

# Particule chargée dans une champ électromagnétique - miroir magnétique

Antoine Comerre, Linley Vion  
[antoine.comerre@epfl.ch](mailto:antoine.comerre@epfl.ch), [linley.vion@epfl.ch](mailto:linley.vion@epfl.ch)

2 novembre 2022

## Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>  | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Approche analytique</b>   | <b>2</b>  |
| <b>3</b> | <b>Simulations et Analyse</b>  | <b>5</b>  |
| 3.1      | Cas sans champ électrique, avec un champ magnétique uniforme . . . . .     | 5         |
| 3.2      | Cas avec champ électrique et un champ magnétique, tous uniformes . . . . . | 8         |
| 3.3      | Champ magnétique non uniforme sans champ électrique . . . . .              | 10        |
| 3.4      | Cas d'un champ magnétique non uniforme et curviligne (miroir magnétique)   | 13        |
| 3.5      | Etude de l'intégrateur Boris Bunemann . . . . .                            | 17        |
| <b>4</b> | <b>Conclusion</b>  | <b>19</b> |
| <b>5</b> | <b>Annexe</b>  | <b>19</b> |
| 5.1      | Données du problème : . . . . .  | 19        |
| 5.2      | Développement des calculs . . . . .  | 20        |
| 5.2.1    | Calcul de la composante du champ magnétique selon x . . . . .              | 20        |

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 5.2.2 | Équations différentielles du mouvement . . . . .                              | 20 |
| 5.2.3 | Énergie mécanique et conservation . . . . .                                   | 21 |
| 5.2.4 | Moment magnétique de la particule . . . . .                                   | 22 |
| 5.2.5 | Résolution des équations du mouvement avec et sans champ électrique . . . . . | 22 |

# 1 Introduction

Le Grand Collisionneur de Hadron connu sous l'acronyme LHC envoie des protons et des ions lourds à des vitesses proches de celle de la lumière pour entraîner de collisions à hautes énergies qui permettent de détecter de nouvelles particules[1]. Les hadrons sont placés dans un tunnel circulaire long de plusieurs kilomètres et prennent de la vitesse en étant accélérés par des aimants. Un champ magnétique couplé avec un champ électrique est alors adapté pour maintenir la rotation de ces particules.

Dans un but similaire de compréhension du fonctionnement d'un proton dans le cadre de la physique des particules, cette analyse numérique vise à étudier le mouvement d'un proton en fonction de l'intensité des champs magnétiques et électriques présents. Quatre intégrateurs seront utilisés : Runge-Kutta à l'ordre 2, Euler Implicite, Explicite et Semi-Implicite. Leur précision sera analysée et leurs résultats discutés afin d'obtenir une explication globale du phénomène et de ses éventuelles paradoxe ou singularités.

# 2 Approche analytique

Soit  $\vec{B}$  le champ magnétique et  $\vec{E}$  le champ électrique uniforme (donnés explicitement en annexe 5.1). Le potentiel et la force gravitationnelle seront considérés comme négligeable pour le reste du problème. L'absence de monopoles magnétiques est une condition à satisfaire. Mathématiquement, cela se traduit par le fait que la divergence du champ magnétique est nulle :

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{1}$$

Cette condition permet d'obtenir une équation (annexe 5.2.1) pour  $B_x(x, z)$  en utilisant comme condition initiale que le champ est nulle à l'origine, mais surtout à  $x = 0$  (i.e  $B_x(0, y, z) = 0$  pour tout  $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ ) :

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial}{\partial x} B_x(x, z) + \frac{\partial}{\partial z} \left( B_0 + B_1 \frac{x}{L} + B_2 \cos(kz) \right) \implies B_x(x, z) = kx B_2 \cos(kz) \tag{2}$$

Après avoir calculé  $B_x(x, z)$ , il reste à résoudre le système d'équations donnée par  $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = d\mathbf{y}/dt$  à partir du vecteur  $\mathbf{y}$  décrivant la position et la vitesse de la particule étudiée :

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (3)$$

En exprimant l'accélération à partir de l'équation de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \quad (4)$$

et en ne considérant que la force de Lorentz  $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ , on obtient l'accélération suivante :

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q}{m} v_y B_z \\ \frac{q}{m} (E_0 + v_z B_x - v_x B_z) \\ -\frac{q}{m} v_y B_x \end{pmatrix} \quad (5)$$

avec  $B_z = B_0 + B_1 x/L + B_2 \cos(kz)$  et  $B_x = kx B_2 \cos(kz)$  et  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ . L'expression finale obtenue est :

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \frac{q}{m} v_y B_z \\ \frac{q}{m} (E_0 + v_z B_x - v_x B_z) \\ -\frac{q}{m} v_y B_x \end{pmatrix} \quad (6)$$

Ensuite, à partir de la vitesse et de la force de Lorentz, un potentiel électrique  $V$  [V] est calculé afin de trouver l'expression de l'énergie mécanique selon le vecteur position  $\vec{p}$  et le vecteur vitesse  $\vec{v}$  en trouvant d'abord l'énergie potentiel à partir de  $V$  (annexe 5.2.3) :

$$E_{pot} = qV = -qyE_0 \quad (7)$$

$$E_{mec} = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 - yqE_0 \quad (8)$$

Afin de montrer que l'énergie mécanique est bien conservée, il faut vérifier que la dérivée de cette dernière est nulle. Les calculs réalisés en annexe 5.2.3 montrent bien :

$$\frac{dE_{mec}}{dt} = mv \frac{dv}{dt} - \frac{dy}{dt} qE_0 = 0 \quad (9)$$

ce qui confirme que l'énergie mécanique est bien conservée.

Maintenant, on définit le moment magnétique de la particule, ici un proton, par  $\mu = mv_{\perp}^2/2B$  avec  $B = \|\vec{B}\|$  et  $v_{\perp} = \|\vec{v}_{\perp}\|$  où  $\vec{v}_{\perp}$  est la composante de la vitesse selon le plan perpendiculaire au champ magnétique (i.e  $\vec{v}_{perp} = \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{B} \rangle / B$ ). Le moment magnétique peut être exprimé selon  $\vec{x}$  et  $\vec{v}$  en calculant d'abord la composante de la vitesse perpendiculaire au champ  $\vec{B}$  :

$$\vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel} = \vec{v}_{\perp} + v_{\parallel} \cdot \vec{u}_B \quad (10)$$

avec  $\vec{u}_B = \vec{B}/\|\vec{B}\| = \vec{B}/B$ .

En développant (annexe 5.2.4), on obtient  $\vec{v}_{\perp}^2$  en prenant le produit scalaire de  $\vec{v}$  avec lui même :

$$\vec{v}_{\perp}^2 = \vec{v}^2 - \frac{\langle \vec{v}, \vec{B} \rangle^2}{B^2} \quad (11)$$

Alors, le moment magnétique est obtenu en réinjectant l'équation 11 dans la formule  $\mu = m\vec{v}_{\perp}^2/2B$  :

$$\mu = \frac{m\vec{v}^2}{2B} - \frac{m\langle \vec{v}, \vec{B} \rangle^2}{2B^3} \quad (12)$$

Enfin, on souhaite résoudre les équations du mouvement pour les deux cas suivants : avec et sans champ électrique.

1. À partir de l'équation 6, le système d'équations différentielles obtenu est :

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + \omega^2 v_x = 0 \quad (13)$$

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} + \omega^2 v_y = 0 \quad (14)$$

avec  $\omega = \frac{qB_0}{m}$  la fréquence cyclotron. En appliquant les méthodes de résolution de l'oscillateur harmonique et les conditions initiales  $\vec{p}(0) = \vec{0}$  et  $\vec{v}(0) = v_0\hat{y}$ , les solutions

sont (voir annexe 5.2.5) :

$$v_x(t) = v_0 \sin(\omega t) \quad (15)$$

$$v_y(t) = v_0 \cos(\omega t) \quad (16)$$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) \quad (17)$$

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (18)$$

2. Considérons maintenant le champ électrique  $\vec{E}$  en plus du champ magnétique déjà présent. De manière analogue, les équations différentielles à résoudre sont de la forme :

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega^2 v_x = \omega \psi \quad (19)$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega^2 v_y = 0 \quad (20)$$

avec  $\psi = \frac{qE_0}{m}$ . En les résolvant en utilisant les mêmes conditions initiales (le problème reste inchangé), les équations suivantes sont obtenues (voir annexe 5.2.5) :

$$v_x(t) = \frac{E_0}{B_0} (1 - \cos(\omega t)) + v_0 \sin(\omega t) \quad (21)$$

$$v_y(t) = v_0 \cos(\omega t) + \frac{E_0}{B_0} \sin(\omega t) \quad (22)$$

$$x(t) = \frac{E_0}{B_0} \left( t - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right) + \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) \quad (23)$$

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{E_0}{B_0 \omega} (1 - \cos(\omega t)) \quad (24)$$

### 3 Simulations et Analyse

#### 3.1 Cas sans champ électrique, avec un champ magnétique uniforme

Dans un premier temps, la fiabilité de l'intégrateur est étudiée dans un cas où les solutions analytiques sont connues. Puis la conservation de l'énergie mécanique et la stabilité des intégrateurs sera analysée.

