

Quadtrees

Bernhard Mallinger

e0707663

13. Februar 2011

Betreut durch Univ.-Ass. Dipl.-Ing., BSc Christian Schauer

Inhaltsverzeichnis

I. Theorie	3
1. Einführung	3
1.1. Funktionsprinzip	4
2. Punktbasierte Quadrees	5
2.1. Point Quadtree	5
2.1.1. Suche	6
2.1.2. Einfügen	6
2.1.3. Löschen	7
2.2. Pseudo Quadtree	8
2.3. k -d Tree	9
3. Bereichsbasierte Quadrees	12
3.1. MX Quadtree	12
3.2. PR Quadtree	14
II. Praxis	14
4. Praktikum	14
4.1. Problemstellung	14
4.2. Implementierung	14
4.3. Analyse	14
4.4. Conclusio	14
Abbildungsverzeichnis	15
Literatur	16

Teil I.

Theorie

1. Einführung

Quadtrees stellen eine Datenstruktur dar, welche von Binärbäumen abgeleitet sind. Sie erweitern dessen Prinzip der rekursiven, hierarchischen Aufteilung eines Raumes auf mehrere Dimensionen. Im Allgemeinen beschränkt man sich hier zur Vereinfachung auf zweidimensionale Daten, wobei die Verallgemeinerung auf k -dimensionale Daten trivial ist.

Anstatt wie bei Binärbäumen den Raum bei jedem Schritt in zwei Unterbäume zu teilen, werden bei Quadtrees vier Kinder verwendet, um alle möglichen Richtungen in zwei Dimensionen bezüglich des aktuellen Knoten abzudecken. Der Name „Quadtree“ leitet sich hiervon ab (lat. „quadri-“: „vier-“). Analog dazu bezeichnet man 3-dimensionale Bäume als „Octrees“. Es ist weiters einfach zu sehen, dass k -dimensionale Bäume 2^k Kinder pro Knoten aufweisen.¹

Räumliche Strukturen wie Quadtrees sind generell dann sinnvoll, wenn die Entfernung zweier Punkte für die Anwendung relevant ist. Beispiele hierfür sind unter anderem Repräsentation von Bildern (angrenzende Bereiche besitzen oftmals ähnliche Farben) oder Kollisionserkennung, wo das Interesse sogar auf sich überschneidende Strukturen liegt.

Beim Zugriff auf die so in einem Quadtree gespeicherten Daten unterscheidet man zwischen verschiedenen Anfragetypen:²

Point Query. Mit dieser Anfrage versucht man herauszufinden, welche Daten sich bei einem bestimmten Punkt befinden. Antworten auf diese Anfrage können entweder *NULL* bzw. ein Datenobjekt sein.

Range Query. Hier interessiert man sich für die Knoten, welche innerhalb von Bereichen, die hinsichtlich mehreren Dimensionen ausgedehnt sein können, liegen. Zurückgegeben wird eine möglicherweise leere Liste von Datenobjekten.

¹Vgl. [BF79], Seite 16

²Basierend auf [Knu98], Seite 559 und der Erweiterung durch [Ben75a]

Neighborhood Query. Dieser Anfragetyp fokussiert sich auf Nähebeziehungen. Konkret werden die Knoten gesucht, welche die geringste Entfernung zu einem bestimmten Knoten aufweisen. Der Rückgabewert kann hier eine Liste oder ein einzelnes Datenobjekt sein.

1.1. Funktionsprinzip

Wie eingangs erwähnt wird bei einem Quadtree der Raum in einem Schritt in zwei Dimensionen geteilt. In diesem Kontext bezeichnet man die Abschnitte der Unterteilung als „Quadranten“. Dies kann, wie Abbildung 1 auf Seite 4 demonstriert, direkt an den Koordinaten der Knoten stattfinden, je nach Quadtreotyp werden hier jedoch verschiedene Strategien eingesetzt.

Die einzelnen Knoten eines Baumes beinhalten Verweise auf vier Kindstrukturen, welche diejenigen Daten beinhalten, die sich vollständig in der entsprechenden Richtung des Knotens befinden. Gleichzeitig sind alle Knoten bei einem großen Teil der Quadtreotypen zugleich auch Datenknoten und enthalten somit die zu speichernden Werte. Die Koordinaten der zu speichernden Daten bestimmen demnach die Gestalt der Struktur.

