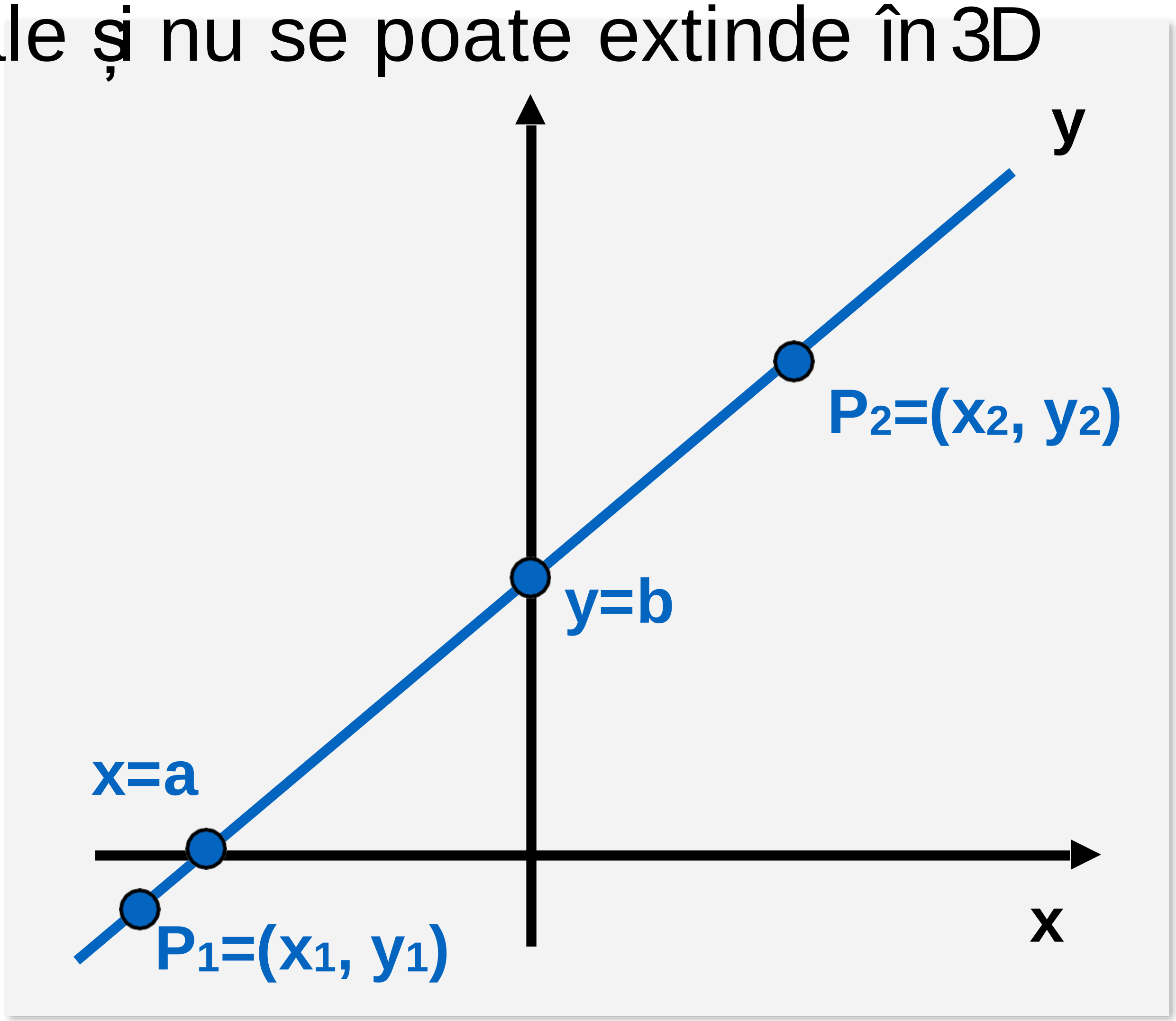
Produs scalar/vectorial

Ecuația unei drepte

“Slope-intercept”

- $y = mx + b$
- unde *m* este panta și punctul (0,b) este punctul de intersecție cu axa y
- nu se pot exprima linii verticale și nu se poate extinde în 3D

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Ecuația implicită

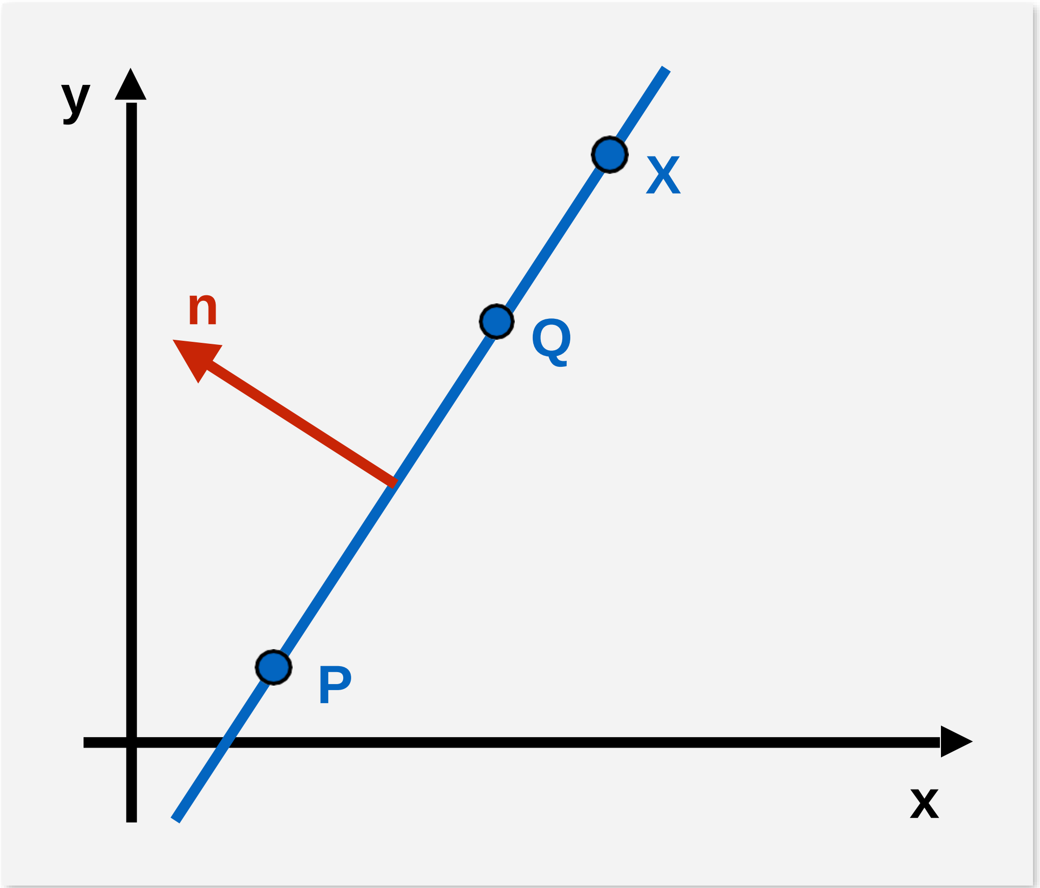
Vectorul **n** este perpendicular pe dreaptă (se numește **un vector normală**)