L'intégrateur Runge-Kutta à l'ordre 2 effectuée à chaque pas de temps les opérations :

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t f(y_i, t_i) \\ k_2 &= \Delta t f\left(y_i + \frac{1}{2}k_1, t_{i+1/2}\right) \\ y_{i+1} &= y_i + k_2 \end{aligned}$$

où  $y$  est donné par l'équation 6.

L'intégrateur d'Euler Explicite effectue les opérations :

$$y_{n+1} = y_n + f(y_n, t_n) * \Delta t$$

Implicite les opérations :

$$y_{n+1} = y_n + f(y_{n+1}, t_{n+1})\Delta t$$

et Semi-Implicite les opérations :

$$y_{n+1} = y_n + (0.5 \cdot f(y_n) + 0.5 \cdot f(y_{n+1}))\Delta t$$

La solution analytique est connue et est donnée par les équations 15, 16, 17 et 18, le proton a une trajectoire circulaire uniforme. Une étude de l'ordre de convergence peut être réalisée en traçant l'erreur sur la vitesse  $\epsilon$  donnée par

$$\epsilon = \max_{i=x,y} |v_i^{exact}(t_{fin}) - v_i^{num}(t_{fin})|$$

Deux fits sont tracés de pente -1 et -2 qui correspondent à deux fonctions proportionnelles à  $1/N$  et  $1/N^2$  dans la figure 1.

L'erreur sur l'énergie mécanique dans la figure 2 est :

$$|E_{mec}^{init} - E_{mec}(t)|$$

où  $E_{mec}^{init} = 2.1 \cdot 10^{-16} [J]$

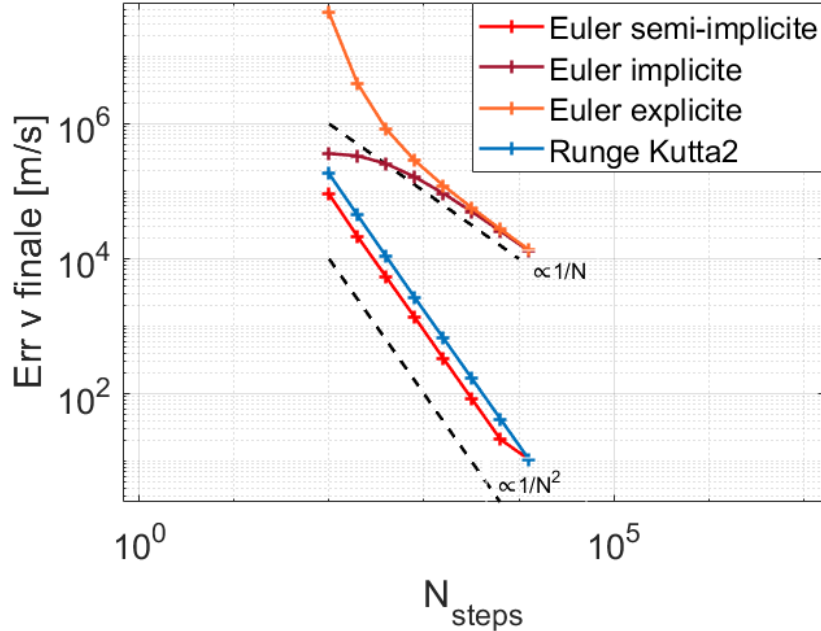


FIG. 1 – Étude de l'ordre de convergence des intégrateurs en présence d'un champ magnétique uniforme, sans champ électrique, avec  $t_{fin} = 8 \cdot 10^{-8}$

s.

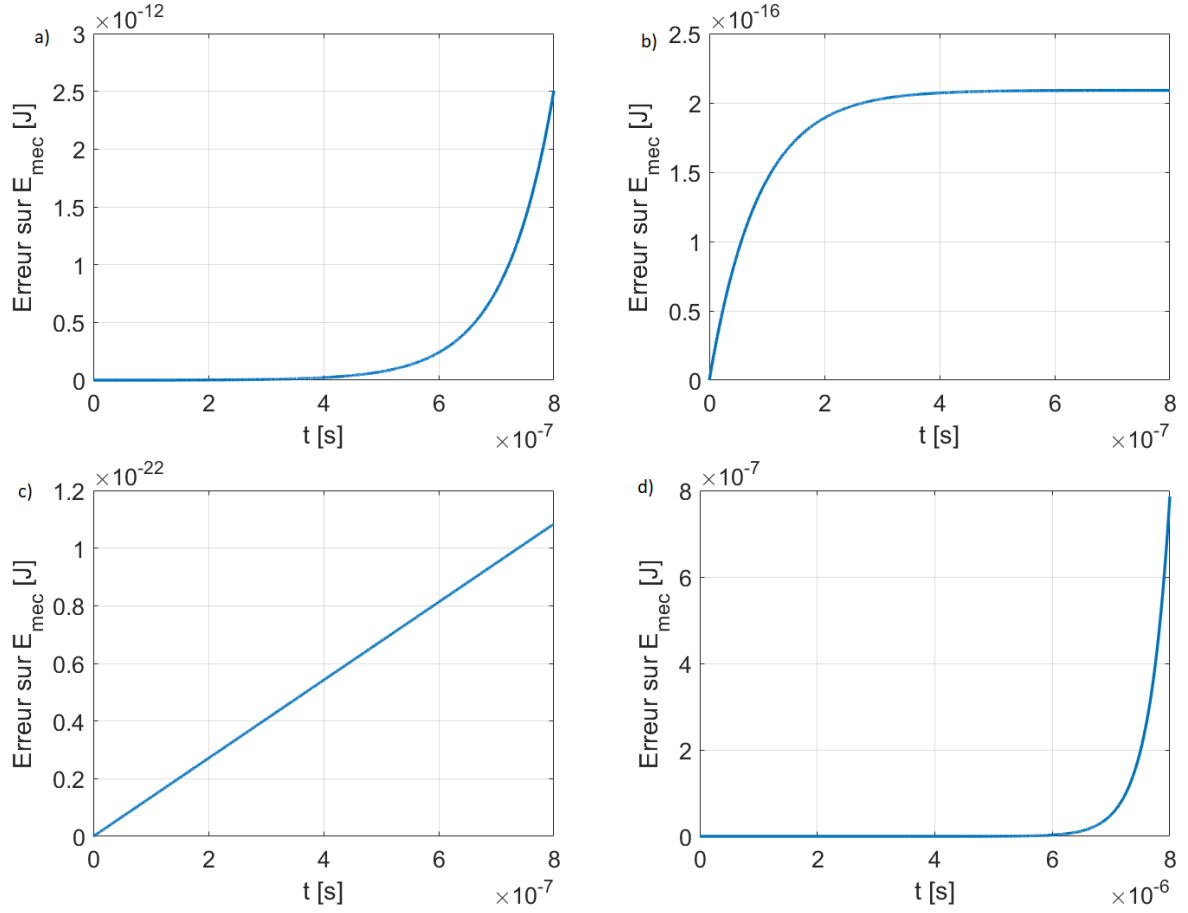


FIG. 2 – Étude de la conservation de l'énergie mécanique en fonction du temps pour les intégrateurs a) Euler Explicite, b) Euler Implicite, c) Euler Semi-Implicite, d) Runge-Kutta à l'ordre 2.  $N_{steps} = 1000$  et  $t_{fin} = 8 \cdot 10^{-7}s$  pour a,b,c et  $t_{fin} = 8 \cdot 10^{-6}s$   $N_{steps} = 10000$  pour d)

**Résultats** Dans la figure 1, les courbes représentant les erreurs sur la vitesse finale des intégrateurs Euler Implicite et Explicite en fonction du nombre de pas de temps de la simulation sur une échelle log-log ont une pente qui tend vers -1. Pour les intégrateurs Runge-Kutta à l'ordre 2 et Euler Semi-Implicite, la pente est de -2.

L'erreur sur l'énergie mécanique pour les intégrateurs Euler Explicite et Runge-Kutta à l'ordre 2 explose avec le temps dans la figure 2 bien que pour l'intégrateur Runge-Kutta, cela arrive plus tard. Pour l'intégrateur Euler Implicite, l'erreur se stabilise avec le temps et pour l'intégrateur Euler Semi-Implicite, l'erreur croît linéairement avec le temps.

**Discussion** L'erreur sur la vitesse d'Euler Explicite et Implicite diminue théoriquement de moitié lorsque le pas de temps  $\Delta t$  est réduit de moitié, ou lorsque le nombre de pas  $N_{steps}$  double car l'ordre de convergence de ces intégrateurs est 1. Les résultats observés dans la figure 1 sont alors cohérents. Pour l'intégrateur de Runge-Kutta à l'ordre de convergence

2, l'erreur est divisée par 4 lorsque le pas de temps  $\Delta t$  est diminué de moitié ou lorsque le nombre pas de temps  $N_{steps}$  double. Cela est confirmé par les résultats de la figure 1. On a le même comportement pour l'intégrateur Euler Semi-Implicite dont l'ordre de convergence est proche de 2.

