多変数複素解析シリーズ

とと

2025 年 6 月 12 日

目次

1 関数解析からの準備

1.1 隆起関数

Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする.

定義 1.1.1. 関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ に対して，その台 $\operatorname{supp} f$ を

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}} \qquad (\text{右辺のバーは } \Omega \text{ における閉包})$$

と定める.

定義 1.1.2.
- Ω 上の C^∞ 級複素数値関数全体からなる集合を $C^\infty(\Omega)$ とかく.
- 関数空間 $C_0^\infty(\Omega)$ を

$$C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp} f \text{ はコンパクト }\}$$

と定める.

定義から $\operatorname{supp} f$ は Ω の閉集合であるが，$\mathbb{R}^n$ の閉集合とは限らないことに注意する．たとえば $\Omega = (0,1)$ 上の定数関数 $f(x) = 1$ を考えれば，$\operatorname{supp} f = \overline{\Omega} = \Omega = (-1,1)$ である.

定理 1.1.3. Ω 内の任意のコンパクト集合 K に対して，関数 $g \in C_0^\infty(\Omega, [0,1])$ であって，K 上で恒等的に 1 をとるようなものが存在する.

証明. 各点 $x \in K$ に対して実数 $r_x > 0$ を $B(x; 2r_x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < 2r_x\} \subset \Omega$ をみたすようにとる.

そして K の開被覆 $\{B(x;r_x)\}_{x\in K}$ を考える．K はコンパクトなので，有限個の点 $x_1,x_2,\dots,x_s\in K$ が存在して $K\subset\bigcup_{j=1}^s B(x_j;r_{x_j})$ となる．動画で紹介している関数 ρ_r, F を用いて，

$$g(x)=F\left(\sum_{j=1}^s \rho_{r_{x_j}}(x-x_j)\right)$$

とおくと，$g|_K=1$，$g\in C^\infty(\Omega)$ が分かる．最後に $g\in C_0^\infty(\Omega)$ を確認しよう．そのためには $\operatorname{supp} g$ が $\mathbb{R}^n$ における有界閉集合であることを確認すればよい (先ほども注意したが，$\operatorname{supp} g$ が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であることはきちんと確認しなければならない)．$r=\min_j r_{x_j}$ とおく．

$$A=\{x\in\mathbb{R}^n \mid d(x,\complement\Omega)\geqslant r/3\}\subset\Omega$$

とおけば，$d(x,\complement\Omega)$ は連続だから A は $\mathbb{R}^n$ の閉集合で，$\operatorname{supp} g\subset A$ である (補集合にうつれば容易にわかる)．相対位相の定義から $\operatorname{supp} g=\Omega\cap F$ となる $\mathbb{R}^n$ の閉集合 F が存在するが，$\operatorname{supp} g\subset A(\subset\Omega)$ より $\operatorname{supp} g=A\cap F$ であり，したがってこれは $\mathbb{R}^n$ の閉集合であると分かる．さらに $R=\max_j 2r_{x_j}$ とおけば，$\operatorname{supp} g\subset B(0;R+\max_K|x|)$ が成り立つから，$\operatorname{supp} g$ は $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合 (すなわちコンパクト集合) である． □

ユークリッド空間の開集合に対する次の補題は認めることとする．証明はたとえば杉浦光夫『解析入門 II』定理 VII.2.4 の証明中をみよ．

補題 1.1.4. 任意の開集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ に対して，コンパクト集合の増大列 (K_n) で

$$K_n\subset K_{n+1}^\circ,\qquad \Omega=\bigcup_{n=1}^\infty K_n$$

をみたすものが存在する．

定理 1.1.3 と補題 1.1.4 を組み合わせることで次を得る．

> **定理 1.1.5** (滑らかな 1 の近似)．任意の開集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ に対して，$C_0^\infty(\Omega,[0,1])$ の関数列 (ρ_n) であって，
>
> $$\forall K\subset\Omega:\mathrm{compact},\ \exists n\in\mathbb{N},\ \rho_n|K=1$$
>
> をみたし，$\rho_n\nearrow 1$ (各点収束) となるものが存在する．

証明. 補題 1.1.4 のコンパクト集合の増大列 $\{K_n\}$ をとる．$K_n\subset K_{n+1}^\circ$ に対して定理 1.1.3 を用いて，関数 $g_n\in C_0^\infty(K_{n+1}^\circ)$ で $g_n|_{K_n}=1$ となるものをとる．g_n を K_{n+1}° の外にゼロ拡張して $C_0^\infty(\Omega)$ の元と考えることで結論を得る． □

1.2 p 乗可積分関数

測度論や Lebesgue 積分については既知とする．しかし，Lebesgue 積分を知らない場合であっても次のことを知っているだけである程度は分かるようになる (と思っている)．すなわち，有界区間上の有界関数に対し

ては，それが Riemann 可積分であれば Lebesgue 可積分でもあり，両者の値は一致する (谷島賢二『関数解析とルベーグ積分』定理 4.15).

定義 1.2.1. $\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{C} \,\middle|\, f \text{ は可測で } \int_\Omega |f(x)|^p d\lambda(x) \text{ は有限} \right\}$ とおく.

$f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ に対して，

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p}$$

と定める．このとき，次の命題が成り立つ.

命題 1.2.2. $f_n \in \mathcal{L}^p(\Omega),\ n = 1, 2, \ldots$ が $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \to 0\ (m, n \to \infty)$ をみたすなら，$f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ が存在して $\|f - f_n\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \to 0\ (n \to \infty)$ が成り立つ.