Dacă X este un punct de pe dreaptă atunci

$$(X - P) \cdot \mathbf{n} = 0$$

Ecuația implicită are forma

$$F(X) = (X - P) \cdot \mathbf{n}$$



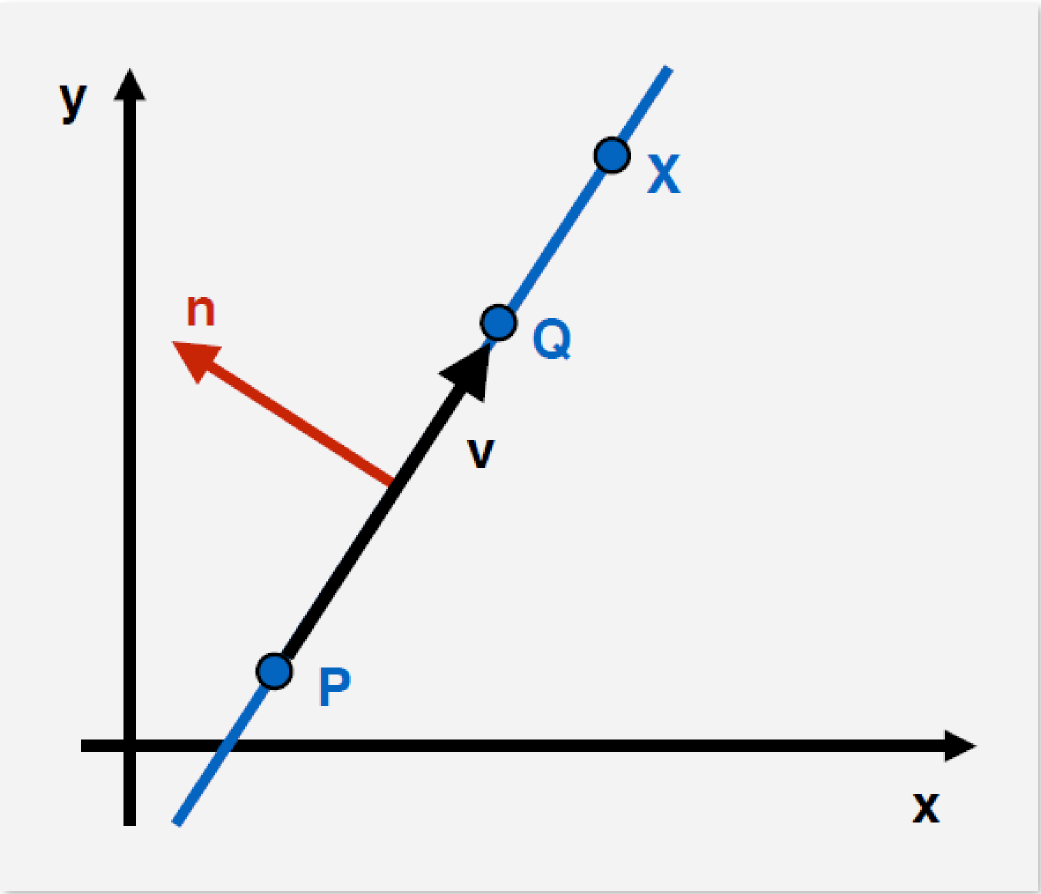
Ecuația implicită

Calcularea unui vector normal la o dreaptă:

$$\mathbf{v} = Q - P = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} -v_y \\ v_x \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

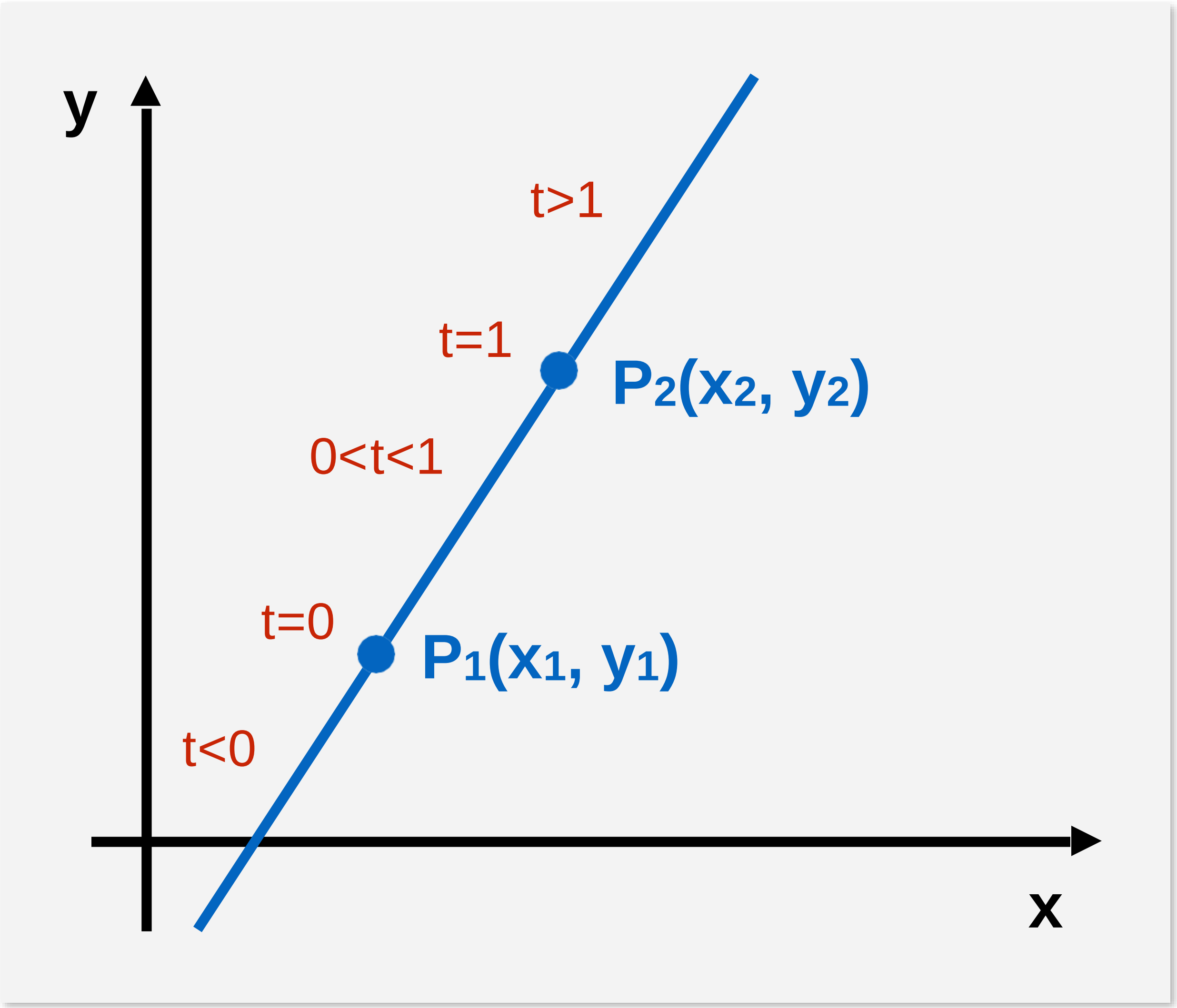
$$\mathbf{n} = \mathbf{z} \times \mathbf{v} = \left| \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ v_x & v_y & 0 \end{bmatrix} \right|$$

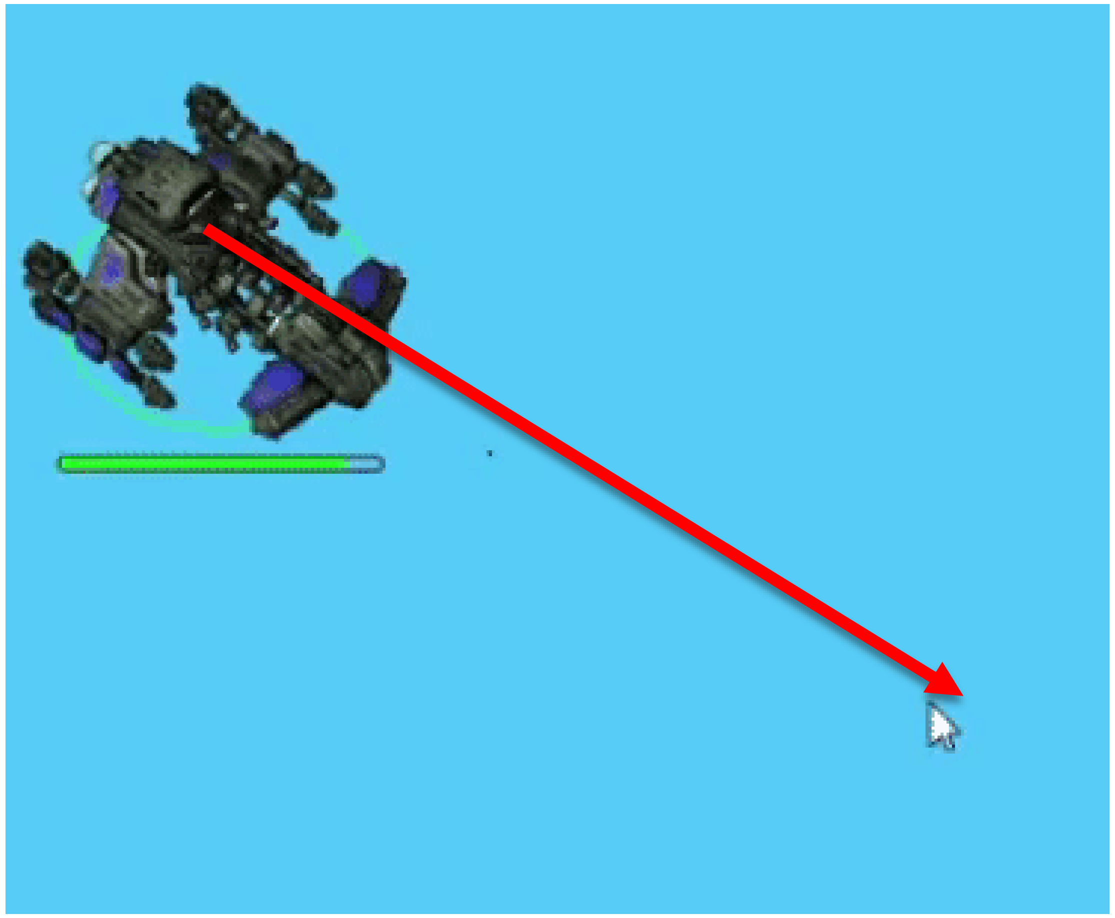


Ecuația parametrică a unei drepte

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + t(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$$ (bazată pe vectori)

