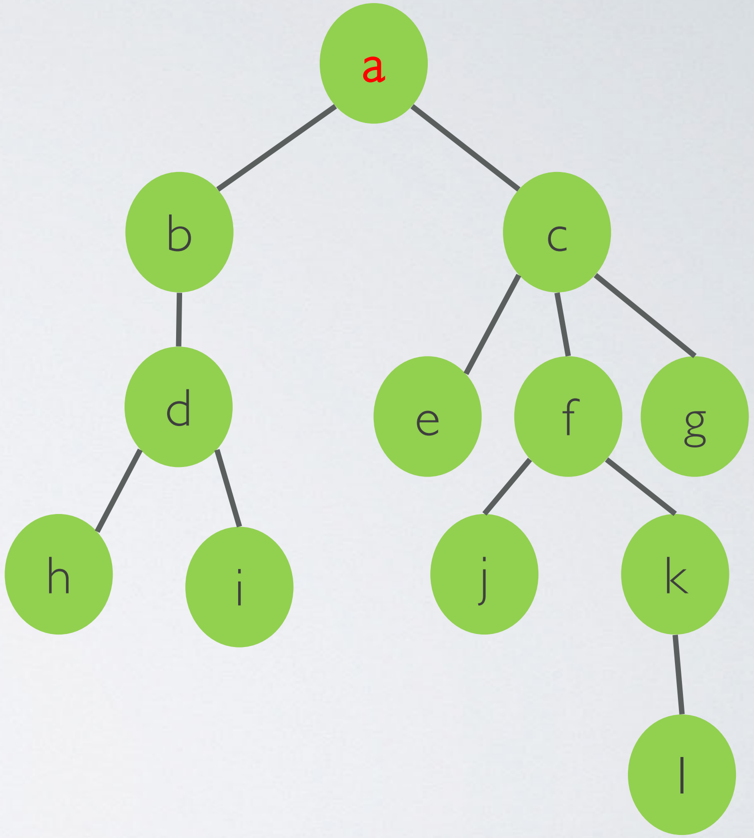
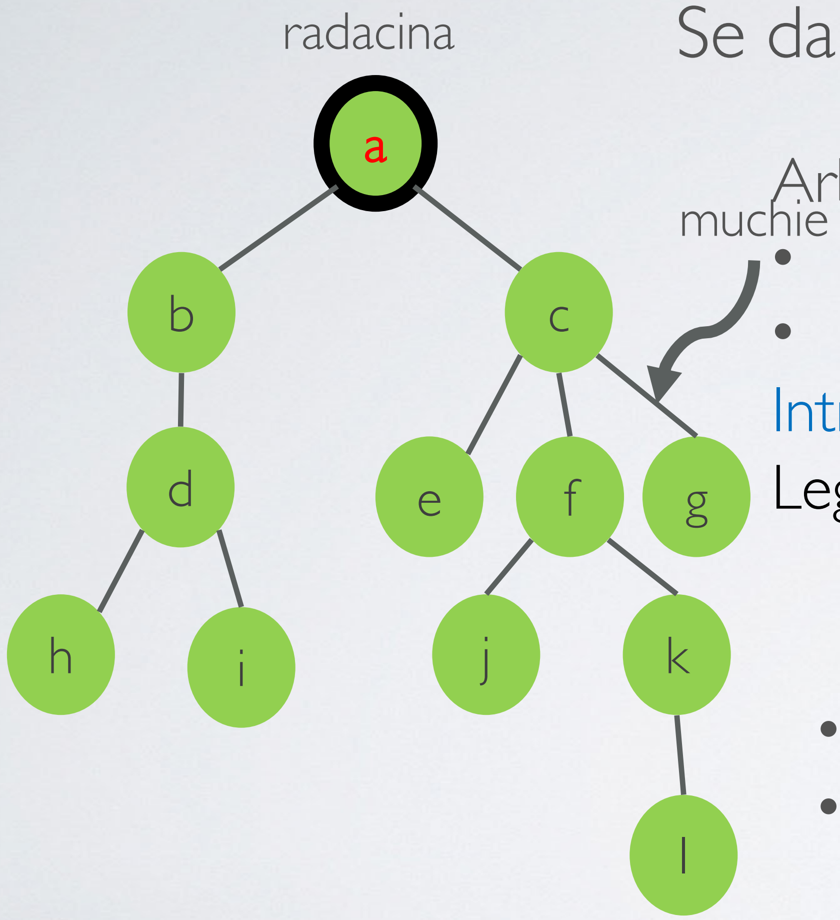
SDA CURS 3: ARBORI

Definitie. Arbori oarecare. Parcurgeri. Arbori cu etichete si arbori pentru expresii. Arbore ADT. Implementari ale arborilor. Arbori binari de cautare

ARBORI

- Arbori oarecare: colectie de elemente numite noduri - avand un nod radacina si o relatie de paternitate intre noduri – fapt ce impune o ***structura ierarhica*** a nodurilor.
- Definitie: *structura recursiva*, colectie ierarhica de noduri, fiecare nod:
  - fie este gol (nil, NULL)
  - fie este o structura care contine o cheie si o colectie de referinte catre noduri *copil*, radacinile $n_1, n_2, ..., n_k$ ale sub-arborilor $T_1, T_2, ..., T_k$
- Structura de date pentru colectii non-liniare





Se da un arbore oarecare T = (V, E) cu radacina r in V:

Arborele din figura are:

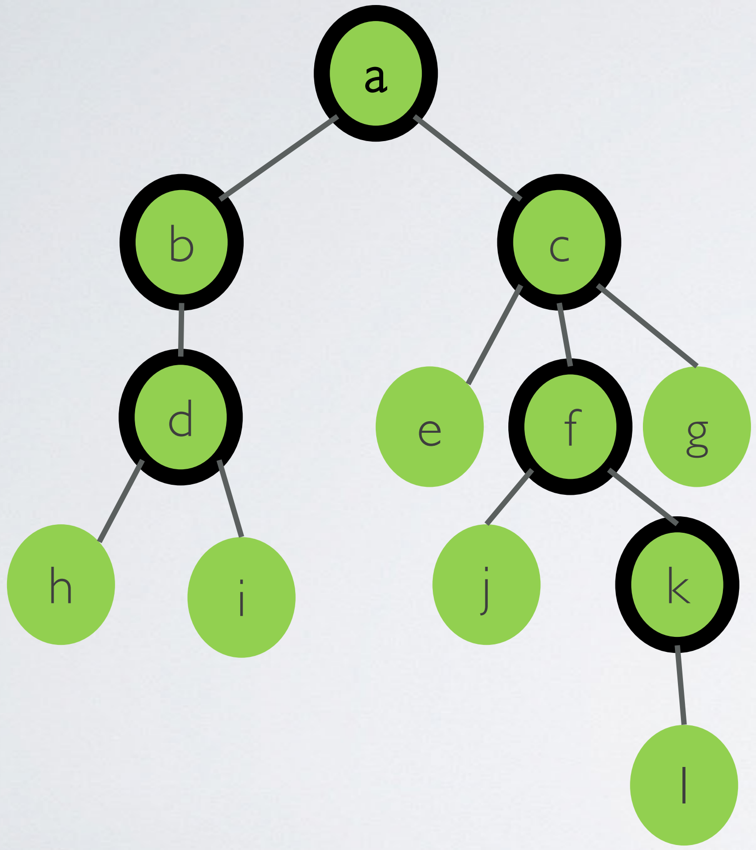
- 12 noduri: |V| = 12
- 11 muchii: |E| = 11

Intr-un arbore cu n noduri vom avea n-1 muchii.

Legatura dintre 2 noduri se numeste muchie.

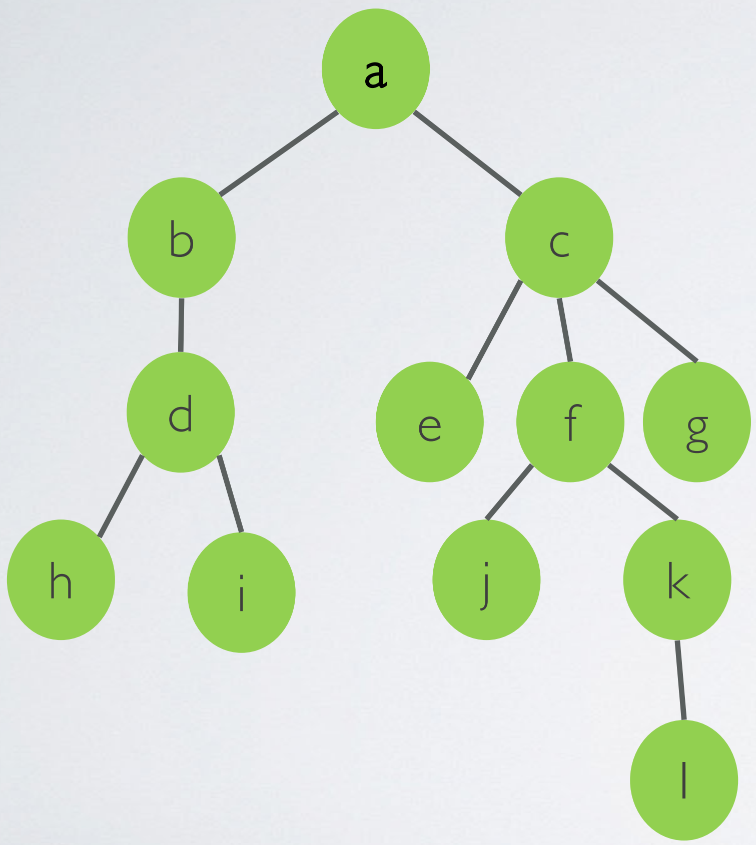
- Primul nod este <u>radacina</u>.
- Un arbore are o singura radacina,

TERMINOLOGIA PENTRU ARBORI – PARINTE, COPII



Intr-un arbore nodul care precede un alt nod se numeste <u>parinte</u>.
Intr-un arbore nodul care descende din alt nod se numeste <u>copil</u>.
Intr-un arbore oarecare, un nod parinte poate avea oricate noduri copil.
Intr-un arbore, toate nodurile sunt copii, cu exceptia radacinii.

- Noduri parinte in exemplul din figura:
  - a, b,d,c,f,k
- Copiii lui a sunt b si c
- Copiii lui d sunt h si i

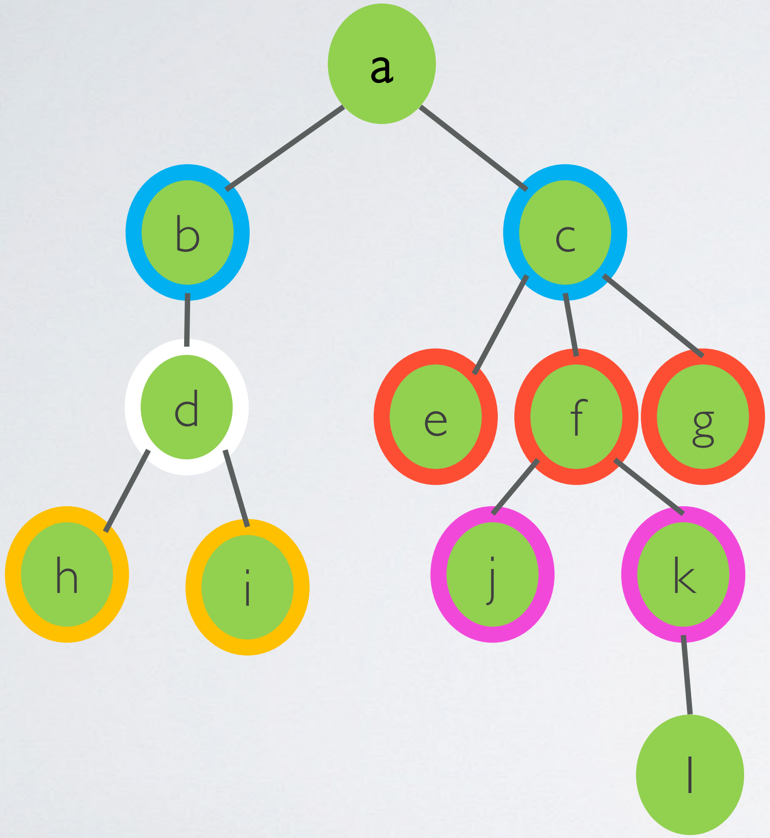


Descendent al lui v: Orice nod in care se ajunge parcurgand muchiile de la v in jos (pe relatie copil)
Stramos al lui v: orice nod in care se ajunge parcurgand muchiile de la v in sus (pe relatie parinte)

- Descendentii lui c sunt e, f, g, j, k, l
- Stramosii lui k sunt f, c, a

TERMINOLOGIA PENTRU ARBORI – FRATI

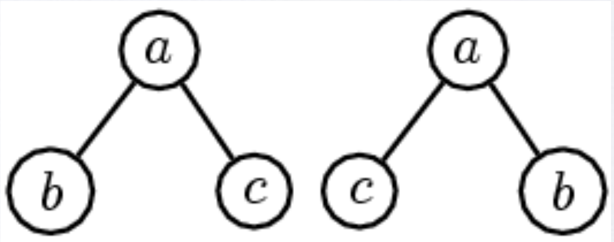
UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA



Nodurile care au acelasi parinte se numesc frati.
Fratii pentru exemplul din figura sunt:

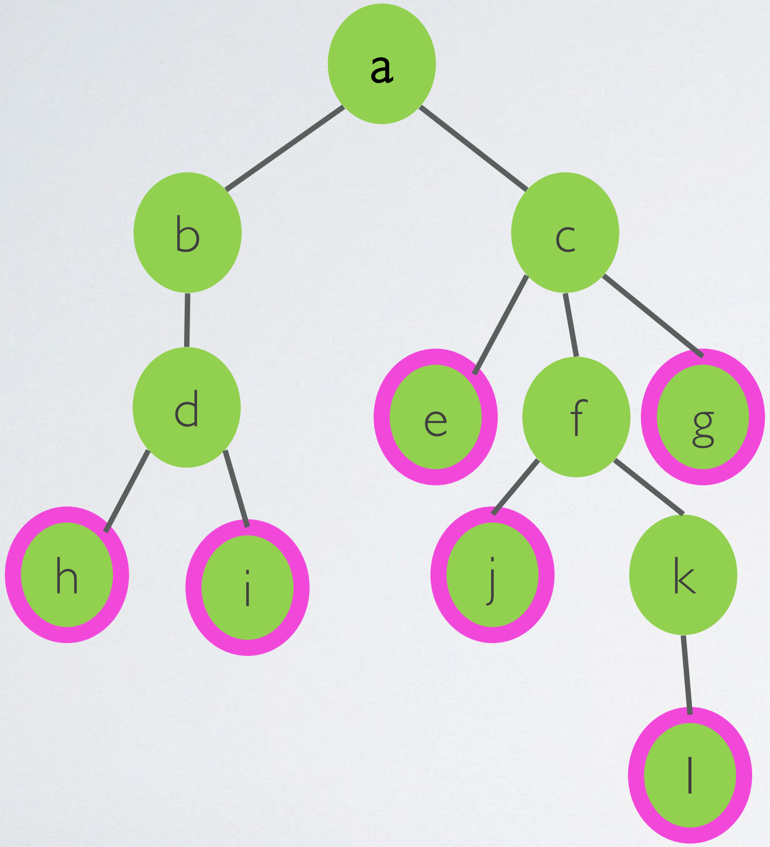
- b, c.
- h,I
- e,f,g
- j,k

- Ordinea fratilor poate sau nu sa conteze



TERMINOLOGIA PENTRU ARBORI – FRUNZE

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

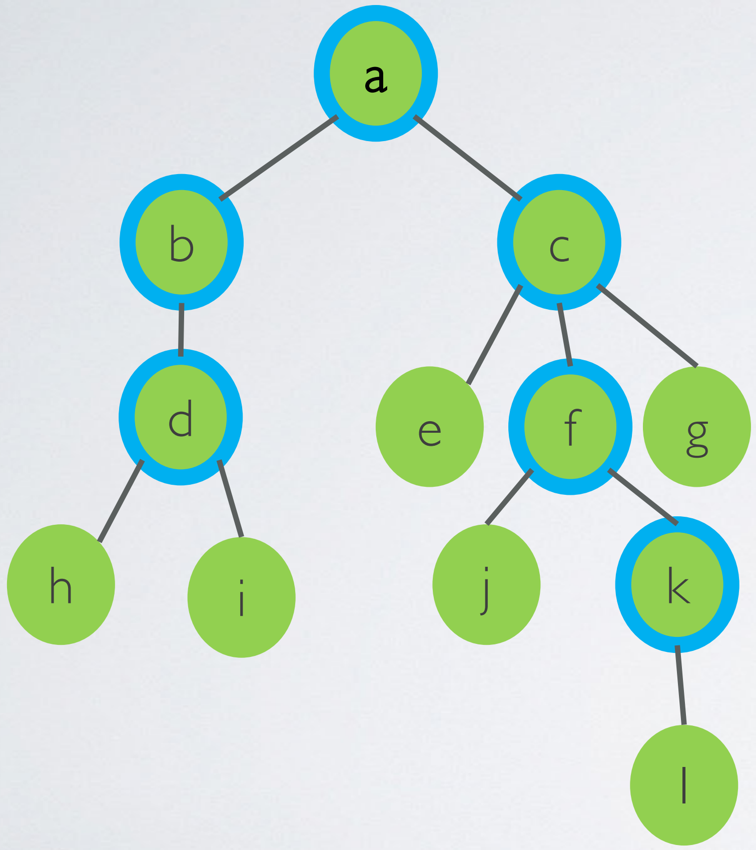


Intr-un arbore, nodurile care nu au copii se numesc frunze, sau noduri terminale, sau noduri externe.

Frunzele din exemplu sunt:

- h,i,e,g,j,l

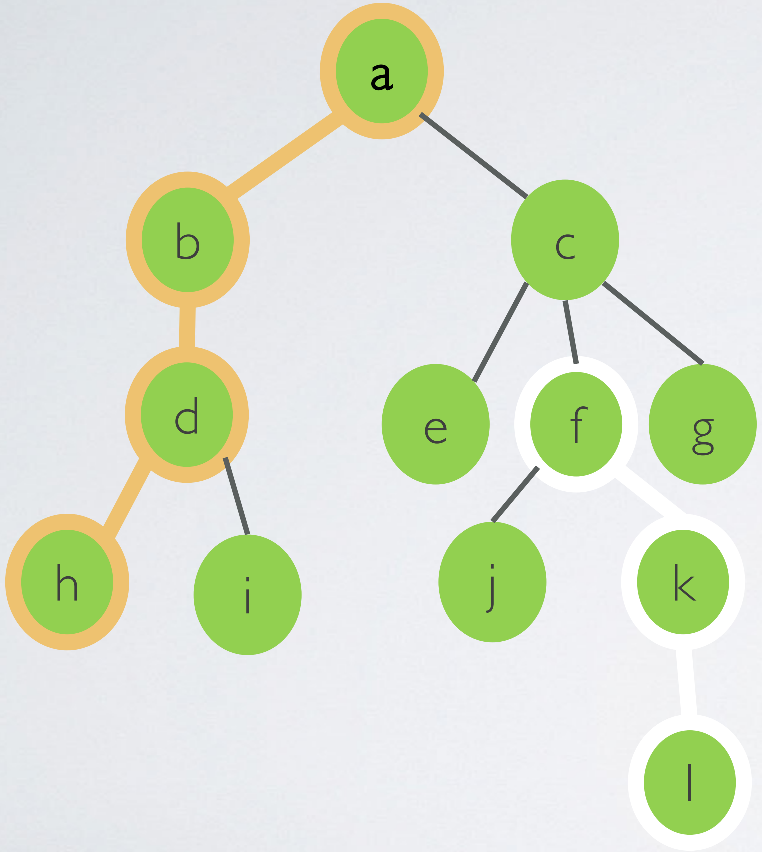
TERMINOLOGIA PENTRU ARBORI – NODURI INTERNE



Nod intern – nod care are cel putin un copil.
Se mai numeste nod non-terminal.
Radacina e considerata nod intern.

Nodurile interne din exemplu sunt:

- a,b,d,c,f,k



Cale(en. *path*) dintre doua noduri este secventa de noduri si muchii cuprinsa intre cele doua noduri.

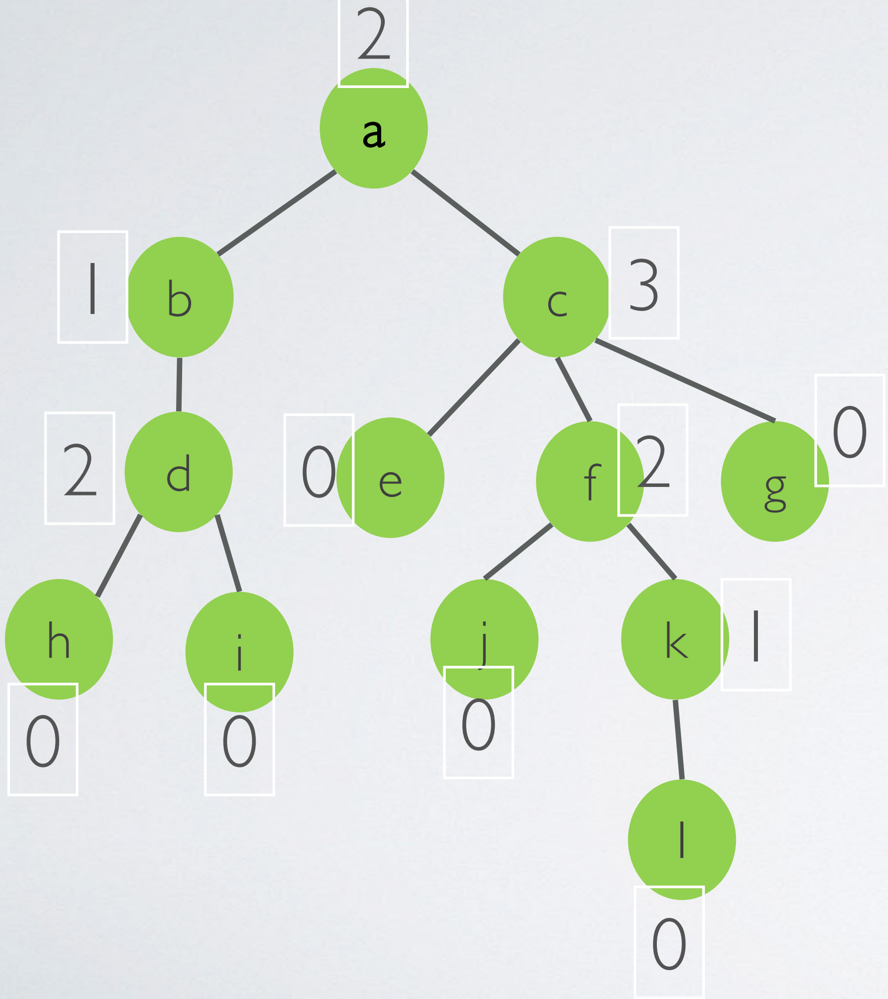
$\langle n_1, n_2, ..., n_k \rangle$ astfel incat n_i = parintele lui n_{i+1} pentru $1 \leq i \leq k$.

$lungime$(cale) = nb_noduri-1 = nb_muchii

Exemplu :

- Drumul dintre a si h este:
  - a-b-d-h
  - Lungimea drumului este 3
- Drumul dintre f si l:
  - f,k,l
  - Lungime = 2

Gradele fiecarui nod:

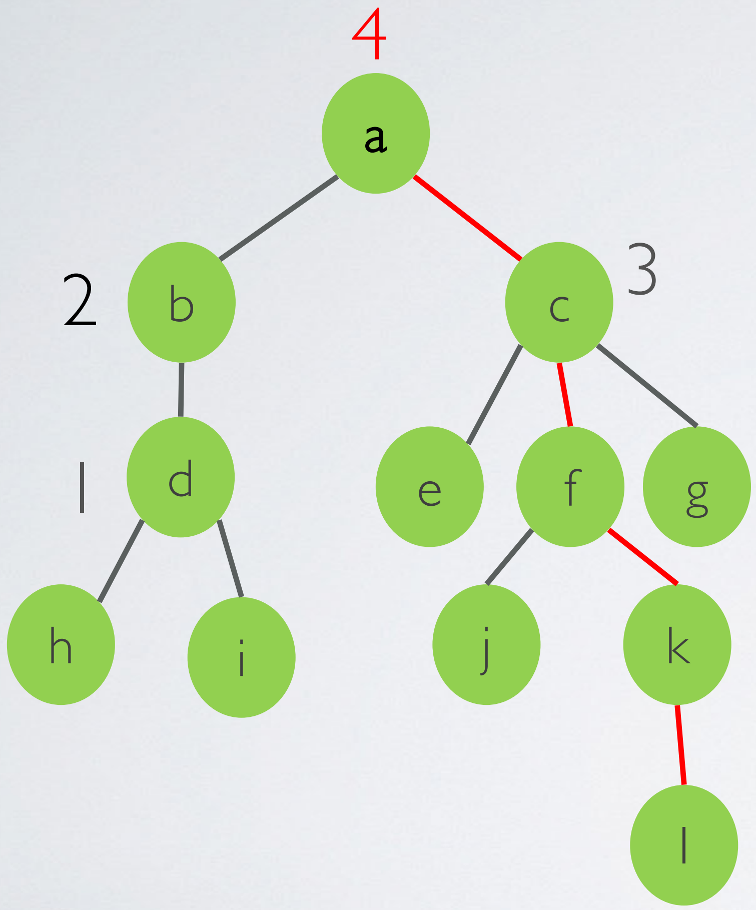


<u>Gradul unui nod</u> este egal cu numarul de copii ai nodului.
<u>Gradul arborelui</u> este maximul dintre gradele nodurilor din arbore.

In exemplu:

- Grad(a) = 2
- Grad(b)=1
- Grad(h) = 0
- Grad(c) = 3
- ….

TERMINOLOGIA PENTRU ARBORI – INALTIME



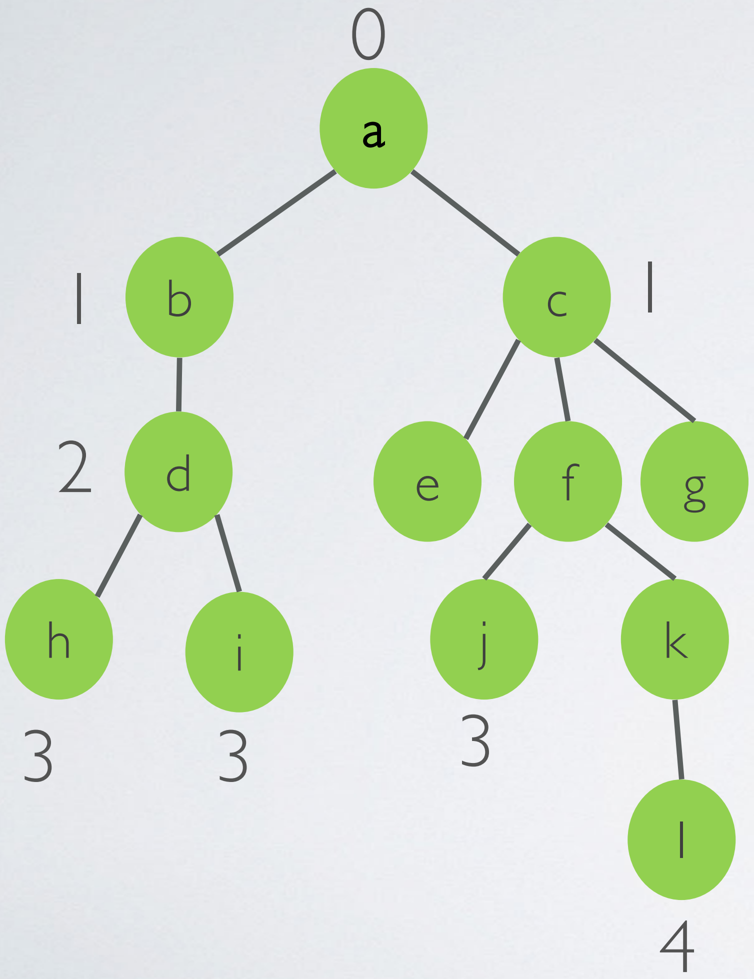
Inaltimea (height) a unui nod v

`inaltime(v) = lungimea celui mai lung drum de la v la o frunza.`

Inaltimea arborelui T este inaltimea radacinii r (Inaltime(T)=Inaltime(r)).
Inaltimea frunzelor este 0.

Inaltimea(a) = 4
Inaltime(b)=2;
Inaltime(k)=1;
Inaltime(h)=0;
….

