MN-2.

(1) a) Să se determine polinomul de grad minim P care verifică condițiile de interpolare:
$$P^{(i)}(\alpha) = f^{(i)}(\alpha) \quad i=\overline{0,n} \quad \alpha \in [a,b],\ f\in C^{(n)}_{[a,b]}$$

b) Dacă $f \in C^{(n+1)}[a,b]$ și $\|f^{(n+1)}\|_\infty \le M$ să se găsească o evaluare a restului.

(2) a) $f\in C^{(n+2)}_{[a,b]}$. Să se găsească polinomul de grad minim P care verifică condițiile de interpolare
$$f^{(k)}(a) = P^{(k)}(a),\quad k=\overline{0,n}$$
$$f(b) = P(b)$$
$$f'(b) = P'(b)$$

b) Dacă $\|f^{(n+2)}\| \le M$ să se găsească o evaluare a restului.

(3) Fiind date numerele $y_k, z_k \in \mathbb{R}$, $k=\overline{0,n}$ să se găsească polinomul P de grad minim pentru care
$$P^{(k)}(a) = y_k \quad k=\overline{0,n}$$
$$P^{(k)}(b) = z_k$$

(4) a) Să se arate că
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{n^k}\binom{n}{k}\left[0,\frac{1}{n},\dots,\frac{k}{n};f\right]x^k$$
($f:[0,1]\to\mathbb{R}$).

b) Găsiți o reprezentare asemănătoare cu cea de la a) pentru $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)$ $(0<\alpha<\beta)$.

(5) Să se scrie expresia polinomului lui Cebîșev, de grad n, corespunzător intervalului $[a,b]$ și având coeficientul lui x^n egal cu 1.

(6) Să se rezolve următoarele ecuații

a) $H(f;-1,-1,1,1,2,2)(x) = f(x)$, $f(x) = x^7 - x^5 + 1$

b) $H(f;1,1,2,2,3,3,0,0)(x) = f(x)$, $f(x) = x^{10}$.

$H(f;\dots)(x)$ fiind polinomul lui Hermite de grad minim care interpolează funcția și derivata