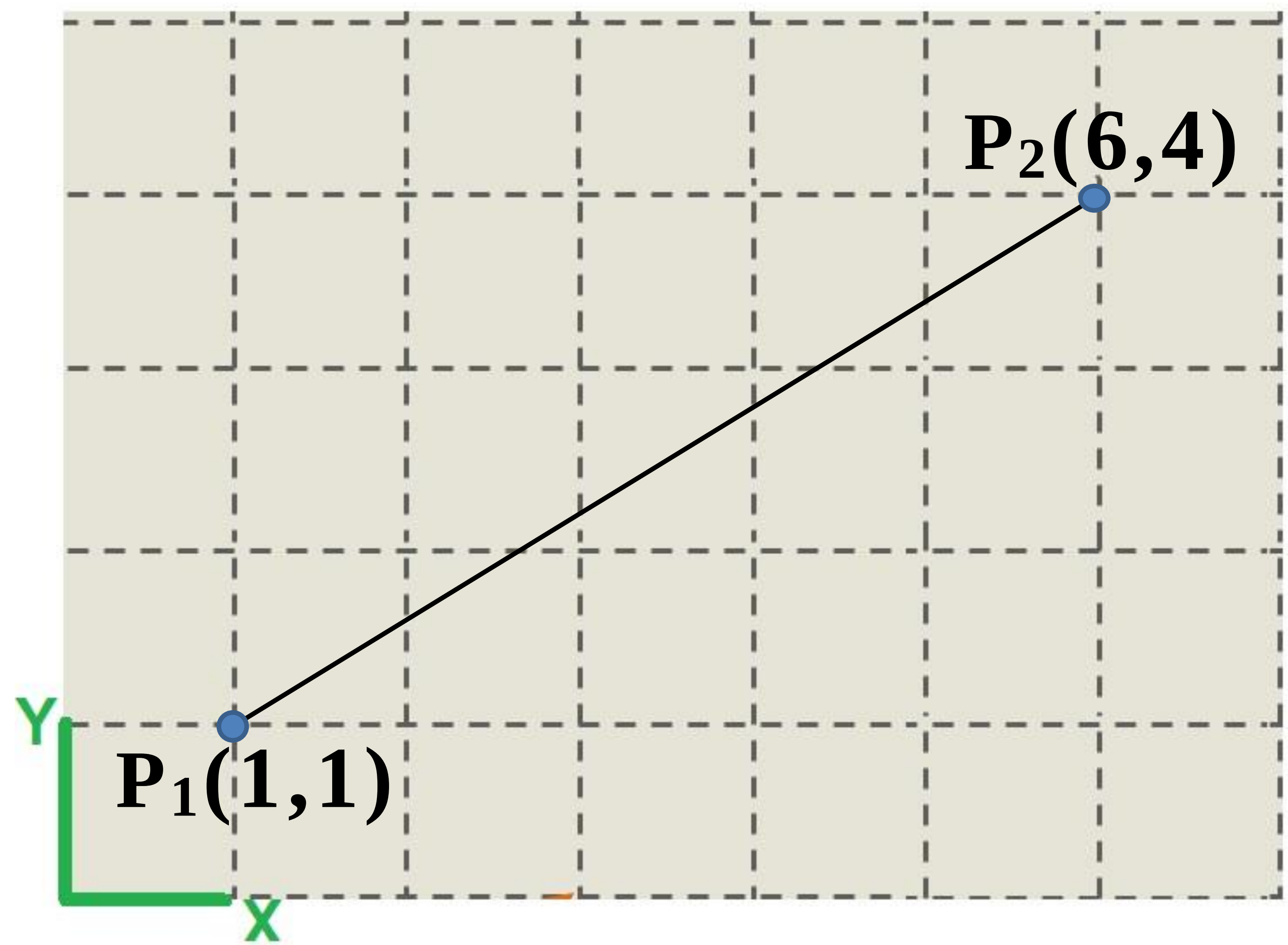
$$\mathbf{P} = (1 - t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2$$ (bazată pe combinația afină a doua puncte)





Ecuația parametrică a unei drepte

$\mathbf{P} = (1 - t)\mathbf{P_1} + t\mathbf{P_2}$ (bazată pe combinația afină a doua puncte)



$P_1(1,1)$ $P_2(6,4)$

Intersecția a două drepte

$$\mathbf{P} = (1-t)\mathbf{P_1} + t\mathbf{P_2}$$

$$\mathbf{P} = (1-s)\mathbf{Q_1} + s\mathbf{Q_2}$$

Ecuația trebuie să aibă soluție pentru s și t:

$$(1-t)\mathbf{P_1} + t\mathbf{P_2} = (1-s)\mathbf{Q_1} + s\mathbf{Q_2}$$

Extindem pentru cele două coordonate:

$$(1-t)\mathbf{P_{x_1}} + t\mathbf{P_{x_2}} = (1-s)\mathbf{Q_{x_1}} + s\mathbf{Q_{x_2}}$$

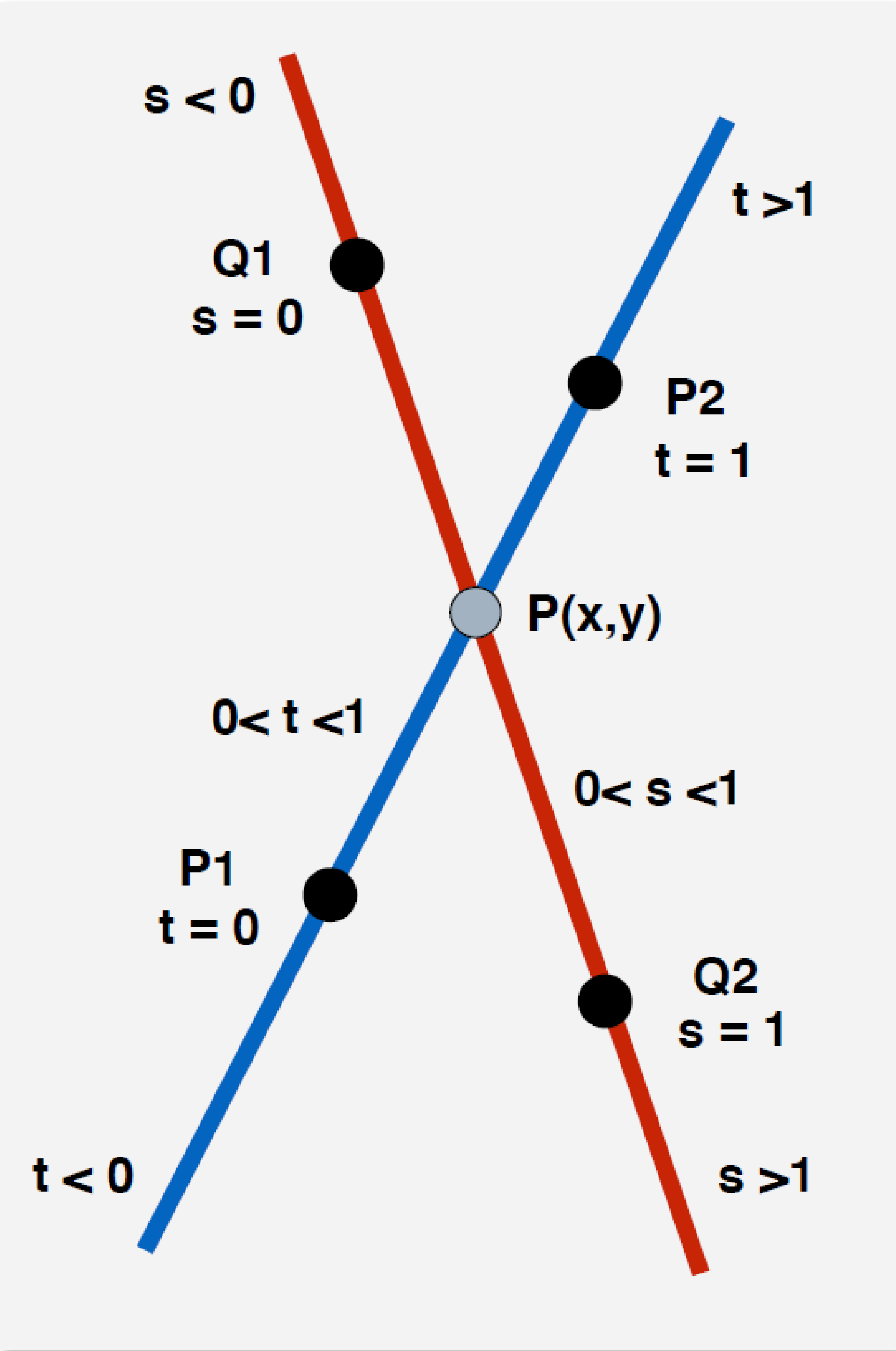
$$(1-t)\mathbf{P_{y_1}} + t\mathbf{P_{y_2}} = (1-s)\mathbf{Q_{y_1}} + s\mathbf{Q_{y_2}}$$