TERMINOLOGIA PENTRU ARBORI – ADANCIME



Adancimea unui nod (varf) $v \in V$:

`adancime(v) = lungimea drumului de la r la v`

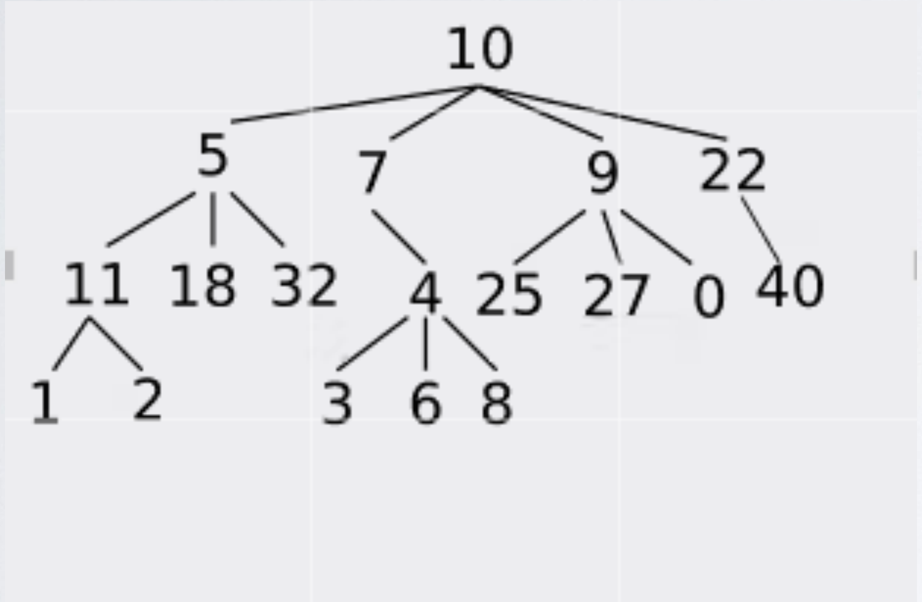
- numarul de muchii continute de drumul de la radacina pana la acel nod.
- Adancimea radacinii este 0.
- Adancimea arborelui este maximul dintre adancimile frunzelor.

Exemplu:

- Adancime(a)=0
- Adancime(d)=2
- Adancime(k)=3
- Adancime(l)=4
- ….

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

`inaltime(v) = lungimea celui mai lung drum de la v la o frunza.`
`adancime(v) = lungimea drumului de la r la v`

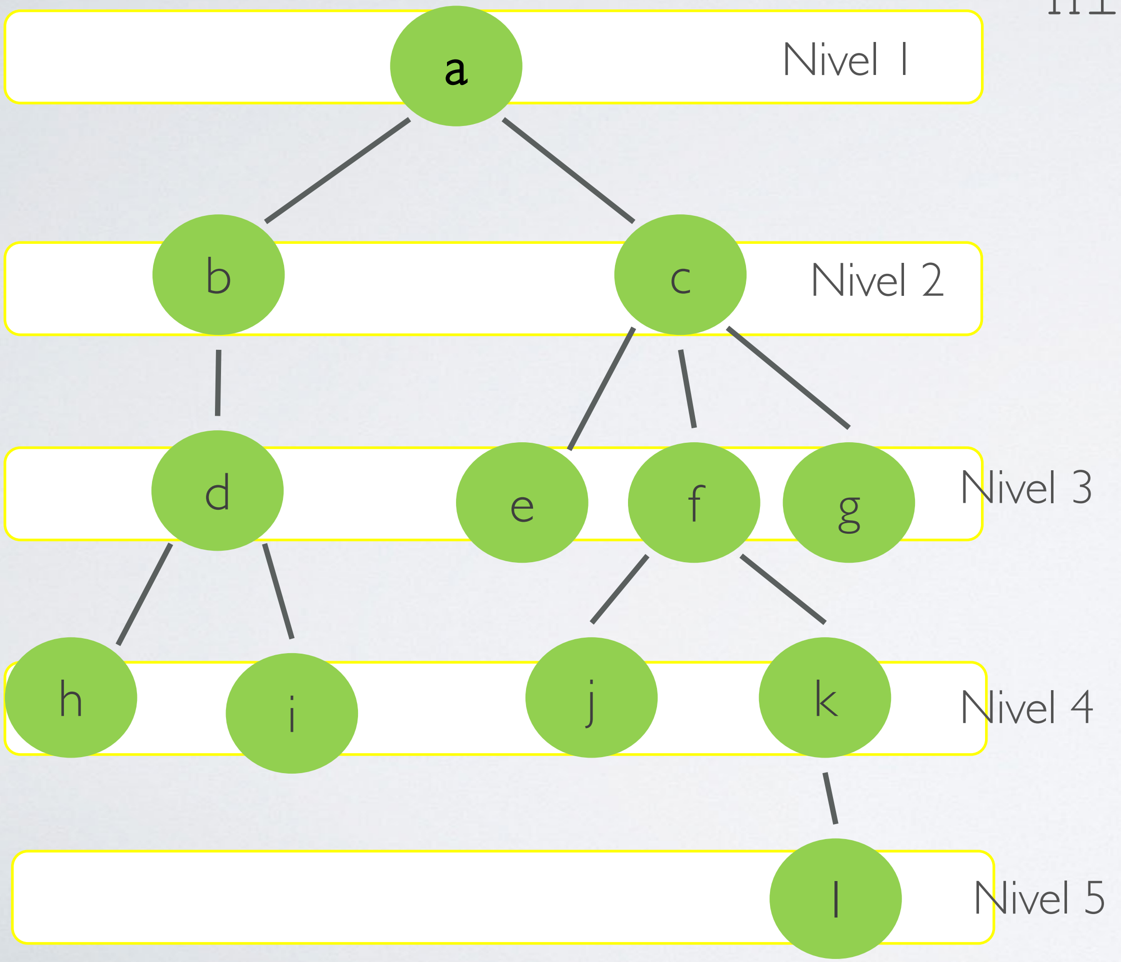


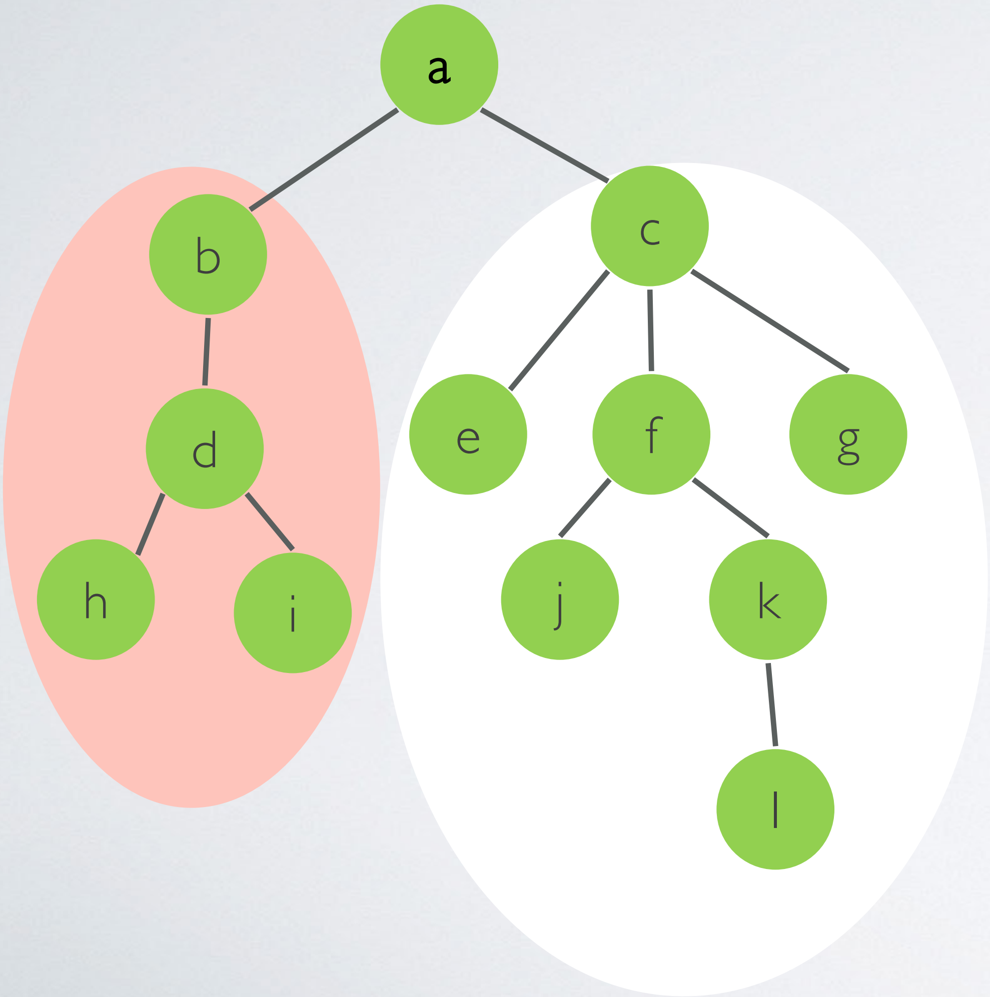
Care este inaltimea si adancimea nodului 10 ?
Care este inaltimea si adancimea nodului 4 ?

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Nivelul unui varf v∈V este

`nivel(v) = 1 + adancime(v)`





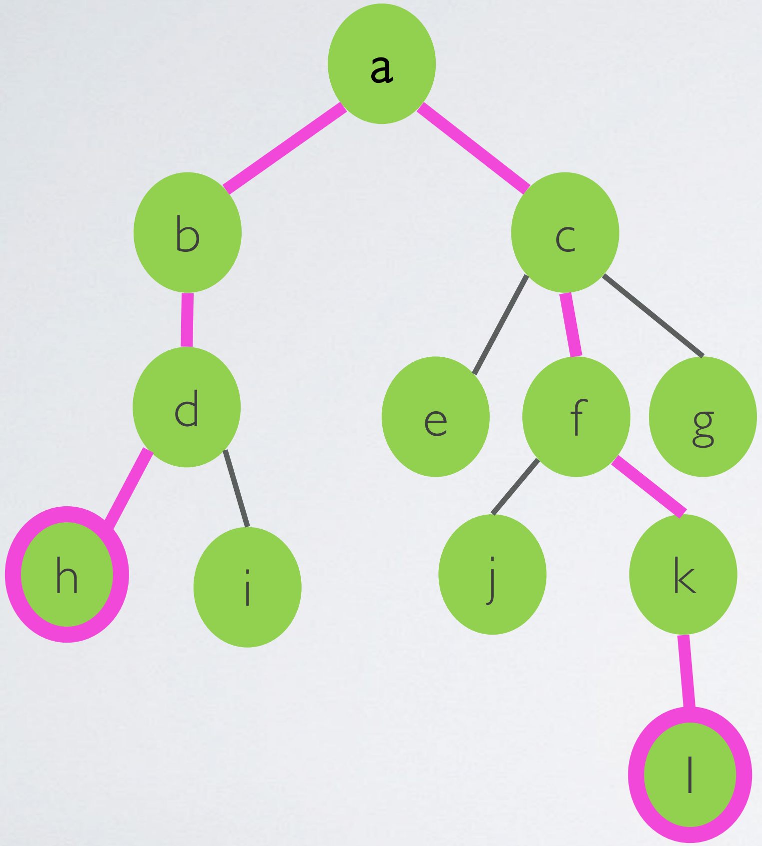
Sub-arborele generat de un varf $v \in V$ este un arbore care consta in nodul radacina v si toti descendentii sai din T.

Subarborele generat de b contine nodurile:

- b,d,h,i

Subarborele generat de f contine nodurile:

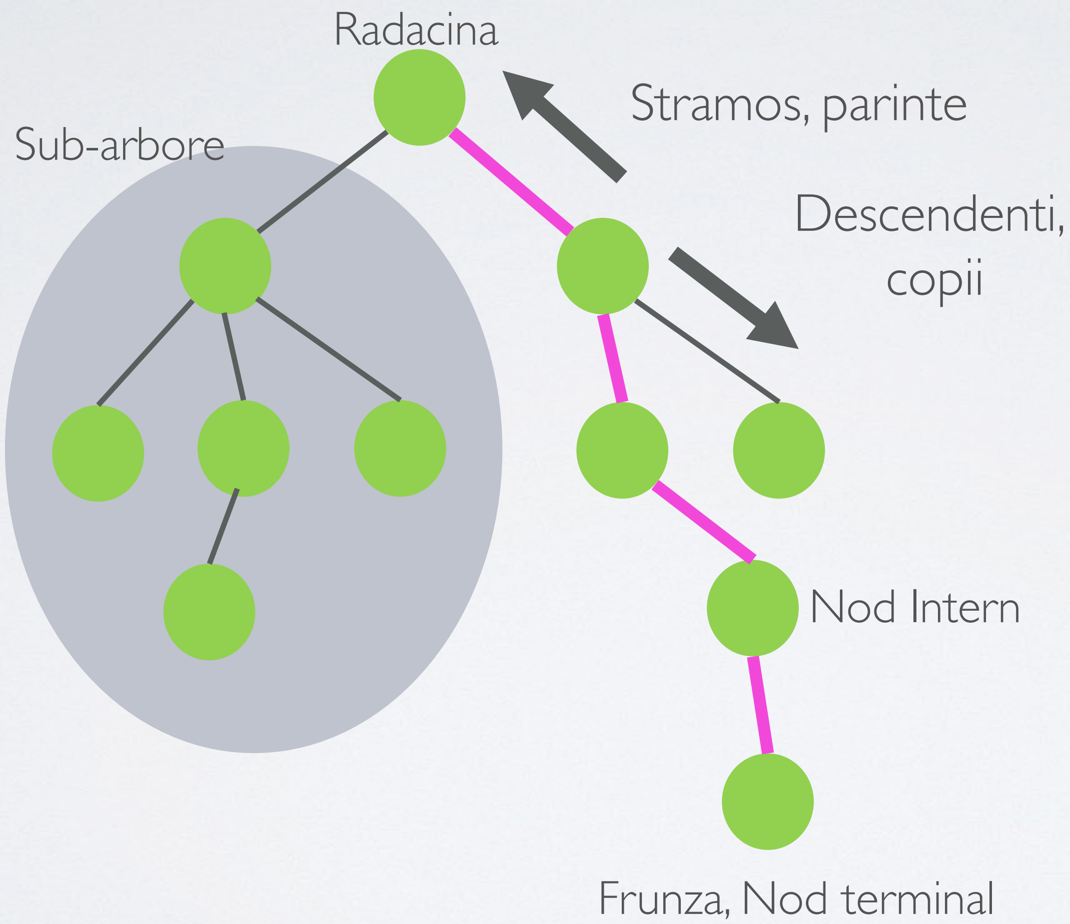
- f,j,k,l



Diametrul unui arbore: lungimea maxima a unei cai intre 2 noduri (frunze), in arbore

Exemplu: diametrul arborelui din figura este 7

TERMINOLOGIA FOLOSITA PENTRU ARBORI



TERMINOLOGIA PENTRU ARBORI OARECARE

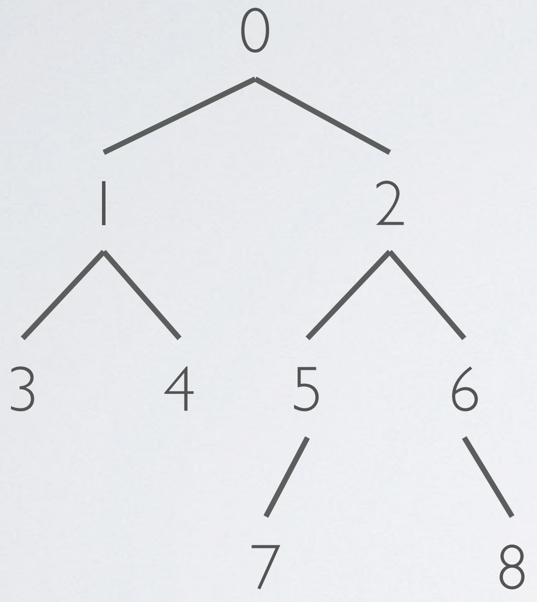
- Un arbore oarecare este:
  - *m-ary* daca fiecare varf intern are cel mult *m* fii.
    - $m = 2 \rightarrow$ arbore binar; $m = 3 \rightarrow$ arbore ternar
  - *m-ary intreg ("full")* – fiecare nod intern are exact m fii
  - *complet m-ary* – daca este arbore full si toate frunzele sunt la acelasi nivel
- Limite:
- Inaltimea maxima a unui arbore cu n varfuri este $n - 1$.
- Inaltimea maxima a unui arbore plin (full) cu n varfuri este $(n - 1)/m$
- Inaltimea minima a unui arbore cu n varfuri este $\lfloor \log_m n \rfloor$