Dieses Prinzip der rekursiven Dekomposition erlaubt das effiziente Suchen in logarithmischer Zeit.³

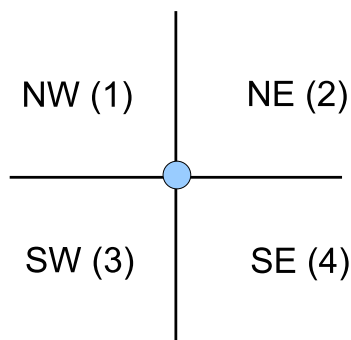


Abbildung 1: Alle Kinder repräsentieren Teilbäume, welche sich vollständig in NW-, NE-, SW- oder SE-Richtung des aktuellen Knoten befinden. Je nach Konvention können die Quadranten auch mittels ihrer Nummerierung referenziert werden.

³Siehe Kapitel 2.1.1 auf Seite 6

2. Punktbasierte Quadrees

2.1. Point Quadtree

Dieser Quadreetyp wurde erstmals 1974 von Finkel und Bentley in [FB74] eingeführt.⁴ Point Quadrees kann man als direkte Verallgemeinerung von binären Suchbäumen auf mehrdimensionale Räume auffassen. Ähnlich zu diesen erfolgt die Aufteilung direkt an den Koordinaten der Knoten, sowie an beiden Dimensionen gleichzeitig.

Abbildung 2 auf Seite 5 zeigt eine Instanz eines Point Quadrees in zwei üblichen Darstellungsvarianten: Baum- und Graphendarstellung. In der Ersteren wird nur die Struktur des Baumes betrachtet, die Lage der Datenknoten ist ausschließlich relativ zueinander sichtbar. Die Zweitere konzentriert sich mehr auf die absolute Position der Punkte in einem Koordinatensystem und zeigt zusätzlich dazu die rekursive Dekompositionsstruktur ein. Die Bezeichnung der Knoten in der Grafik gibt die Reihenfolge der Einfügung an. Bereits hier wird deutlich, dass die Form des Baumes durch diese Reihenfolge determiniert wird.⁵

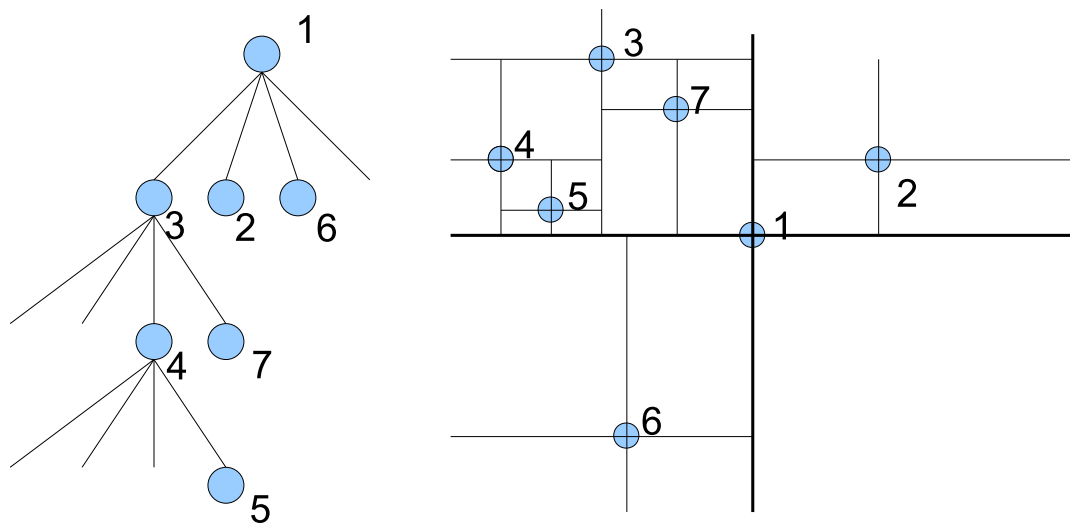


Abbildung 2: Gegenüberstellung: Ein Point Quadtree in Baum- bzw. Graphendarstellung

⁴Vgl. [BKOS00], Seite 318

⁵Vgl. Kapitel 2.1.2 auf Seite 6

2.1.1. Suche

Der Algorithmus zur Suche von Koordinaten (Point Query) ergibt sich unmittelbar aus dem rekursiven Aufbauprinzip des Quadrees.