Discuție în funcție de valorile **s** și **t**:

$t<0$, $s<0$, P înaintea punctelor P_1 și Q_1

$0<t<1$ și $0<s<1$, P_1P_2 intersectează Q_1Q_2

$t>1$, $s>1$, P după punctele P_2 și Q_2



Intersecția a două drepte

$$X = (1-t)P + tQ$$

$$(X - S) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$((1-t)P + tQ - S) \cdot \mathbf{n} = 0$$

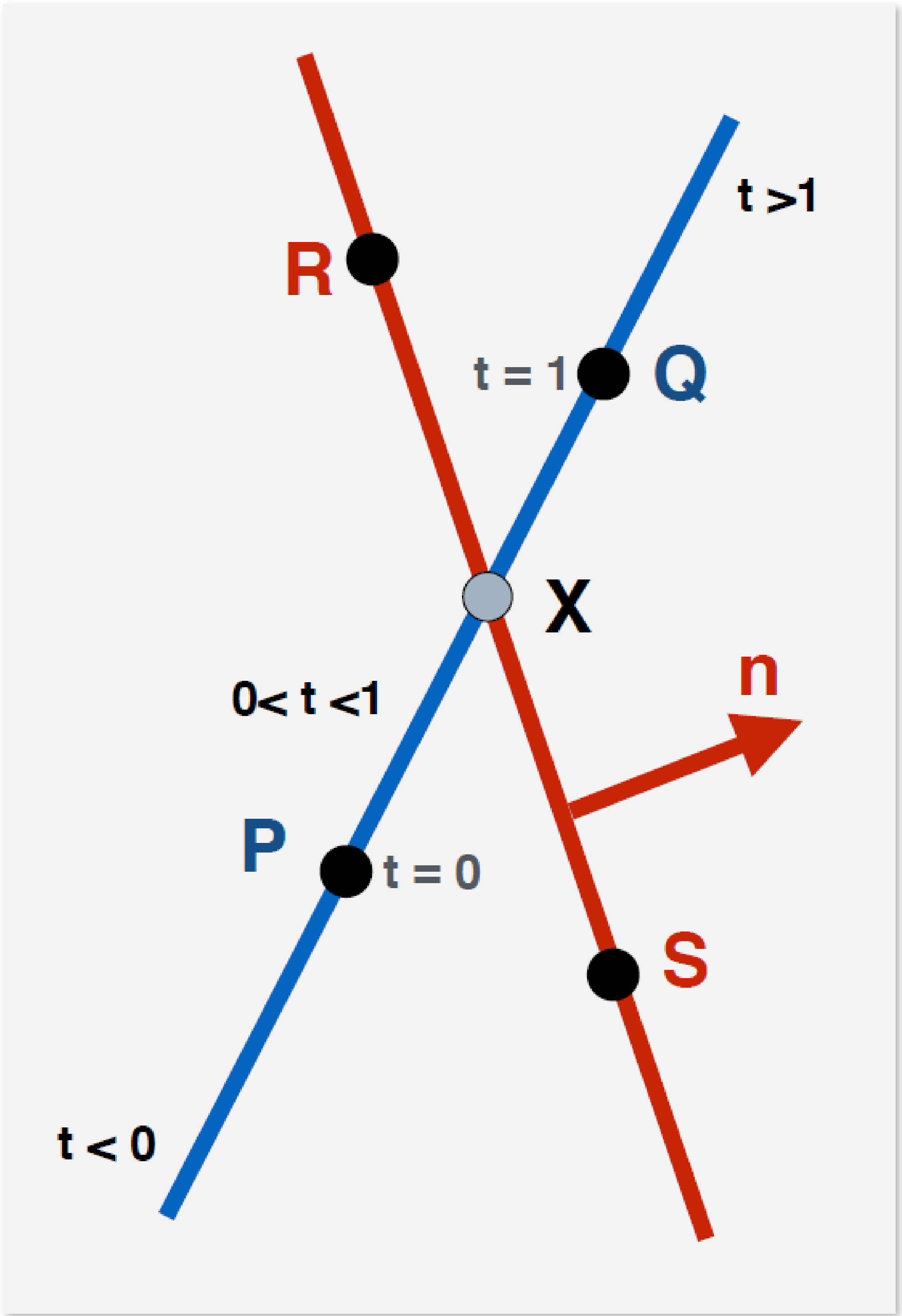
$$(P + t(Q-P) - S) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$((P - S) + t(Q - P)) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\mathbf{u} = Q - P \quad \mathbf{v} = P - S$$

$$t\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$$

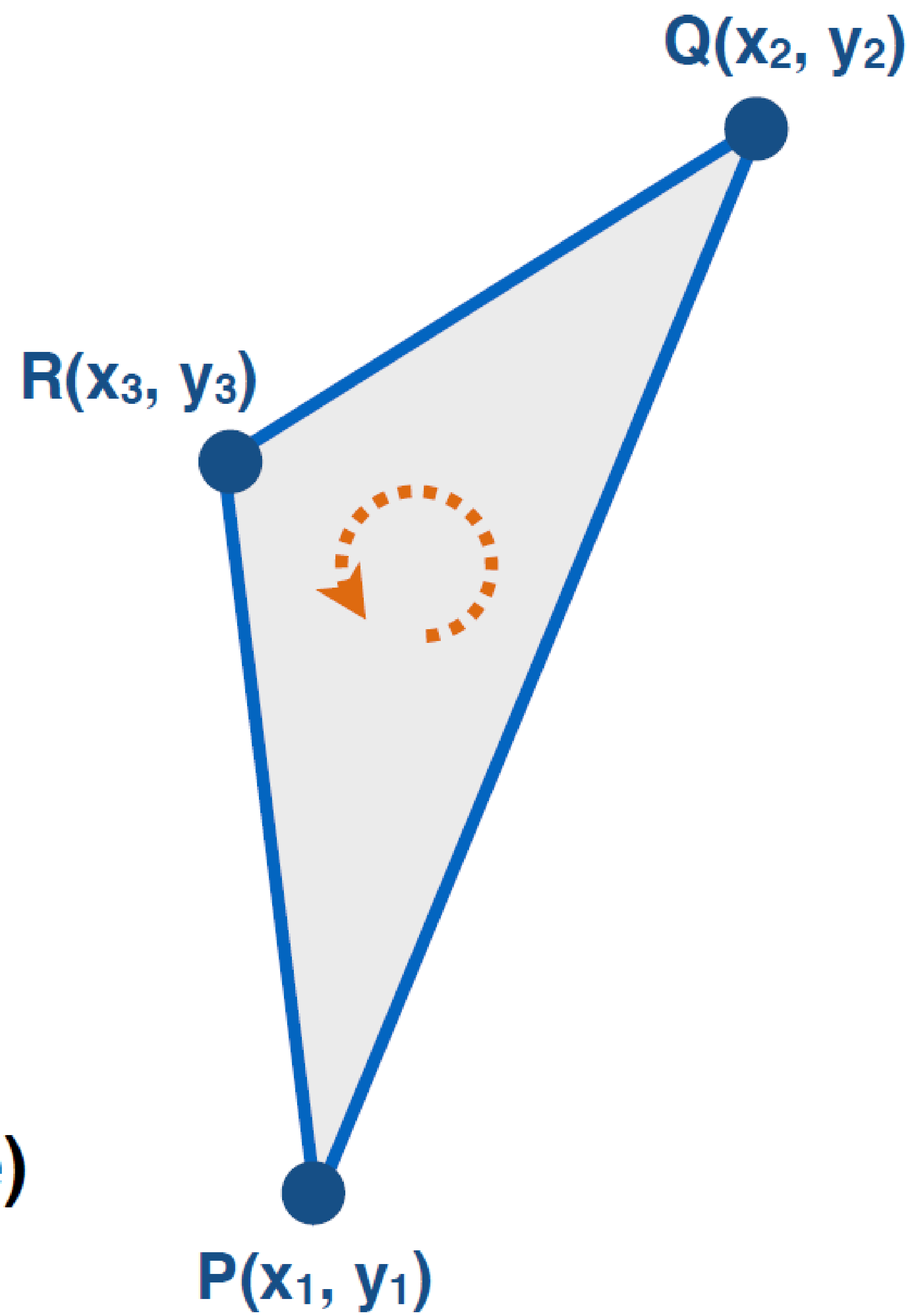
$$t = \frac{-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}$$



Ordinea punctelor

Ordinea în care trei puncte P, Q, și R sunt exprimate poate fi determinată cu **semnul** următorului **determinant**:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$