ADT (ABSTRACT DATA TYPE) TREE

- `parent(n, T)`: returneaza parintele nodului n in arborele T. Pentru radacina returneaza un arbore vid (NIL).
  - Input: nod, arbore; Output: nod sau NIL
- `leftmostChild(n, T)`: returneaza fiul cel mai din stanga al nodului n din arborele T sau NIL pentru o frunza.
  - Input: nod, arbore; Output: nod sau NIL
- `rightSibling(n, T)`: returneaza fratele din dreapta al nodului n in arborele T sau NIL pentru cel mai din dreapta frate.
  - Input: nod, arbore; Output: nod sau NIL
- `label(n, T)`: returneaza eticheta (valoarea asociata) nodului n in arborele T
  - Input: nod, arbore; Output: eticheta
- `root(T)`: returneaza radacina arborelui *T*
  - Input: arbore; Output: nod sau NIL
- *`inord(T), preord(T), postord(T)`*

IMPLEMENTAREA ARBORILOR CU VECTORI

Model logic



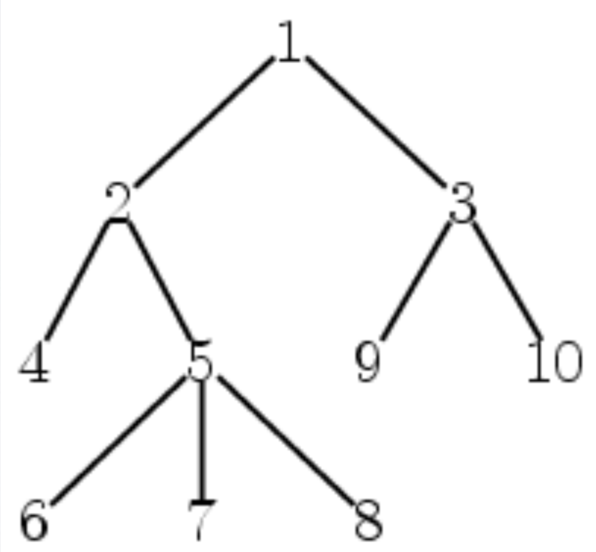
Structura fizica

0	1	2	3	4	5	6	7	8	idNod
-1	0	0	1	1	2	2	5	6	Indicele parintilor

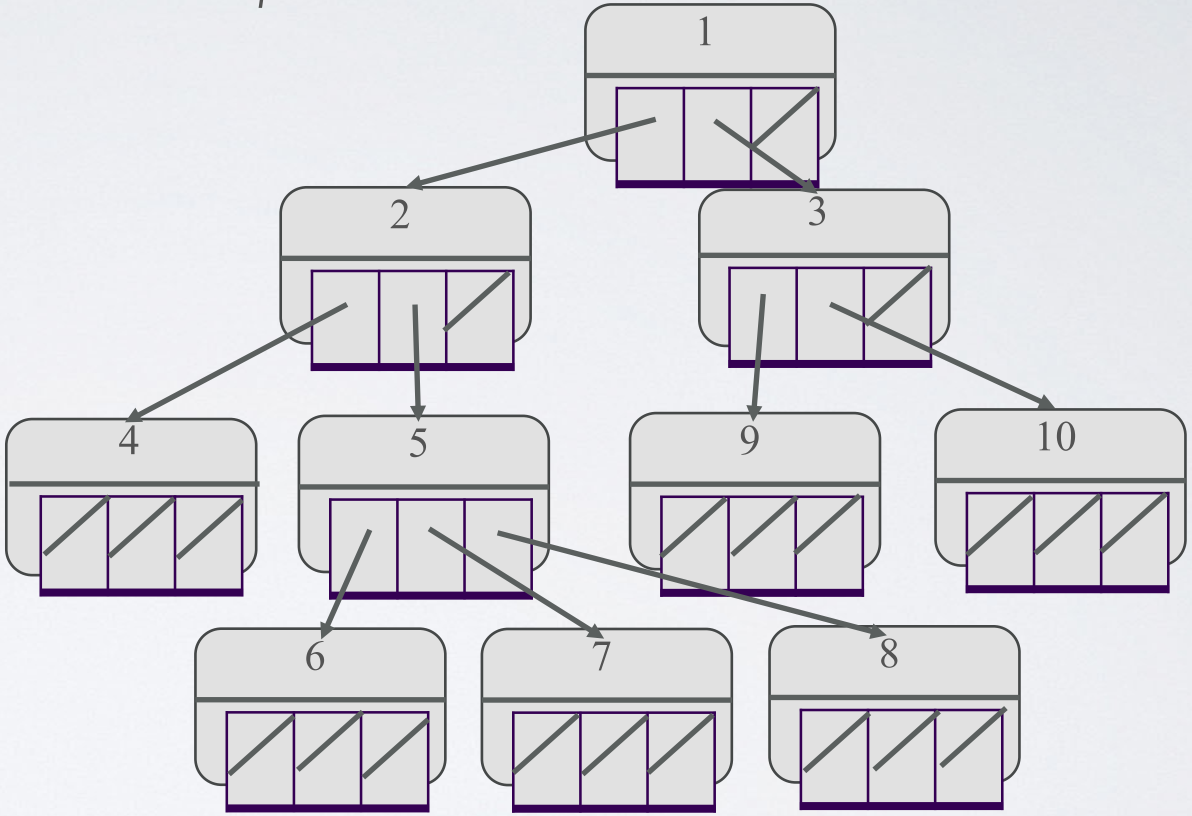
- fiecare nod are referinta catre indexul nodului parinte stocat in vector
- Indicele radacinii este -1

IMPLEMENTAREA ARBORILOR. LISTE DE COPII

Model logic



Structura fizica

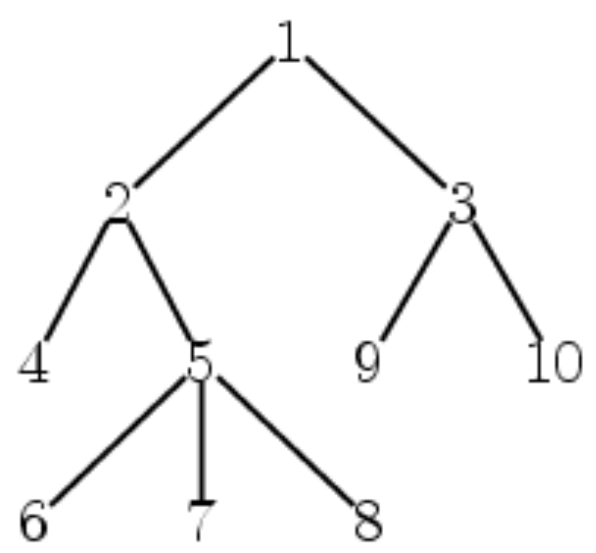


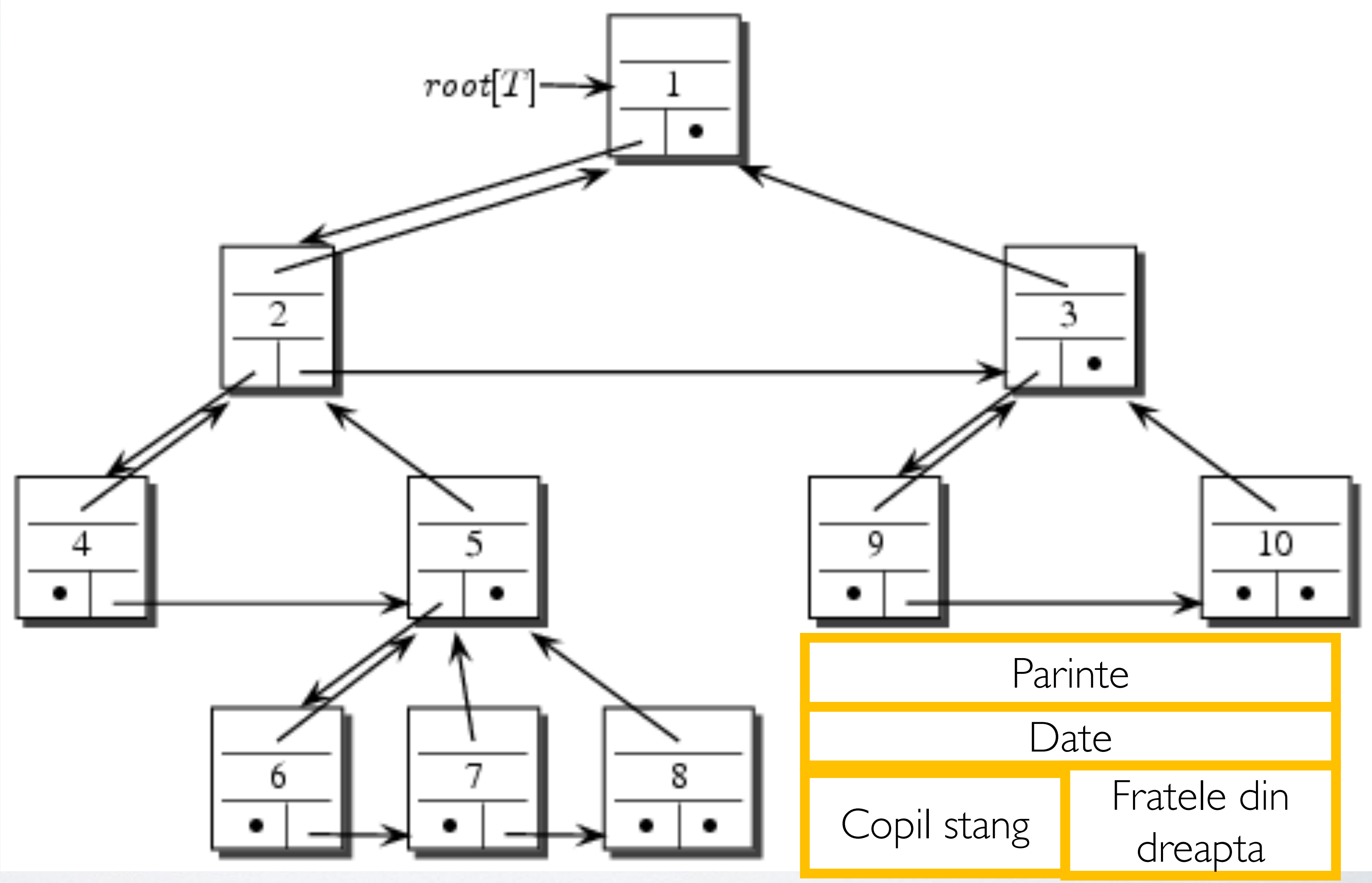
Date
Lista de referinte catre noduri copil

Lista de copii – sir sau lista inlantuita

REPREZENTARE DE ARBORE BINAR A ARBORILOR MULTICAI

Model logic



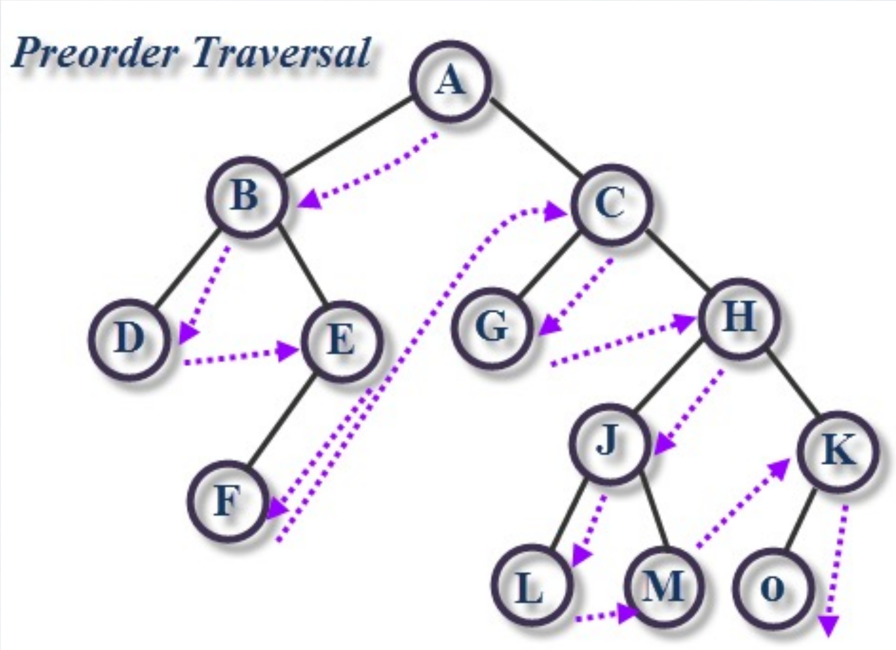


PARCURGERILE UNUI ARBORE

Preordine – se viziteaza radacina, apoi tot in preordine se viziteaza nodurile subarborilor care au ca parinte radacina, incepand cu sub-arborele cel mai din stanga.

