

OTUS: Basic ML

Модуль 4. Теоретический минимум для ML: линейная алгебра, начала мат.анализа и оптимизации, статистика.

1 Линейная алгебра

1. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & -4 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & -5 & 2 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Посчитайте матрицу $D = A^T C - 2A^T B^T$. Приведите полную последовательность вычислений.

2. Дано выражение:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ -1 & y & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -6 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & v & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдите значения x , y , z и v , при которых выражение верно.

3. Укажите те значения параметров p и q , при которых ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & p \\ 5 & 10 & q \end{pmatrix}$ равен единице.
4. Относительно канонического (стандартного) базиса в \mathbb{R}^2 даны три вектора $a_1 = (2, -5)^T$, $a_2 = (-1, 3)^T$, и $x = (1, -4)^T$. Примите векторы a_1 , a_2 за новый базис B , предварительно проверив, что они линейно независимы.
- (a) Найдите координаты $[x]_B$ вектора x в новом базисе.
- (b) Предположим, что координаты вектора y в базисе B заданы $[y]_B = (1, 1)^T$. Найдите координаты вектора y в стандартном базисе.
5. Исследовательское задание: малоранговая аппроксимация матрицы. Сгенерируйте случайную квадратную матрицу $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 100$. Выполните сингулярное разложение этой матрицы, и получите три матрицы: U , S , V^T . Выполняйте аппроксимацию матрицы A с рангом r , меняя его значение, например, от 2 до n :

$$\tilde{A} = U[:, :r] S[:, :r] V^T[:, :r],$$

и каждый раз считайте ошибку аппроксимации (как восстановленная матрица отличается от исходной):

$$E(r) = \|A - \tilde{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - \tilde{a}_{ij})^2}.$$

Используя библиотеку *matplotlib*, постройте график зависимости ошибки аппроксимации матрицы от ранга r .

2 Начала мат.анализа и оптимизации

1. Посчитайте матрицу Гессе следующей функции:

$$f(x) = x_1^3 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Найдите критические точки x_c , такие что $\nabla f(x_c) = 0$.

2. Проверьте, что функция $f = \ln(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})$ удовлетворяет уравнению:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{1}{2}.$$

3. Предположим, задана функция $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y, z) = (x + y + z, xyz)^\top.$$

Найдите матрицу Якоби J_f функции f , и её численное значение в точке $v = (1, 2, 3)^\top$.

4. (Куб евклидовой нормы). Найти первый и второй дифференциалы $df(x)$ и $d^2f(x)$, а также градиент $\nabla f(x)$ и гессиан $\nabla^2 f(x)$ функции:

$$f(x) = \frac{1}{3} \|x\|_2^3, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

5. (Евклидова норма). Найдите первый дифференциал $df(x)$, и градиент $\nabla f(x)$ функции:

$$f(x) = \|x\|_2, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

6. Найдите первый дифференциал $df(x)$ и градиент $\nabla f(x)$ функции:

$$f(x) = \|Ax\|_2, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

7. Найдите первый дифференциал $df(x)$ и градиент $\nabla f(x)$ функции:

$$f(x) = -e^{-x^\top x}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$