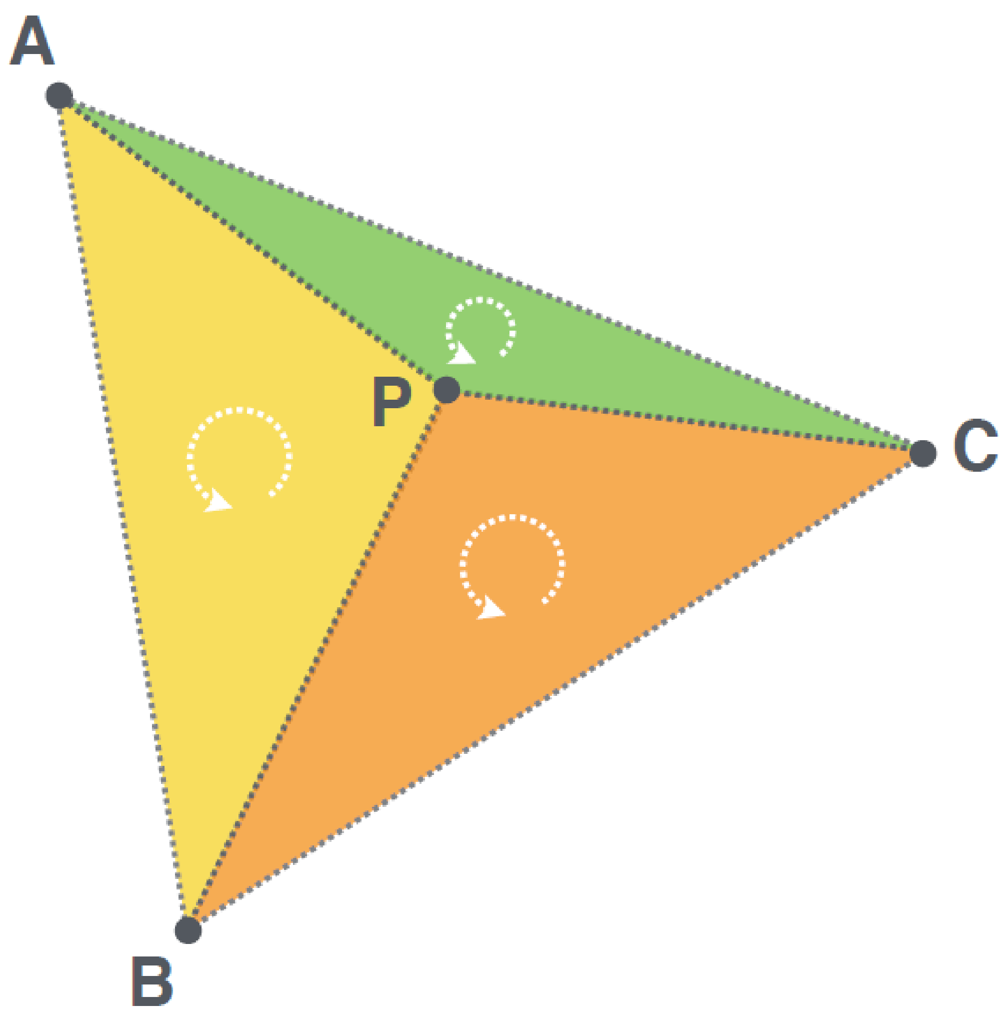
D > 0 sens **trigonometric (counterclockwise)**

D = 0 puncte coliniare

D < 0 sens **antitrigonometric** (**clockwise**)

Relația dintre un punct și un triunghi

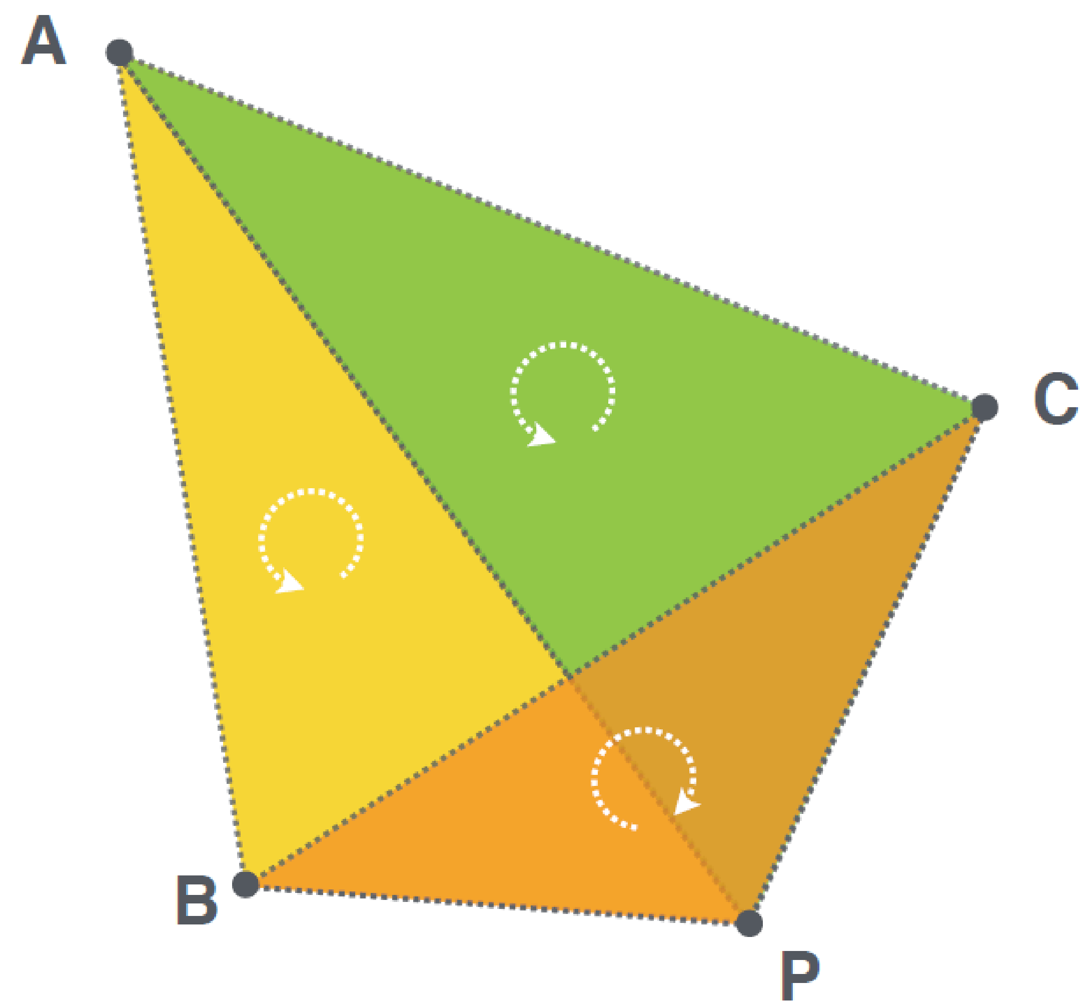
În interiorul triunghiului



$$\mathbf{sign}(\mathbf{Det}(A, B, P)) = \mathbf{sign}(\mathbf{Det}(B, C, P)) = \mathbf{sign}(\mathbf{Det}(C, A, P))$$