Les intégrateurs Euler Explicite et Runge-Kutta2 sont instables car l'erreur augmente avec le temps, ce qui se confirme dans la figure 2. L'instabilité de l'intégrateur Runge-Kutta2 s'est révélée pour un  $t_{fin}$  plus élevé que pour Euler Explicite. Pour l'intégrateur Euler Implicite qui dissipe l'énergie mécanique, l'erreur se stabilise lorsque toute l'énergie mécanique du système a été dissipée. Enfin l'intégrateur Euler Semi-Implicite est bien stable pour la conservation de l'énergie mécanique, de plus l'énergie dissipée est négligeable comparée à l'énergie mécanique initiale.

### 3.2 Cas avec champ électrique et un champ magnétique, tous uniformes

Les résultats précédents montrent la fiabilité des intégrateurs Semi-Implicite et Runge-Kutta 2 qui seront utilisés pour étudier ce cas.

Dans un premier temps, la conservation de l'énergie mécanique, vérifiée dans l'équation 9 sera étudiée numériquement, puis la trajectoire de la particule sera analysée.

La conservation de l'énergie mécanique est étudiée par le calcul de la dérivée centrée de l'énergie mécanique de formule :

$$\frac{dE_{mec}}{dt} \approx \frac{E_{mec}(t_{i+1}) - E_{mec}(t_{i-1})}{2\Delta t}$$

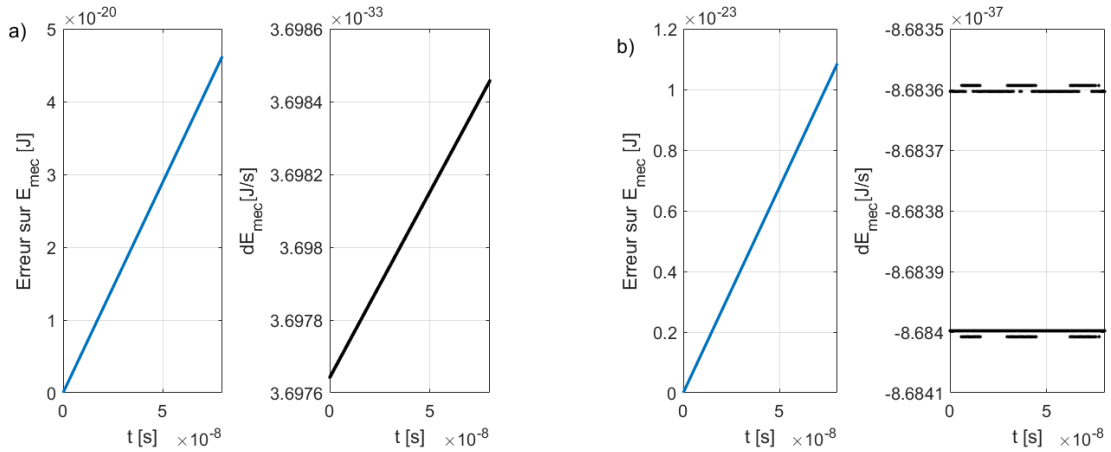


FIG. 3 – Étude de la conservation de l'énergie mécanique pour les intégrateurs a) Runge-Kutta2 b) Euler Semi-Implicite

La position est étudiée dans la figure 4 dans le référentiel du sol. La figure 5 représente la



position du proton dans un référentiel en translation uniforme à la vitesse  $\vec{v}_E$  d'équation :

$$\vec{v}_E = \vec{E} \times \vec{B} / B^2 = \frac{v_y^{init}}{4} \cdot \vec{e}_y$$

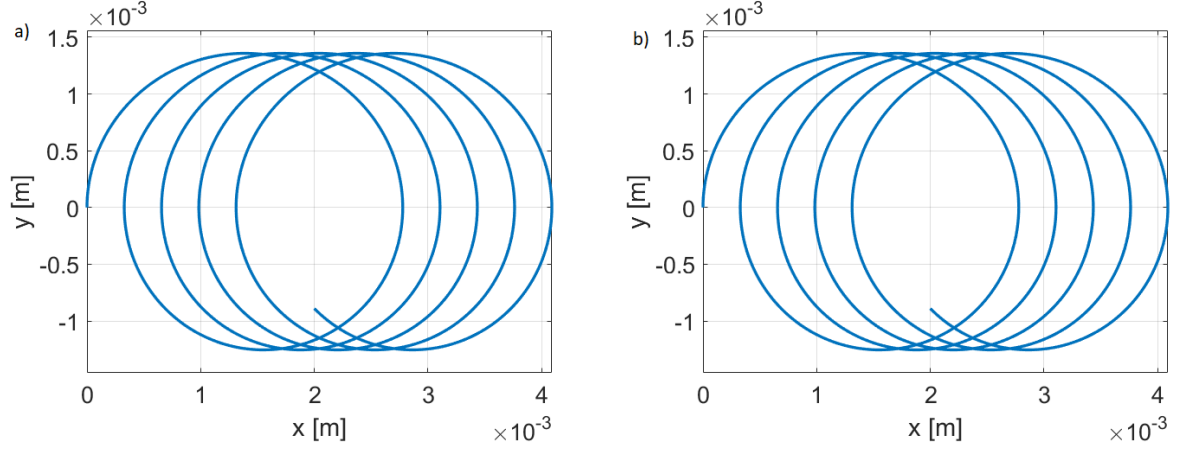


FIG. 4 – Position du proton dans le référentiel du sol pour les intégrateurs a) Runge-Kutta2 et b) Semi-Implicite

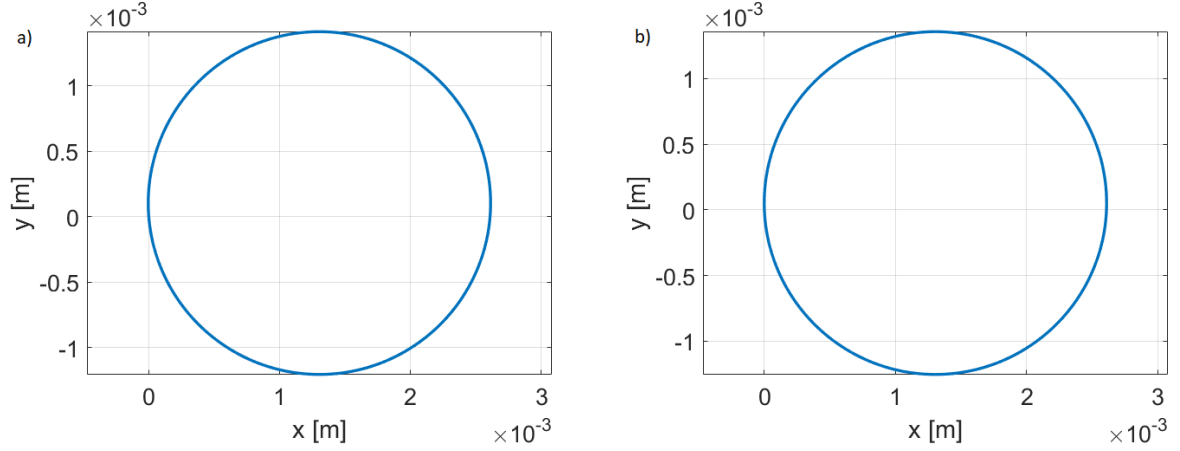


FIG. 5 – Position du proton dans un référentiel en translation  $\vec{v}_E$  avec le sol pour les intégrateurs a) Runge-Kutta2 et b) Semi-Implicite

**Résultats** L'erreur sur l'énergie mécanique augmente avec le temps dans la figure 3 pour les deux intégrateurs. La dérivée de l'énergie mécanique de Runge-Kutta est positive alors que celle de Euler Semi-Implicite est négative et alterne entre deux valeurs.

La particule tourne dans le référentiel du sol dans la figure 4 en étant décalée sur l'axe  $x$  à chaque rotation. Dans le référentiel en translation à la vitesse  $\vec{v}_E$ , le proton a une trajectoire circulaire.

**Discussion** Bien que l'énergie mécanique n'est pas strictement constante, sa variation est négligeable. Cela se vérifie dans la figure 3, l'erreur sur l'énergie mécanique est de l'ordre de  $\frac{1}{10000}$  pour l'intégrateur Runge-Kutta2 et de  $\frac{1}{10000000}$  pour l'intégrateur Euler Semi-Implicite. La dérivée de l'énergie mécanique étant négligeable illustre aussi ce résultat. On peut constater que l'intégrateur Euler Semi-Implicite dissipe l'énergie mécanique et Runge-Kutta 2 augmente l'énergie mécanique.

La comparaison entre les figures 4 et 5 montre que le proton a une trajectoire circulaire s'il est considéré dans le référentiel en translation uniforme  $\vec{v}_E$  avec le sol. Les deux intégrateurs n'ont pas de différences visibles dans les résultats donnés.

### 3.3 Champ magnétique non uniforme sans champ électrique

Le schéma d'Euler Semi-Implicite sera utilisé pour cette simulation. La solution analytique est ici inconnue, l'ordre de convergence est donc calculé en affichant la norme de la position finale en fonction de  $\Delta t^n$  et en modifiant la valeur de  $n$  jusqu'à ce que les points s'alignent. L'erreur sur la position est donnée par :

$$\sqrt{x_{fin}^2 + y_{fin}^2}$$

Le terme selon  $z$  n'est pas présent car il est toujours égal à zéro.