Die Suche beginnt an der Wurzel. In jedem Schritt werden je ein Vergleich der x - und y -Koordinate des aktuellen Knotens mit dem gesuchten Knoten durchgeführt, wodurch der Quadrant bestimmt wird, in welchen sich der gesuchte Knoten befindet. Ist dieser Quadrant leer, d.h. ist kein Kindknoten bezüglich dieser Richtung am aktuellen Knoten vorhanden, wird die Suche erfolglos abgebrochen; andernfalls wird sie bei diesem Kindknoten fortgesetzt, bis die Koordinaten des gesuchten Knoten mit jenen des aktuellen Knoten übereinstimmen.

Durch die rekursive Aufteilung kann hier im Average Case mit logarithmischer Laufzeit gerechnet werden ($O(\log_4 N)$). Allerdings hängt diese Größe von der Balanzierung des Baumes ab, wofür es beim Point Quadtree keine Garantien gibt. Dies führt im Falle einer Entartung zu einer linearen Laufzeit ($O(n)$).⁶

2.1.2. Einfügen

Das Verfahren zum Einfügen neuer Daten baut direkt auf die Suche auf. In dem Quadranten, in welchem eine normale Suche abbrechen würde, wird das Datum eingefügt, indem an der entsprechenden Stelle, die sich offensichtlich Weise in diesem Quadranten befinden muss, der Datenknoten platziert wird. Der asymptotische Aufwand dieser Operation ist trivialerweise identisch mit jenem der Suche.

Der neue eingefügte Knoten teilt den Raum wiederum an seinen x - bzw. y -Koordinaten und erweitert so die Struktur des Baumes. Es ist schnell ersichtlich, dass hier, genau wie bei einem Binärbaum, Entartungen auftreten können, da sich die Struktur dynamisch mit jedem eingefügten Element herausbildet. Ein besonders Problem stellen hier etwa geordnete Daten da. Werden diese in der gegebenen Reihenfolge eingefügt, degeneriert der Baum zu einer linearen Listen. Sind andererseits beim Aufbau des Baumes bereits alle Daten verfügbar, kann durch folgende Strategie eine optimale Balanzierung erreicht werden: Der Median der sortierten Liste von Daten wird als Wurzel verwendet, die restlichen Elemente werden in 4 Gruppen eingeteilt,

⁶Vgl. [Sam90], Seite 52

welche den Quadranten dieser Wurzel zugeordnet werden. Auf jede dieser Unterteilungen wird der Prozess rekursiv angewendet.⁷

2.1.3. Löschen

Das Entfernen eines Knotens aus einem Quadtree ist im Allgemeinen eine komplexe Operation, da die Knoten alleine die Struktur des Baumes bilden, und diese auch nach dem Löschen weiterhin gewisse Eigenschaften innehaben muss. Bei Binärbäumen stellt dies kein allzu großes Problem dar, da in einem eindimensionalen Raum immer ein geeigneter Ersatz in Form des nächsten Knotens für einen zu entfernenden Knoten zur Verfügung steht.⁸ Im Fall von Quadrees muss eine Substitution hingegen Bedingungen hinsichtlich zweier Dimensionen genügen, wodurch es ein Näheverhältnis wie im eindimensionalen Fall nicht gibt.⁹ Hier ist ein Ersatz nur dann möglich, wenn ein Blattknoten existiert, für den sich im Bereich zwischen den Achsen, welche durch die Koordinaten des Blattknoten bzw. deren des zu entfernenden Knoten verlaufen, kein anderer Knoten befindet.¹⁰

Ursprünglich wurde vorgeschlagen, alle Kinder des zu entfernenden Knoten neu einzufügen, was einen sehr teuren Prozess darstellen kann.¹¹ Sollte kein Knoten das oben genannte Kriterium erfüllen, kann nur durch günstige Wahl des Ersatzknotens die Anzahl der neu einzufügenden Knoten minimiert werden, wie etwa in [Sam80] gezeigt wird.