`Preordine (`*n*`)`

- proceseaza *n*
- pentru fiecare fiu `c` al lui *n*, in ordine de la cel mai din stanga fiu executa `Preordine(`*c*`)`



Sursa foto: *

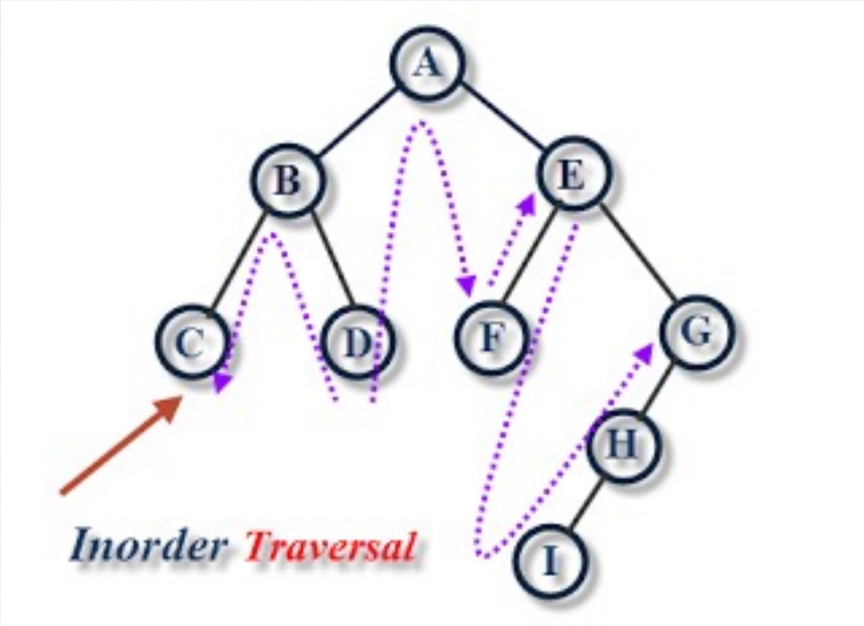
*http://techfinite.blogspot.ro/2013/12/binary-tree-traversals-and-tree-iterations.html

PARCURGERILE UNUI ARBORE

Inordine – se viziteaza in inordine primul copil, dupa care se proceseaza radacina, dupa care se viziteaza, in inordine, restul copiilor

`Inordine (n)`

- `Inordine(fiul cel mai din stanga a lui n)`
- proceseaza n
- pentru fiecare fiu c al lui n, exceptie facand nodul cel mai din stanga, in ordine de la stanga la dreapta se executa `Inordine(c)`



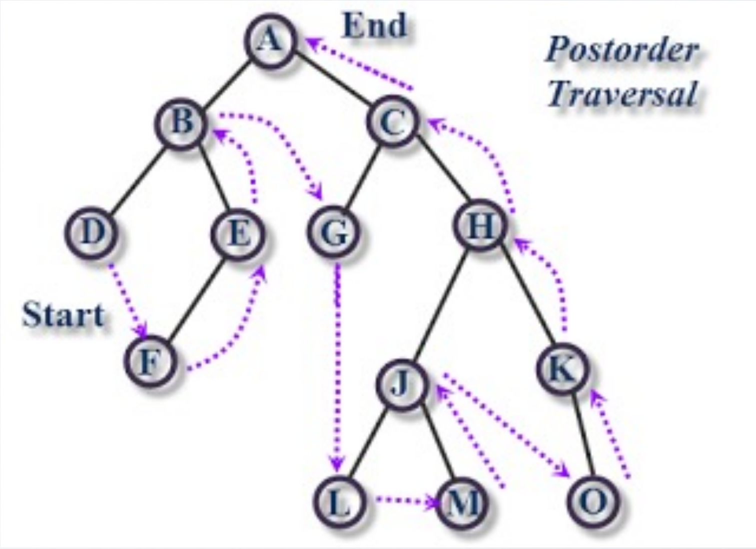
Sursa foto: *

Complexitate : O(n)
Inorder traversal : C B D A F E I H G

*http://techfinite.blogspot.ro/2013/12/binary-tree-traversals-and-tree-iterations.html

PARCURGERILE UNUI ARBORE

Postordine– pentru un nod se viziteaza in postordine toti sub-arborii care au ca radacini pe fii nodului dat, apoi se viziteaza nodul. Se incepe parcurgerea de la radacina.



Sursa foto: *

`Postordine(n)`

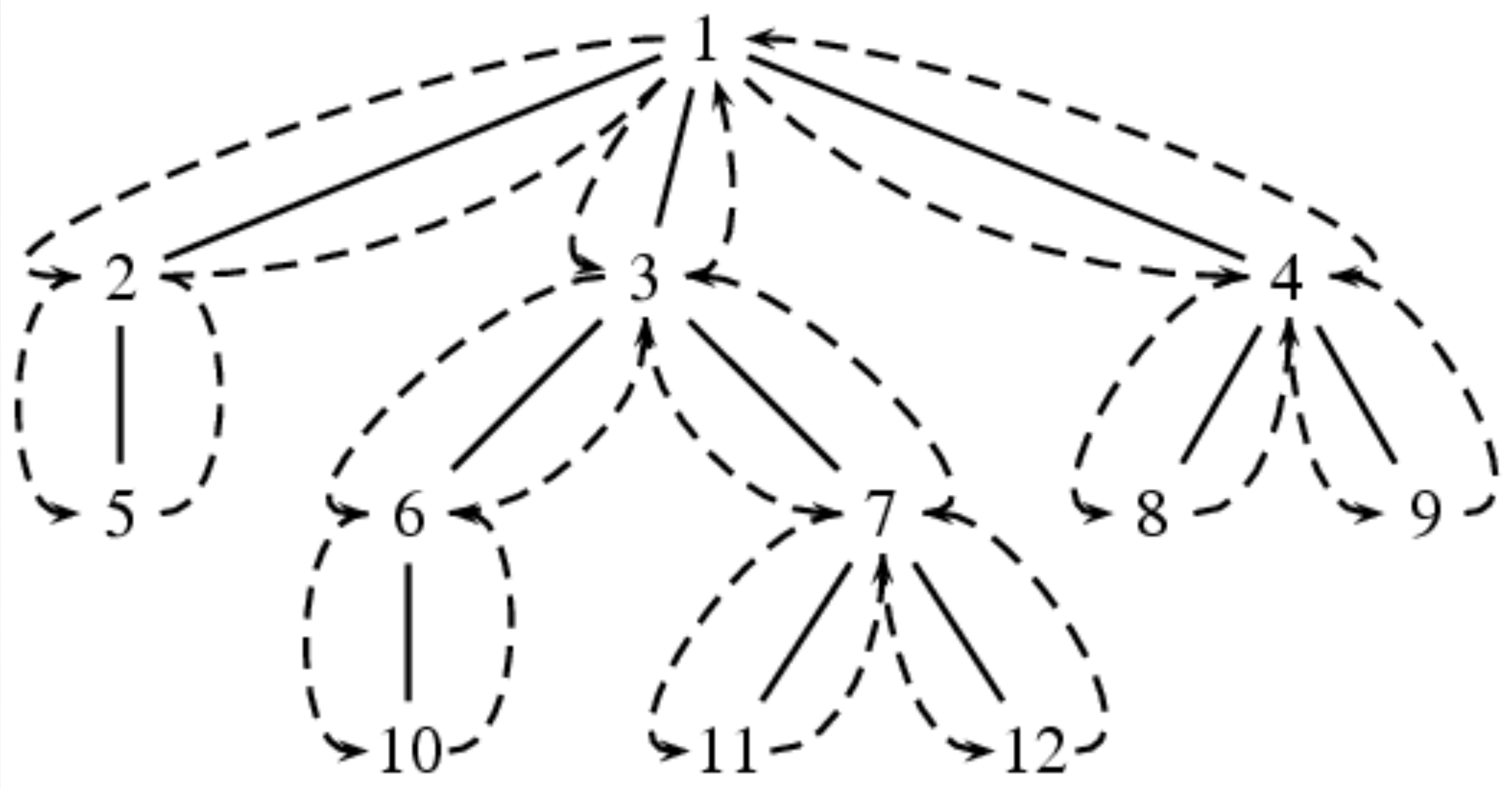
- pentru fiecare fiu `c` al lui `n`, executa `Postordine(c)`
- proceseaza `n`

*http://techfinite.blogspot.ro/2013/12/binary-tree-traversals-and-tree-iterations.html

INFORMATIA DESPRE STRAMOSI

- Parcurgerile in *preordine* si in *postordine* sunt utile pentru a obtine informatia despre stramosi.
- Sa presupunem ca:
- `post(`n`)` este pozitia unui nod *n* la o parcurgere in postordine a nodurilor unui arbore si
- `desc(`n`)` este numarul de stramosi proprii ai lui *n.*
- Atunci nodurile din subarborele care are ca radacina pe `n` sunt numerotate consecutiv de la `post(`n`)-desc(`n`)` pana la `post(`n`)`
- Pentru a verifica daca un nod *x* este un descendent al unui nod *y*: `post(`y`)-desc(`y`)` $\leq$ `post(`x`)` $\leq$ `post(`y`)`
- **Exercitiu:** Verificati relatia pentru preordine !

EXEMPLU DE PARCURGERI

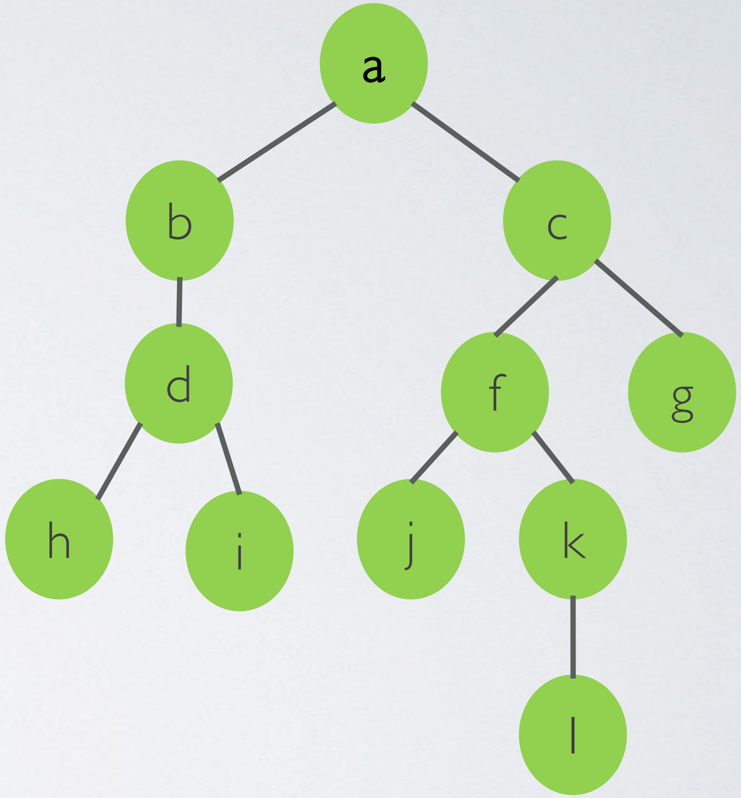


- preordine: 1, 2, 5, 3, 6, 10, 7, 11, 12, 4, 8, 9.
- postordine: 5, 2, 10, 6, 11, 12, 7, 3, 8, 9, 4, 1.
- inordine: 5, 2, 1, 10, 6, 3, 11, 7, 12, 8, 4, 9.

ARBORE BINAR

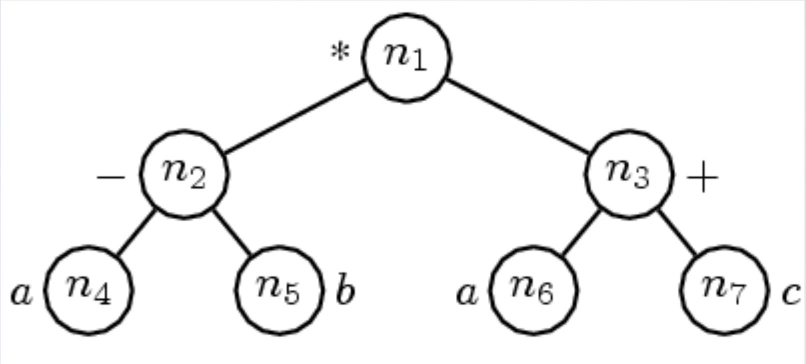
- Tip de data recursiv (ADT):
  - *NIL* (NULL)
  - nod, denumit radacina, impreuna cu doi arbori binari - subarborele stang (*left*) si subarborele drept (*right*)

- Structura: reprezentare inlantuita:
  - campurile cheie, *left (stang)*, *right(drept)*, optional si *p(parinte)*



ARBORI ETICHETATI SI ARBORI PENTRU EXPRESII

- Arborii binari se pot folosi pentru a reprezenta expresii precum:
  - Propozitii compuse
  - Combinatii de multimi
  - Expresii aritmetice



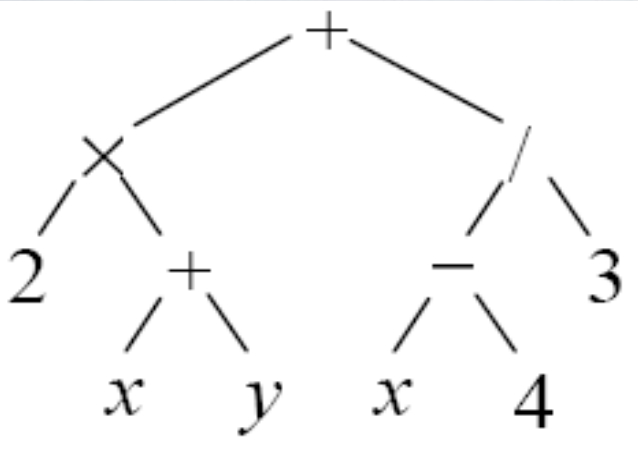
- **Arbore etichetat:** fiecare nod are asociata o eticheta sau o valoare
- Arbore pentru expresii aritmetice: nodurile interne reprezinta operatori si frunzele sunt operanzi
  - Operator binar: primul operand este pe frunza stanga iar al doilea operand este pe frunza dreapta
  - Operatori unari: un singur operand pe frunza dreapta

(a-b)*(a+c)

FORME PREFIX, POSTFIX, INFIX

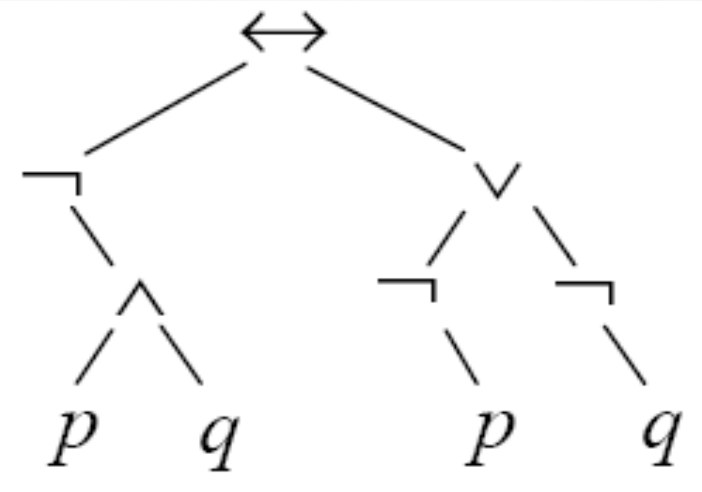
- Folosind arborii binari se pot obtine expresii aritmetice in trei reprezentari:
  - Forma infixata:
    - Parcurgere in inordine
    - Se folosesc parantezele pentru a evita ambiguitatile
  - Forma prefixata:
    - Parcurgere in preordine
    - Nu sunt necesare parantezele
  - Forma postfixa:
    - Se foloseste parcurgerea in postordine
    - Nu sunt necesare parantezele
- Expresiile in forma prefixata si postfixa sunt folosite in stiinta calculatoarelor.