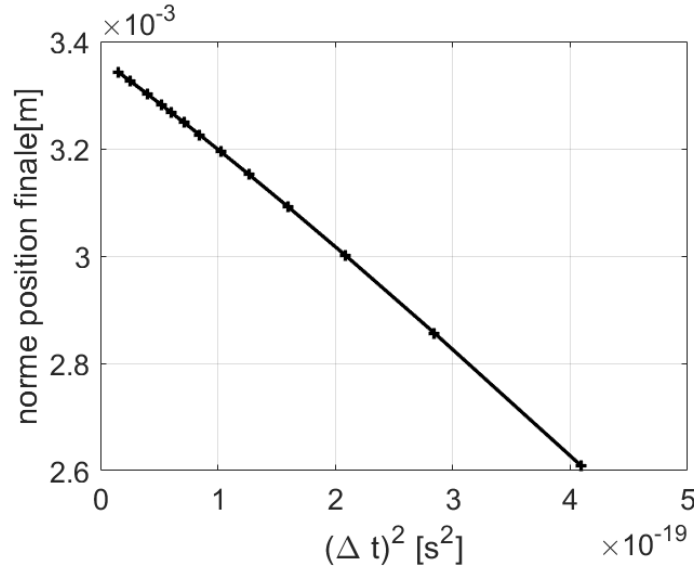


FIG. 6 – Convergence de la norme de la position finale en fonction du carré du pas de temps  $\Delta t$

L'énergie mécanique est toujours constante car les forces présentes sont conservatives, la conservation de l'énergie mécanique et du moment magnétique est analysée numériquement dans les figure 7 et 8.

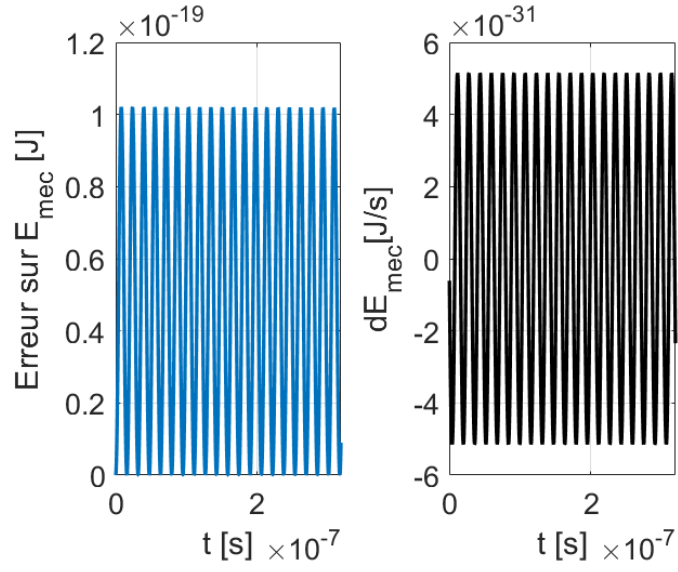


FIG. 7 – Étude de la conservation de l'énergie mécanique

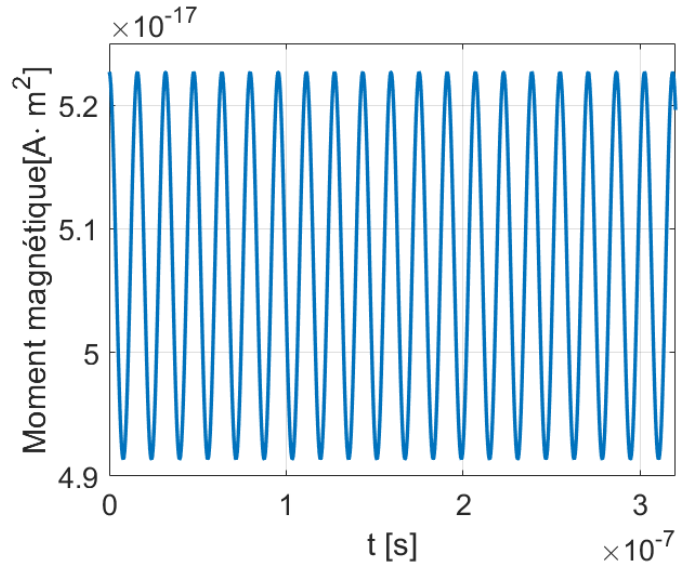


FIG. 8 – Moment magnétique du proton

La position du proton et de l'antiproton de charge  $-q$  est maintenant étudiée dans les figures 9 et 10.

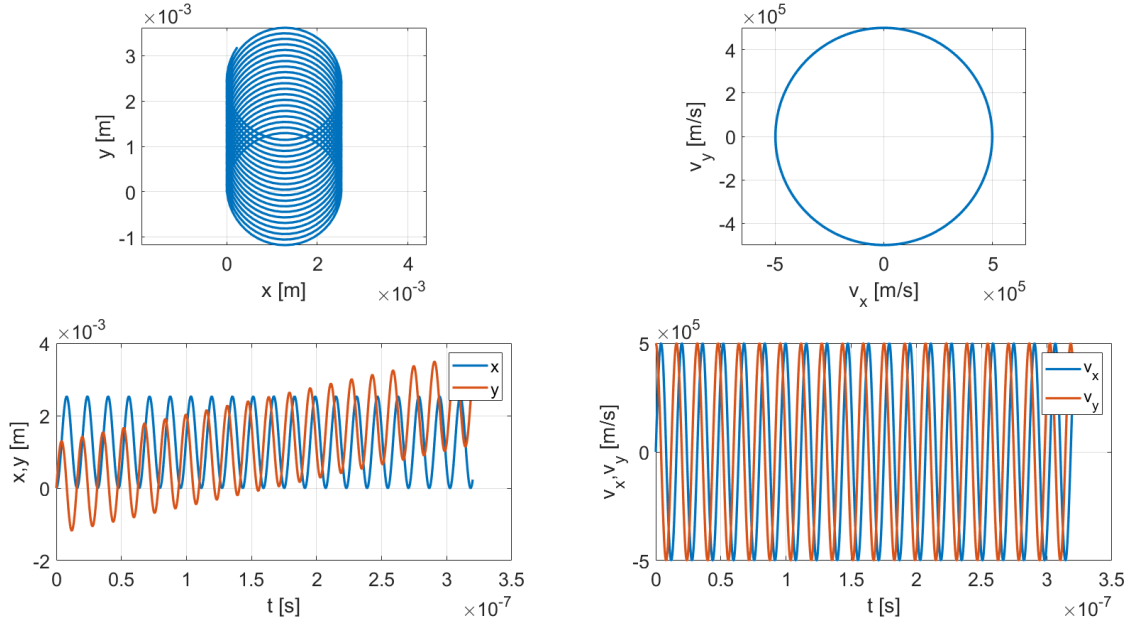


FIG. 9 – Position et vitesse du proton

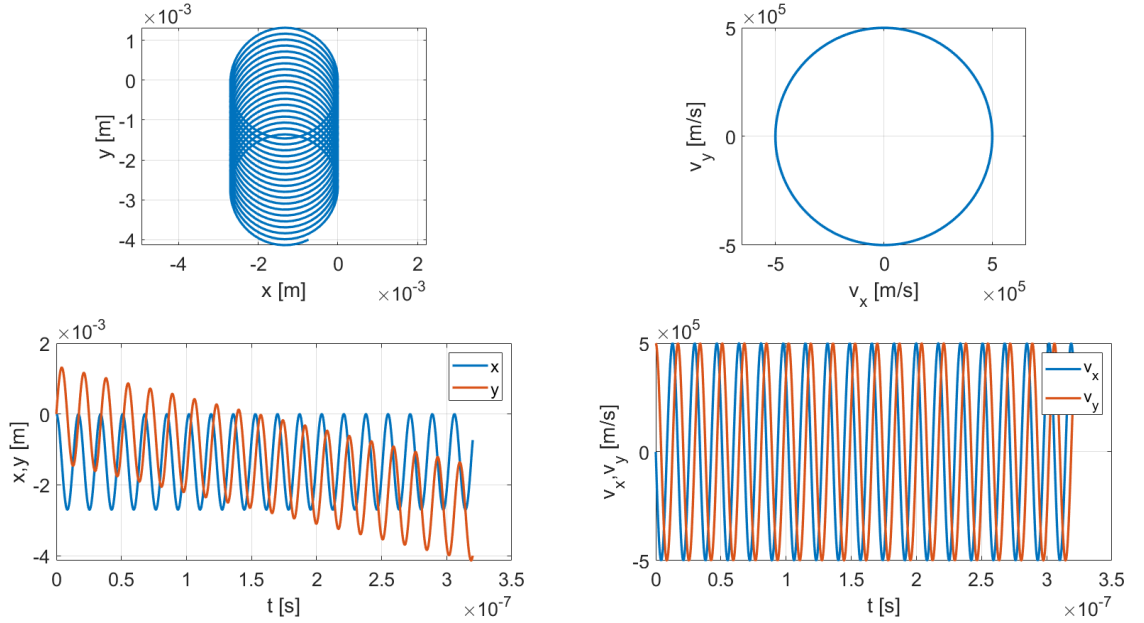


FIG. 10 – Position et vitesse de l'antiproton

**Résultats** La norme de la position diminue linéairement en fonction de  $(\Delta t)^2$ . L'erreur sur l'énergie mécanique oscille et sa dérivée aussi, comme observable sur la figure 7. Le moment magnétique oscille aussi autour d'une même valeur dans la figure 8. Le proton se déplace en effectuant des cercles et se déplaçant de bas en haut tandis que l'antiproton

effectue des cercles, en se déplaçant de haut en bas (figures 9 et 10).