Eine weitere Optimierung kann dadurch erreicht werden, dass gelöschte Knoten nicht aus dem Baum entfernt, sondern nur als gelöscht markiert werden, um so die Struktur zu erhalten. Die markierten Knoten dürfen bei zukünftigen Suchen nicht mehr zurückgegeben werden. Nach jeder Entfernung erhöht sich hierdurch der Anteil der „toten“ Knoten, was sich negativ auf die Performance aller Operationen auswirkt, und periodische Restrukturierungsmaßnahmen des Baumes erfordert. Durch dieses Verfahren kann folglich der Aufwand einzelner Löschoperationen abgefedert werden, auf Kosten von regelmäßigen Wartungskosten.

⁷Vgl. [Sam90], Seite 52f

⁸Vgl. [Sam80], Seite 2

⁹Vgl. Ebenda

¹⁰Vgl. [Sam80], Seite 3

¹¹Vgl. [FB74]

2.2. Pseudo Quadtree

Der Pseudo Quadtree ist eine Abwandlung des Point Quadtrees, welche Löschen in logarithmischer Zeit sowie einfachere Rebalanzierung bei Deformation ermöglicht. Diese Form des Quadrees wurde 1982 von Overmars und van Leeuwen in [OL82] entwickelt.

Dem Pseudo Quadtree liegt die Analyse zu Grunde, dass die Probleme beim Entfernen von Knoten und bei der Balanzierung bei Point Quadrees daher stammen, dass die Datenpunkte selbst die Struktur des Baumes bilden, und so nur äußerst wenig Flexibilität vorhanden ist. Aus diesem Grund wurde unterscheidet sich der Pseudo Quadtree davon insofern, als dass die Dekomposition des Raum an beliebigen Punkten stattfinden kann.

Konkret funktioniert das Einfügen beim Pseudo Quadtree wie folgt: Der Quadrant eines Datenpunktes wird gesucht. Ist dieser leer, wird der Knoten hier eingefügt, ohne den Raum an dessen Koordinaten weiter zu unterteilen. Befindet sich hier hingegen bereits ein anderer Knoten, muss eine neue Untergliederung eingeführt werden. Hier können beliebige Strategien verwendet werden, um einen Teilungspunkt zu bestimmen, wodurch ein der Anwendung angepasster, gut balanzierter Baum entstehen kann.

Abbildung 3 auf Seite 9 zeigt einen Pseudo Quadtree, welcher dieselben Daten wie der Point Quadtree in Abbildung 2 auf Seite 5 beinhaltet. In diesem Fall wurde der Mittelpunkt von zwei Knoten als Punkt zur Teilung verwendet.

Sollte trotz einer angepassten Strategie ein Ungleichgewicht entstehen, kann der Subbaum, dessen Wurzel der höchste Knoten ist, bei welchem eine unbalanzierte Verteilung seiner Kindknoten festgestellt wird, neu strukturiert werden, indem eine neue Aufteilung der vorhandenen Knoten berechnet wird.¹² Es kann gezeigt werden, dass im allgemeinen Fall eine Teilung möglich ist, in der sich in jedem der 4 Quadranten höchstens ein Drittel der Knoten befinden.¹³

Durch diese Aufteilung des Raumes an beliebigen Punkten befinden sich Daten schließlich nur noch an den Blättern. Dies wiederum ist der optimale Fall bezüglich dem Entfernen von Knoten – ein Knoten ohne Kinder kann jederzeit ohne zusätzlichen Aufwand gelöscht werden. Da das Entfernen eines Knotens immer auch das Suchen desselben erfordert, entsteht somit ein