Relația dintre un punct și un triunghi

În exteriorul triunghiului

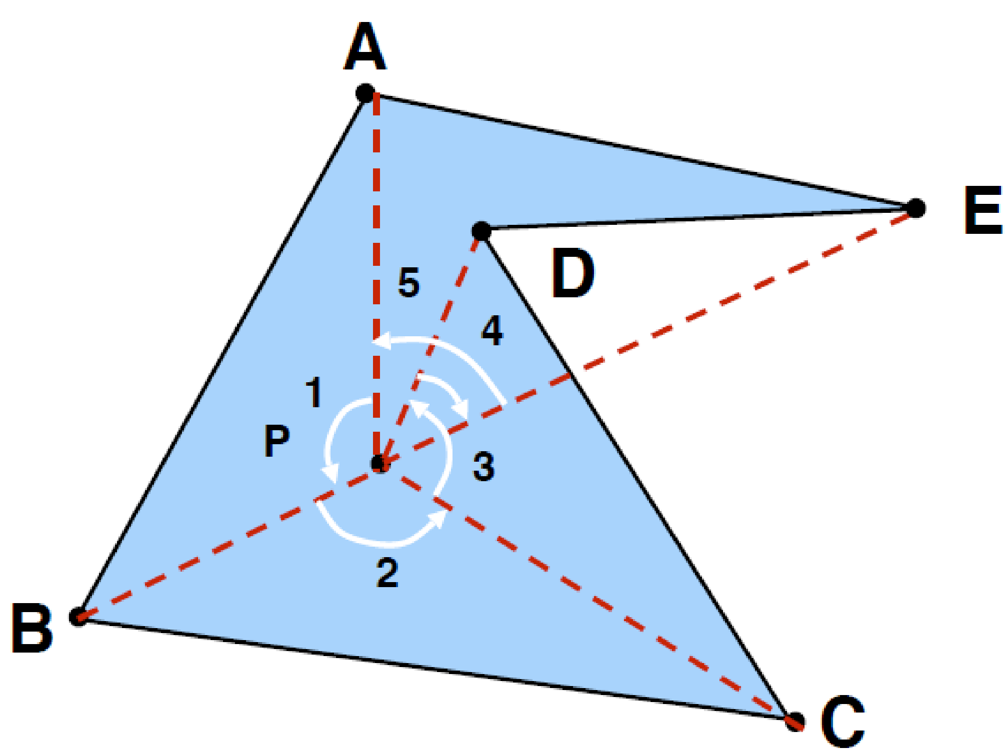


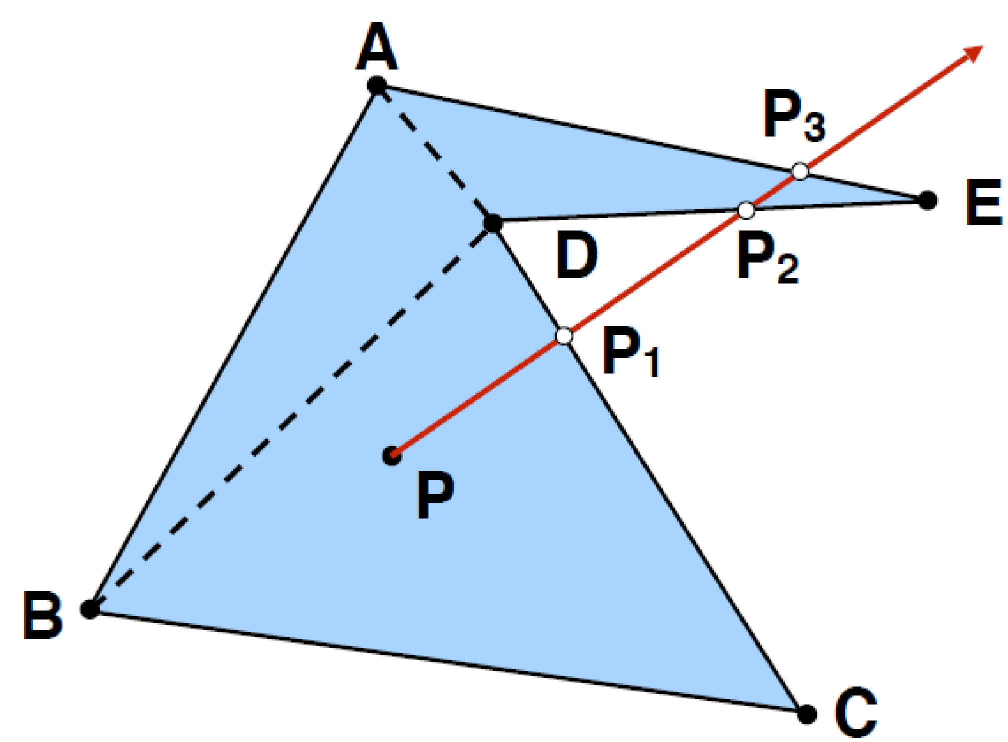
$$\mathbf{sign}(\mathbf{Det}(A, B, P)) \neq \mathbf{sign}(\mathbf{Det}(B, C, P)) \neq \mathbf{sign}(\mathbf{Det}(C, A, P))$$

Relația dintre un punct și un poligon

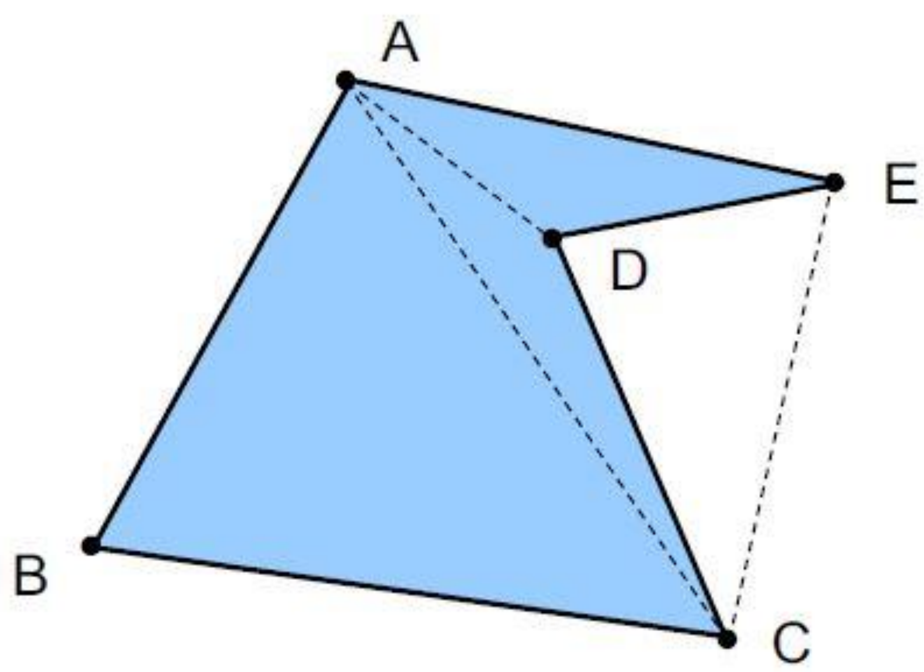
P se găsește în interiorul poligonului

- Suma unghiurilor este 360˚
  - ^1 + ^2 + ^3+ ^4 + ^5 = 360˚
- P este în interiorul unuia dintre triunghiurile care aproximează poligonul
  - ΔABD, ΔBDC, ΔDEA, P Є ΔABD
- Numărul de intersecții dintre o dreaptă orientată care pornește din punctul P și poligon
  - Număr impar de intersecții: P1, P2, P3





Triangularizare



1. Input circular list: IL = A, B, C, D, E
   Output list of triangles: OL
2. IL = A, B, C, D, E, OL = Ø,
   Analyze Δ ABC, Δ ABC ⊂ P
   OL ← Δ ABC, cut off B from IL
3. IL = A, C, D, E, OL = Δ ABC,
   analyze Δ CDE, Δ CDE ⊄ P
   OL ← Ø
4. IL = A, C, D, E, OL = Δ ABC,
   Analyze Δ ACD, Δ ACD ⊂ P
   OL ← Δ ACD, cut off C from IL
5. IL = A, D, E, OL = Δ ABC, Δ ACD
   Analyze Δ ADE, Δ ADE ⊂ P
   OL ← Δ ADE, cut off D from IL
6. IL = A, E, then stop
   OL = Δ ABC, Δ ACD, Δ ADE

Ecuația unui plan

Plane defined by 3 points:

P(x1, y1, z1), Q(x2, y2, z2), R(x3, y3, z3)

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x1 & y1 & z1 & 1 \\ x2 & y2 & z2 & 1 \\ x3 & y3 & z3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} y1 & z1 & 1 \\ y2 & z2 & 1 \\ y3 & z3 & 1 \end{vmatrix} \qquad B = - \begin{vmatrix} x1 & z1 & 1 \\ x2 & z2 & 1 \\ x3 & z3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \\ x3 & y3 & 1 \end{vmatrix} \qquad D = - \begin{vmatrix} x1 & y1 & z1 \\ x2 & y2 & z2 \\ x3 & y3 & z3 \end{vmatrix}$$