**Discussion** Cette décroissance linéaire de la norme de la position dans la figure 6 illustre une nouvelle fois que la convergence de l'intégrateur Euler Semi-Implicite est d'ordre 2.

L'erreur sur l'énergie mécanique est de l'ordre de 0.1%, elle ne croit pas avec le temps. Sa conservation établie dans l'équation 6 est vérifiée dans ce cas.

Le moment magnétique oscille autour d'une même valeur et sa variation est de l'ordre de 10%. Ses oscillations en fonction du temps ont les mêmes phases que celle de la position sur l'axe x en fonction du temps.

Les déplacements du proton sont similaires à ceux de l'antiproton à leur direction près. Cela s'explique par leur similarité en masse et en intensité avec une différence sur le signe de la charge.

### 3.4 Cas d'un champ magnétique non uniforme et curviligne (miroir magnétique)

À présent, considérons les conditions suivantes :  $B_0 = 4\text{T}$ ,  $B_1 = 0\text{T}$ ,  $B_2 = 2\text{T}$ ,  $k = 2\pi/L_z$  avec  $L_z = 0.2\text{m}$ ,  $E_0 = 0$ . La position initiale sera la même pour les deux configurations :  $x_0 = mv_{y0}/qB_0$ ,  $y_0 = 0$  et  $z_0 = L_z/2$ . Cependant la vitesse initiale sera différente : pour la configuration a), la vitesse initiale sera  $\vec{v}_0 = (0, 2 \times 10^5, 8 \times 10^5)\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  alors que pour la configuration b), la vitesse initiale sera  $\vec{v}_0 = (0, 8 \times 10^5, 2 \times 10^5)\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

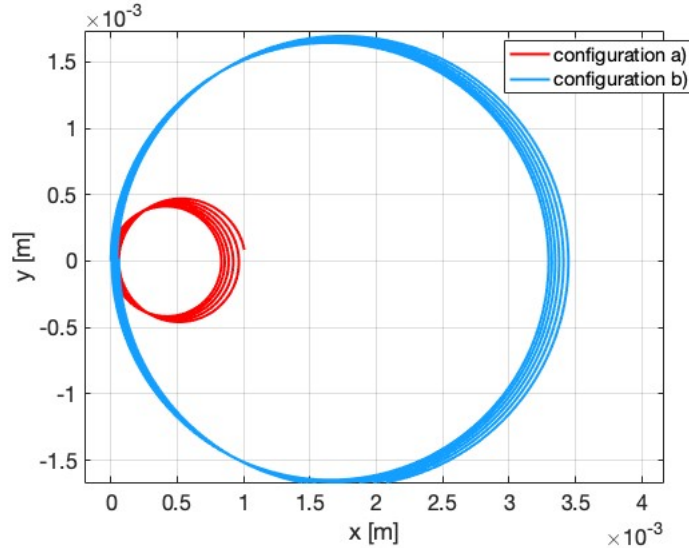


FIG. 11 – Comparaison de la position du proton au cours du temps pour les deux configurations a) et b)

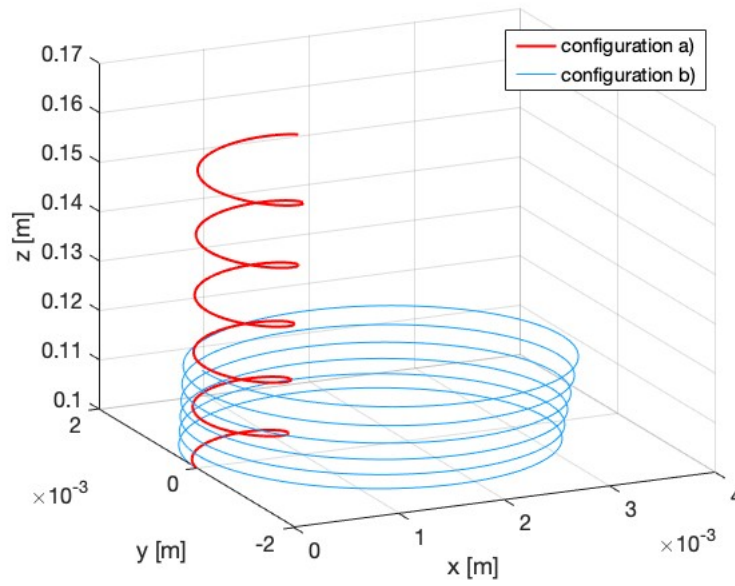


FIG. 12 – Comparaison de la coordonnée  $z$  du proton pour les deux configurations a) et b)

**Résultats** Sur les figures 11 et 12, une grande différence est observable au niveau de la position du proton en fonction des coordonnées initiales : le rayon de la quasi-hélice décrite par la figure 11 pour la configuration est multiplié par 4. Pour l'étude de la coordonnée  $z$  entre les deux configurations, une nette différence entre les torsions des deux courbes descriptives est observables : la particule décrit 5,5 tours pour la configuration a) et atteint une hauteur maximum de 0.17m alors que dans la configuration b), le proton effectue 6 tours et atteint une hauteur maximum de 0.12m.

**Discussion** Ces fortes disparités sont liées aux conditions initiales sur la vitesse. Lorsque les vitesses sont multipliées ou divisées par 4 d'une configuration à l'autre, elle induisent une quasi-hélice étirée selon la coordonnée avec la plus grande vitesse scalaire, comme dans la configuration a) où une vitesse de  $8 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  selon  $z$  induit un étirement vers le haut (cas analogue d'un "shift" sur la droite de la quasi-hélice avec un rayon 4 fois plus grand).

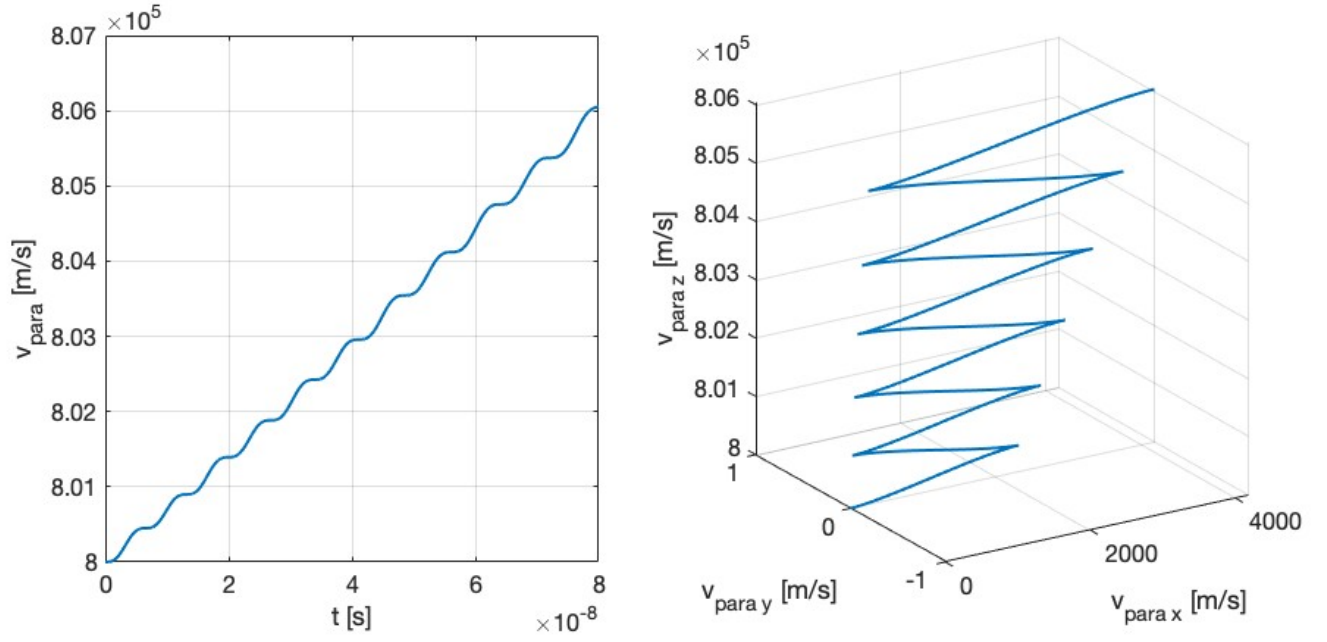


FIG. 13 – Norme et direction de la vitesse parallèle au champ magnétique  $\vec{B}$  en présence d'un champ magnétique curviligne et non uniforme avec  $\vec{v}_0 = (0, 2 \times 10^5, 8 \times 10^5)$