¹²Vgl. [OL82], Seite 5

¹³Vgl. [OL82], Seite 7

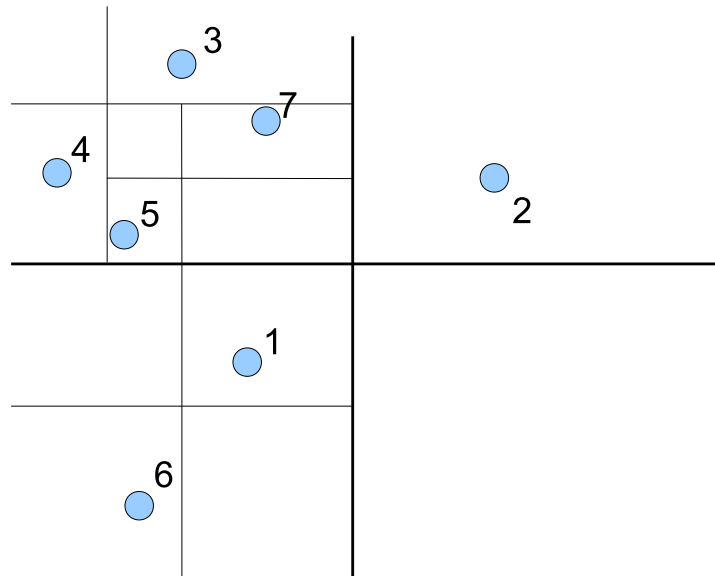


Abbildung 3: Pseudo Quadtree

logarithmischer Aufwand.

2.3. k -d Tree

Diese Variante wurde von Bentley kurz nach dem Point Quadtree 1974 in [Ben75b] entwickelt. Der Name k -d deutet an, dass dieser Baum k -dimensionale Schlüssel verwendet.

Der k -d Tree kann wie der Point Quadtree als Verallgemeinerung des Binärbaums gesehen werden, hier wird hingegen ein etwas anderer Ansatz verfolgt: Anstatt den Raum gleichzeitig in allen Dimensionen zu partitionieren und somit die Notwendigkeit von 2^k Kindern pro Knoten zu erfordern, wird in jedem Schritt nur eine Dimension berücksichtigt und so eine binäre Unterteilung von eigentlich mehrdimensionalen Schlüsseln ermöglicht. Diese Mehrdimensionalität wird bei k -d Trees weiters dadurch ausgedrückt, dass die Dimensionen, bezüglich derer an einer gewissen Tiefe geteilt wird, beliebig alterniert. Im zweidimensionalen Fall könnte hier etwa bei geraden Tiefenebenen an der x -Achse bzw bei ungeraden an der y -Achse geteilt werden, wie etwa Abbildung 4 auf Seite 10 zeigt. Ursprünglich wurde genau dieses Abwechslungsmuster vorgeschlagen,¹⁴ wobei dieses auch dynamisch beliebig gewählt und so an die Daten angepasst werden kann¹⁵. Verwendet man hier einen dynamischen Ansatz, muss jedoch bei jedem Knoten

¹⁴Vgl. [Ben75b], Seite 2

¹⁵Vgl. [Sam90], Seite 66

der Diskriminator mitgespeichert werden.

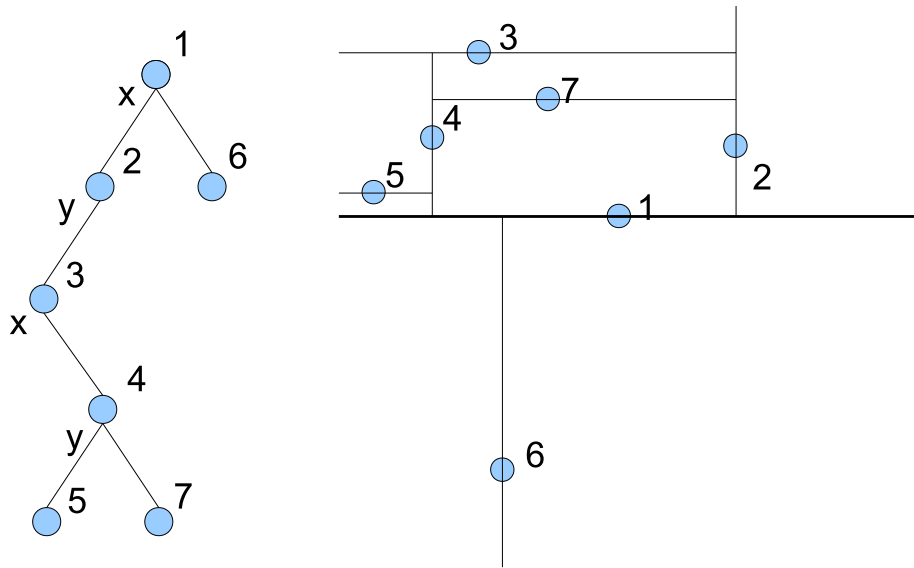


Abbildung 4: Ein k -d Tree: Die Beschriftung links der Unterteilungen gibt die Achse an, bezüglich welcher die Knoten aufgeteilt werden.