EXEMPLU DE ARBORE PENTRU EXPRESII:



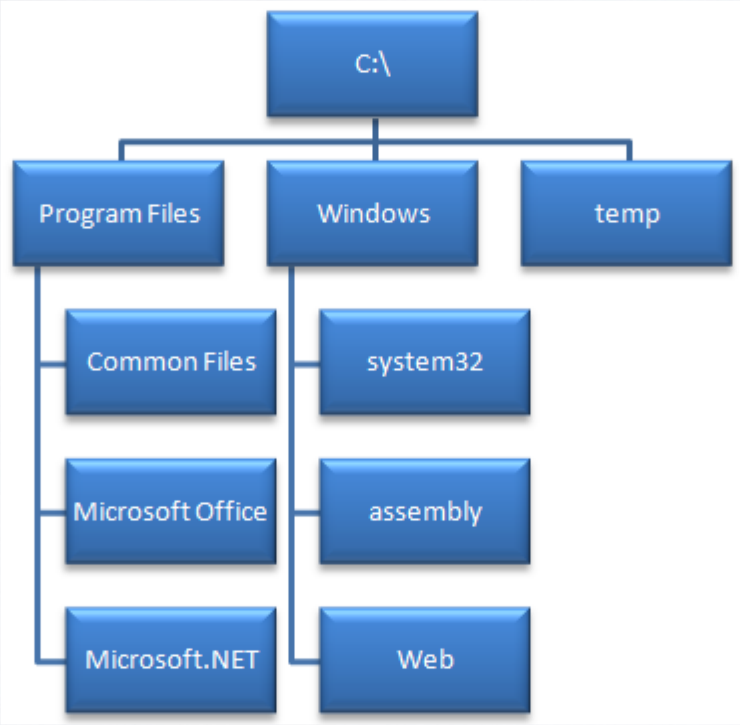
infix:	$(2\times(x+y))+((x-4)/3)$
prefix:	$+\times 2+x\ y\ /-x\ 4\ 3$
postfix:	$2\ x\ y+\times x\ 4-3\ /\ +$

infix:	$(\neg(p\wedge q))\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$
prefix:	$\leftrightarrow\neg\wedge p\ q\vee\neg p\neg q$
postfix:	$p\ q\wedge\neg p\neg q\neg\vee\leftrightarrow$



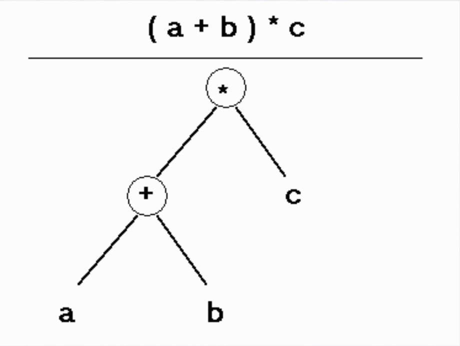
ARBORI OARECARE APLICATII

Fisierele unui system de operare



Sursa foto https://dvanderboom.wordpress.com

Evaluarea expresiilor:

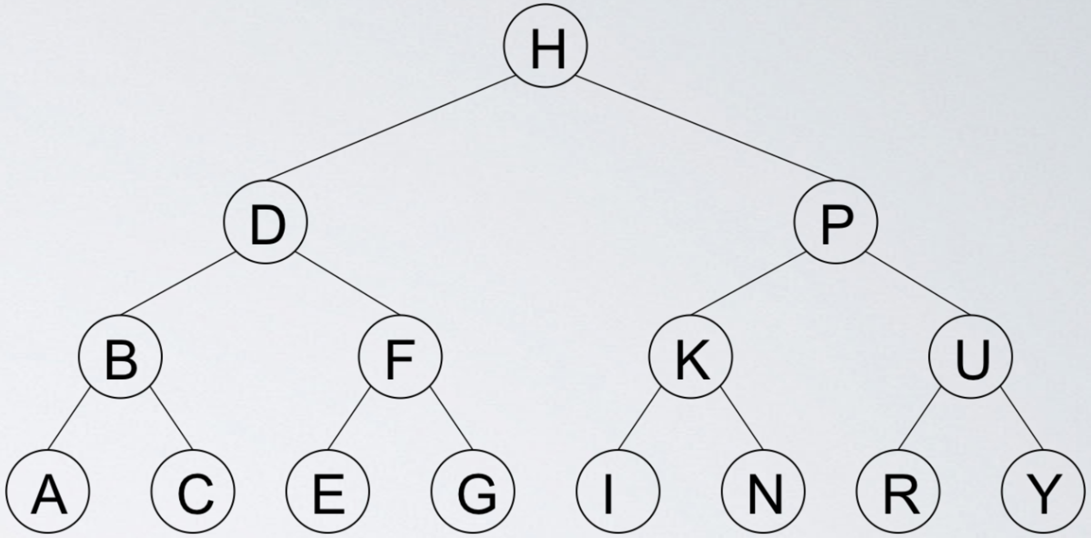


Compresia datelor (e.g. Huffman coding) – later in course

Natural language processing (e.g. syntax, dependency trees)

ARBORI BINARI DE CAUTARE

- Definitie:
  - arbore binar, chei care pot fi comparate (relatie de ordine)
  - nodurile cu chei mai mici decat valoarea *x* a cheii asociate unui anumit nod se gasesc in subarborele stang al acestuia
  - nodurile ale caror chei au valori mai mari decat *x* se gasesc in subarborele său drept
  - Subarborele stâng şi subarborele drept al oricărui nod sunt şi ei arbori binari de căutare.

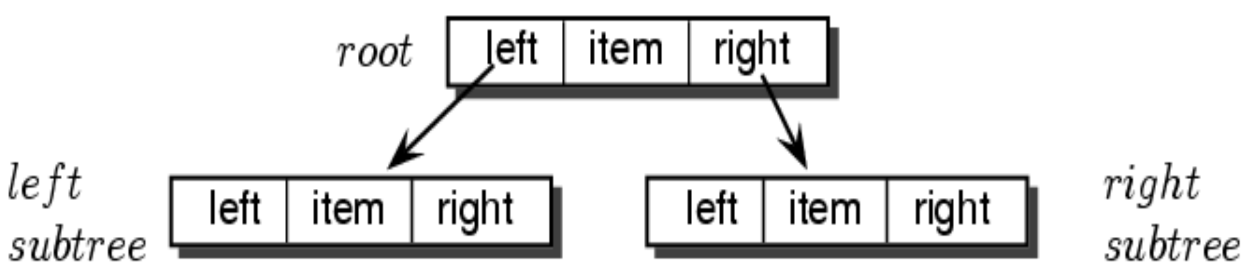


Operatii:

Tree-search (T, key)
Tree-insert(T, key)
Tree-delete(T, node)
traverse - inorder, preorder, portorder (T)
height(T), diameter(T), Tree-successor(node), Tree-predecessor(node), etc…

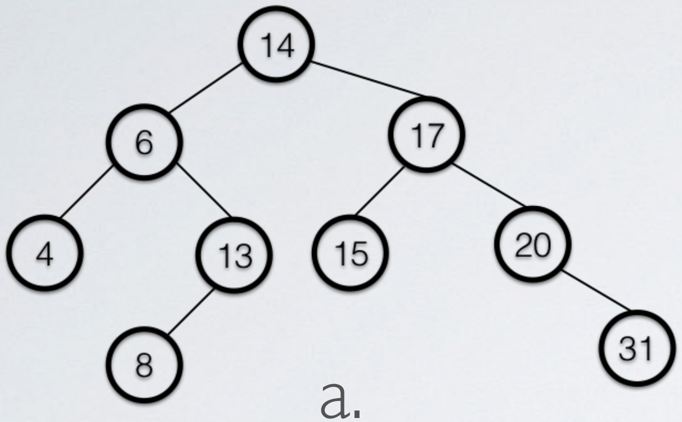
IMPLEMENTARE ARBORE BINAR DE CAUTARE

```c
typedef struct treeNode{
    int key;
    struct treeNode *left;
    struct treeNode *right;
    struct treeNode *parent; //optional
} TreeNode;
```

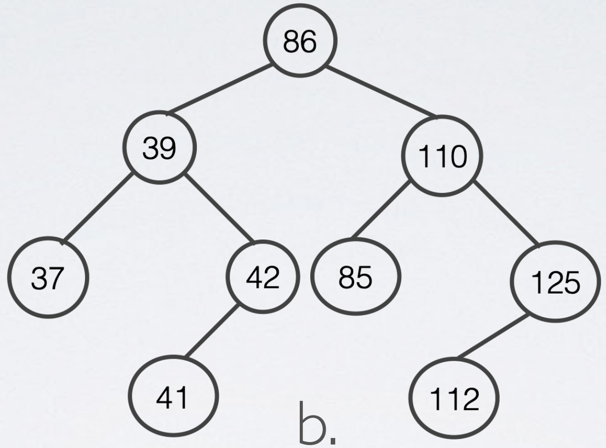


PAUSE AND EVALUATE …

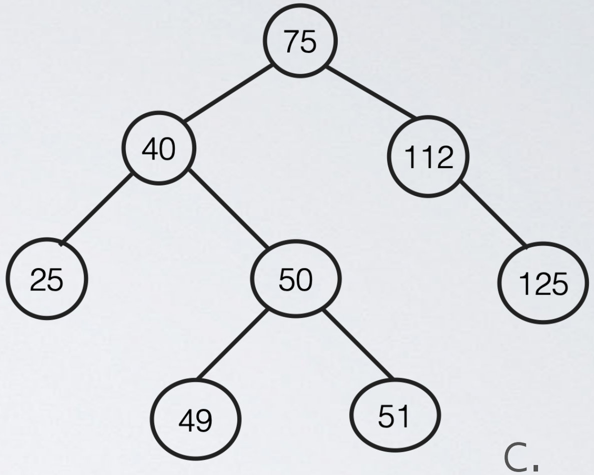
Care dintre arborii de mai jos NU este ABC?



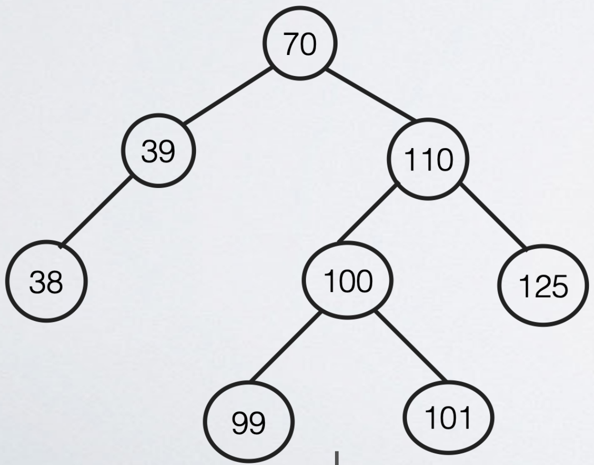
a.



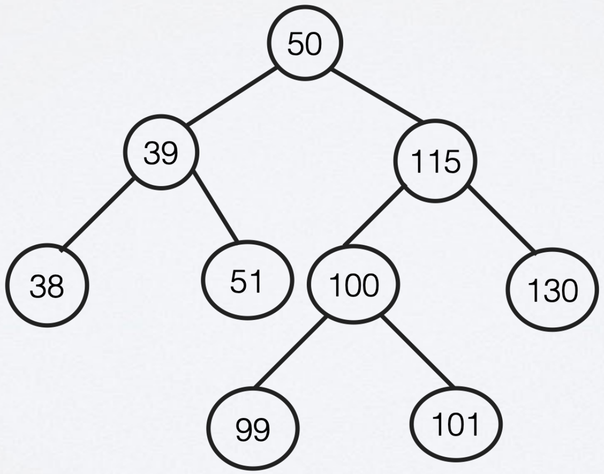
b.



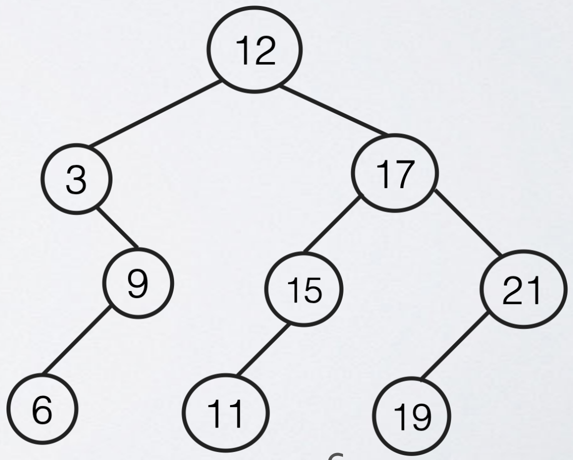
c.



d.



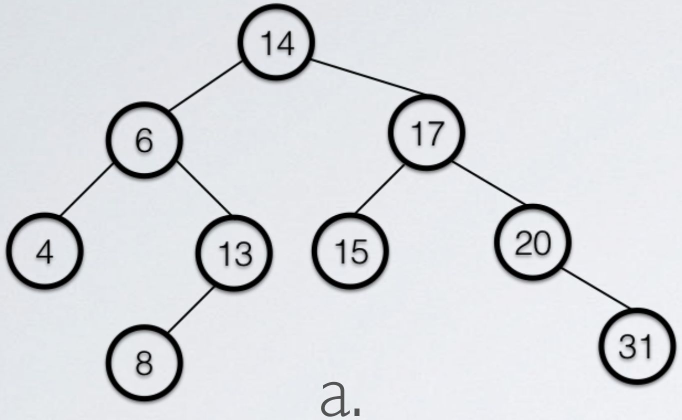
e.



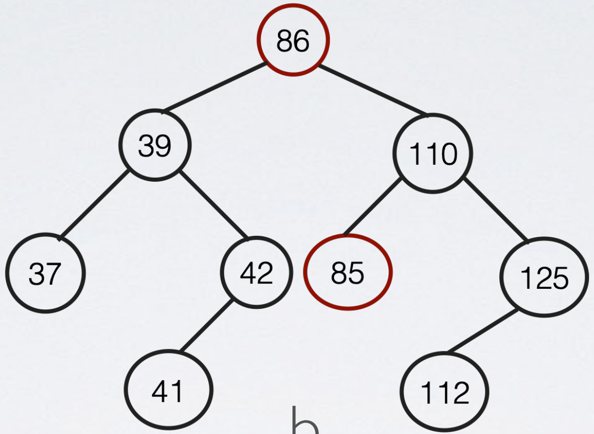
f.

PAUSE AND EVALUATE …

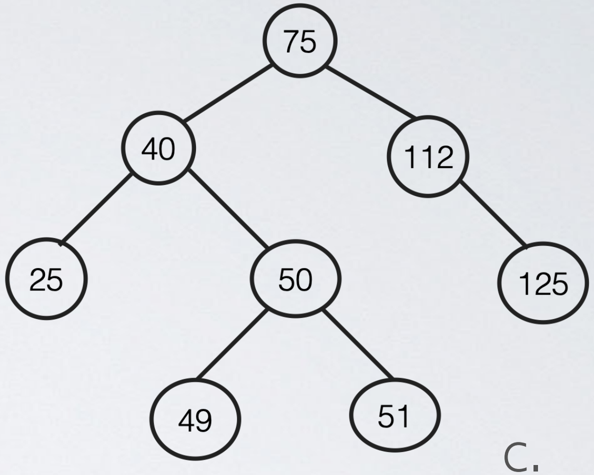
Care dintre arborii de mai jos NU este ABC?