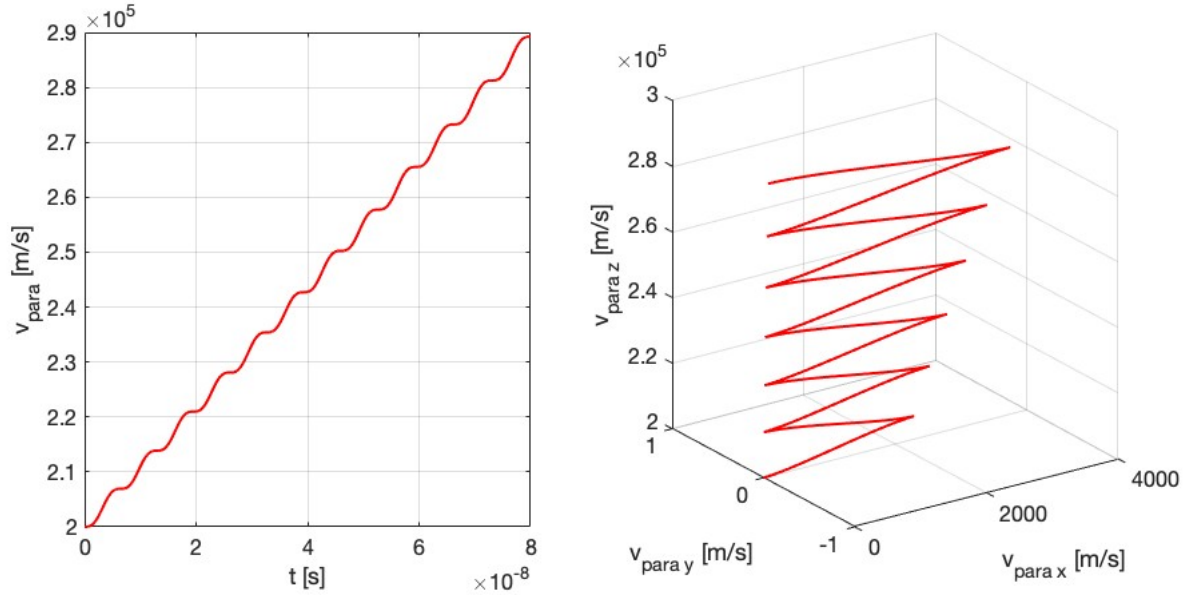


FIG. 14 – Norme et direction de la vitesse parallèle au champ magnétique  $\vec{B}$  en présence d'un champ magnétique curviligne et non uniforme avec  $\vec{v}_0 = (0, 8 \times 10^5, 2 \times 10^5)$

**Résultats** Sur les figures 13 et 14, la norme de la vitesse parallèle est croissante, malgré une variation des conditions initiales : elle varie respectivement entre  $8 \times 10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $8.07 \times 10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  pour la première configuration et entre  $2 \times 10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $2.09 \times 10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  pour la seconde configuration.

**Discussion** La composante parallèle au champ magnétique de la force est toujours nulle pourtant  $\vec{v}_{\parallel}$  n'est pas constante. Cela s'explique de la manière suivante : malgré le fait que la force de Lorentz donnée par  $\vec{F}_L = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$  soit perpendiculaire au champ magnétique  $\vec{B}$ , cela ne suffit pas pour conclure que la dérivée de  $\vec{v}_{\parallel}$  est nulle. En effet, il est possible de montrer cela à l'aide du calcul suivant :

$$\vec{v}_{\parallel} = \langle \vec{v}, \vec{e}_{\parallel} \rangle \vec{e}_{\parallel}$$

avec  $\vec{e}_{\parallel} = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$ . Alors, en calculant la dérivée en utilisant la formule de la dérivation d'un produit sans aucune supposition physique :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{v}_{\parallel} &= \frac{d}{dt} (\langle \vec{v}, \vec{e}_{\parallel} \rangle \vec{e}_{\parallel}) \\ &= \left( \left\langle \frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{e}_{\parallel} \right\rangle + \langle \vec{v}, \frac{d\vec{e}_{\parallel}}{dt} \rangle \right) \vec{e}_{\parallel} + \langle \vec{v}, \vec{e}_{\parallel} \rangle \frac{d\vec{e}_{\parallel}}{dt} \\ &= \left( 0 + \langle \vec{v}, \frac{d\vec{e}_{\parallel}}{dt} \rangle \right) \vec{e}_{\parallel} + \langle \vec{v}, \vec{e}_{\parallel} \rangle \frac{d\vec{e}_{\parallel}}{dt} \\ &= \langle \vec{v}, \frac{d\vec{e}_{\parallel}}{dt} \rangle \vec{e}_{\parallel} + \langle \vec{v}, \vec{e}_{\parallel} \rangle \frac{d\vec{e}_{\parallel}}{dt} \neq 0 \end{aligned}$$

car  $\frac{d\vec{e}_{\parallel}}{dt} \neq 0$ . Cela s'explique par le fait que le vecteur unitaire parallèle au champ magnétique dépend du champ magnétique qui dépend de la position de la particule ( $\vec{B} \propto x$ ) qui varie en fonction du temps. Les équations de Poisson pourrait montrer dans de plus amples détails comment le vecteur unitaire  $\vec{e}_{\parallel}$  varie au cours du temps.

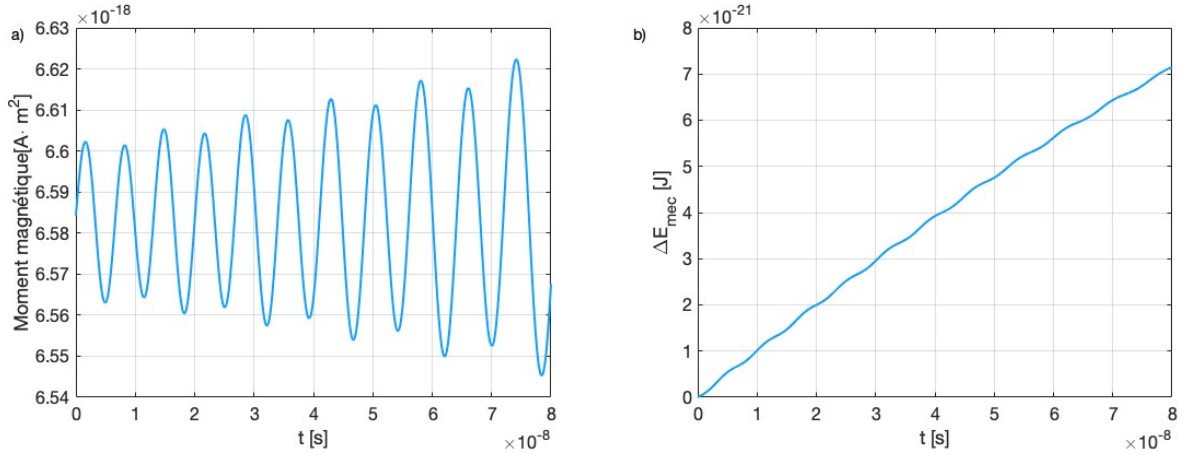


FIG. 15 – a) Moment magnétique et b) variation de l'énergie mécanique du proton dans la configuration a)



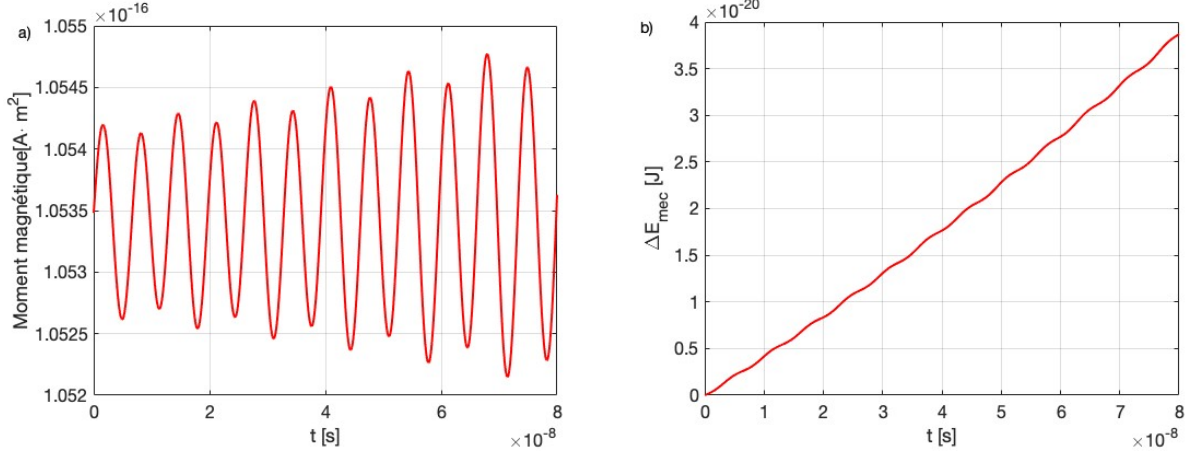


FIG. 16 – a) Moment magnétique et b) variation de l'énergie mécanique du proton dans la configuration b)

**Résultats** Pour la configuration a), le moment magnétique oscille entre les extremums suivants :  $6.62 \times 10^{-18} \text{A} \cdot \text{m}^2$  et  $6.54 \times 10^{-18} \text{A} \cdot \text{m}^2$  et l'énergie mécanique varie au final de  $8 \times 10^{-21}$ .

Pour la configuration b), le moment magnétique oscille entre les extremums suivants :  $1.0548 \times 10^{-16} \text{A} \cdot \text{m}^2$  et  $1.0522 \times 10^{-16} \text{A} \cdot \text{m}^2$  et l'énergie mécanique varie au total de  $4 \times 10^{-20}$ .

**Discussion** Ces variations extrêmement faibles montrent que le moment magnétique et l'énergie mécanique sont conservés.