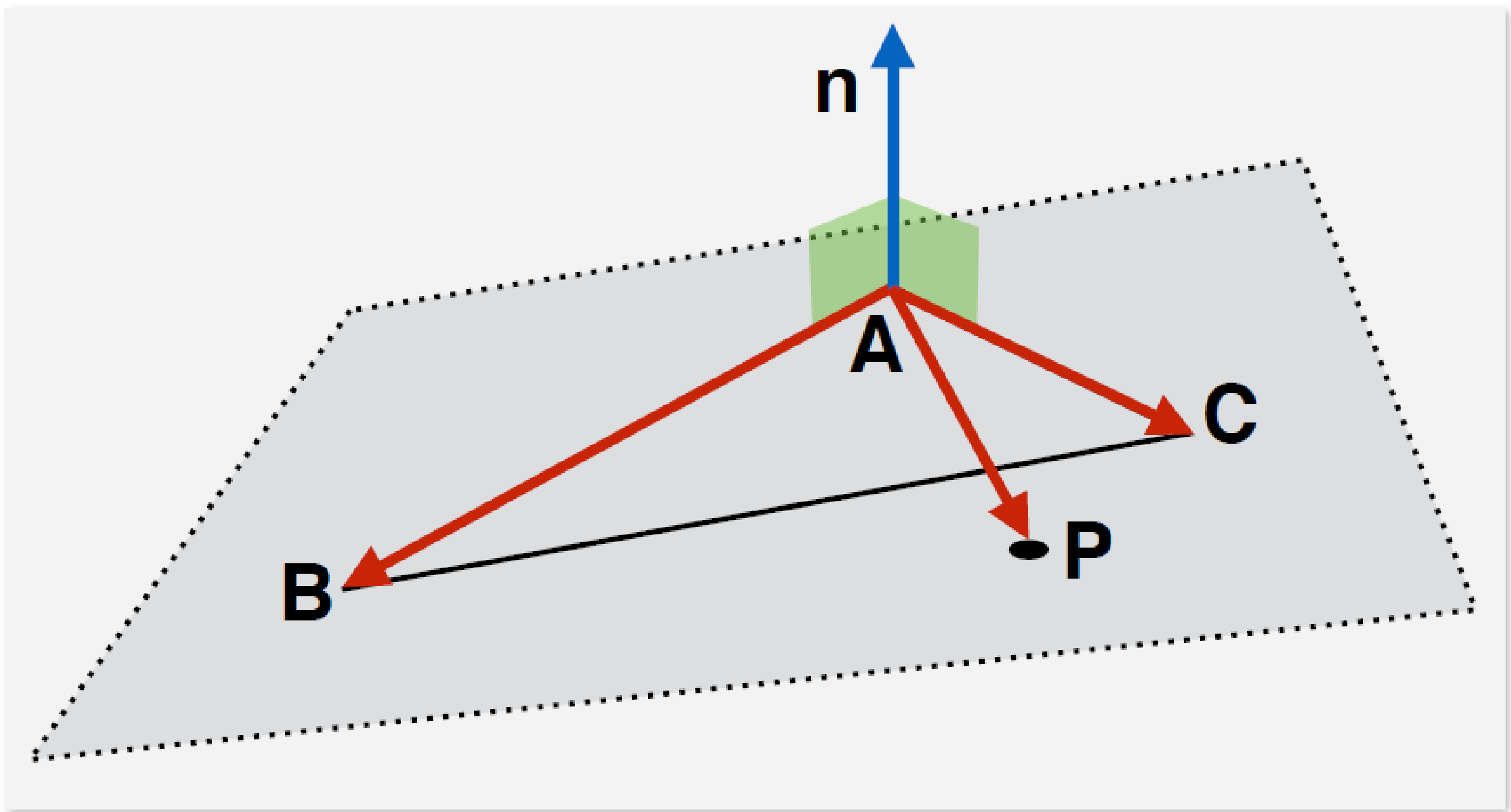
Ecuația implicită a unui plan

Planul este definit de punctele **A**, **B** și **C**

Vectorul normală: $\mathbf{n} = (B - A) \times (C - A)$

Pentru fiecare punct de pe plan: $\mathbf{n} \cdot (P - A) = 0$

Ecuația implicită a planului: $f(P) = \mathbf{n} \cdot (P - A) = 0$

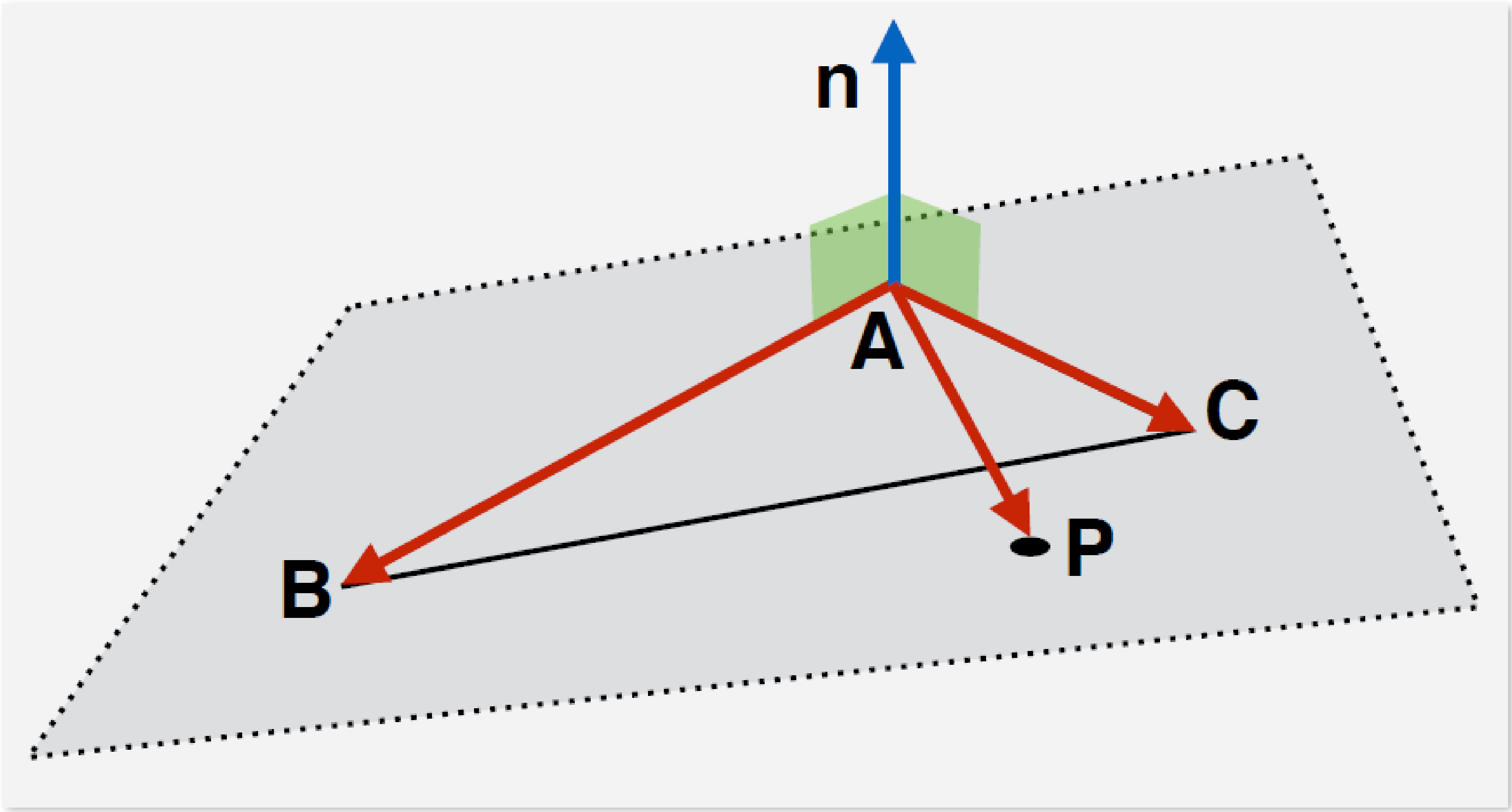


Relația dintre un punct și un plan

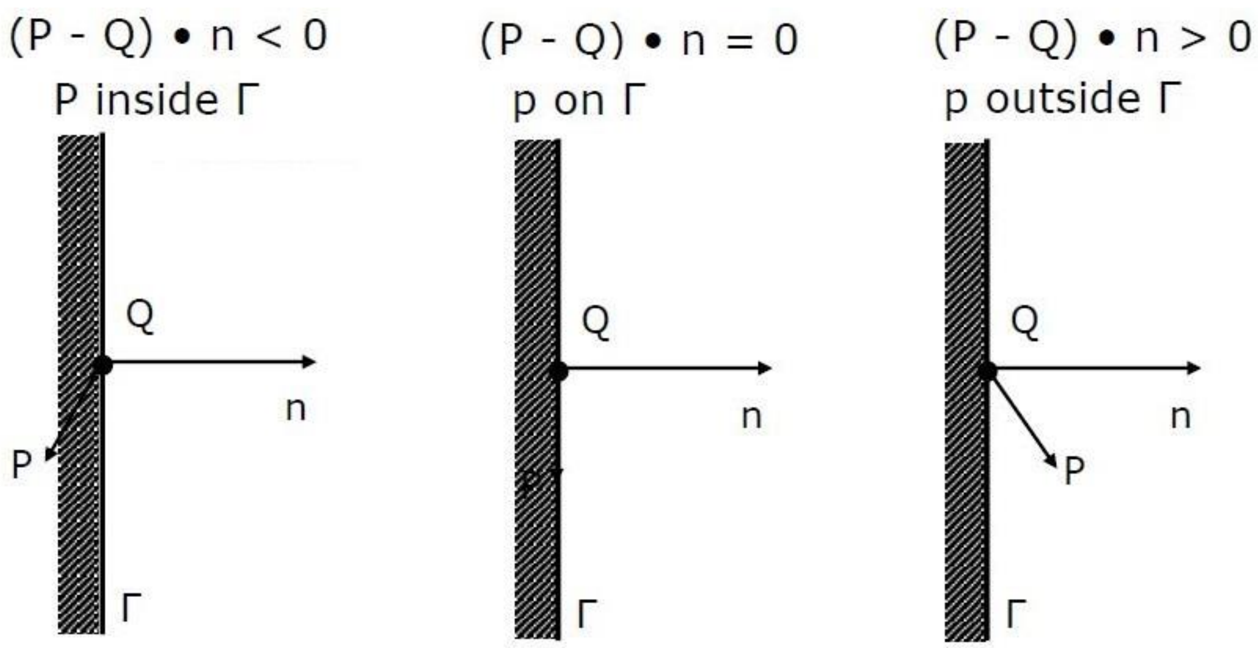
Dacă $f(P) = 0$ atunci punctul P este pe plan