証明. 谷島賢二『関数解析とルベーグ積分』の定理 10.4 である. □

我々が今回注目するのは $\mathcal{L}^p(\Omega)$ の元は $C_0^\infty(\Omega)$ の元で近似できるという事実である．そのために次の “平行移動の L^p 連続性” と呼ばれる定理を用いる.

定理 1.2.3. $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ とする．次が成り立つ.

$$\lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p d\lambda(x) = 0$$

証明. G. B. Folland “Real Analysis” の Proposition 8.5 である. □

命題 1.2.4. $\chi \in C_0^\infty(B(0;1))$ を，$\chi = \chi(|x|) \geqslant 0$，$\int_{B(0;1)} \chi(x) dx = 1$ をみたす関数とする．$f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$f_{(\delta)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \frac{1}{\delta^n} \chi\left(\frac{x-y}{\delta}\right) dy$$

とおく．このとき $f_{(\delta)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ であって，$\|f - f_{(\delta)}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \to 0\ (\delta \to 0)$ である.

証明. YouTube の方では紹介した $\rho_{1/2}$ を用いて

$$\chi(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^\ltimes} \rho_{1/2}(|x|) d\lambda(x) \right)^{-1} \rho_{1/2}(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

とおけば，条件を満たすような χ の存在が分かる．積分が有限であることは，Hörder の不等式により

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| f(y) \cdot \frac{1}{\delta^n} \chi\left(\frac{x-y}{\delta}\right) \right| dy \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p d\lambda(y) \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\delta^{nq}} \chi\left(\frac{x-y}{\delta}\right)^q d\lambda(y) \right)^{1/q} = C\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

となることから分かる．次に C^∞ 級であることを確認しよう．微分は局所的だから，$x_0 \in \mathbb{R}^n$ を固定して，$|x - x_0| < 1$ なる x について考える．任意の多重指数 α に対して

$$\operatorname{supp} \partial_x^\alpha \chi\left(\frac{x-y}{\delta}\right) \subset \{ y \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| < \delta \}$$

である．$y \in \operatorname{supp} \partial_x^\alpha \chi((x-y)/\delta)$ のとき $|y-x_0| < 1+\delta$ であって，パラメータ x は平行移動だから，x によらない定数 M が存在して

$$\left|\partial_x^\alpha \chi\left(\frac{x-y}{\delta}\right)\right| \leq M \cdot 1_{B(x_0;1+\delta)}(y)$$

をみたす．f は $\mathcal{L}^1(B(x_0;1+\delta))$ の関数だから，これで項別微分の仮定をみたすと分かる．よって

$$\partial^\alpha f_{(\delta)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \frac{1}{\delta^n} \partial_x^\alpha \chi\left(\frac{x-y}{\delta}\right) d\lambda(y)$$

であり，特に $f_{(\delta)} \in C^\infty$ である．最後に $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$ に関して収束することをみよう．任意に $\varepsilon > 0$ をとる．Hörder の不等式により

$$|f(x) - f_{(\delta)}(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x-y)) \cdot \frac{1}{\delta^n} \chi\left(\frac{y}{\delta}\right) d\lambda(y)\right| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|^p \frac{1}{\delta^n} \chi\left(\frac{y}{\delta}\right) d\lambda(y)\right)^{1/p}$$

である．両辺 p 乗して $\mathbb{R}^n$ 上で積分すると

$$\|f - f_{(\delta)}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|^p \frac{1}{\delta^n} \chi\left(\frac{y}{\delta}\right) d\lambda(y)\right) d\lambda(x)$$

となるが，被積分が非負であるから (Fubini-)Tonelli の定理より

$$(\text{右辺}) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\delta^n} \chi\left(\frac{y}{\delta}\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|^p d\lambda(x)\right) d\lambda(y)$$

となる．y に関する積分は $|y| < \delta$ の部分で考えればよく，δ を小さくとれば平行移動の L^p 連続性より

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|^p d\lambda(x) < \varepsilon^p, \quad |y| < \delta$$

となる．そこでこのとき，$\|f - f_{(\delta)}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$ である． □

注意. $\operatorname{supp} f_{(\delta)} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, \operatorname{supp} f) \leq \delta\}$ である．特に，$f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ がコンパクト台をもち，$\operatorname{supp} f$ と $\partial\Omega$ の距離が δ より大きいとき，前回の定理 1.1.3 と同様の議論で $f_{(\delta)} \in C_0^\infty(\Omega)$ が分かる (零拡張や制限を自由にしている)．

> **定理 1.2.5.** 任意の $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ に対して $f_j \in C_0^\infty(\Omega)$, $j = 1, 2, \ldots$ で
>
> $$\|f - f_j\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \to 0 \ (j \to \infty)$$
>
> をみたすものが存在する．

証明. 定理 1.1.5 の 1 の近似 ρ_n, $n = 1, 2, \ldots$ を思い出す．$|f - \rho_n f|^p \leq 2^p |f|^p$ であるから，Lebesgue の優収束定理により $\|f - \rho_n f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \to 0$ $(n \to \infty)$ を得る．よって Ω にコンパクト台をもつ $\mathcal{L}^p(\Omega)$ の関数を $f_j \in C_0^\infty(\Omega)$ で近似すれば十分である．しかしこれは命題 1.2.4 とその後の注意から得られる． □