### 3.5 Etude de l'intégrateur Boris Bunemann

L'intégrateur de Boris Bunemann est maintenant testé en complément des autres schémas testés. Son fonctionnement est décrit dans le polycopié [2].

La solution analytique est connue dans le cas sans champ électrique, l'ordre de convergence est étudié dans la figure 17 où seul un champ magnétique uniforme est appliqué.

La conservation de l'énergie mécanique et du moment magnétique ainsi que la position du proton est testée avec la présence d'un champ magnétique non uniforme dans les figures 18 et 19, avec les mêmes conditions que dans la partie 3.3 .

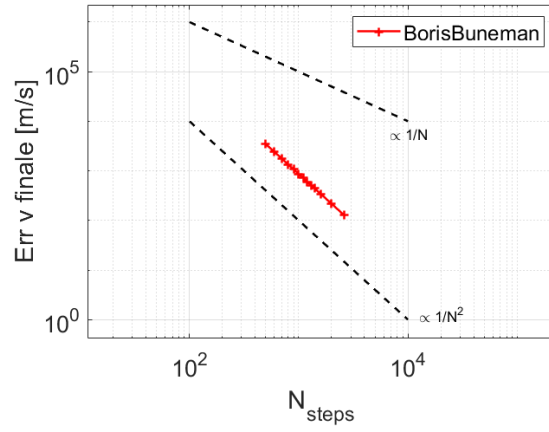


FIG. 17 – étude de l'ordre de convergence de l'intégrateur Boris Bunemann dans le cas sans champ électrique, avec un champ magnétique

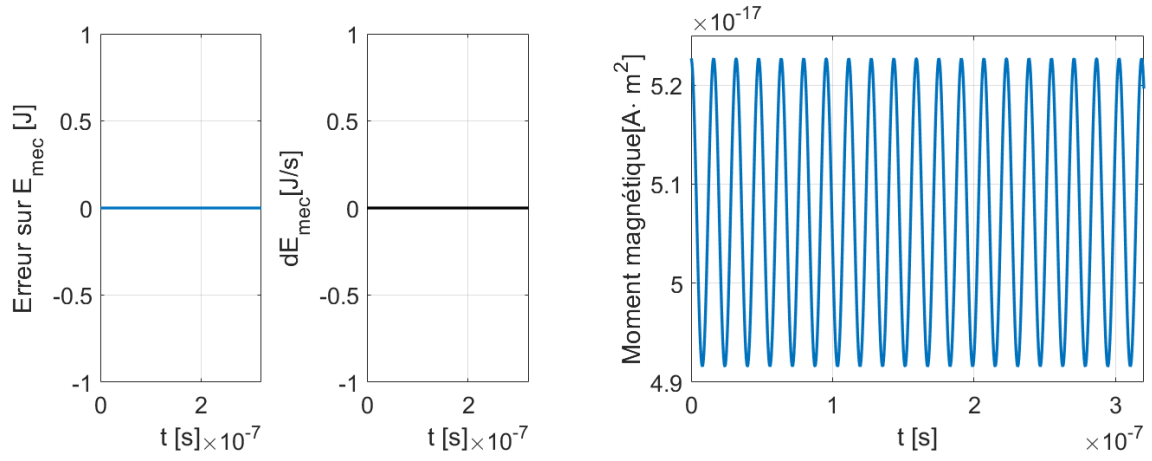


FIG. 18 – Etude de la conservation de l'énergie mécanique et du moment magnétique de l'intégrateur Boris Bunemann

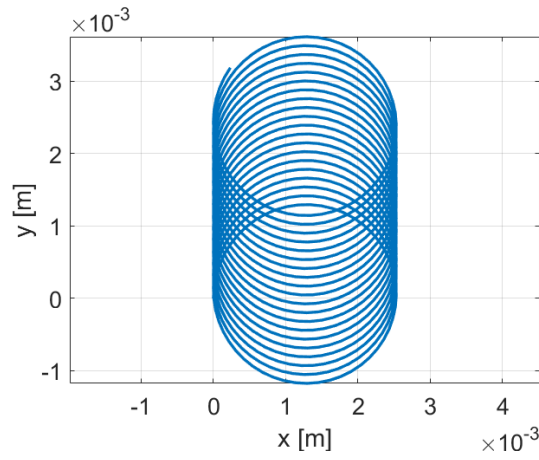


FIG. 19 – position du proton

**Résultats** Dans la figure 15, l'erreur sur la vitesse en fonction du nombre de pas de temps semble suivre le fit proportionnel à la fonction  $1/N^2$  de pente  $-2$ .

L'erreur sur l'énergie mécanique est nulle, le moment magnétique oscille autour d'une même valeur.

La position est la même que celle trouvée dans les figures 9 et 10 où les intégrateurs semi-implicite et Runge-Kutta2 ont été utilisés.

**Discussion** L'ordre de convergence de l'intégrateur Boris Bunemann est visiblement de deux car l'erreur diminue avec le carré de la diminution du pas de temps dans le cas avec champ magnétique, sans champ électrique.

L'erreur sur l'énergie mécanique est nulle, ce schéma conserve parfaitement l'énergie mécanique dans le cas étudié contrairement à Euler semi-implicite et Runge-Kutta2. Le moment magnétique et la position donne les mêmes résultats que les deux autres intégrateurs.

## 4 Conclusion

Cette analyse est globalement satisfaisante. La comparaison des résultats avec la solution analytique lorsqu'elle était disponible a montré les améliorations amenées par les intégrateurs de Runge-Kutta à l'ordre 2 et d'Euler. Ces derniers ont un ordre de convergence plus élevé qu'Euler Implicite et conservent mieux l'énergie mécanique, même si le schéma de Runge Kutta est instable sur ce point.

La précision des résultats numériques pourrait encore être augmentée avec le schéma de Boris Bunemann conçu pour analyser spécifiquement ce problème et qui possède les meilleurs résultats.

## Références

- [1] Page Wikipedia de [Large Hadron Collider](#)
- [2] Laurent Villard photocopié du cours PHYSIQUE NUMERIQUE I-II p.79 (2022)

## 5 Annexe

### 5.1 Données du problème :

Le problème donne les données suivantes dans le cas de l'étude d'un proton dans un champ électromagnétique :

1. masse du proton :  $m = 1.6726 \times 10^{-27} \text{kg}$
2. charge du proton :  $q = 1.6022 \times 10^{-19}$
3. position initiale :  $\vec{p}(0) = (0, 0, 0)$
4. vitesse initiale :  $\vec{v}(0) = (0, v_0, 0)$
5. champ électrique uniforme :  $\vec{E} = E_0 \hat{y}$
6. champ magnétique :  $\vec{B} = B_x(x, z) \hat{x} + (B_0 + B_1 \frac{x}{L} + B_2 \cos(kz)) \hat{z}$
7. force de Lorentz :  $\vec{F}_L = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$

## 5.2 Développement des calculs

### 5.2.1 Calcul de la composante du champ magnétique selon x

Le calcul de  $B_x(x, y, z)$  à partir de la condition  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  utilise aussi la condition initiale  $B_x(0, y, z) = 0$  :

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{B} &= \frac{\partial}{\partial x} B_x(x, z) + \frac{\partial}{\partial z} \left( B_0 + B_1 \frac{x}{L} + B_2 \cos(kz) \right) \\
 &= \frac{\partial B_x}{\partial x} - B_2 k \sin(kz) \\
 &= 0 \implies \frac{\partial B_x}{\partial x} = B_2 k \sin(kz)
 \end{aligned} \tag{25}$$

$B_x(x, y, z)$  sera donc donné par l'intégrale de  $B_2 k \sin(kz)$  et la condition initiale spécifiée plus haut :

$$B_x(x, y, z) = \int k B_2 \sin(kz) dx = kx B_2 \sin(kz) + C_1 = kx B_2 \sin(kz) \tag{26}$$

où  $C_1 = B_x(0, y, z) = 0$ . Il est possible de remarquer que  $B_x(x, y, z)$  ne dépend pas de y. On simplifiera la notation de la manière suivante :  $B_x(x, y, z) \equiv B_x(x, z)$ .