Bezüglich den vorhergegangenen Abbildung wurden hier die Koordinaten der Knoten leicht verändert, da in diesem Fall ein äußerst schlecht balanzierter k -d Tree entstehen würde, was der Autor aus Demonstrationszwecken vermeiden möchte.

Dieser Typ bietet gegenüber einem Point Quadtree Vorteile bezüglich des Platzbedarfs: anstatt 2^k sind hier nur 2 Kinder pro Knoten erforderlich. Dies löst das Problem von vielen unnötigen Leereinträgen, welche bei einem Point Quadtree bei einer großen Dimensionsanzahl auftreten können.

Die Operationen Suche und Einfügen ergeben sich direkt aus dem Funktionsprinzip des k -d Trees, beide benötigen offensichtlich eine logarithmische Laufzeit im Average Case¹⁶ (sofern der Baum nicht entartet). Schwieriger ist hingegen das Löschen: Nach dem Entfernen eines Knotens darf die Struktur des k -d Trees nicht verletzt werden, weshalb ein geeigneter Ersatz gefunden werden muss. Für dieses Problem wurde eine Strategie entwickelt, welche auf der Lösung des analogen Problems bei Binärbäumen basiert und zugleich die Mehrdimensionalität im k -d Tree berücksichtigt.¹⁷ Anstatt im Worst Case (bei Löschung der Wurzel) n Neueinfügungen mit dem

¹⁶Vgl. [Ben75b], Seite 1

¹⁷Für eine detaillierte Beschreibung dieses Verfahrens siehe [Ben75b], Seite 7

naiven Ansatz benötigt diese Methode nur $O(n^{1-\frac{1}{k}})$.

Um diesem Problem gänzlich zu entgehen kann ähnlich dem Pseudo Quadtree¹⁸ auch ein Pseudo k -d Tree¹⁹ verwendet werden, in welchem analog zum Pseudo Quadtree die Unterteilung des Raumes nicht an den Koordinaten der Knoten, sondern an beliebigen Punkten vorgenommen wird, und so Daten nur in Blättern gespeichert werden.

3. Bereichsbasierte Quadrees

Wie im Kapitel 2 ausführlich erläutert wurde, erfolgt die räumliche Dekomposition bei punktbasierten Quadrees immer anhand der gegebenen Punkte.²⁰ Dieses Kapitel beschäftigt sich mit Quadrees, deren Form vordergründig a priori durch die Struktur des Raumes determiniert wird, was in etwa mit dem Prinzip von Tries vergleichbar ist.²¹

Weiters wird in diesem Abschnitt nur insofern auf die verschiedenen Operationen eingegangen, als sie sich von punktbasierten Quadrees unterscheiden.

3.1. MX Quadtree

Der MX Quadtree zeichnet durch seine Art der Raumunterteilung aus: Der Bereich, in dem die Datenpunkte liegen, wird unabhängig von den konkreten Daten unterteilt, und zwar rekursiv in vier gleichgroße Quadranten, bis auf der untersten Ebene 1×1 große Felder erreicht werden, welche die Daten beinhalten.²²

Diese Art der Dekomposition setzt folgendes voraus:

- (1) **Konstanter Bereich.** Die Region, in welcher sich Daten befinden, muss a priori bekannt sein und während des gesamten Programmablaufs konstant bleiben.
- (2) **Diskrete Koordinaten.** Die Schlüssel dürfen nur diskrete Werte annehmen, ähnlich den Einträgen einer Matrix, woher sich auch der Name „MX“ ableitet.²³

¹⁸Siehe Kapitel 2.2

¹⁹Vgl. [OL82]

²⁰Bei Point bzw. k -d Trees gilt dies direkt; bei Pseudo Quadrees hingegen besteht die Abhängigkeit vielmehr indirekt: die Aufteilung stellt eine Funktion der Punkte dar.