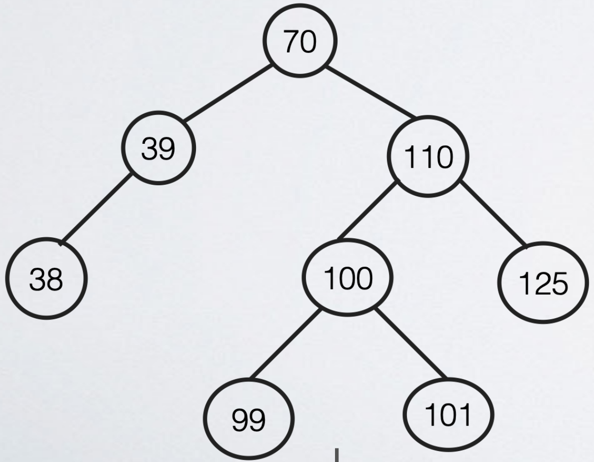
a.



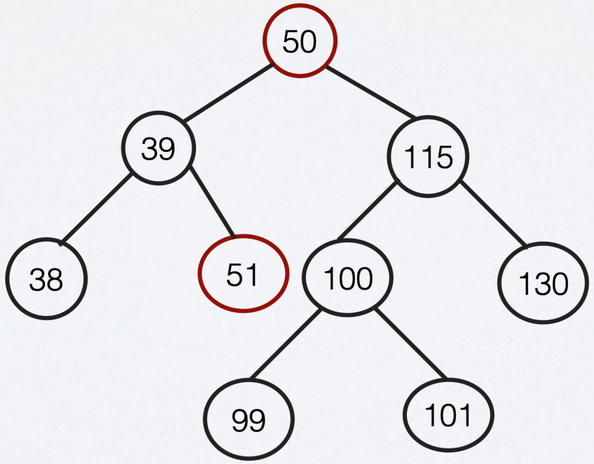
b.



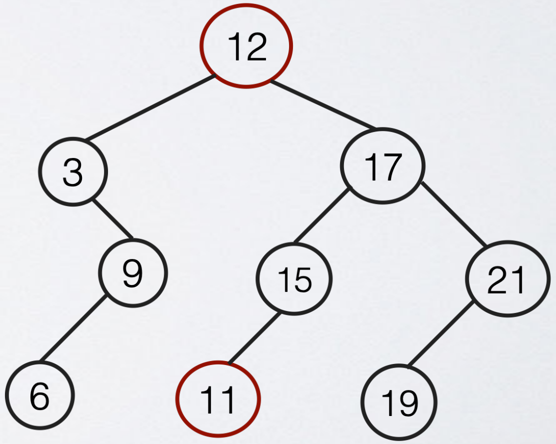
c.



d.



e.



f.

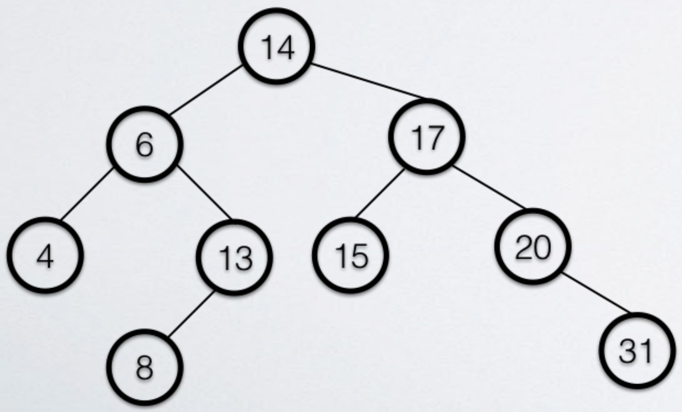
EXEMPLU PSEUDOCOD: PREORDINE

Varianta recursiva

```
preorder(node)
  if node = NIL then
     return
  visit(node)
  preorder(node.left)
  preorder(node.right)
```

Varianta iterativa

```
preorder(node)
s ← empty stack
if node ≠ NIL then
    s.push(node)
while not s.isEmpty()
    node ← s.pop()
    visit(node)
    if  node.right ≠ null then
      s.push(node.right)
    if node.left ≠ null then
      s.push(node.left)
```



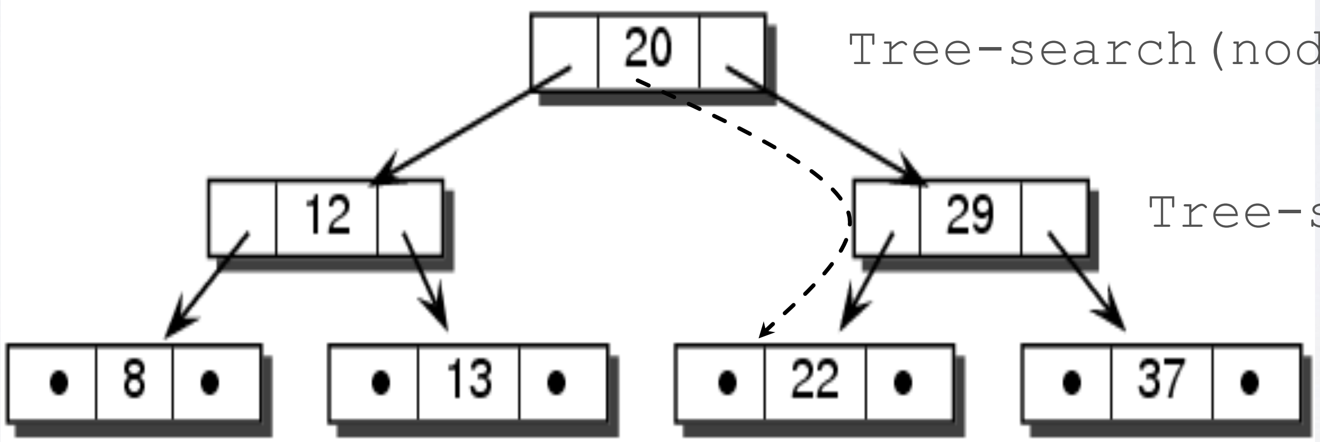
? Care sunt secventele generate de parcurgerile in:

- preordine
- inordine
- postordine

? Care este complexitatea unei parcurgeri?

OPERATIA DE CAUTARE

- E.g.
  - Tree-search(T, 22)



`Tree-search(node.right, key)`

`Tree-search(node.left, key)`

`return n->item;`

OPERATIA DE CAUTARE - ALGORITM

Varianta recursiva

```
Tree-search(node, key)
    if node = NIL then
        return NIL
    if node.key = key then
        return node
    else if key < node.key then
        return Tree-search(node.left, key)
    else
        return Tree-search(node.right, key)
```

Varianta iterativa

```
Tree-search(node, key)
    crt ← node
    while crt != NIL and crt.key != key do
        if key < crt.key then
            crt ← crt.left
        else
            crt ← crt.right
    return crt
```

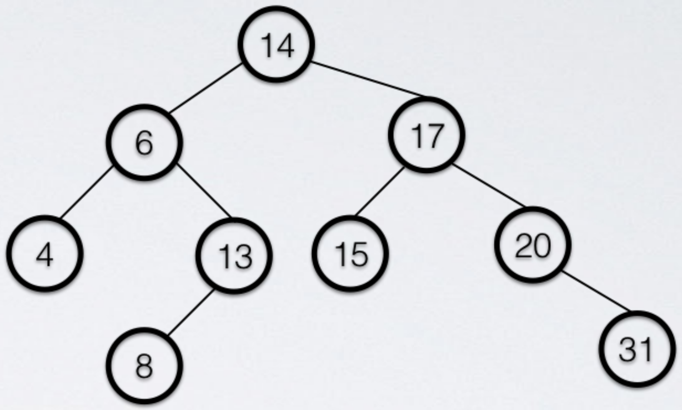
Performanta?

PERFORMANTA OPERATIEI DE CAUTARE

- Inaltime h
  - Noduri parcurse pe un drum de la radacina la o frunza
  - Avem nevoie de cel mult $h+1$ comparatii, deci $O(h)$
- caz favorabil
- caz mediu:
  - pp. arborele aproximativ echilibrat: $O(\log n)$
- cazul defavorabil: O(n)

ALTE OPERATII DE CAUTARE

- cautarea nodului minim
- cautarea nodului maxim
- cautarea predecesorului
- cautarea succesorului



E.g.
- succesorul nodului cu cheia 14 este nodul cu cheia 15
- succesorul nodului cu cheia 13 este nodul cu cheia 14

Inordine: 4, 6, 8, 13, 14, 15, 17, 20, 31

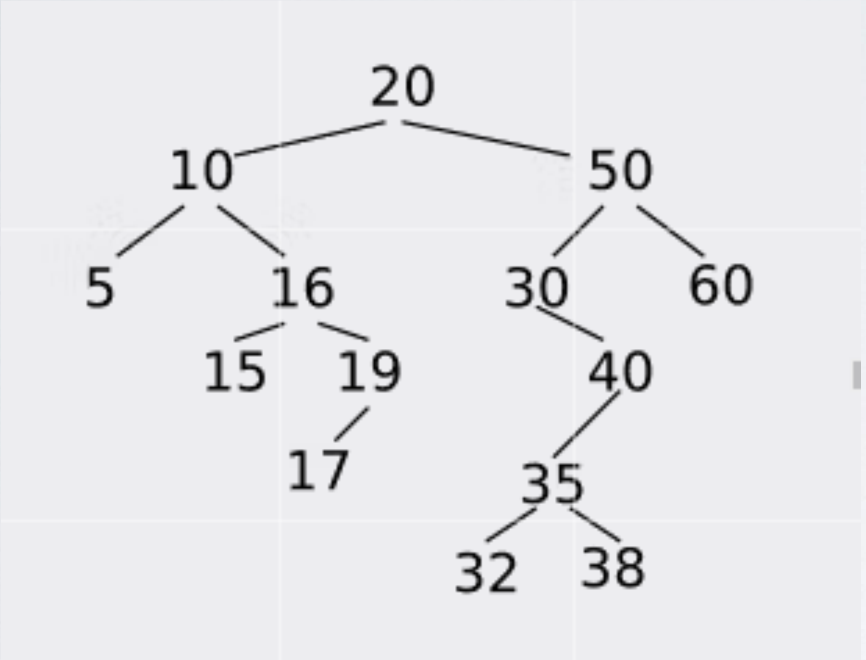
SUCCESORUL UNUI NOD

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

```
Procedure Tree-successor(x)
1: if x.right != NIL then return Tree-minimum(x.right)
2: y ← x.parent
3: while y != NIL and x == y.right do
4:                  x ← y
5:                  y ← y.parent
6: return y
```

```
Procedure Tree-minimum(x)
1: while x.left != NIL do
2:                  x ← x.left
3: return x
```

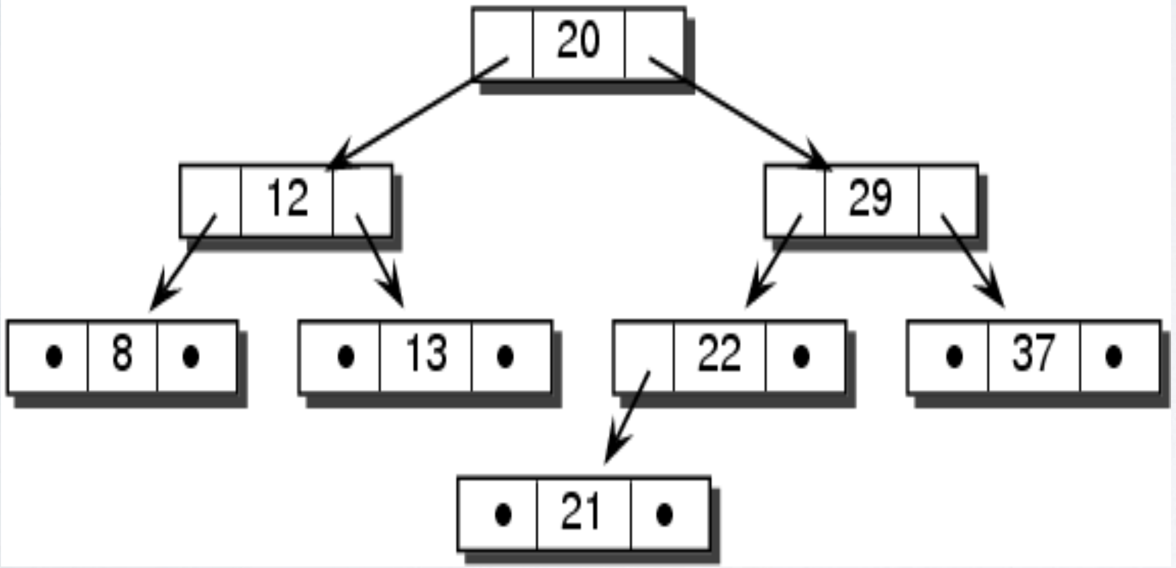
Pentru pseudocodul tuturor operatiilor de cautare:
see Th. Cormen, *Introduction to Algorithms*, 3rd edition, *pp. 295-298*



Care este succesorul nodului cu cheia 10 ?
Care este succesorul nodului cu cheia 19 ?
Care este succesorul nodului cu cheia 30 ?