### 5.2.2 Équations différentielles du mouvement

Pour calculer l'accélération de la particule, il faut d'abord établir les forces qui lui sont appliquées. La force de Lorentz, explicité ici est :

$$\vec{F}_L = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \tag{27}$$

À partir de l'équation de  $\vec{B}$ , le second terme de la force de Lorentz  $\vec{v} \times \vec{B}$  se calcule :

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y B_z \\ v_z B_x - v_x B_z \\ -v_y B_x \end{pmatrix} \quad (28)$$

avec  $B_z \equiv B_z(x, z) = B_0 + B_1 \frac{x}{L} + B_2 \cos(kz)$ . En considérant que la gravité est négligeable par rapport à la force électromagnétique, la somme des forces extérieures appliquées à la particule se résume alors à la force de Lorentz. L'équation de l'accélération est alors :

$$m\vec{a} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \implies \vec{a} = \frac{q}{m} \begin{pmatrix} v_y B_z \\ E_0 + v_z B_x - v_x B_z \\ -v_y B_x \end{pmatrix} \quad (29)$$

### 5.2.3 Énergie mécanique et conservation

Pour calculer l'énergie mécanique, il faut d'abord exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. L'énergie cinétique est donnée par  $E_{cin} = mv^2/2$  et l'énergie potentielle se calcule à partir du potentiel électrique. La force électrique est :

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = -q\vec{\nabla}V \quad (30)$$

avec  $V[V]$  le potentiel électrique. Alors, on obtient  $V$  en intégrant le champ électrique  $\vec{E}$  :

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int E_0 dy = -yE_0 + C \quad (31)$$

où on peut poser arbitrairement  $V(0) = 0 \implies C = 0$ . L'énergie potentielle est alors donnée par la charge multipliée par le potentiel :

$$E_{pot} = qV = -yqE_0 \quad (32)$$

ce qui donne :

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 - yqE_0 \quad (33)$$

Pour vérifier la conservation de l'énergie mécanique, il suffit de vérifier que sa dérivée est nulle car seule est présente une force électromagnétique (conservative car dérivant d'un potentiel) :

$$\begin{aligned}
\frac{dE_{mec}}{dt} &= \frac{1}{2}m \frac{d}{dt} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - \frac{dy}{dt} q E_0 \\
&= m \langle \vec{a}, \vec{v} \rangle - v_y q E_0 \\
&= m \frac{q}{m} (v_x v_y B_z - v_y v_x B_z + v_y E_0 + v_z v_y B_x - v_z v_y B_x - v_y E_0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{34}$$

L'énergie mécanique est bien conservée.

#### 5.2.4 Moment magnétique de la particule

Le moment magnétique de la particule est défini par :

$$\mu = \frac{m \vec{v}_\perp^2}{2B} \tag{35}$$

alors il faut commencer par trouver  $\vec{v}_\perp$  la composante de la vitesse dans le plan perpendiculaire à  $\vec{B}(\vec{p})$ , le champ magnétique à la position  $\vec{p}$  de la particule. Pour ce faire, exprimons la vitesse en fonction de ses deux composantes  $\vec{v}_\parallel$  parallèle et  $\vec{v}_\perp$  perpendiculaire :  $\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$ . La composante de  $\vec{v}$  parallèle au champ  $\vec{B}$  peut être exprimée comme  $\vec{v}_\parallel = \langle \vec{v}, \vec{B} \rangle / B$ . Alors :

$$\begin{aligned}
\vec{v}^2 &= (\vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp)^2 \\
&= \vec{v}_\parallel^2 + 2\langle \vec{v}_\parallel, \vec{v}_\perp \rangle + \vec{v}_\perp^2 \\
&= \vec{v}_\parallel^2 + \vec{v}_\perp^2 \\
&= \langle \vec{v}, \vec{B} \rangle^2 / B^2 + \vec{v}_\perp^2 \\
\Rightarrow \vec{v}_\perp^2 &= \vec{v}^2 - \frac{\langle \vec{v}, \vec{B} \rangle^2}{B^2}
\end{aligned} \tag{36}$$

On obtient donc :

$$\mu = \frac{m \vec{v}_\perp^2}{2B} = \frac{m}{2B} \left( \vec{v}^2 - \frac{\langle \vec{v}, \vec{B} \rangle^2}{B^2} \right) = \frac{m \vec{v}^2}{2B} - \frac{m \langle \vec{v}, \vec{B} \rangle^2}{2B^3} \tag{37}$$

#### 5.2.5 Résolution des équations du mouvement avec et sans champ électrique

**Résolution en l'absence de champ électrique :** Enfin, pour trouver la solution analytique des équations du mouvement dans le cas de champs uniforme  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , considérons

d'abord un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$  et pas de champ électrique. À partir de l'équation 6, le système d'équation différentielles obtenu est :

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{B_0 q}{m} v_y = \omega v_y \quad (38)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{B_0 q}{m} v_x = -\omega v_x \quad (39)$$

avec  $\omega = \frac{B_0 q}{m}$ .

Afin de rétablir l'homogénéité des indices (i.e obtenir une équation uniquement en fonction de  $v_x$  ou de  $v_y$ ), on peut dériver à nouveau les équations 38 et 39 afin d'obtenir les dérivées secondes de  $v_x$  et  $v_y$  et on ré-injecte les équations pour  $\frac{dv_x}{dt}$  et  $\frac{dv_y}{dt}$  :

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\omega^2 v_x \quad (40)$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\omega^2 v_y \quad (41)$$

Il est possible ici de reconnaître l'équation de l'oscillateur harmonique, dont la solution est donnée par  $f(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ , avec ici  $f(t) = v_i(t)$ . Alors on obtient les équations suivantes pour la vitesse :

$$v_x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \quad (42)$$

$$v_y(t) = C_3 \cos(\omega t) + C_4 \sin(\omega t) \quad (43)$$

À partir des conditions initiales  $\vec{v}(0) = v_0 \hat{y}$ , il suit que :

$$v_x(t) = v_0 \sin(\omega t) \quad (44)$$

$$v_y(t) = v_0 \cos(\omega t) \quad (45)$$

En intégrant les équations des vitesses selon  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  et en utilisant la condition initiale  $\vec{p}(0) = \vec{0}$ , la position est décrite par :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) \quad (46)$$

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (47)$$

**Résolution en présence d'un champ électrique :** Considérons maintenant le champ électrique  $\vec{E} = E_0 \hat{y}$  en plus du champ magnétique déjà présent. Dans cette configuration, il faut alors considérer que la particule se trouve dans un référentiel en mouvement uniforme à une vitesse  $\vec{v}_E = \vec{E} \times \vec{B} / B^2$ , ce qui impact les conditions initiales comme la vitesse initiale dans le référentiel en mouvement qui devra être de  $\vec{v}_0' = (-\langle \vec{v}_E, \vec{e}_x \rangle, v_0 - \langle \vec{v}_E, \vec{e}_y \rangle, -\langle \vec{v}_E, \vec{e}_z \rangle)$ . En calculant  $\vec{v}_E$ , le résultat donne un référentiel se déplaçant à :

$$\vec{v}_E = \frac{1}{B_0^2} \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_0}{B_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (48)$$

Il n'est cependant pas nécessaire de changer de référentiel pour résoudre les équations du mouvement. À partir de l'équation 6 et de  $\vec{E} = E_0\hat{y}$  et  $\vec{B} = B_0\hat{z}$ , les équations du mouvement sont données par :

$$\frac{dv_x}{dt} = -\omega v_y \quad (49)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x + \psi \quad (50)$$

avec  $\psi = \frac{qE_0}{m}$ .

En dérivant de nouveau et en utilisant les équations des dérivées premières pour obtenir deux équations différentielles selon  $v_x$  ou  $v_y$  seulement, le système suivant est obtenu :

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + \omega^2 v_x = \omega\psi \quad (51)$$

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} + \omega^2 v_y = 0 \quad (52)$$

La résolution des équations homogènes est analogue à la partie sans champ électrique et les solutions homogènes sont à nouveau les équations 42 et 43. Néanmoins, l'équation 51 nécessite aussi une solution particulière qui est ici assez simple à trouver. En considérant qu'il s'agit d'une constante, le terme de dérivée seconde n'est pas à prendre en compte et il est aisément possible de résoudre l'équation suivante :

$$\omega^2 v_{x \text{ part}} = \omega\psi \implies v_{x \text{ part}} = \frac{\psi}{\omega} = \frac{E_0}{B_0} \quad (53)$$

Les solutions sont alors :

$$v_x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{E_0}{B_0} \quad (54)$$

$$v_y(t) = C_3 \cos(\omega t) + C_4 \sin(\omega t) \quad (55)$$

sur lesquelles est utilisé la condition initiale  $\vec{v}(0) = v_0\hat{y}$  afin de trouver  $C_1 = -\frac{E_0}{B_0}$  et  $C_3 = v_0$  :

$$v_x(t) = \frac{E_0}{B_0} (1 - \cos(\omega t)) + C_2 \sin(\omega t) \quad (56)$$

$$v_y(t) = v_0 \cos(\omega t) + C_4 \sin(\omega t) \quad (57)$$

En dérivant ces équations et en utilisant les équations 49 et 50, dites "croisées", les valeurs des constantes sont  $C_2 = v_0$  et  $C_4 = \frac{E_0}{B_0}$ . Après ces considérations, les équations finales pour la vitesse sont :

$$v_x(t) = \frac{E_0}{B_0} (1 - \cos(\omega t)) + v_0 \sin(\omega t) \quad (58)$$

$$v_y(t) = v_0 \cos(\omega t) + \frac{E_0}{B_0} \sin(\omega t) \quad (59)$$



Pour trouver la position, il faut intégrer les équations 58 et 59 et utiliser la condition initiale  $\vec{p}(0) = \vec{0}$  :

$$x(t) = \int v_x(t)dt = \frac{E_0}{B_0} \left( t - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right) - \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) + C_5 \quad (60)$$

$$y(t) = \int v_y(t)dt = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{E_0}{B_0\omega} \cos(\omega t) + C_6 \quad (61)$$

$$\implies C_5 = \frac{v_0}{\omega} \quad C_6 = \frac{E_0}{B_0\omega}$$

Les équations finales sont donc :

$$x(t) = \frac{E_0}{B_0} \left( t - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right) + \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) \quad (62)$$

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{E_0}{B_0\omega} (1 - \cos(\omega t)) \quad (63)$$