²¹Vgl. [Sam90], Seite 85

²²Vgl. [SW85], Seite 1f

²³Vgl. [Sam90], Seite 86

- (3) **Fläche des Raumes beträgt $2^n \times 2^n$.** Da der Raum aus praktischen Gründen in 4 gleichgroße Teile partitioniert wird, entsteht eine diese Gesamtgröße. Bei Datenregionen, welche nicht diese Ausdehnung besitzen, können Leereinträge verwendet werden, um diese Größe zu erreichen.

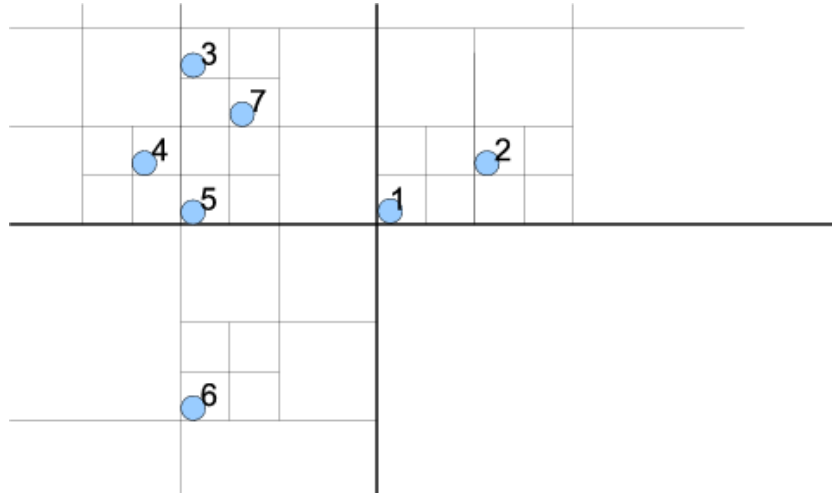


Abbildung 5: MX Quadtree. Diese Instanz ist eher spärlich besetzt.

Abbildung 5 auf Seite 13 zeigt dieselben Daten wie in den vorhergegangenen Grafiken in Form eines MX Quadtrees. Dabei fällt auf, dass die Aufteilung des Raumes hier unabhängig von der Reihenfolge des Einfügens der Knoten ist, was eine Konsequenz aus der Partitionierung auf Basis der Raumstruktur ist. Dies führt auch zu einer konstanten Höhe h des Baumes ohne Bezug zu den konkret vorhandenen Datenblättern, wodurch wiederum nur die begrenzte Anzahl von Knoten $2^h * 2^h$ in einem MX Quadtree gespeichert werden können. Diese Einschränkung ist jedoch durch die obigen Bedingungen gesichert.

Ein klassischer Anwendungsfall dieses Prinzip sind Rastergrafiken, welche ein geeignetes mentales Modell für MX Quadtrees darstellen, da hier jeder Datenpunkt (Pixel) offensichtlich genau 1×1 groß ist und einer Koordinate zugeordnet ist.²⁴ Davon abgeleitet spricht man in diesem Kontext von weißen, schwarzen und grauen Knoten²⁵:

Schwarze Knoten sind entweder Datenblätter oder Knoten mit vier schwarzen Kindern.

²⁴Vgl. [HS79]

²⁵Vgl [Gar82], Seite 2

Graue Knoten stellen Knoten dar, welche mindestens ein graues Kind besitzen oder mindestens je ein schwarzes und ein weißes Kind.

Weißer Knoten sind leere Blätter ohne Daten bzw. Knoten, die weder direkt noch indirekt mittels Kindverweise auf Daten verweisen. Diese werden im Allgemeinen nicht explizit repräsentiert.

Ein konkreter MX Quadtree enthält somit nur schwarze und graue Knoten. Das Nichtrepräsentieren weißer Knoten führt dazu, dass die Struktur des Baumes erst beim Einfügen aufgebaut wird. Dies ist jedoch nur eine Optimierung; es wäre genauso möglich, den vollständigen Baum mit weißen Knoten bzw. Blättern aufzufüllen, welche später grau oder schwarz eingefärbt bzw. von schwarzen Blättern ersetzt werden.