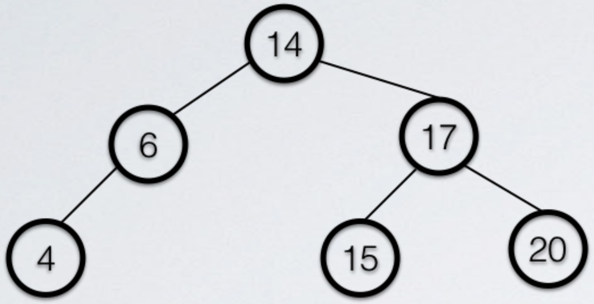
INSERAREA UNUI NOD

- Intotdeauna ca frunza !!!
- Se insereaza nodul cu cheia 21 in arbore

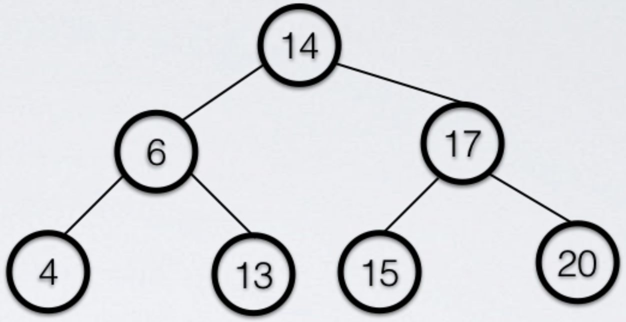


- Cautam pozitia corecta (intotdeauna frunza!)
- Cream nodul
- Il legam in arbore

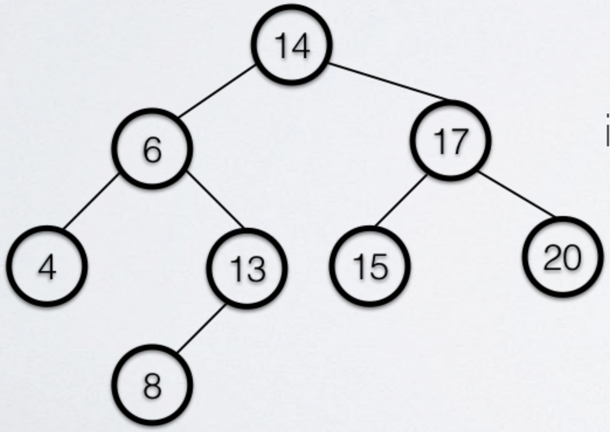
EXEMPLU INSERARE



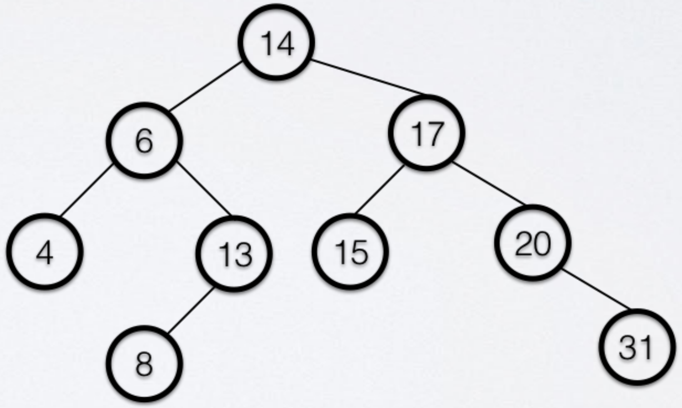
insert(13)



insert(8)



insert(31)



OPERATIA DE INSERARE - ALGORITM

Varianta recursiva

```
Tree-insert(node, key)
    if node = NIL then
          return createNode(key)
    else if key < node.key then
         node.left ← Tree-insert(node.left, key)
    else
         node.right ← Tree-insert(node.right, key)
    return node
```

Codul aproape identic cu codul de cautare!
Complexitate?

Varianta iterativa

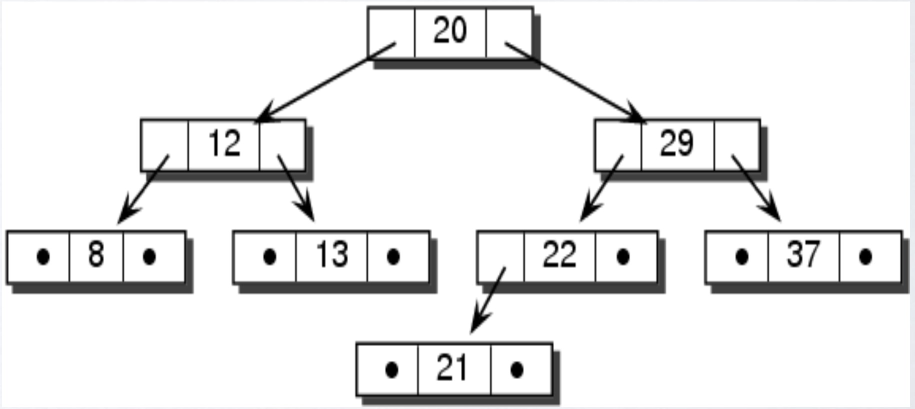
```
Tree-insert(node, key)
   crt ← node
   parent ← NIL
   dir ← NONE
   while crt != NIL do
        parent ← node
        if key < crt.key then
          crt ← crt.left
          dir ← LEFT
    else
          crt ← crt.right
          dir ← RIGHT
    if parent != NIL then
        if dir = LEFT then
          parent.left ← createNode(key)
        else
          parent.right ← createNode(key)
    else
          node ← createNode(key)
```

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

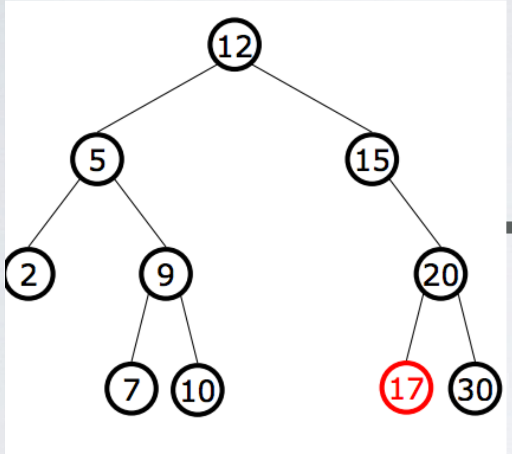
STERGEREA UNUI NOD

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

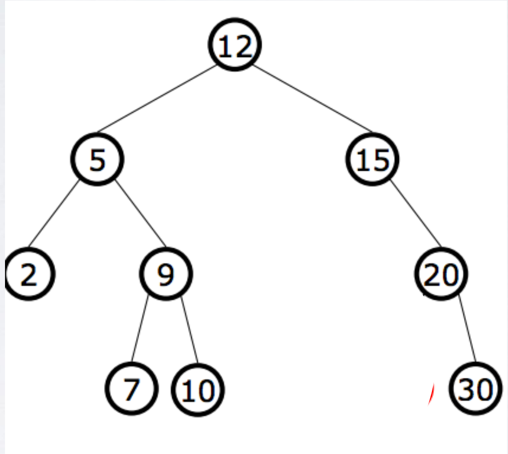
- Mai dificila decat inserarea!
- Idee:
  - se cauta nodul de sters
  - se elimina din structura
  - se reface proprietatea de arbore binar de cautare
- Cazuri pentru stergere:
  1. Nod terminal (frunza)
  2. Nod cu un singur fiu
  3. Nod cu doi fii
- Exemplu:
  1. Stergeti 8, 13, 21 sau 37
  2. Stergeti 22
  3. Stergeti12, 20 sau 29

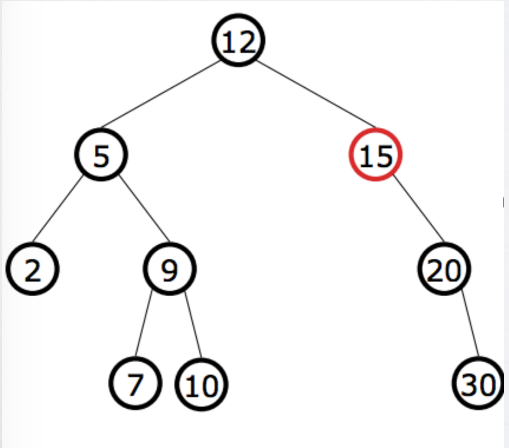


EXEMPLU STERGERE: CAZURI 1&2

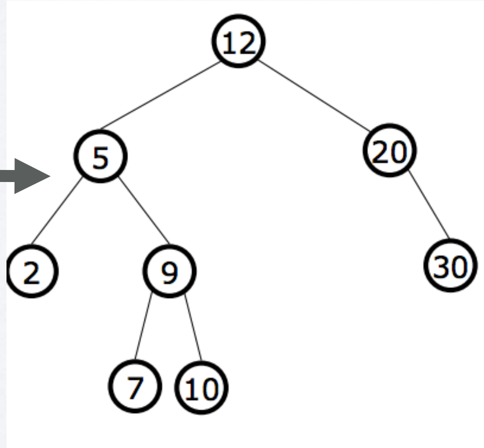


delete(17)
Nod terminal

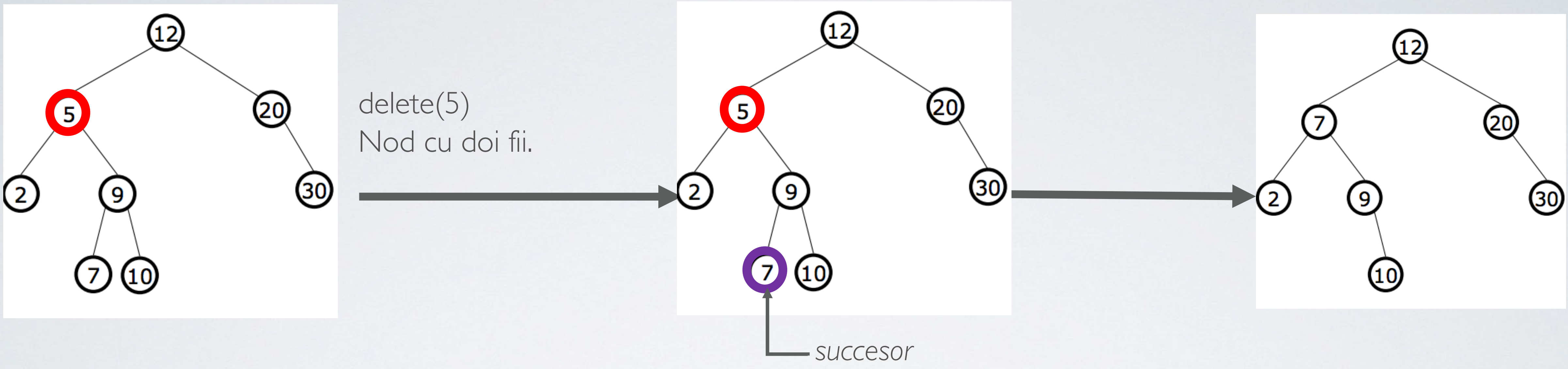




delete(15)
Nod cu un singur fiu.



EXEMPLU STERGERE: CAZUL 3



Cum putem pastra proprietatea de ABC?

Inlocuim cu o valoare intre cei 2 copii!
- succesorul: findMin(node.right)
- predecesorul: findMax(node.left)

FUNCTIA DE STERGERE: CAZURI REVIZITATE

Caz 1 – nodul de sters (z) nu are copii – il eliminam, si inlocuim legatura parintelui spre el sa pointeze NIL.
Caz 2 – nodul *z* are 1 copil – „urcam" acel copil in arbore, modificand legatura parintelui lui *z* sa pointeze catre copilul lui *z*.
Caz 3 – nodul z are 2 copii – gasim *y*, succesorul lui *z* (care sigur se gaseste in subarborele drept al lui *z*), si inlocuim pe *z* cu *y* in arbore. Restul subarborelui drept al lui z devine noul subarbore drept al lui *y*, iar subarborele stang al lui *z* devine subarborele stang al lui *y*. Acest caz este mai dificil, pentru ca avem si situatia in care *y* este copilul drept al lui *z* (i.e. imediat dupa *z* in arborele initial).

Pentru pseudocod:
see Th. Cormen, *Introduction to Algorithms*, 3rd edition, *p. 295-298*, sau 2nd edition, *p. 229*

FUNCTIA DE STERGERE

z – nodul pe care vrem sa il stergem (nodul sters LOGIC)
y – nodul care se sterge FIZIC
x – nodul care ramane in arbore, in locul lui y (unicul copil ar lui y)

```
Procedure Delete-Node(T, z)
1:      if z.left = NIL or z.right = NIL then y ← z
2:      else y ← successor(z)
3:      if y.left != NIL then x = y.left
4:      else x = y.right
5:      if x != NIL then x.parent ← y.parent
6:      if y.parent = NIL then T.root ← x
7:      else if y==y.parent.left then y.parent.left ← x
8:   else y.parent.right ← x
9:      if y != z then z.key ← y.key
10:     return y
```

Liniile (1-2) stabilim cine e y

Liniile (3-4) stabilim cine e x

*Linia (5) se face leg***ătura de la nodul care ramane (x) in sus către parint**

*Liniile (6-8) se face legatura de la p***ărintele nodului** *care r***ămâne (x.parent) – în jos (către x)**

Linia (9) copiem cheia din nodul sters fizic (y) in nodul sters logic (z)

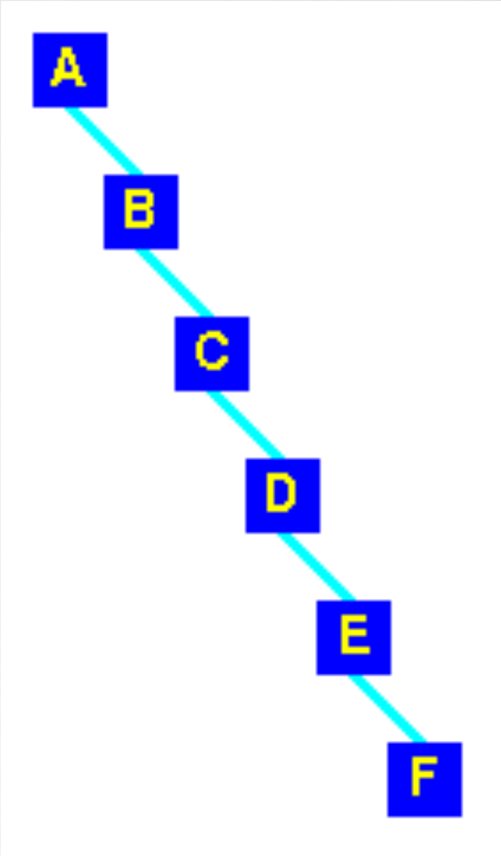
Linia (10) returnam nodul de sters FIZIC, pentru a putea elibera memoria

PERFORMANTA OPERATIILOR

- Cautare $c\,\mathrm{h}$
- Inserare $c\,\mathrm{h}$
- Stergere $c\,\mathrm{h}$
- $h = log\ n$? (cazul mediu, da)
- Aparent eficient!
- Sa se construiasca un arbore cu caracterele:

  A B C D E F

- Dezechilibrat - cazul defavorabil O(n)



COMPARAREA PERFORMANTEI

	Arrays	Linked List	Trees
	Simplu Inflexibil	Simplu Flexibil	Relativ simplu, Flexibil
Insert	O(1) O(n) ***inc sort***	O(1) ***sort -> no adv***	
Delete	O(n)	O(1) - ***any*** O(n) - ***specific***	
Search	O(n) O(logn) ***binary search***	O(n) ***(no bin search)***	O(log n)

PERFORMANTA OPERATIILOR

- Cum putem obtine garantia h ~ log n
  - constructia initiala
    - cheile ordonate (crescator, descrescator) ?
    - mediane?
    - inserari/stergeri ulterioare nu garanteaza mentinerea proprietatii
  - noduri inserate in ordine aleatoare
    - conditie de echilibru, care
      - asigura inaltimea e O(log n)
      - usor de intretinut la inserari/stergeri
- in curand….

APLICATII PRACTICE ALE ARBORILOR BINARI DE CAUTARE

- Randare 3D
- Indexarea bazelor de date

… *dar cu garantii asupra timpilor operatiilor (i.e. ABC echilibrati)*

REFERINTE

- Th. Cormen et al – "Introduction to Algorithms", 3rd ed: sect. 10.4, ch. 12
- S. Skiena – "The Algorithm Design Manual": sect 3.4