Dacă $f(P) > 0$ atunci punctul P este de aceeași parte cu **n**

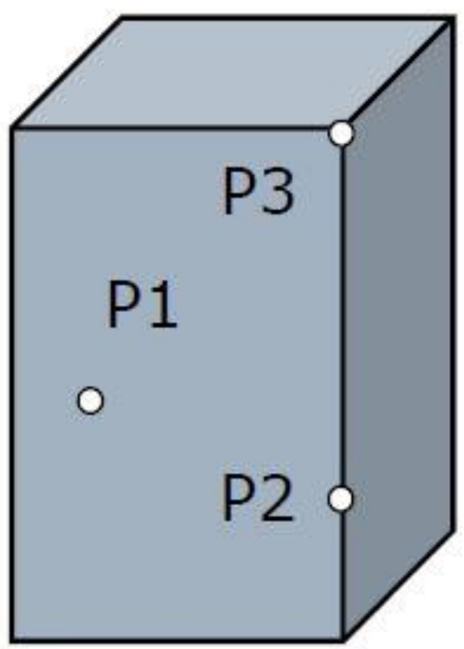
Dacă $f(P) < 0$ atunci punctul P este de cealaltă parte față de **n**



Relația dintre un punct și obiect

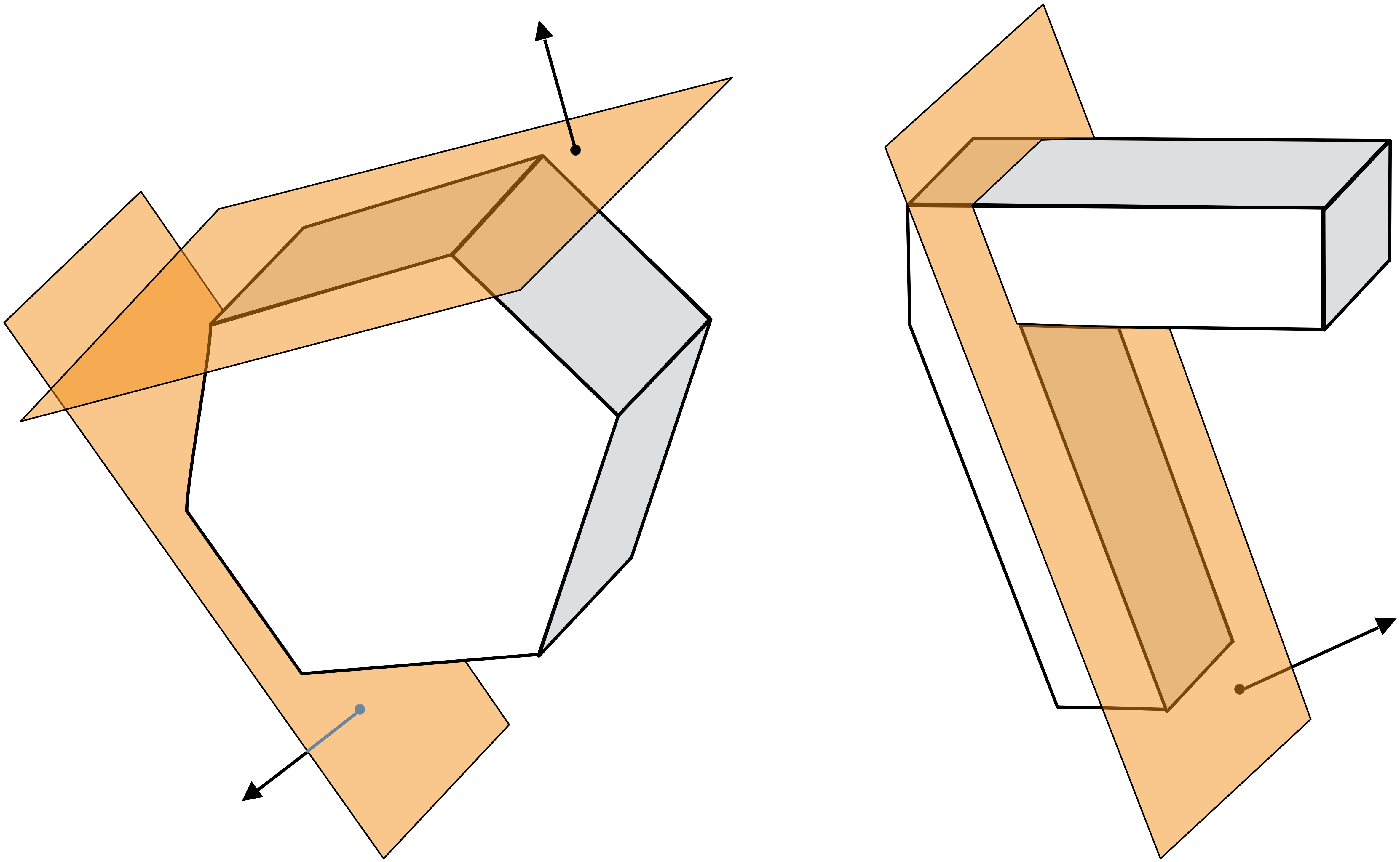


- The point P(xp,yp,zp) is located as follows:

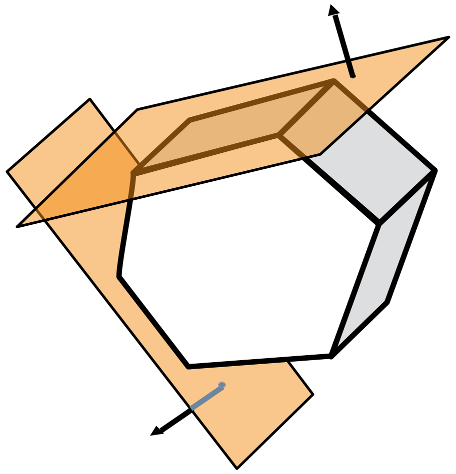


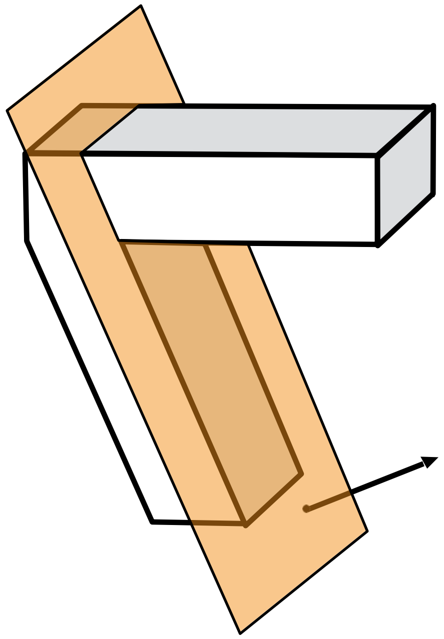
1. If at least one function gives $F(P)>0$, then P outside of Ω
2. Else if one function gives $F_k(P)=0$, then P on the k polygonal face
3. Else if two functions give $F_k(P)= F_q(P)=0$, then P on the edge between the k and q polygonal faces
4. Else if r functions give $F_{k1}(P)= F_{k2}(P)= ..=F_{kr}(P)= 0$, then P on the vertex between the k1, k2,…,kr polygonal faces
5. Else if all functions give $F_k(P)<0$, then P inside of Ω
6. Otherwise error

Obiect 3D concav/convex

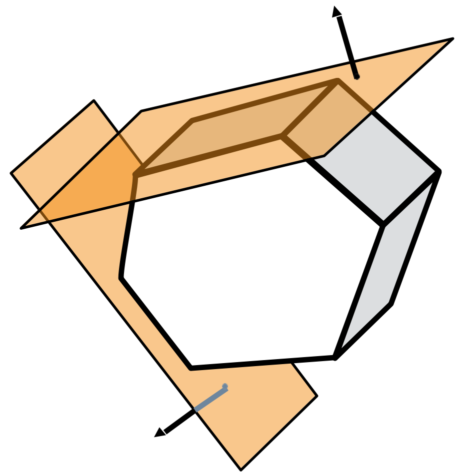


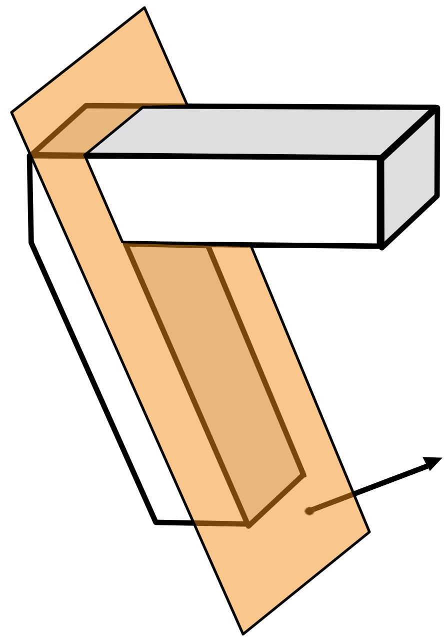
Obiect 3D concav/convex





Obiect 3D concav/convex





Object 3D