Das Löschen von Knoten im MX Quadtree ist weiters trivial, da im Gegensatz zu Point Quadrees hier die Daten keinen Einfluss auf die Struktur des Baumes haben und nur in Blättern gespeichert werden. Nach dem Entfernen des eigentlichen Datenblattes muss nur die Färbung der Knoten am Pfad von der Wurzel zu diesem Blatt überprüft und gegebenenfalls angepasst werden.

3.2. PR Quadtree

Teil II.

Praxis

4. Praktikum

4.1. Problemstellung

4.2. Implementierung

4.3. Analyse

4.4. Conclusio

Abbildungsverzeichnis

1.	Funktionsprinzip eines Quadtrees	4
2.	Point Quadtree	5
3.	Pseudo Quadtree	9
4.	k -d Tree	10
5.	MX Quadtree	13

Alle in dieser Arbeit verwendeten Bilder wurden vom Autor erstellt.

Literatur

- [Ben75a] BENTLEY, Jon L.: A survey of techniques for fixed radius near neighbor searching. Stanford, CA, USA : Stanford University, 1975. – Forschungsbericht
- [Ben75b] BENTLEY, Jon L.: Multidimensional binary search trees used for associative searching. In: *Commun. ACM* 18 (1975), September, 509–517. <http://dx.doi.org/http://doi.acm.org/10.1145/361002.361007>. – DOI <http://doi.acm.org/10.1145/361002.361007>. – ISSN 0001–0782
- [BF79] BENTLEY, Jon L. ; FRIEDMAN, Jerome H.: Data Structures for Range Searching. In: *ACM Comput. Surv.* 11 (1979), December, 397–409. <http://dx.doi.org/http://doi.acm.org/10.1145/356789.356797>. – DOI <http://doi.acm.org/10.1145/356789.356797>. – ISSN 0360–0300
- [BKOS00] BERG, Mark de ; KREVELD, Marc van ; OVERMARS, Mark ; SCHWARZKOPF, Otfried: *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Second. Springer-Verlag, 2000. – 367 S. <http://www.cs.uu.nl/geobook/>
- [FB74] FINKEL, Raphael A. ; BENTLEY, Jon L.: Quad Trees: A Data Structure for Retrieval on Composite Keys. In: *Acta Inf.* 4 (1974), S. 1–9
- [FGPR91] FLAJOLET, Philippe ; GONNET, Gaston ; PUECH, Claude ; ROBSON, J. M.: The analysis of multidimensional searching in quad-trees. In: *Proceedings of the second annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*. Philadelphia, PA, USA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1991 (SODA '91). – ISBN 0–89791–376–0, 100–109
- [Gar82] GARGANTINI, Irene: An Effective Way to Represent Quadtrees. In: *Commun. ACM* 25 (1982), Nr. 12, S. 905–910
- [HS79] HUNTER, G.M. ; STEIGLITZ, K.: Operations on Images Using Quad Trees. 1 (1979), April, Nr. 2, S. 145–153

- [Knu98] KNUTH, Donald E.: *The Art Of Computer Programming, Volume 3: Sorting and Searching*. Second. Redwood City, CA, USA : Addison Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1998. – ISBN 0–201–89685–0
- [Lue78] LUEKER, George S.: A Data Structure for Orthogonal Range Queries. In: *FOCS*, 1978, S. 28–34
- [OL82] OVERMARS, Mark H. ; LEEUWEN, Jan van: Dynamic Multi-Dimensional Data Structures Based on Quad- and *K-D* Trees. In: *Acta Inf.* 17 (1982), S. 267–285
- [Sam80] SAMET, Hanan: Deletion in Two-Dimensional Quad Trees. In: *Commun. ACM* 23 (1980), Nr. 12, S. 703–710
- [Sam84] SAMET, Hanan: The Quadtree and Related Hierarchical Data Structures. In: *ACM Comput. Surv.* 16 (1984), Nr. 2, S. 187–260
- [Sam90] SAMET, Hanan: *The Design and Analysis of Spatial Data Structures*. Addison-Wesley, 1990
- [SW85] SAMET, Hanan ; WEBBER, Robert E.: Storing a collection of polygons using quadtrees. In: *ACM Trans. Graph.* 4 (1985), July, 182–222. <http://dx.doi.org/http://doi.acm.org/10.1145/282957.282966>. – DOI <http://doi.acm.org/10.1145/282957.282966>. – ISSN 0730–0301